МАТЕМАТИЧКИ ОМНИБУС, 6 (2019), 23 – 45
http://im-pmf.weebly.com/matematicki-omnibus-kniga-6.html

МАТЕМАТИЧКИТЕ РАБОТИЛНИЦИ ВО РАМКИ НА МАНИФЕСТАЦИЈАТА „НОЕМВРИ–МЕСЕЦ НА НАУКАТА“

Весна Целакоска-Јорданова [1]
Ирена Стојковска [1]

1. ПОПУЛАРИЗАЦИЈА НА МАТЕМАТИКАТА

Кога зборуваме за популаризација на математиката најчесто мислиме на разни *натпревари* по математика, на *математички списанија* за ученици од основно и од средно образование (како што се кај нас, на пример, „Нумерус“ и „Сигма“), на организирање *математички школи* (кои се одржуваа пред триесетина години во СР. Македонија), но и на организирање разни предавања за младата популација, како што се на пример, предавањата што се одржуваат во рамки на Семинарот „Математика и примени“ на ПМФ во Скопје. Тие главно се наменети за студенти што студираат математика или сродни науки. Вакви предавања, но за ученици од основно и средно училиште, се одржуваат и како дел од поголем настан, како што е манифестацијата „Ноември – Месец на науката“ во организација на македонските друштва за природни науки и математика и Природно-математичкиот факултет во Скопје.

Во текот на 2017 и 2018 година, во рамките на оваа манифестација двапати по ред организиравме четири математички работилници за ученици од прво до шесто одделение. Сите се водеа под името „Математиката е повеќе од бројки“, а секоја имаше свој поднаслов. Сметавме дека тоа е еден убав и интересен начин да се продлабочат знаењата, но и учениците да се запознаат со некои други области од математиката како што се комбинаториката, криптографијата, веројатноста и топологијата, покрај традиционалните аритметика и геометрија. Бидејќи работевме со многу млада популација (возрасна група од 7 до 12 години), внимававме работилниците да не бидат премногу едноставни, ниту, пак, да содржат софистицирана терминологија или комплицирани математички изрази. Користевме приказни, игри или описи од секојдневието за полесно да им го доловиме на децата возбудливиот, забавниот, па и корисниот дел од математиката, а некогаш и тие самите откриваа некоја примена. Јасно, главната идеја на овие работилници беше работата со децата да биде изведена со умерено темпо и вложениот напор да не се почувствува, па заради тоа бевме спремни да изоставиме нешто што беше претходно планирано.

2. ИСКУСТВА ОД РАБОТИЛНИЦИТЕ СО ЗАЕДНИЧКИ НАСЛОВ „МАТЕМАТИКАТА Е ПОВЕЌЕ ОД БРОЈКИ"

Современите работилници по хемија, биологија и физика се засноваат на уверувањето дека знаењето се појавува во средина во која има активност, разговор и размислување. Ништо поразлични не се ни работилниците по математика. Учесниците на една работилница, независно од тоа на која возраст се тие, ја разгледуваат задачата, дискутираат, истражуваат и конструираат. Потоа, во зависност од насоките што им се дадени, тие ги претставуваат своите одговори или идеи, а наша обврска е да ги поттикнеме да забележат некоја шема, да конструираат некаква фигура и самостојно да изведат заклучок.

Работилниците коишто ние ги практикувавме во текот на овие две години, според материјалот што го обработуваа, можат да се разделат на работилници за збогатување на стекнатите знаења од одредена наставна тема (такви беа работилниците во 2017 година) и работилници за развивање на математичката интуиција (такви беа работилниците во 2018 година).

И во двата случаја, учениците прво се чудеа како може тоа што им го кажуваме или задачата којашто им ја поставуваме да е математика. Тоа особено беше карактеристично за учениците од второ до четврто одделение, кои отворено го поставија тоа прашање. Не им одговоривме директно, туку се трудевме дискусиите за секоја од активностите да бидат кратки и објаснети со зборови што ги разбираат, за децата да не го изгубат интересот. Се трудевме да ги слушаме што зборуваат кога се релаксирани и кога се забавуваат, зашто всушност во тие моменти тие ги изведуваа своите најдобри заклучоци, а ние можевме да сфатиме како размислуваат и како ја „чувствуваат" дадената задача. Многу се радуваа кога самите ќе најдеа решение за некоја за нив тешка задача, многу џагореа и се натпреваруваа кој прв ќе го каже (точниот) одговор.

Ваквите активности можат да им овозможат на учениците (на сите, а не само на оние што ги „бива“ за математика) да сфатат дека математиката содржи многу повеќе отколку обичните аритметички операции или геометриски фигури и тела што се учат од прво одделение.

3. АКТИВНОСТИ

Веќе ги спомнавме четирите работилници коишто одеа под еден заеднички наслов „Математиката е повеќе од бројки“, секоја од која имаше свој наслов: „Танграми“ и „Тајни пораки“ (овие се одржаа на 11 ноември 2017 година) и „Предвидувања со коцки“ и „Игри со Мебиусова лента“ (се одржаа на 10 ноември 2018 година).

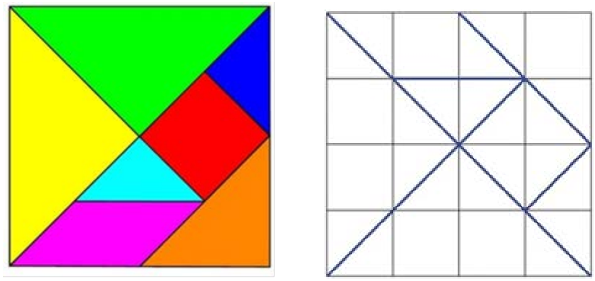
Работата во првите две работилници беше поделена на два дела: работа со ученици од прво до четврто одделение и работа со ученици од петто и шесто одделение, работилниците се одвиваа паралелно по различен редослед кај двете групи и секоја траеше по 30 минути. Во вторите две работилници учениците не беа разделувани според возраста, а двете работилници траеја по 40 минути и се одржаа една по друга.

3.1. ТАНГРАМИ

Танграмите се еден вид сложувалки составени од геометриски 2Д фигури. Во последните години, забележлива е нивната примена во наставата по математика во пониските одделенија, било како дел од наставната програма или преку примена на активностите од проектот „Математика со размислување“, [4]. Токму затоа го одбравме танграмот за една од почетните теми на работилниците, меѓутоа не на сите ученици им беше позната оваа сложувалка. Целта ни беше да им прикажеме на учениците повеќе различни активности кои може да се реализираат со танграмската сложувала и при тоа да се вежбаат различни математички вештини.

Работевме активности со класичниот танграм, кој претставува квадрат исечен на седум делчиња, со точно одреден начин на кој треба да се исечат делчињата (Слика 1), [7].

Активност 1. (Запознавање со танграмот). Првите активности со танграмот беа препознавање и именување на делчињата: 2 големи триаголници, 1 среден триаголник, 2 мали триаголници, 1 квадрат и 1 паралелограм, а потоа учениците требаа да го состават почетниот квадрат од сите делчиња на танграмот.

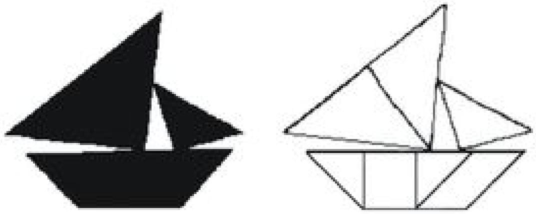


Слика 1. Танграм и мрежа за изработка на танграмската сложувалка.

Целта на овие почетни активности беше запознавање со танграмските делчиња, а преку почетните вежби на нивно разместување требаше да се запознаат со најразличните положби кои секое делче може да ги заземе. При именувањето на делчињата, очекувано беше на помалите ученици да не им е познат поимот „паралелограм“, па тие кои не го знаеја овој поим, паралелограмот го именуваа со „четириаголник“ или „искривен правоаголник“. При составувањето на почетниот квадрат, на помалите ученици им беше понудена мрежата на танграмот како основа за составување на танграмот, но за забележување е желбата на учениците да го состават квадратот без помош на мрежата, дури и без упатства од наставникот. Некои од учениците беа побрзи, некои поспори, но сите го составија квадратот, со што преминавме на следните активности.

Активност 2. (Составување фигури од танграми). На почетокот од оваа група активности ја прочитавме легендата за танграмот за Змејот Ју и седумте парчиња на небото, [8], со што целта ни беше да посочиме дека покрај дадениот почетен квадрат, од делчињата на танграмот може да се составуваат и други фигури. Од друга страна, најверојатно бидејќи расказот како творба многу ретко, или воопшто не се применува на часовите по математика, забележливо беше изненадувањето кај учениците дека на една математичка работилница треба да слушаат некоја приказна.

По легендата за танграмот, го формулиравме основното и единствено правило за составувањето фигури од делчињата на танграмот, а тоа е дека при составување на фигурите ТРЕБА ДА СЕ ИСКОРИСТАТ СИТЕ 7 ДЕЛЧИЊА И НЕ Е ДОЗВОЛЕНО ПРЕКЛОПУВАЊЕ НА ДЕЛЧИЊАТА. Посочивме дека една типична танграмска сложувалка се состои во задавање исполнета слика на фигурата којашто треба да се состави од седумте делчиња на танграмот. Пример на една танграмска сложувалка е даден на Слика 2: исполнета слика (лево) и нејзиното решение (десно).

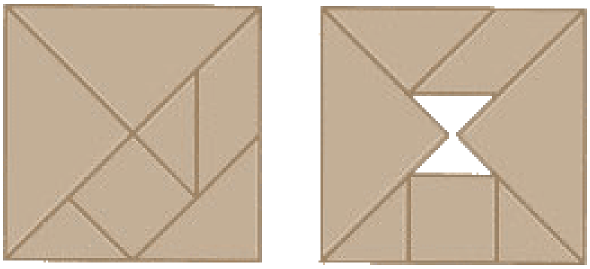


Слика 2. Танграмска сложувалка.

Потоа, учениците составуваа фигури од седумте делчиња на танграмот (разни животни, предмети, луѓе, [7, 11]), при што помалите ученици или на оние кои им одеше потешко и поспоро составувањето на фигурите им се даваа слики со решенијата на сложувалката, а на поголемите ученици им се даваа исполнети слики. Сите ученици беа успешни во составувањето на фигурите кои самите ги избраа да ги составуваат. Забележливи беа потешкотиите при одредувањето на местото на триаголниците, бидејќи нив ги има во три различни големини, а исполнетите слики не беа во ист размер како делчињата на танграмот.

Активност 3. (Танграмски парадокси). По составувањето различни фигури од танграмот, со учениците од погорните одделенија преминавме на анализа на танграмски парадокси - фигури кои се составени од истите седум делчиња на танграмот и кај кои навидум како да недостасува некое делче во едната од нив. Беше анализиран танграмскиот парадокс „Квадрат“ (Слика 3), за кој прво од учениците беше побарано да ги состават двете фигури од сликата користејќи два идентични комплета на танграмски сложувалки.

Предуслов за анализа на танграмските парадокси и откривање на „грешката“ во нив, е добро познавање на димензиите на танграмските делчиња (за чие пресметување потребни се познавања на Питагоровата теорема) или пак споредување на нивните димензии. Во нашиот случај, учениците го објаснија парадоксот со споредување на димензиите, увидоа дека втората фигура, т.е. фигурата каде што „недостасува“ делче во средината не е квадрат затоа што, горната и долната страна се подолги од левата и од десната. Своето тврдење го поткрепија со споредување (со преклопување) на должината на најдолгата страна на најголемиот триаголник и збирот на најдолгата страна на средниот триаголник и пократката страна на паралелограмот.



Слика 3. Танграмски парадокс „Квадрат“.

3.2. ТАЈНИ ПОРАКИ

При изборот на оваа тема се раководевме од желбата на децата да играат игри во кои ќе користат таен јазик, јазик кој им е познат само ним, а не и на некоја друга група деца. Тоа може да биде модификација на говорниот јазик или, пак, да се користат одредени (тајни) симболи за комуникација. Јасно, ако некој ја пресретне пораката, тој ништо нема да разбере.

Учесниците на оваа работилница беа поделени во 2 групи – ученици од I до IV одделение и ученици од V и VI одделение. Пред да ја започнеме правата активност со учениците од I до IV одделение требаше да се објасни поимот тајна порака, зашто го немаа сретнато порано. Потоа следеше објаснување што значи да се скрие, т.е. да се шифрира текст, а потоа и да се открие тој текст. Деца како деца – веднаш најдоа примена: „тајните пораки се добри за симпатии“.

Тешко е да се избере активност за група ученици коишто само што научиле да читаат и да бројат. Од следнава активност се очекуваше на забавен начин, учениците малку да повежбаат броење и да ги разликуваат правците лево, десно, горе долу, а притоа да откријат еден таен цртеж.

Активност 1. (Мистериозни слики) Оваа активност беше наменета за учениците од I и II одделение, која се состоеше во цртање слика зададена во одреден формат (на хартија со квадратчиња), следејќи дадено упатство за движење при дадена почетна точка.

На пример: $\rightarrow 1$ значи: исцртај хоризонтална линија на едно квадратче одлево надесно, $\leftarrow 1$: исцртај хоризонтална линија на едно квадратче оддесно налево, $\searrow 1$: исцртај коса линија (по дијагоналата) на едно квадратче легната одлево надесно, одогора надолу, $\nwarrow 1$: исцртај коса линија (по дијагоналата) на едно квадратче легната одлево надесно, ододола нагоре, $\swarrow 1$: исцртај коса линија (по дијагоналата) на едно квадратче „навалена“ оддесно налево, но одозгора надолу, $\nearrow 1$ значи: исцртај коса линија (по дијагоналата) на едно квадратче „навалена“ оддесно налево, но одоздола нагоре, $\downarrow 1$: исцртај вертикална линија на едно квадратче одозгора надолу, $\uparrow 1$: исцртај вертикална линија на едно квадратче одоздола нагоре.

Поголема бројка крај стрелката, значи дека истата постапка се спроведува на повеќе квадратчиња последователно.

Активноста се состоеше во обид учениците сами да ја откријат (дешифрираат) следнава порака. На оние што не знаеја како да почнат им се помагаше во првите 3 чекори:

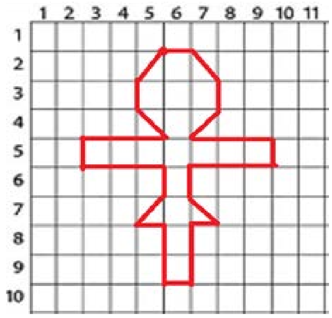
$\rightarrow 1 \quad \searrow 1 \quad \downarrow 1 \quad \swarrow 1 \quad \rightarrow 3 \quad \downarrow 1$

$\leftarrow 3 \quad \downarrow 1 \quad \searrow 1 \quad \leftarrow 1 \quad \downarrow 2 \quad \leftarrow 1$

$\uparrow 2 \quad \leftarrow 1 \quad \nearrow 1 \quad \uparrow 1 \quad \leftarrow 3 \quad \uparrow 1$

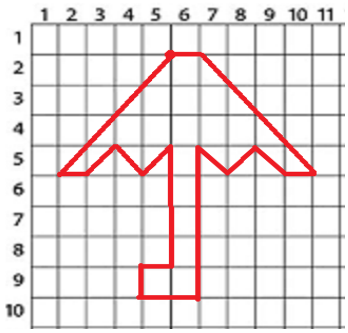
$\rightarrow 3 \quad \nwarrow 1 \quad \uparrow 1 \quad \nearrow 1$

Сликата која одговара на оваа тајна порака е дадена на Слика 4.



Слика 4. Дешифрирана слика од активноста 1.

Следно беше да се реши една обратна задача, т.е. да се најде шифра за Сликата 5. Изработката ги даде очекуваните резултати: учениците лесно се снајдоа и со „дешифрирањето“ и со „шифрирањето“.



Слика 5. Слика предвидена за шифрирање.

Додека учениците од прво и второ одделение цртаа, оние од трето и четврто ја работеа следната активност.

Активност 2 (Шифрирање со правоаголна шема). Испраќачот и примачот можат да се договорат пораките да си ги праќаат во вид на квадратна или правоголна шема. Да се шифрира пораката:

Да се сретнеме на игралиштето по часовите

Бидејќи пораката има 35 букви, таа може да се напише во вид на правоаголна 7×5 или 5×7 шема. Се договорвиме тоа да биде 7×5 шема.

Д	А	С	Е	С	Р	Е
Т	Н	Е	М	Е	Н	А
И	Г	Р	А	Л	И	Ш
Т	Е	Т	О	П	О	Ч
А	С	О	В	И	Т	Е

Вака напишаната порака ќе ја запишеме читајќи ги буквите по колони. Резултатот изгледа вака:

ДТИТААНГЕССЕРТОЕМАОВСЕЛПИРНИОТЕАШЧЕ

За да ја дешифрираме пораката само ја внесуваме по колони во правоаголната шема и ја читаме по редици.

До кои заклучоци дојдоа учениците и кои прашања си ги поставија? Прво, дека примачот треба да ја знае формата на шемата за да може да ја дешифрира. Второ, се запрашаа што ќе се случи ако пораката има, на пример 34 букви? Заеднички заклучивме дека на крајот можеме да ставаме една „лажна“ буква, на пример, О. А што ќе се случи ако имаме 29 букви? Заклучивме дека шемата ќе се пополни комплетно во првите 4 редици со 28 букви и ќе остане само една буква во петтиот ред. Во тој случај, за да не се појавува многу често буквата О – дури 6 пати, се договоривме да се стават буквите А, Б, В, Г, Д, Ѓ, за да се дополни редот. Се разбира, ова правило треба да го знаат и испраќачот и примачот на пораката.

Активност 3. (Цезарова шифра). Оваа активност ја работеа сите. За неа беше потребно да се изработат 2 тркала од картон со различна големина со по 31 буква секое (по 11 степени за буква), види Слика 6. Тркалата за шифрирање и дешифрирање учениците ги добија како дел од материјалите за работилницата.

Слика 6. Тркало за цезарова шифра.

Оваа вежба беше потешка и не сите ученици од I и II одделение ја следеа. Учениците од III до VI одделение полесно се снаоѓаа. Она што требаше да се разбере беше вршењето поместување на помалото тркало одреден фиксен број места (на пример 4, при што почетната буква не ја броиме – тоа е нулто место) во насока на стрелките на часовникот. Така А станува Д, Б станува Ѓ, В станува Е, итн., сè до Х која ќе стане Ш, а Ц, Ч, Џ, Ш ќе бидат А, Б, В, Г, соодветно. За дешифрирање: малото тркало се враќа за 4 места station наназад, т.е. обратно од стрелките на часовникот (не сметајќи ја буквата од која тргнуваме) и ги запишуваме буквите што ги добиваме.

Шифриравме два-три кратки збора за проба, а потоа учениците добија задача секој да одбере еден збор, да го шифрира и да му го предаде на другарчето до себе, а тоа да се обиде да го дешифрира.

Активност 4. (Карданови решетки). Оваа вежба ја работеа учениците од петто и шесто одделение, а за неа се потребни решетки за тајни преписки од картони во разни бои. Во оваа активност беше користена 6×6 решетка, а во материјалите беше дадено упатство за изработка и на 6×6 и на 7×7 решетка. На Слика 7 е даден еден пример на 6×6 решетка.

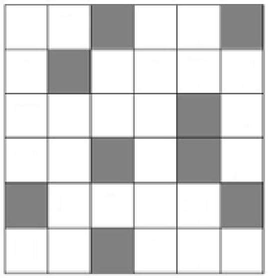
На учениците им беше дадена за шифрирање следната порака:

сакам да пишувам тајни пораки до другарите

Како се решава? Прво, деветте празни клетки (сивите делови) од решетката ги пополнуваме на парчето хартија со првите 9 букви од пораката, онака како што би ги читале. Потоа, решетката ја ротираме за 90 степени *во насока на стрлките на часовникот* и ги пишуваме следните 9 букви. Постапката ја повторуваме сè додека не ги испишеме сите букви. Најдобро е, за пресретнувачот да остане збунет, буквите од решетката да се наредат една по друга. Така имаме:

ДШСИРАПКУГУОВРАААМАКМРДИАТТАИПДЈИОЕН

Оној што ќе ја добие шифрираната порака прво мора да ја има истата решетка како онаа на испраќачот за да може да ја разбере пораката, а второ, мора да ја испише во форма 6×6 (дел по дел). Тоа го прави на следниов начин: својата решетка ја става врз пораката и низ отворите ги чита буквите кои се видливи (читајќи по редици). Потоа ја ротира решетката за 90 степени во насока на стрелките на часовникот и ги чита следните букви, сè додека не ја прочита целата порака.



Слика 7. 6×6 решетка за тајни пораки.

Кои прашања си ги поставија учениците? Увидоа дека оваа порака има точно 36 букви, па се прашаа дали можат да се шифрираат пораки со секаква должина. До одговорот дојдоа сами, со проба.

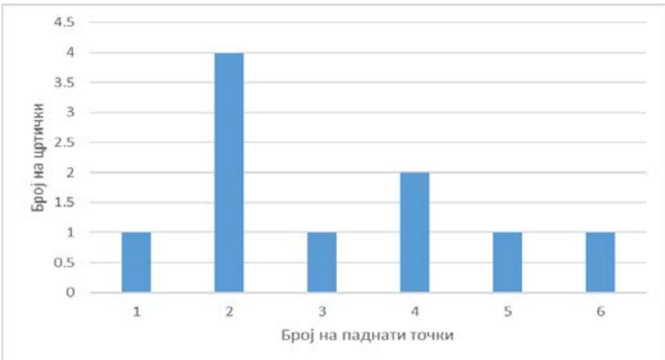
3.3. ПРЕДВИДУВАЊА СО КОЦКИ

Собирањето податоци и нивно прикажување на разни дијаграми (пиктограм, столбест дијаграм, линиски дијаграм и слично), денес е дел од наставната програма по математика почнувајќи од прво одделение. Притоа, анализата на добиените дијаграми се сведува на одредување на податок со најголема честота (мода), а во повисоките одделенија се пресметуваат и медијана и аритметичка средина кај нумеричките податоци. Со оваа тема, ние сакавме да се обидеме да отидеме чекор понатаму и со помош на собраните податоци да извлечеме некој заклучок за случајната природа на разгледуваната појава, а потоа тоа да го примениме во игра на предвидување. За да ја постигнеме таа цел, беше неопходно внимателно водење на учениците чекор по чекор низ целиот процес на експериментирање, правење претпоставки, проверка на претпоставките и донесување заклучоци.

Одбравме да ги анализираме случајните исходи при фрлање на коцка, затоа што коцката за играње им е добро позната на децата и се користи во повеќе друштвени игри. Игрите со коцка се посебно интересни и возбудливи, затоа што се неизвесни до самиот крај на играта, играта зависи од бројот на паднати точки, а тој е неизвесен, односно случаен.

Активност 1. (Фрлање една коцка). Првиот експеримент се состоеше од фрлање една коцка. Целта на експериментот беше да се обидеме да го „опишеме“ правилото за бројот на точки од коцката што паднале по фрлањето. Секој ученик фрлаше една коцка 10 пати, го забележуваше паднатиот број со ставање една цртичка во полето веднаш до соодветниот број во табела, а по завршената серија од 10 фрлања требаше да го пресмета вкупниот број цртички во секој ред, т.е. да пресмета по колку пати се паднал секој од броевите од 1 до 6. Потоа, врз основа на табелата секој требаше да изработи столбест дијаграм на бројот на паднати точки. На Слика 8 е даден пример за еден столбест дијаграм од 10 фрлања на коцка.

Овој дел од активноста сите ученици го сработија одлично, воочливо беше дека не им е непознат ваквиот начин на работа. Тоа што следуваше, правењето претоставки за случајната природа на исходите при фрлањето на една коцка, тестирањето на претпоставките и заклучувањето врз основа на направените тестови, беше малку потежок дел за реализација.

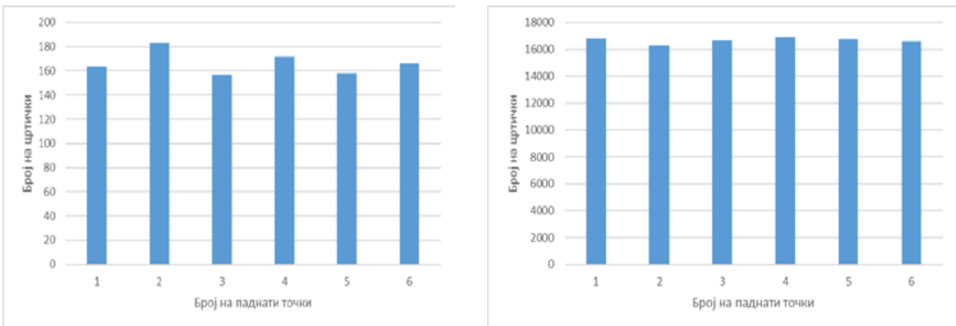


Слика 8. Исходи од 10 фрлања на коцка

Намерата беше со помош на едноставен експеримент, учениците да го поминат патот на процесот на статистичко заклучување и да донесат заклучок за случајна појава која е дел од нивното секојдневие.

По изработувањето на столбестите дијаграми од 10-те фрлања на коцката, преминавме на заедничка анализа на солбестите дијаграми на голем дел од учениците. Учениците воочија дека столбестите дијаграми се различни кај различни ученици, што им помогна да ја увидат случајната природа на бројот на паднати точки на коцката, некои ученици има најмногу шестки, некои двојки, некои има скоро подеднаков број од секој број точки. За утврдување на заклучокот за случајност на бројот на паднати точки, учениците си ги разменија коцките и го повторија експериментот, по што увидоа дека повторно се добија најразлични облици на столбести дијаграми. Единствена заедничка карактеристика на сите дотогаш добиени столбести дијаграми беше бројот на фрлања, 10, што е многу мал број на фрлања за да може да се извлече статистички значаен заклучок од тој експеримент.

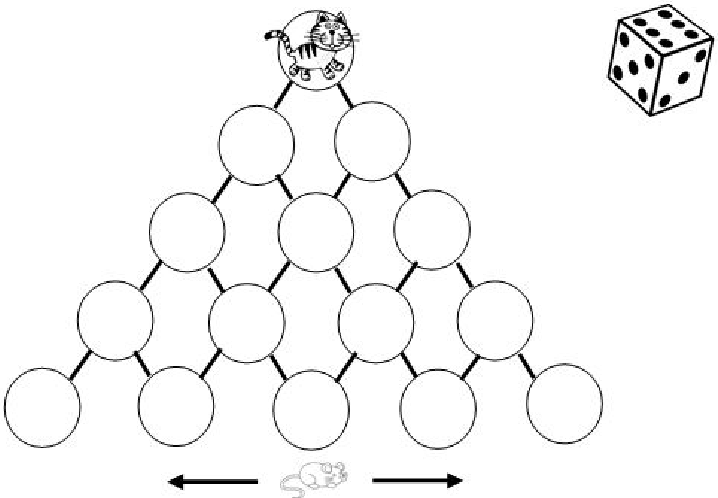
Следно, преминавме на обработка на збирните податоци од половина од ученците. Збирните податоци се однесуваа на 140 фрлања на коцка и требаше со нив да се прикаже дека столпчињата стануваат поизедначени. Меѓутоа случајноста се реализираше на малку „непосакуван“ начин и збирните податоци прикажаа дека најмалку се паднале двојки, а сите останати броеви беа скоро подеднаков број пати паднати и тој број значително, скоро двојно беше поголем од бројот на двојки. Па, заклучокот го насочивме кон констатацијата за изедначување на височините на поголемиот дел од столпчињата, во споредба со најголемиот дел од столбестите дијаграми од 10-те фрлања на коцката.



Слика 9. Исходи од 1000 (лево) и 100000 (десно) фрлања на коцка.

Во услови на ограничено време за изведување на работилниците, не бевме во можност експериментот да го повториме повеќе и поголем број пати, па на учениците им прикажавме столбести дијаграми од 1000 и 100000 случајни фрлања на коцка, изработени со помош на онлајн симулатор на фрлање на коцка за играње (Слика 9). Требаше да се заклучи дека со зголемување на бројот на фрлања, висината на столпчиња та сѐ повеќе се изедначува. До овој заклучок, дека **при поголем број фрлања на коцката секој број од 1 до 6 скоро подеднакво често се паѓа, односно секој број од 1 до 6 има еднакви шанси /изгледи/ можности да се падне**, упеаја самостојно да го согледаат 10% од учениците, а се доби впечаток дека одвај половина од нив го сфатија откако беше објаснет. Најголемиот дел од учениците и во случај на голем број фрлања, го анализираа бројот на паднати точки исклучиво само преку модата, т.е. вредноста со најголема честота и покрај тоа што, кај столбестиот дијаграм за 1000, односно 100000 фрлања на коцка на Слика 9, најголемата честота е за 5%, односно за одвај 3% поголема од следната честота по неа.

Активност 2. (Игра „Мачето и глувчето“). По опишувањето на случајната природа на коцката, на ред беше да ги примениме сознанијата до кои дојдовме во играта на предвидување „Мачето и глувчето“. Целта на оваа игра е да се направи најдобро предвидување на кој излез од лавиринтот (како на Слика 10) ќе излезе мачето, кое на почетокот се наоѓа на полето на врвот, ако правилата се дека тоа се движи само надолу и тоа во лево, ако на фрлената коцка се паднал непарен број (1, 3 или 5) и надолу во десно, ако се паднал парен број (2, 4 или 6).



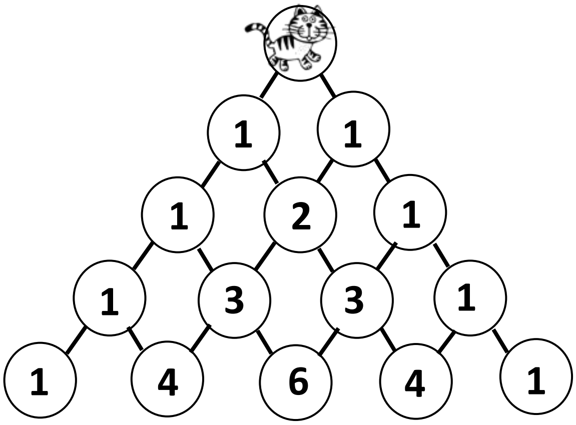
Слика 10. Табла за играње на играта „Мачето и глувчето“.

Секое од децата ја играше играта така што прво требаше да го постави глувчето на некој од петте излези и не смееше да го помрднува до крајот на играта, а потоа 4 пати ја фрлаа коцката и по секое фрлање се придвижуваа според правилото. По завршување на еден круг од играта, во своја табела секое дете забележува цртичка кај излезот на кој излегло мачето од неговиот експеримент. Дополнително, заради зголемување на возбудата од играње на играта, учениците си ги бележеја и „победите“, т.е. успешните предвидувања. Секое дете изигра по пет круга од играта. За време на играњето, секако беше забележлива нивната возбуда, од неизвесноста дали направиле или не добро предвидување и ретко кое од децата предвидуваше дека мачето ќе излезе на некој од крајните излези. Забележавме дека некои од децата на почетокот имаа потешкотии во разбирањето на инструкциите на играта, во делот со начинот на придвижување на мачето, надолу во лево, односно надолу во десно, па беа потребни дополнителни објаснувања.

Правењето на збирна табела од собраните податоци од сите игри за излезот на кој излегло мачето после завршен круг на играта, и нејзино прикажување со столбест дијаграм, треба да покаже дека со зголемувањe на бројот на изиграни кругови на играта столпчињата околу средниот излез сè повеќе се издигнуваат, а налево и надесно нивната висина се намалува симетрично од двете страни. Па, заклучокот ќе биде дека најголеми шанси да направиме добро предвидување е ако глувчето го поставиме на средниот излез. Овој дел од активноста беше поуспешно реализиран, од соодветниот дел во претходната активност со бројот на паднати точки на коцката. Успехот се должи на повторување на веќе поминатата постапка на донесување заклучоци по пат на експериментирање, иако експериментот вториот пат беше од друга природа.

За крај на играта, покрај доаѓање до заклучокот по експериментален пат, се обидовме до истиот заклучок да дојдеме со користење на претходната активност и пребројување на бројот на патиштата до секој излез. Прво воочивме дека при секое фрлање на коцката, мачето има еднакви шанси да се придвижи во лево, односно десно, тоа значи дека секоја патека од лавиринтот од врвот до некој излез има еднакви шанси да биде поминатa. Па, шансите мачето да се појави на некој излез ќе зависи од бројот на патеки кои водат кон тој излез. На Слика 11 е прикажан бројот на патеки кои водат од врвот до соодветната раскрсница. Пребројувањето го демонстриравме по нивоа. А поголем дел од учениците самостојно заклучија дека бројот на патеки за да се дојде до некоја раскрсница X е збир од бројот на патеки потребни да се дојде до раскрсницата од претходното ниво лево од X и бројот на патеки потребни да се дојде до раскрсницата од претходното ниво десно од X. Според Слика 11, најмногу патеки водат кон средниот излез, па затоа и најголеми се шансите мачето да излезе на тој излез. Забележавме дека вака добиените бројки, како на Слика 11, се првите неколку редици од Паскаловиот триаголник.

Како активност за дома беше оставено да се доцртаат уште три реда на лавиринтот, и во тој случај да се направи предвидување на кој излез, од осумте излеза, ќе излезе мачето, [9].

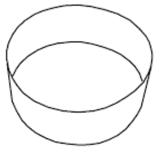


Слика 11. Бројот на патишта кои водат до секоја од раскрсниците и излезите на лавиринтот во игарата „Мачето и глувчето“.

3.4. ИГРИ СО МЕБИУСОВА ЛЕНТА

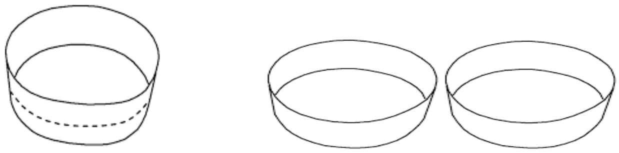
Зошто го одбравме овој проект? Мебиусовата лента (или „магична“ лента, како што ја нарекуваа децата) е доста едноставна за изработка, а е слична на цилиндрична обвивка за која веќе имаат нешто учено. Целата на вежбата, покрај самата изработка, е да се види дека една цилиндрична обвивка и една „магична“ лента имаат различни својства: едната има две страни а другата само една (чудно е, ама утврдивме дека е така). Потоа ја сечевме на два дела по должина и добивме две Мебиусови ленти, а на крај, ја сечевме по должина на 1/3 од ширината и добивме нешто чудно...

Активност 1. (Цилиндрична обвивка.) Од хартиена лента многу лесно може да се направи една цилиндрична обвивка кога едниот крај ќе се спои со другиот (со лепак или со селотејп).



Слика 12. Цилиндрична обвивка, [2].

Ако земеме ножички и ја пресечеме цилиндричната површина на два дела, ќе добиеме две цилиндрични површини одделени една од друга.

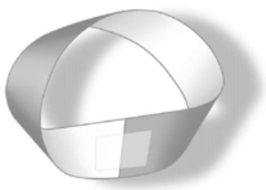


Слика 13. Цилиндрична обвивка пресечена на два дела, [2].

Секое наредно сечење повторно дава одделни цилиндрични обвивки.

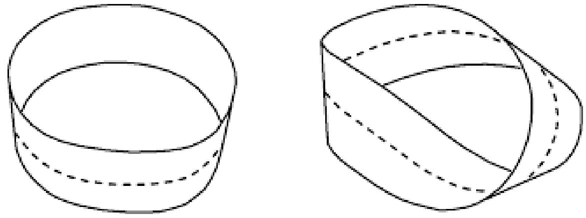
Активност 2. (Мебиусова лента.) Тоа не се случува кај Мебиусовата лента. Но, што е тоа Мебиусова лента? Тоа е лента којашто има само една страна (за разлика од цилиндричната површина којашто има две страни). Изгледа како на сликата 14, а се добива така што едниот крај на лентата се превртува и се спојува со другиот.

Мебиусовата лента има неколку интересни својства. На пример, линија повлечена по средината на лентата (по нејзината должина) од една почетна точка, ќе помине преку спојот и ќе дојде до таа точка, но од другата страна. (Тоа убаво може да се види ако се повлече таква линија со фломастер на Мебиусова лента направена од обична хартија.)



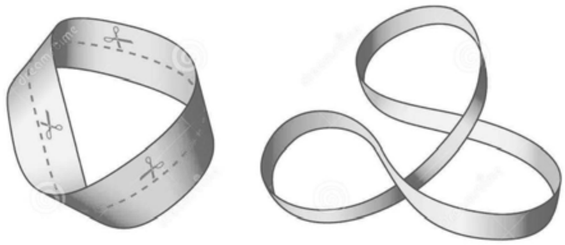
Слика 14. Изработка на Мебиусова лента.

Ако продолжиме да ја повлекуваме линијата, ќе дојдеме до почетната точка, но ќе изминеме двапати подолг пат. Тоа не е случај кај цилиндричната обвивка. Линија повлечена по средината на лентата со почеток во една точка, повторно завршува во истата таа точка.



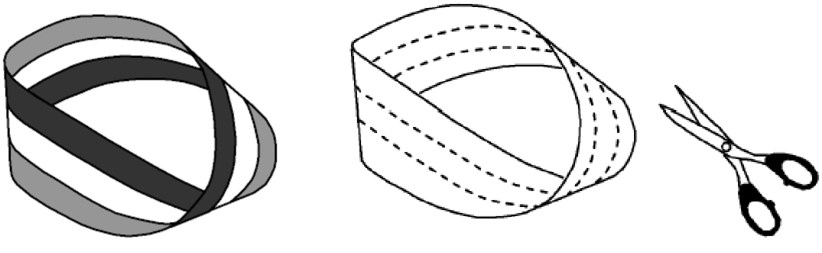
Слика 15. Споредба на цилиндрична обвивка и Мебиусова лента, [2].

Да пресечеме една Мебиусова лента на половина (по должина) како што направивме со цилиндричната површина. Што ќе добиеме? Ќе добиеме лента којашто е двојно поголема и двојно завртена.



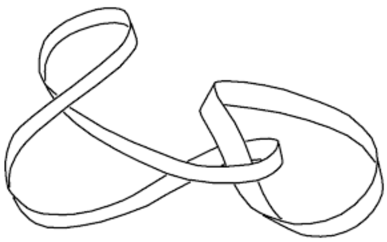
Слика 16. Сечење на Мебиусова лента по средина.

Потоа искористивме една лента на риги за да ја поделиме Мебиусовата лента по должината на 1/3 од нејзината ширина.



Слика 17. Сечење по должината на лентата на 1/3 од ширината, [2].

Во тој случај се формираат две ленти: едната е помала Мебиусова лента, а другата е подолга лента само двапати завртена (како на сликата 18).



Слика 18. Резултатот од сечењето, [2].

Оваа активност предизвика големо внимание. Учениците нагаѓаа дека пак ќе се добие исто како во претходниот случај (многу долга лента). Но, не го добија тоа, па се збунија, дали добро сечеле и го поставуваа прашањето: дали може (на веќе пресечената лента) да сечат од другата страна (т.е. другата третинка од лентата)? Се разбира, им одговоривме – пробајте! Одеднаш некои од нив рекоа: па го нема другиот дел! Значи тој (подолгиот) дел од лентата се доби само од третинката и од едната и од другата страна, а некои забележаа и дека е двојно подолга од почетната лента. Не збележаа дека подолгата лента е двојно превртена, а помалата дека е Мебиусова.

4. МАТЕМАТИЧКИ ПРЕДИЗВИЦИ

Секоја од обработуваните теми на работилниците „Математиката е повеќе од бројки“, покрај основните активности презентирани погоре, содржеше и понапредни активности, за кои се потребни соодветни математички знаења или способности за комбинаторно размислување, за обопштување или повисок степен во развојот на математичката интуиција. Но, од друга страна, токму ваквиот тип активности помагаат во развивањето на спомнатите вештини. Некои од тие активности беа реализирани на работилниците, а некои беа оставени за дома, за размисување, како дел од материјалите кои учениците ги добија за време на работилниците, [8, 9].

А. Танграми. Со танграмот може да се решаваат и *комбинаторни проблеми*, како на пример да се состави квадрат само со две делчиња или со точно три делчиња или со точно 4, 5 или 6 делчиња од танграмот и да се дискутира бројот на начини на кои може да се стори тоа. За време на работилницата успешно беа реализирани првите две барања – квадрат од 2, односно 3 делчиња, при што учениците ги понудија и двете решенија за квадрат од две делчиња, кој може да се состави од двата најмали триаголника или од двата најголеми триаголника. Останатите случаи беа оставени за дома.

При составувањето на квадратите од 2, односно 3 делчиња, учениците сами воочија дека „средниот квадрат е еднаков на два мали квадрати“, така преминавме на активности со танграмот со кои се испитуваат *плоштините на некои геометриски фигури*. Од учениците беше по--барано да истражат од колку мали триаголници се состои секое од останатите делчиња на танграмот, користејќи повеќе од еден комплет танграми, поставувајќи ги делчињата едни над други, а потоа требаа да пополнат табела со добиените вредности (види Табела 1). Забележавме дека квадратното делче, паралелограмот и средниот триаголник, сите тие содржат во себе два мали триаголника, а имаат различни облици.

фигура	број на мали триаголници
1 мал триаголник	**1**
1 среден триаголник	**2**
1 голем триаголник	**4**
1 квадратно делче	**2**
1 паралелограм	**2**
почетниот голем квадрат	**2·1+2+2·4+2+2 = 16**

Табела 1.

Пополнетата Табела 1 беше искористена за наредните активности со поголемите ученици за наоѓање на *дел од цело и проценти*. Имено, од учениците беше побарано да одредат кој дел, односно кој процент од плоштината на почетниот голем квадрат е плоштина на: еден мал триаголник, средниот триаголник, еден голем триаголник, квадратното делче, паралелограмот. На пример, големиот триаголник содржи 4 мали триаголници, а почетниот квадрат соджи 16 мали триаголници, што значи дека плоштината на големиот триаголник е 4/16 т.е. 1/4 од плоштината на почетниот голем квадрат, односно 25% од плоштината на почетниот голем квадрат.

Б. Тајни пораки. Како домашна работа за учениците остана да се изработи 7×7 Карданова решетка, чијашто конструкција беше објаснета во материјалите од работилницата, [8], и да ја применат на конкретна порака.

В. Предвидувања со коцки. Материјалите од работилницата кои ги добија учениците, вклучуваа и активности слични на оние кои беа реализирани, и кои намерата ни беше учениците да ги реализираат самостојно дома, [9]. Дел од тие активности е и предвидувањето на збирот на паднатите точки при *фрлање на две коцки*. Детален опис на овој експеримент и начинот на доаѓање до заклучокот има во [6].

Испитувањето и опишувањето на случајноста може да се примени и при креирање на *фер игра со два играчи*, игра во која секој од играчите би имал подеднакви шанси да победи. За потребите на играта „Мачето и глувчето“ увидовме дека при фрлање на коцка, шансите да се падне парен број се подеднакви со шансите да се падне непарен број. Тогаш, фер играта би се состоела од наизменично фрлање на коцка и независно кој ја фрла коцката, ако на коцката се падне непарен број, првиот играч добива поен, а ако се падне парен број, тогаш вториот играч добива поен. По однапред договорен број на фрлања на коцката, победник е играчот со најмногу поени. На сличен начин може да се креира и фер игра при фрлање на две или повеќе коцки.

Г. Игри со Мебиусова лента. Како предизвик може да се даде следнава задача: дали е Мебиусова лентата што се добива со двојно завртување на лентата наместо со еднаш? Што ќе се случи при сечењето на половина, на лента којашто е добиена со двојно завртување? Што ќе се случи ако ги пресечеме на половина по должина две цилиндрични обвивки, а што со две Мебиусови ленти, залепени една со друга под агол од 90^{o}? (Лепењето мора да биде од двете страни ако се користи селотејп.)

5. ЗАКЛУЧОК

Сметаме дека интересните аспекти на математиката треба да им бидат достапни на сите, а не само на оние ученици коишто ја сакаат математиката. Многу е важно и оние ученици коишто се или незаинтерсирани или мрзеливи, да се вклучат во активностите и да ја почувствуваат возбудата од „новото откритие“. Се надеваме дека овие идеи ќе предизвикаат барем малку интерес и ќе претставуваат инспирација за наставниците за организирање на барем една работилница во врска со наставниот материјал во текот на една учебна година.

ЛИТЕРАТУРА

[1] F. M. Brueckler, *The Maximum Principle in the Popularization of Mathematics: Maximum Effect with Minimum Cost*, во *Raising Public Awareness of Mathematics*, (eds) E. Behrends, N. Crato, J. F. Rodrigues, Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2012, 200 – 214.

[2] Yutaka Nishiyama, *Playing with Möbius Strips*, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume 78, No. 8 2012, 1121–1130.

[3] N. Rozhkovskaya, *Math Circles for Elementary School Students*, MSRI, AMS, 2014.

[4] Г. Анастасова, С. Стојанова, Б. Тонева Јаковски, *Примена на математика со размислување во почетните одделенија*, Математички омнибус 4 (2018), 9 – 18.

[5] В. Димитрова, В. Целакоска-Јорданова, *Што е криптографија?*, Сигма 72 (4), 2005/2006, 6 – 10.

[6] М. Илиевска, Г. Николовска, И. Стојковска, *Стратегии за предвидувања во наставата по математика*, Математички омнибус 2 (2017), 125 – 145.

[7] И. Стојковска, *Танграми: Поглед кон математиката на еден креативен начин*, Портал ПОИМ на Институтот за математика, ПМФ, Скопје, 11 јануари 2015, http://poim-pmf.weebly.com/tangrami.html

[8] И. Стојковска, В. Целакоска-Јорданова, *Работилница по математика „Математиката е повеќе од бројки“*, работен материјал за ученици од I до VI одделение, „Ноември - Месец на науката 2017“, ПМФ, Скопје, 2017.

[9] И. Стојковска, В. Целакоска-Јорданова, *Работилница по математика „Математиката е повеќе од бројки“*, работен материјал за ученици од I до VI одделение, „Ноември - Месец на науката 2018“, ПМФ, Скопје, 2018.

[10] В. Целакоска-Јорданова, Е. Стевковска, М. Божиновиќ, М. Јовановиќ, *Карданови решетки*, Сигма 102 (2), 2013/2014, 6 – 10.

[11] *Tangram Puzzle Sheets and Solutions, Aunt Annie's Crafts,* http://www.auntannie.com/Geometric/Tangrams/PuzzleSheets/

[1] Универизтет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје
Природно-математички факултет,
Архимедова 3, 1000 Скопје, Р. Македонија
e-mail: irena.stojkovska@gmail.com, celakoska@gmail.com

Примен: 17.12.2018
Поправен: 20.01.2019
Одобрен: 21.01.2019
Објавен на интернет: 04.02.2019