

# Динамика на кооперација на генерализирана реципрочност во комплексни мрежи

Виктор Стојкоски

8 јули 2020 год.

## Абстракт

Неодамнешните истражувања сугерираат дека појавата на кооперација може да се објасни со генерализирана реципрочност, механизам за однесување базиран на принципот „помогни секому, ако некој ти помогнал“. Во комплексните системи, динамиката на кооперација е строго одредена од мрежната структура која ги диктира односите меѓу соседите. Сепак, и покрај мноштвото од нови истражувања, улогата на мрежната структура во промовирање на кооперација преку генерализирана реципрочност е сèште неоткриена. Со примена на основни техники од теоријата на динамички системи, овој докторски труд допринесува кон наодите за динамиката на генерализирана реципрочност во комплексни мрежи. Преку теоретски преглед на динамиката на кооперација на генерализираната реципрочност во три различни структури на интеракција: 1) општествени дилеми, 2) повеќедимензионални мрежи и 3) флукуирачки средини, воведена е општа рамка за анализирање на условите неопходни за кооперацијата да опстои. Резултатите покажуваат дека кооперацијата преку генерализирана реципрочност секогаш се појавува како единствен атрактор во кој се максимизира целокупното ниво на кооперација, додека истовремено се спречува и експлоатацијата на учесниците. Ефектот на мрежната структура е опфатен со мерка за локална централност, што уникатно ја квантификува склоноста за кооперација преку диктирање на степенот на кооперација што е прикажан на микроскопско и макроскопско ниво. Како последица на ова, имплементацијата на нашите резултати може да го надмине објаснувањето на еволуцијата на кооперација, и истите лесно да се употребат во други научни дисциплини. Поточно, тие можат директно да се применат во дисциплини кои се занимаваат со развој на вештачки системи способни за соодветно имитирање на реалноста, како што е засиленото учење.

# Содржина

1	Вовед	3
2	Динамика на кооперација на генерализирана реципрочност во општествени дилеми	6
2.1	Структура на интеракција	6
2.2	Општествена дилема	7
2.3	Механизам на однесување	8
2.4	Динамика на кооперација	8
2.5	Фазни премини	9
2.6	Пример	10
2.6.1	Јавни добра и донации	10
2.6.2	Особини	11
2.7	Дискусија	13
3	Улогата на повеќеслојната мрежна структура во кооперација базирана на генерализирана реципрочност	17
3.1	Вовед	17
3.2	Модел	18
3.2.1	Мрежни интеракции	18
3.2.2	Детерминистичка апроксимација	19
3.3	Резултати	19
3.4	Аналитички особини на моделот	19
3.5	Улогата на хетерогени параметри	21
3.6	Улогата на правило за одлука за избирање на димензија	23
3.7	Заклучок	26
4	Појава на кооперација во флукуирачки мрежни средини	27
4.1	Вовед	27
4.2	Математички модел	27
4.3	Резултати	30
4.3.1	Просечна временска стапка на раст	30
4.3.2	Рамнотежни својства	32
4.3.3	Експерименти	32
4.4	Дискусија	34
4.5	Генерализирана реципрочност во флукуирачки средини	35
5	Заклучок	36
6	Прилог: Трудови објавени за време на докторатот	37
6.1	Трудови кои се опфатени во докторскиот труд	37
6.2	Трудови кои не се опфатени во докторскиот труд	40
7	Литература	45

# 1 Вовед

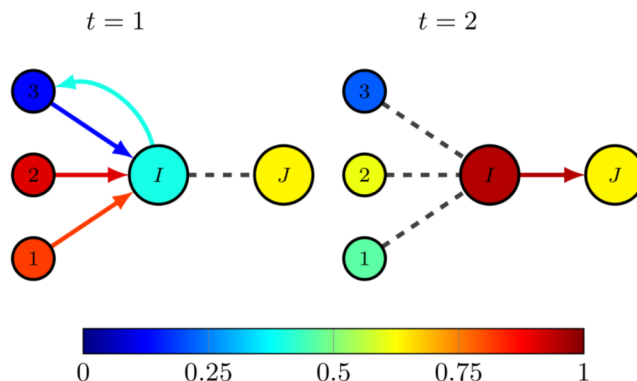
Проблем на кооперација настанува во ситуации кога индивидуалните одлуки се во спротивност со функцијата на колективот. Уште од објавувањето на епохалното дело на Дарвин [1], очигледниот парадокс на појава на кооперација во општествените односи е во фокусот на истражувачката заедница. Увидот дека сите големи транзиции во биолошката еволуција, од прости кон сложени структури, се карактеризираат со одреден степен на кооперација и жртва [2], доведе до големи напредоци во оваа област. Сепак, и покрај истражувањата кои траат со децении, парадигмата за кооперација сè уште се смета за едно од најпредизвикувачките прашања со кои се соочуваат научниците [3].

Од особена вредност за заедницата на комплексни мрежи се истражувањата за ситуации каде една единка има повторени средби со, ненужно, иста група или структури на интеракција. Во овој контекст, концептите на директна реципрочност (“помагај на оние кои ти помогнале порано”) [4] и индиректна реципрочност (“помогни на оние кои помагаат”) [5] успеале да обезбедат решенија за појавата на кооперација во суштински различни видови на општествени дилеми. Иако првично биле структурирани за средби кои наликуваат на Дилемата на затвореникот [6], двата механизми се проширени за да сметаат на широка класа на структури на интеракција кои се присутни во природните системи (повеќе детали може да се видат во референци [7–13]).

Додека заклучоците изведени од овие два концепти се од значајна теоретска вредност, степенот до кој директната и индиректната реципрочност се способни да ја објаснат кооперацијата во реалните системи од неодамна е ставен во прашање [14, 15]. Причината за ова е дека примената на правилата е скапа (во однос на меморија и обработка). Односно, тие бараат високи когнитивни способности, како што е препознавање на групата со која поединецот е ангажиран во реципрочни механизми или знаење за резултатите од претходните интеракции. Ова, на пример, го ограничува појавувањето на кооперација во системите каде што постои случајност во интеракциите и поединците не поседуваат когнитивна моќ да распознаат со кого контактираат [15].

За справување со овој проблем е развиен концептот на генерализирана реципрочност. Формално генерализираната реципрочност е дефинирана како правилото “помагај секому, ако некој ти помогнал”. Посебната карактеристика која ја фаворизира генерализираната реципрочност во однос на останатите правила е дека основниот механизам зад нејзината појава може да се објасни со промените на физиолошката состојба на поединецот [16–18]. Со други зборови, одлуката на една единка дали да кооперира или не е базирана на внатрешна кооперативна состојба која го доловува нејзиното минато искуство. За поедноставно објаснување на процесот на генерализирана реципрочност, на Слика 1 е дадена интуитивна илустрација.

Овој едноставен механизам за однесување може да се примени на широк спектар од динамички структури на интеракција. Поточно, внатрешната состојба може да имитира агрегиран фитнес во биолошки системи, богатство или благосостојба во општества на луѓе или животни, или ниво на енергија во вештачки (на пример, комуникациски) системи. Овие набљудувања се надополнети со убедливи емпириски докази што сугерираат дека механизмот на генерализирана реципрочност може навистина да се појави во природните системи со тек на еволуцијата [16, 17, 19–21].



Слика 1: Концептот на генерализирана реципрочност објаснет преку (случајни) интеракции на група од 5 индивидуи. Со полни насочени линии се означени активни врски, додека со испрекинати линии се неактивните врски во дадената рунда од играта. Во секоја рунда, индивидуите се обоени според нивната склоност кон кооперација опишана преку внатрешната состојба. Како што е покажано, во рунда  $t = 1$  индивидуата  $I$  разменува кооперативни искуства со 1, 2 и 3. Ова резултира со промени во внатрешните состојби помеѓу индивидуите кои имаат интеракција и нивото на кооперација кое е опсервирано во  $t = 2$ .

Сепак, развојот на теоретски модели за опишување на процесот позади генерализирана реципрочност заостанува и досега се разгледувани само парни линеарни интеракции помеѓу индивидуи [22, 23]. Други чести сценарија кои ја опишуваат реалноста преку групни интеракции [24], присуство на нелинеарни добивки [8, 9], дури и измешани комбинации од нив [25], се неистражени.

Овој докторски труд допринесува кон истражувања за улогата на генерализирана реципрочност преку теоретски преглед на динамиката на кооперација во три различни структури на интеракција. Првата структура е опишана преку концептот на општествена дилема која едноставно е дадена со ситуациите во кои себичноста на една единка доведува до нејзин профит на сметка на останатите, освен ако целата популација не се однесува на ист начин. Ова овозможува да воведеме општ модел за анализа на линеарни добивки во мноштво од различни мрежни структури. Втората структура, се надополнува на првата и го проширува моделот на генерализирана реципрочност за анализа на повеќе-димензионални структури. Овие структури овозможуваат да се опфатат хетерогени особини во начините на кои се одвиваат интеракциите помеѓу единките, карактеристика што е честа во природата меѓутоа занемарена во првиот пристап. Последната структура го разгледува случајот кога единките се среќаваат во флукуирачки средини. Флукуирачките средини се карактеризираат со мултипликативен раст на акумулираната добивка на една единка, и како такви имаат нетривијален ефект врз динамиката на кооперација.

Преку аналитичко и нумеричко оценување на моделот на различни видови на комплексни мрежи, меѓу кои случајниот регуларен граф [26], Ердош-Рени графот [27], Ватс-Строгац графот на мал свет [28] и Барабаши-Алберт степенскиот граф [29], покажуваме дека во секоја интеракциска структура се појавува мрежен индекс кој го определува однесувањето на единките. Резултатите откриваат дека, кооперацијата преку генера-

лизирана реципрочност се појавува како единствениот атрактор кој го максимизира глобалното ниво на кооперација, притоа штитејќи ја секоја индивидуа од експлоатација од страна на околината. Директна паралела на развиениот модел може да се создаде со модерните техники за засилено учење базирани на истражување на нови одлуки [30]. Ова овозможува, покрај објаснувањето за појавата на кооперација, резултатите да се применат и за развивање на вештачка интелигенција која е способна да ги имитира природните системи.

Докторскиот труд е структуриран на следниот начин. Глава 2 дава осврт на динамиката на кооперација на генерализирана реципрочност во општествени дилеми. Поточно, во главата е дадена дефиниција на општествена дилема во мрежи каде одлуката за однесување се базира на внатрешна состојба. Дефиницијата е искористена за откривање на праговите кои ја детерминираат динамиката на генерализирана реципрочност во различни видови на мрежи. Во Глава 3 дефиницијата за општествена дилема е дополнета за да ги опфати и интеракциите што се одвиваат во повеќе димензии, односно мултиплекс мрежи. Глава 4 дава опис за улогата на мрежната структура во присуството на флукуирачка средина, односно ситуации во кои временската еволуција е зависна од релативното движење. Последната глава ги дава заклучоците што произлегуваат од докторскиот труд, и дава насока за нивна примена.

## 2 Динамика на кооперација на генерализирана реципрочност во општествени дилеми

Мотивирани од раните откритија на Мотро [31] и увидите објаснети во [11, 12, 32], во оваа глава е развиен модел за проучување на динамиката на кооперација на генерализирана реципрочност во општествени дилеми. Под општествена дилема подразбираме ситуации во кои една единка профитира од себичност, освен ако целата популација не ја избере себичната алтернатива. Во тој случај сите губат. Моделот ја истакнува улогата на комплексните мрежи и ги опфаќа стандардно проучуваните модели на “мешани општества” и “регуларна решетка” како посебни случаи.

### 2.1 Структура на интеракција

Формално, разгледуваме класа на динамички модели кои се состојат од конечна популација  $\mathcal{N}$  од  $N$  единки. Моделите се одвиваат во дискретно време и ја објаснуваат еволуцијата на  $N$  димензионалниот вектор  $\mathbf{p}(t) \in [0, 1]^N$ , каде  $i$ -тиот член,  $\mathbf{p}_i(t)$ , ја опишува внатрешната состојба на единката  $i$  во рунда  $t$ . Во оваа репрезентација индивидуалната добивка генерирана во секој чекор е функција од векторот на состојбите на популацијата,

$$y_{i,\mathcal{G}}(t) = b_{i,\mathcal{G}}(\mathbf{p}(t)) - c_{i,\mathcal{G}}(\mathbf{p}_i(t)), \quad (1)$$

каде  $b_{i,\mathcal{G}}$  и  $c_{i,\mathcal{G}}$  се респективно функциите на бенефит и трошок на единката  $i$ , двете параметризирани со поврзан граф  $\mathcal{G}(\mathcal{N}, \mathcal{E})$ . Графот е дефиниран со множество на јазли  $\mathcal{N}$ , кое се совпаѓа со множество на индивидуи, и множество на врски  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$  кои ги детерминираат парните врски помеѓу индивидуите.

Генералноста на моделот е опфатена во слободата на изборот на функциите на бенефит и трошок. Единственото ограничување кое го поставуваме е тоа што претпоставуваме дека двете функции се доволно глатки и се придржуваат на неколку едноставни претпоставки кои ја дефинираат општествената дилема. Имено, претпоставуваме дека функцијата на бенефит е неопаѓачка во однос на сите координатни проекции освен  $i$ -тата. Дополнително, функцијата мора да е стриктно растечка во однос на некои од проекциите. Ова значи дека  $i$  добива со зголемување на желбата за кооперација на одредена група на единки. Оваа група ја нарекуваме  $l$ -соседството на  $i$  и ја означуваме со  $\mathcal{N}_i^{(l)}$ . Функцијата на трошок ја ограничуваме да биде растечка функција од  $\mathbf{p}_i(t)$  за да го опфати фактот дека единките плаќаат поголем трошок за зголемувањето на бенефитите на останатите. За крај, двете функции треба да го задоволат равенството  $b_{i,\mathcal{G}}(\mathbf{0}) = c_{i,\mathcal{G}}(\mathbf{0}) = 0$  што ни вели дека ништо не се случува во системот кога никој не кооперира.

Во една можна физичка интерпретација, моделот (1) ја опишува добивката од непрекинатата игра со детерминистички (фиксирани) интеракции помеѓу единките во секој чекор и каде секоја единка има избор од бесконечен број на стратегии. Ова, на пример, е случајот со непрекинатата итеративна дилема на затвореник. Во друга интерпретација, (1) овозможува детерминистичка апроксимација за стабилната состојба на стохастичките интеракции помеѓу единките, со случајни добивки генерирани преку

индивидуалните внатрешни состојби. Во овој контекст,  $b_{i,\mathcal{G}}$  и  $c_{i,\mathcal{G}}$  се афини мапи во однос на случајните променливи. Втората интерпретација е поблиску до дефиницијата на генерализирана реципрочност, во смисла на тоа што ги опишува добивките како функција од случајни интеракции со нивната околина, без експлицитно да ги запамтува односите. Поради тоа, во остатокот на главата ја следиме оваа интерпретација.

## 2.2 Општествена дилема

Сами по себе, дефинициите за функциите на бенефит и трошок не се доволни да ја објаснат општествената дилема. За да ги поставиме нејзините темели, дефинираме уште два услови кои треба да се присутни во структурата на моделот.

Најпрвин, за секоја единка треба да постои точка по која кооперацијата претставува загуба. Односно по оваа точка за секоја единка треба да е подобро да не ја зголемува својата желба за кооперација, додека истовремено очекува кооперација од останатите. Ова означува дека целосната кооперација од страна на популацијата не припаѓа во множеството на Нешови рамнотежи. Формално, Нешовите рамнотежи претставуваат множеството на точки кои ја оптимизираат индивидуалната добивка под информација за можните стратегии на останатите единки. Овој услов го дефинираме како точката  $\mathbf{p} \in [0, 1]^N$ , која за секоја друга точка  $\hat{\mathbf{p}}$  и единка  $j \in \mathcal{N}_i^{(l)}$  го задоволува неравенството  $\text{proj}_j(\hat{\mathbf{p}}) \geq \text{proj}_j(\mathbf{p})$ , каде  $\text{proj}_j(\hat{\mathbf{p}})$  е  $j$ -тата координатна проекција на  $\hat{\mathbf{p}}$ . Односно по оваа точка стапката на промена на бенефитот на единката  $i$  при промена единствено на нејзината внатрешна состојба е помала од трошокот кој го поднесува. Со други зборови, за сите оние  $\hat{\mathbf{p}}$ ,

$$\frac{\partial b_{i,\mathcal{G}}(\hat{\mathbf{p}})}{\partial p_i} < \frac{dc_{i,\mathcal{G}}(\hat{p}_i)}{dp_i}. \quad (2)$$

Второ, за секое  $\hat{\mathbf{p}} \in [0, 1]^N$ , збирот од промените во бенефитите на секое  $j \in \mathcal{N}$  мора да е поголем или еднаков од промената на трошокот поднесен од  $i$ ,

$$\sum_j \frac{\partial b_{j,\mathcal{G}}(\hat{\mathbf{p}})}{\partial p_i} \geq \frac{dc_{i,\mathcal{G}}(\hat{p}_i)}{dp_i}, \quad (3)$$

со важење на стриктното неравенство кога  $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$ .

Условот (3) заедно со дефинициите за функциите на бенефит и трошок, доведува до ситуација во која целосната кооперација од страна на сите единки,  $p_i(t) = 1$ , за секое  $i$  и  $t$ , е ефикасно решение. Односно, е решението кое ја максимизира добивката на целата популација. Заедно, овие два услови доведуваат до структура каде егоистичкото однесување доведува до распад на целиот систем, токму како што следува од дефиницијата за општествена дилема.

Типичен пример за механизам на интеракција кој лесно е опфатен во оваа репрезентација е играта позната како Снежница. Во неа кооперација е оптимална одлука за една единка се додека бројот на кооперативни единки е низок [33]. Друга група на механизми кои се моделираат кога условот (2) важи за сите  $\hat{\mathbf{p}} \in [0, 1]^N$  и кога (3) е стриктно неравенство за секое  $\hat{\mathbf{p}}$  се дилемата на затвореникот [33], проблемот на

заеднички ресурс [34], играта на јавни добра [24], како и нивни генерализации (на пр. [11, 12, 25, 31, 35–37]).

### 2.3 Механизам на однесување

Во нашето сценарио, сите единки донесуваат одлуки врз база на правилото воведено во [23], освен еден дел од популацијата (множеството  $\mathcal{D}$ ) од безусловни дефектори – единки со  $\mathbf{p}_i(t) = \mathbf{0}$ ,  $i \in \mathcal{D}$ , за секое  $t$ .

Правилото за однесување ја опишува кооперативната состојба на единката  $i$  во времето  $t + 1$  како функција од нејзината акумулирана добивка  $Y_{i,\mathcal{G}}(t)$  до времето  $t$

$$\mathbf{p}_i(t + 1) = f_i(Y_{i,\mathcal{G}}(t)), \quad (4)$$

каде  $Y_{i,\mathcal{G}}(t) = Y_{i,\mathcal{G}}(t - 1) + y_{i,\mathcal{G}}(t)$ , со почетен услов  $Y_{i,\mathcal{G}}(0)$  и  $y_{i,\mathcal{G}}(0) = 0$ .

Претпоставуваме дека функцијата  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$ , која ја мапира добивката  $Y$  во желбата за кооперација  $\mathbf{p}_i$ , е непрекината во интервалот  $(0, 1)$  и поседува непрекината инверзна функција (т.е. е хомеоморфизам). Дополнително, таа е монотонно растечка со  $\lim_{Y \rightarrow -\infty} f_i(Y) = 0$  и  $\lim_{Y \rightarrow \infty} f_i(Y) = 1$ .

Како пример за функција која ги задоволува горенаведените услови (и е често употребувана во моделирање во биологија и екологија) е логистичката функција  $f_i(Y) = \left[1 + e^{-\kappa_i(Y - \omega_i)}\right]^{-1}$ , каде параметрите  $\kappa_i$  и  $\omega_i$  се соодветно наклонот и средната точка на функцијата.

Ова правило овозможува едноставно објаснување за кооперативното однесување во широк опсег на динамички интеракциски структури. Поточно, внатрешната состојба може да претставува имитација за агрегираниот фитнес во биолошки системи, богатство или благосостојба во животниски и човечки општества, или пак ниво на енергија во вештачки системи [23]. Неговата предност лежи во едноставноста, поради тоа што равенката (4) може лесно да се опише како Марков процес каде за една единка да донесе одлука во наредниот чекор доволно е да ја знае својата сегашна состојба и добивка. Ова значајно се разликува од останатите правила врз база на реципрочност. На пример, во одредени интеракциски структури директната реципрочност бара екстензивна меморија за да се има увид за своите како и одлуките на противниците за кооперацијата да се појави [38].

### 2.4 Динамика на кооперација

Ја започнуваме анализата со проучување на својствата на стабилното решение  $\mathbf{p}^*$ . Притоа, претпоставуваме дека структурата на интеракција е не-дегенерирана, што во наш термин значи дека Јакобиановата матрица на функцијата на добивка на единките што го следат правилото,  $\mathbf{J}_y \setminus^{\mathcal{D}}(\mathbf{p})$ , е несингуларна во точката  $\mathbf{0}$ . Всушност, лесно може да се забележи дека како последица на (3), оваа претпоставка секогаш важи кога целата популација го следи правилото.



Во стабилната состојба, за единките кои го следат правилото (4) важи

$$\mathbf{p}_i^* = f_i(f_i^{-1}(\mathbf{p}_i^*) + b_{i,\mathcal{G}}(\mathbf{p}^*) - c_{i,\mathcal{G}}(\mathbf{p}_i^*)). \quad (5)$$

Со примена на инверзната мапа, добиваме

$$f_i^{-1}(\mathbf{p}_i^*) = f_i^{-1}(\mathbf{p}_i^*) + b_{i,\mathcal{G}}(\mathbf{p}^*) - c_{i,\mathcal{G}}(\mathbf{p}_i^*). \quad (6)$$

За горната равенка да важи, потребно е 1)  $y_{i,\mathcal{G}}^* \doteq b_{i,\mathcal{G}}(\mathbf{p}^*) - c_{i,\mathcal{G}}(\mathbf{p}_i^*) = 0$ , освен ако 2)  $\mathbf{p}_i^* = 1$  (т.е.  $Y_{i,\mathcal{G}}^* = \infty$ ), или 3)  $\mathbf{p}_i^* = 0$  (т.е.  $Y_{i,\mathcal{G}}^* = -\infty$ ).

Лесно може да се потврди дека 3) е специјален случај на 1) кога  $\mathbf{p}_j^* = 0$  за сите  $j \in \mathcal{N}_i^{(l)}$ . Навистина, кога  $\mathbf{p}_i^* = 0$ , мора и  $y_{i,\mathcal{G}}^* \leq 0$ . Од дефиницијата на (4), условот  $y_{i,\mathcal{G}}^* < 0$  значи  $\mathbf{p}_i^* = 0$  што од друга страна доведува до  $y_{i,\mathcal{G}}^* \geq 0$ , и воедно контрадикција. Заради тоа, секогаш кога  $\mathbf{p}_i^* = 0$  мора и  $y_{i,\mathcal{G}}^* = 0$ , што е точно ако и само ако  $\mathbf{p}_j^* = 0$  за сите  $j \in \mathcal{N}_i^{(l)}$ .

Овие услови, заедно со стриктната монотоност на функцијата  $f_i$  и претпоставката дека интеракциите се недегенерирани, откриваат дека секоја единка  $i$  која го следи правилото (4) ќе ја зголемува или намалува својата желба за кооперација, се додека системот не постигне стабилна состојба во која е задоволен еден од условите  $y_{i,\mathcal{G}}^* = 0$  или  $\mathbf{p}_i^* = 1$ , за сите  $i \notin \mathcal{D}$ . Со други зборови, секоја единка која го следи правилото на генерализирана реципрочност ќе кооперира со максималната желба за кооперација, притоа запазувајќи го условот да не биде експлоатирана од околината. Во овој контекст, стабилното решение  $\mathbf{p}^*$  може да биде интерпретирано како решението на оптимизациониот проблем на максимизирање на глобалното ниво на кооперација, под услов сите единки кои го следат правилото да имаат не-негативна добивка, додека за безусловните дефектори важи  $\mathbf{p}_i^* = 0$ ,

$$\mathbf{p}^* = \arg \max_{\mathbf{p} \in [0,1]^N} \left\{ \sum_{i \notin \mathcal{D}} p_i; y_{i,\mathcal{G}}(\mathbf{p}) \geq 0 \forall i \text{ and } p_i = 0 \forall i \in \mathcal{D} \right\}. \quad (7)$$

Во нашиот систем, постои само едно единствено решение на равенката (7). Односно, динамичкиот систем има уникатен атрактор. Ова значи дека локалното кооперативно однесување се шири како флуks од енергија во мрежата, и се заситува во точката каде кооперацијата е максимизирана под услов ни една единка да не е експлоатирана.

## 2.5 Фазни премини

Следно, обрнуваме внимание на фазните премини на системот. Во овој случај, постојат две точки кои се од посебно значење. Првата транзиција одговара на ситуацијата кога правилото за однесување (4) не е способно да ја одржи кооперацијата, односно, под оваа точка стабилното решение е  $\mathbf{p}^* = \mathbf{0}$ . Ова претставува слаб предуслов за кооперација, бидејќи е неопходно тој да биде остварен за да постојат единки со позитивна желба за кооперација.

Втората точка на премин која ја истражуваме квантификува построг услов за ко-

операција. Таа соодветствува на ситуацијата во која сите единки (освен безусловните дефектори) кооперират безусловно, т.е. стабилното решени е  $\mathbf{p}_i^* = 1$  for all  $i \notin \mathcal{D}$ .

Ги проучуваме двете транзиции со помош на континуирана репрезентација на правилото,

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \frac{df_i(f_i^{-1}(\mathbf{p}_i))}{dY} [b_{i,\mathcal{G}}(\mathbf{p}) - c_{i,\mathcal{G}}(\mathbf{p}_i)]. \quad (8)$$

Преку анализирање на асимптотската стабилност на системот во фиксната точка  $\mathbf{p}^* = \mathbf{0}$  може да се покаже дека доволен услов за кооперацијата да изумре е

$$\lambda_{\max}(\mathbf{J}_{\mathbf{y}}^{\setminus \mathcal{D}}(\mathbf{0})) < 0. \quad (9)$$

каде  $\lambda_{\max}(\mathbf{J}_{\mathbf{y}}^{\setminus \mathcal{D}}(\mathbf{p}))$  е најголемата сопствена вредност на  $\mathbf{J}_{\mathbf{y}}^{\setminus \mathcal{D}}(\mathbf{p})$ .

Всушност, до истиот резултат може да се дојде и при проучување на оптимизацискиот проблем (7). Резултатот вели дека кога секоја сопствена вредност на редуцираната Јакобианова матрица  $\mathbf{J}_{\mathbf{y}}^{\setminus \mathcal{D}}(\mathbf{0})$  е негативна, системот станува дисипативен и прикажаното ниво на кооперација постојано се намалува.

На сличен начин, преку анализирање на стабилноста на линеаризирианиот систем во точката  $\mathbf{1}_{\setminus \mathcal{D}}$  ( $N$  димензионалниот вектор со елементи 1 за сите  $i \notin \mathcal{D}$  и 0 поинаку), се добива дека безусловната кооперација е асимптотски стабилна доколку

$$\min_{i \notin \mathcal{D}} (v_{i,\mathcal{G}}^{\setminus \mathcal{D}}) > 1, \quad (10)$$

каде  $v_{i,\mathcal{G}}^{\setminus \mathcal{D}}$  е

$$v_{i,\mathcal{G}}^{\setminus \mathcal{D}} = \frac{b_{i,\mathcal{G}}(\mathbf{1}_{\setminus \mathcal{D}})}{c_{i,\mathcal{G}}(\mathbf{1})}. \quad (11)$$

Во овој случај, мерката  $v_{i,\mathcal{G}}^{\setminus \mathcal{D}}$  се појавува како индекс кој ги квантификува трошоците што една единка ги поднесува при кооперирање, и на тој начин го определува нивото на кооперација како на микроскопско така и на макроскопско ниво.

## 2.6 Пример

### 2.6.1 Јавни добра и донации

Како конструктивен пример за апликативната моќ на нашите резултати, користиме механизам на интеракција кој спојува итерирана игра на јавни добра со едноставна активност на донација.

Конкретно, претпоставуваме дека во секој чекор природата сама по себе случајно условува системот дали се наоѓа во состојба на провизија на јавни добра или донација. Кога е во состојба на јавни добра, секоја единка  $i$  има улога како фактор во  $d_i$  процеси на производство репрезентирани преку нејзините најблиски соседи  $\mathcal{N}_i^1$ , каде  $d_i = |\mathcal{N}_i^1|$

е степенот на единката. Инпутот на единката во секоја рунда  $t$  е пропорционален со нејзината внатрешна кооперативна состојба  $p_i(t)$ , додека нејзината продуктивност е инверзно поврзана со  $d_i$ . Ова поставување доведува до систем во кој сите единки имаат иста продуктивност.

За поедноставување, претпоставуваме дека производствената функција е линеарна,

$$q_j(t) = \alpha \sum_k \frac{A_{kj}}{d_k} p_k,$$

каде  $\alpha$  е параметар кој ја опишува ефикасноста меѓу производителите и  $A_{kj} \in \{0, 1\}$  е  $(k, j)$ -от на матрицата на соседство на  $\mathbf{A}$  графот. Следиме стандардни практики и го поставуваме  $A_{ii} = 1$ . За да ја направиме провизијата на јавни добра поврзана со генерализирана реципрочност претпоставуваме дека по производството,  $q_j(t)$  е случајно распределено (на униформен начин) до една од единките кои се најблиски соседи на  $j$ .

Од друга страна, кога системот е во донациска состојба секоја единка  $i$  одбира еден најблизок сосед и одлучува дали да му донира износ во вредност  $\alpha$  со веројатност пропорционална на внатрешната состојба  $p_i(t)$ .

Претставената интеракција на јавни добра е стохастична верзија на моделот воведен во [39], кој е екстензивно истражен од поглед на мрежна реципрочност (детален преглед е даден во [40]). Дополнително, кога е комбиниран со донациската активност, наликува на познатион механизам на “морков” во динамика на генерализирана реципрочност.

## 2.6.2 Особини

Во оваа структура, случајната добивка на единката  $i$  во рундата  $t$  е

$$y_i(t) = e(t)y_{1i}(t) + (1 - e(t))y_{2i}(t),$$

каде  $e(t)$  е Бернулиева случајна променлива со параметар  $\varepsilon$  која ја опишува глобалната состојба и,

$$\begin{aligned} y_{1i}(t) &= \sum_j m_{1ji}(t)q_j(t) - p_i(t), \\ y_{2i}(t) &= \alpha \sum_{j \neq i} m_{2ji}(t)x_j(t) - x_i(t), \end{aligned} \tag{12}$$

се добивките од играта на јавни добра и процесот на донација. Во равенката (12),  $m_{1ji}(t)$ ,  $m_{2ji}(t)$  и  $x_j(t)$  се, респективно, Бернулиеви случајни променливи со параметри  $A_{ji}/d_j$ ,  $A_{ji}/(d_j - 1)$  и  $p_j(t)$ .

Во овој пример, функциите на трошок и бенефит се афини мапи во однос на случајните променливи. Поради тоа, анализата на стабилната точка може да биде апроксимирана со следната детерминистичка добивка

$$y_i(t) = \varepsilon \alpha \sum_j \frac{A_{ji}}{d_j} \sum_k \frac{A_{kj}}{d_k} p_k(t) + (1 - \varepsilon) \alpha \sum_{k \neq i} \frac{A_{ki}}{d_k - 1} p_k(t) - p_i(t). \tag{13}$$

Од (13) лесно може да се заклучи дека за секоја единка  $i$ , условите (2) и (3) се задоволени секогаш кога  $\alpha \in \left(1, \frac{d_i}{z_i} \frac{1}{\varepsilon}\right)$ , каде  $z_i = \sum_j A_{ji}/d_j$  е мерка на централност која го квантифицира очекувањето за бројот на настани кога единката  $i$  е избрана за донација. Ефектот на распределбата на  $z_i$  во поглед на еволуцијата на кооперација е дискутирана во [23].

Поопшта верзија на индексот, која е пропорционална со максималната просечна добивка на  $i$ , може да биде дефинирана како

$$s_i^{\setminus \mathcal{D}} = \varepsilon \sum_j \frac{A_{ji}}{d_j} \sum_{k \notin \mathcal{D}} \frac{A_{kj}}{d_k} + (1 - \varepsilon) \sum_{k \notin \mathcal{D} \cup i} \frac{A_{ki}}{d_k - 1}. \quad (14)$$

Нејзината врска со параметарот  $\alpha$  директно го детерминира нивото на кооперација во системот заради тоа што индексот за кооперација може да биде запишан како

$$v_{i,\mathcal{D}}^{\setminus \mathcal{D}} = \alpha s_i^{\setminus \mathcal{D}}.$$

Ова значи дека целосна кооперација ќе постои кога

$$\alpha > \frac{1}{s_{\min}^{\setminus \mathcal{D}}}, \quad (15)$$

каде  $s_{\min}^{\setminus \mathcal{D}}$  е минимумот помеѓу индексите  $s^{\setminus \mathcal{D}}$ .

За крај, матрицата  $\mathbf{J}_y^{\setminus \mathcal{D}}(\mathbf{0})$  чија најголема сопствена вредност одлучува дали кооперацијата ќе изумре или не, е

$$\mathbf{J}_y^{\setminus \mathcal{D}}(\mathbf{0}) = \alpha \left[ \varepsilon \mathbf{M}_1^{\setminus \mathcal{D}} + (1 - \varepsilon) \mathbf{M}_2^{\setminus \mathcal{D}} \right] - \mathbf{I},$$

каде  $(i, j)$ -тите членови на  $\mathbf{M}_1^{\setminus \mathcal{D}}$  и  $\mathbf{M}_2^{\setminus \mathcal{D}}$  се  $M_{1ij}^{\setminus \mathcal{D}} = \sum_k \frac{A_{ki}}{d_k} \frac{A_{jk}}{d_j}$  и  $M_{2ij}^{\setminus \mathcal{D}} = \frac{A_{ji}}{d_j - 1}$  ( $M_{2ii}^{\setminus \mathcal{D}} = 0$ ), додека  $\mathbf{I}$  единечната матрица.

Ова значи дека условот за изумирање на кооперација е

$$\alpha < \frac{1}{\lambda_{\max} \left( \varepsilon \mathbf{M}_1^{\setminus \mathcal{D}} + (1 - \varepsilon) \mathbf{M}_2^{\setminus \mathcal{D}} \right)}. \quad (16)$$

Во специјалниот случај кога сите единки го следат правилото (4),  $\mathbf{M}_1^{\setminus \mathcal{D}}$  и  $\mathbf{M}_2^{\setminus \mathcal{D}}$  се лево-стохастични матрици. Во тој случај  $\lambda_{\max} \left( \varepsilon \mathbf{M}_1^{\setminus \mathcal{D}} + (1 - \varepsilon) \mathbf{M}_2^{\setminus \mathcal{D}} \right) = 1$ . Бидејќи  $\alpha > 1$  е предуслов за општествена дилема, овој услов никогаш нема да биде задоволен во популација која се состои ексклузивно од единки кои го следат правилото врз база на внатрешна состојба.

## 2.7 Дискусија

Ги тестираме аналитичките пронаоѓања на три различни типови на случајни графови, Случаен регуларен граф (RR), Ердош Рени граф (ER) и Барабаши-Алберт мрежа (BA). Во RR случајниот граф сите единки се карактеризираат со еднаков број на соседи. Во ER графот две единки се поврзуваат случајно со фиксна веројатност. Како последица, степените на единките следат Поасонова распределба. Од друга страна, BA графот е конструиран преку динамички процес каде во секој чекор нова единка се додава на мрежата и прави конекции со останатите единки со веројатност пропорционална на нивните степени. Ова значи дека распределбата на врските е Степенска.

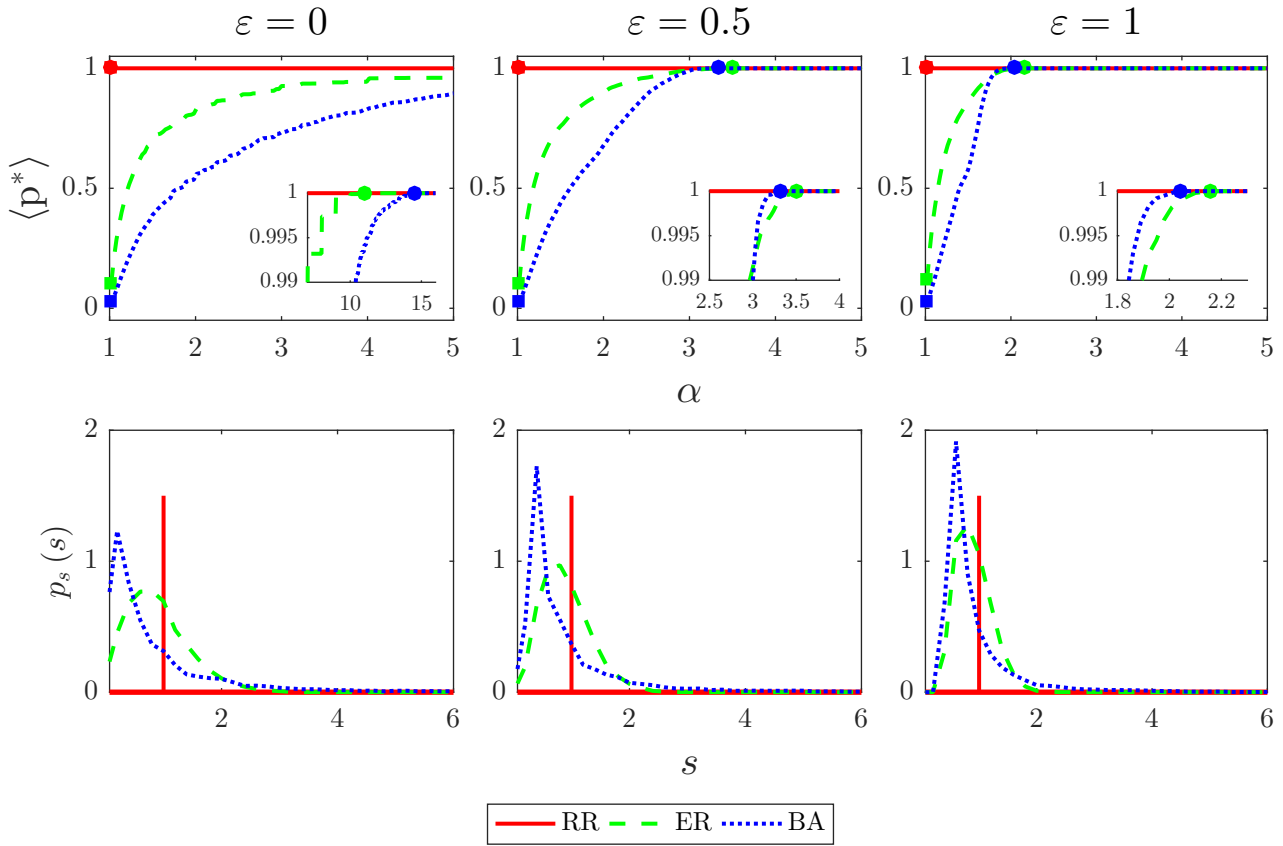
Притоа, во анализата како мерка за глобалното ниво на кооперација ја користиме фракцијата на безусловни кооператори  $\langle p^* \rangle$  од единките кои го следат правилото. Во горната колона од Слика 2 ја проучуваме оваа променлива како функција од параметарот  $\alpha$  кога  $\mathcal{D} = \emptyset$  и разгледуваме три случаи на  $\epsilon$ . Ги разгледуваме случаите кога, 1) постои само процес на донација ( $\epsilon = 0$ ), кога има подеднаква веројатност системот да биде во ( $\epsilon = 0.5$ ) и кога постои само провизија на јавни добра ( $\epsilon = 1$ ).

Условот за изумирање на кооперација е обележан во фигурата со квадрат. Како што е опишано во аналитичките резултати, кооперацијата во секој граф и интеракциска структура постои се дур  $\alpha$  ги задоволува условите за општествена дилема.

Сепак, зависноста на  $\langle p^* \rangle$  од мрежната структура е генерално различна низ сите три мрежни структури кои ги истражуваме. Единствената сличност се појавува кај RR графот. Во овој случај, може да се забележи дека безусловна кооперација од страна на сите единки се случува секогаш, без разлика од интеракциската структура. За ER и BA графовите, откриваме дека во секоја интеракциска структура, првоспоменатиот граф полесно промовира кооперација за мали вредности на  $\alpha$ . Додека, оваа карактеристика опстојува и за поголеми вредности се додека донацијата е единствениот тип на интеракција во системот, секогаш кога постои провизија на јавни добра, се појавува критична точка по која BA графот е подобар промовирач на кооперација. Овој ефект може полесно да се види во вметнатите слики.

За да ги објасниме овие опсервации, во долниот ред на Слика 2 ја прикажуваме веројатноста на распределба на индексот  $s^{\setminus \mathcal{D}}$ , кога не постојат дефектори (означена е само со  $s$ ). Фигурата покажува дека распределбата на оваа променлива во RR графот наликува на Дирак делта функција со маса центрирана во 1. Ова значи дека условот за асимптотска стабилност на безусловна кооперација е задоволен за секоја вредност на  $\alpha$ . Директна последица е целосната безусловна кооперација опсервирана уште кога  $\alpha = 1$ . За ER и BA графовите забележуваме дека распределбата на  $s$  е позитивно наклонета со тоа што BA графот покажува поголема наклонетост. Од тука произлегуваат опсервациите за  $\langle p^* \rangle$  во двата графови. Поточно, десната опашка на распределбата го определува нивото на кооперација кога ефикасноста во системот е мала. Во овој случај, помалиот наклон во ER графот доведува до состојба во која за повеќе единки ќе биде задоволен условот за безусловна кооперација.

На сличен начин, левата опашка објаснува зошто BA графот конвергира до целосна безусловна кооперација побрзо од ER графот во случај на провизија на јавни добра. Поточно како  $\epsilon$  се зголемува, така се зголемува сплоснатоста на распределбата на  $s$  во двата графови. Ова означува дека единките стануваат послични во однос на вредноста

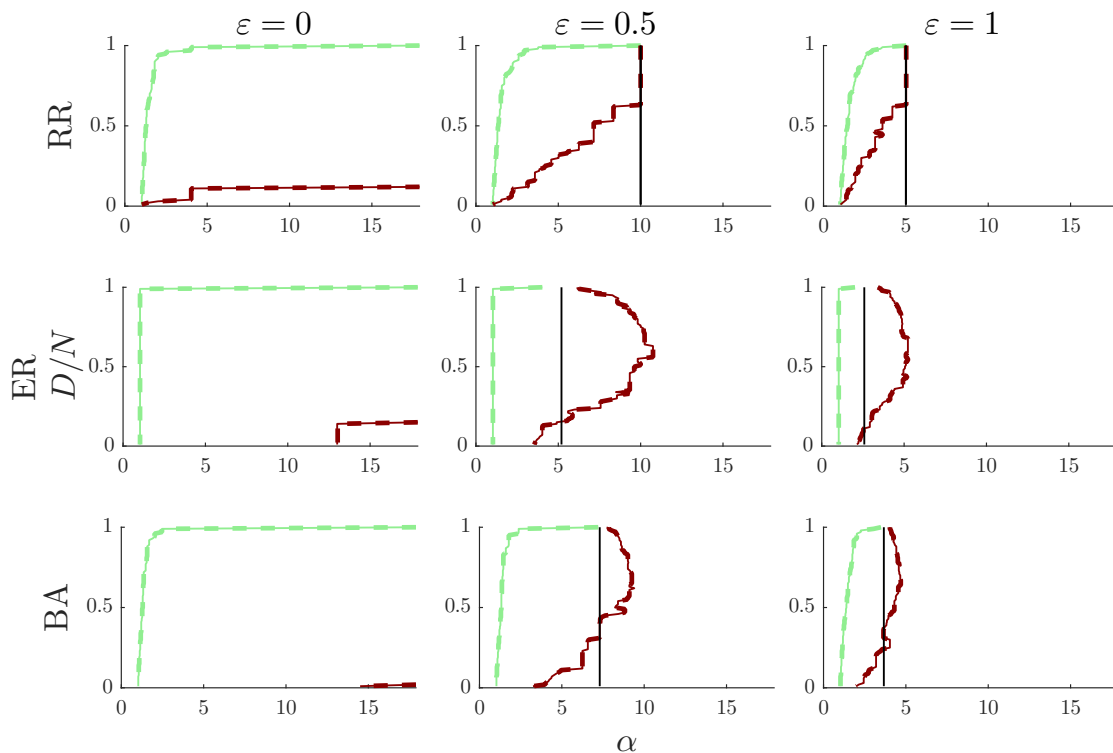


Слика 2: Резултати за примерот. Горниот ред ја покажува фракцијата на безусловни кооператори  $\langle p^* \rangle$  како функција од  $\alpha$ , додека долниот ред ја дава оценетата распределба на веројатност на индексот  $s$ . Колоните соодветствуваат на различни вредности на параметарот  $\varepsilon$ . Резултатите се отпросечени од 100 реализации на секој граф со  $N = 100$  и просечен степен 5.

на индексот. Зголемувањето е поголемо кај BA графот, и поради тоа се појавуваат помали прагови за безусловна кооперација во случај на провизија на јавни добра.

За да го квантификуваме ефектот на присуство на дефектори, на Слика 3 даваме контурна слика за фракцијата на безусловни кооператори како функција од параметарот за ефикасност и делот од популацијата кои се дефектори за секој од проучуваните случајни графови. Во сликата, над зелената линија е регионот каде кооперацијата прекинува да постои, додека под црвената линија е регионот каде сите што не се однесуваат како безусловни дефектори кооперираат со веројатност еден. Во регионот помеѓу двете линии, безусловни кооператори опстојуваат заедно со парцијални кооператори (единки со  $0 < p_i^* < 1$ ) и безусловни дефектори. Како дефектори ги избираме секогаш  $D$ -те единки со највисоки вредности на  $d/z$ . Ова е групата на единки за кои за да исчезне општествената дилема треба поголема вредност на  $\alpha$ , ако има позитивна веројатност за провизија на јавни добра.

Пронаоѓаме дека на ER графот му е потребна најниска ефикасност за кооперацијата



Слика 3: Контури за фазните премини. Зелените криви се нивоа на контурата за изумирање на кооперација, додека црвените криви се точките на целосна кооперација. Испрекинатите линии ги покажуваат оценетите прагови од равенките (9) и (10). Со црни вертикални линии го означуваме минимумот на  $d/z$ . Редовите означуваат различни видови на случајни графови, а колоните соодветствуваат на различни вредности на  $\epsilon$ . Резултатите се отпросечено од 100 реализации на графовите. Секој граф има 100 единици и просечен степен 5.

да опстои. Следува RR графот. BA графот се појавува како граф во кој изумирањето на кооперација е најверојатно. Оваа опсервација е независна од изборот на  $\epsilon$ . Спротивно на ова, може да се забележат големи разлики во поглед на прагот за целосна кооперација. Во овој случај, кога донацијата е единствениот процес во моделот, RR графот најдобро поддржува кооперација, потоа следува ER графот и на крај BA. Сепак, кога се појавува провизија на јавни добра, изгледа дека кога околу половина од популацијата е безусловен дефектор BA графот е најдобар промотор на кооперација. Кога мнозинството од популацијата се дефектори, пак, ER графот покажува најдобри перформанси.

Слично како во сценариото без дефектори, овие резултати може да бидат објаснети преку распределбата на индексот  $s$ . Поточно, вклучувањето на дефекторите може да биде објаснето како внатрешна сила која ефективно ја намалува вредноста на  $s$ . Од овој поглед, изумирањето на кооперација е поврзано со десната опашка на распределбата бидејќи таа ни ги објаснува случаите кои не задоволуваат опстојување на кооперација. Како што беше дискутирано претходно, ER графот ја има најголемата опашка, и поради тоа е најробуствен во однос на изумирање на кооперацијата. Од друга страна, како што се зголемува бројот на дефектори, распределбата на  $s$  се насочува кон помали

вредности и предизвикува зголемување на прагот за целосна кооперација. Очигледно, ова има најмал ефект врз RR графот заради тоа што сите индекси се концентрирани во една вредност. Тоа ги објаснува пониските прагови за целосна кооперација кога постои само донација. Напоменуваме дека, ова објаснување неважи во целост кога постои провизија на јавни добра, бидејќи тогаш за секоја единка постои точка по која истражуваниот пример не претставува општествена дилема. На пример, вредноста на оваа критична точка во RR графот е независна од избраните единки (минимумот за секој граф е означен со црна линија на сликата). Од сликата, изгледа дека ER графот бара најниско ниво на ефикасност за да постојат единки за кои интеракцијата не е дилема. Проследен е од VA графот. Директно следуваат опсервираните пониски прагови за целосна кооперација во овие два графови во споредба со RR графот кога голем дел од популацијата се однесува како дефектори.



## 3 Улогата на повеќеслојната мрежна структура во кооперација базирана на генерализирана реципрочност

### 3.1 Вовед

Додека моделот развиен во претходната глава дава важни информации за улогата на мрежната структура во промовирање на кооперација, тој опфаќа интеракции во мрежи кои се со една димензија. Ова е очигледен недостаток бидејќи природните интеракции често имаат хетерогени особини во структурата на поврзаност кои се опишани преку повеќе-димензионални, таканаречени мултиплекс мрежи [41]. На пример, во анализа на социјални мрежи, начините на кои се насочуваат и преплетуваат на различните типови на врски се неопходни за да се карактеризираат општествените структури [42, 43]. Во телекомуникациски мрежи, каде контролата на нивото кооперација важна за да се одржи ефикасноста на системот [44,45], физичките врски се сечат на повеќе делови за да се поддржат барањата на различни уреди [46,47]. Дури и генетските и протеинските врски помеѓу организми конструирани на повеќе начини се неопходни за анализа на нивните кооперативни поврзувања [48–50].

Поради ова, тука го продолжуваме моделот воведен во претходната глава за да опфати мултиплекс мрежни структури. Во оваа екстензија димензиите се однесуваат како платформи кои ги олеснуваат трансакциите помеѓу активните членови. Активноста на единките е моделирана преку ограничување на присутноста на агентите во една димензија. Оваа претпоставка е конзистентна со моделите за случајна прошетка во мултиплекс мрежи [51], и е оправдана во системи каде времетраењето на рундите на интеракција е кратко и/или единките имаат лимитирани интеракциски капацитети. Во резултирачкиот механизам опстојува резултатот за превенција на експлоатација. Покрај тоа, доведува и до нови резултати кои ја прават екстензијата во мултиплекс мрежи нетривијална. Поточно, преку дозволување на хетерогени бенефити и трошоци (т.е. различни вредности на параметрите низ димензиите), покажуваме дека кооперацијата може да преживее во опсервираната димензија иако трошокот го надминува бенефитот, се додека постои друга димензија која има улога на поддржувач (има повисок однос на бенефит/трошокот). Оваа карактеристика е во спротивност на резултатите од претходната глава каде условот за бенефитот да биде поголем од трошокот е есенцијален за појавување на кооперација. Дополнително, преку воведување на едноставна динамика за веројатноста на една единка да биде присутна во одредена димензија, покажуваме дека генерализираната реципрочност ефективно ги концентрира придонесите на единките во димензијата во која се присутни мнозинството од нивните кооперативни соседи. Врз база на овие опсервации, дискутираме поврзувања со учења врз база на засилување, поточно со моделот на Рот и Ерев [52] и неговите екстензии [53].

Структурата на оваа глава е следна. Во наредната секција го опишуваме моделот. Потоа следува негова анализа. Во последната секција ги дискутираме пронаоѓањата.

## 3.2 Модел

### 3.2.1 Мрежни интеракции

Претпоставуваме популација од  $N$  единки чии релации се моделирани како поврзана мултиплекс мрежа, дефинирана како тројката  $\mathcal{G}(\mathcal{N}, \mathcal{E}, \mathcal{L})$ , каде  $\mathcal{N}$  е множеството на единки,  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$  е множеството на врски кои ги објаснуваат односите помеѓу единките, и  $\mathcal{L}$  е множеството на  $L$  особини кои ги имаат врските и кои ги дефинираат димензиите на мрежата. Секоја димензија е дефинирана како графот  $\mathcal{G}^{[l]}(\mathcal{N}, \mathcal{E}^{[l]})$  во кој  $\mathcal{E}^{[l]}$  е подмножеството од  $\mathcal{E}$  кое ја поседува особината  $l \in \mathcal{L}$ . Секоја димензија е претставена како  $N \times N$  матрица на соседство  $\mathbf{A}^{[l]}$ , каде  $ij$ -от член  $A_{ij}^{[l]} \in \{0, 1\}$  помеѓу парови од единки  $i, j \in \mathcal{N}$  ( $A_{ij}^{[l]} = 1$  означува соседска релација, т.е.  $(i, j) \in \mathcal{E}^{[l]}$ ).

Интеракциите помеѓу единките се моделирани на следниот начин: во секоја рунда  $t$ , секоја единка  $i$ :

1. случајно избира димензија  $l$  во која ќе биде присутна во рундата;
2. испраќа барање за кооперација до случајно (униформно) избрана единка  $j$  од нејзината околина во  $l$ -тата димензија,  $j \in \mathcal{N}_i^{[l]}$ ;
3. по селекција, ако единката  $j$  го добива барањето само ако е присутна во  $l$ -тата димензија во рундата, и кооперира со веројатност  $p_j(t)$ . Динамиката е дадена на ист начин како и во динамиката за внатрешна состојба развиена во претходната глава;
4. Кога кооперира, единката  $j$  плаќа трошок  $c^{[l]} > 0$  за единката  $i$  да добие бенефит  $b^{[l]} > 0$ .

Во овој интеракциски модел, случајната добивка на единката  $i$  во рундата  $t$  може да биде карактеризирана како

$$y_i(t) = \sum_l v_i^{[l]}(t) \left[ b^{[l]} v_j^{[l]}(t) x_j(t) - c^{[l]} x_i(t) \sum_{k \in \mathcal{N}_i^{[l]}} \rho_k^{[l]}(t) v_k^{[l]}(t) \right]. \quad (17)$$

Во (17),  $v_i^{[l]}(t)$  е  $i$ -тиот исход на  $L$  димензионална категорична променлива параметризирана преку  $\mathbf{B}_i^{[l]}(t)$ , варијабла која сама по себе е случајна променлива што ја опишува веројатноста  $i$  да биде присутна во димензијата  $l$  во рундата  $t$ . Одбраната единка од околината на  $i$  е случајна променлива униформно распределена во множеството  $\mathcal{N}_i^{[l]}$ ,  $j \sim \mathbf{U}(\mathcal{N}_i^{[l]})$ ;  $x_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, N$ , се Бернулиеви случајни променливи, секој со параметар  $p_j(t)$ ;  $\rho_k^{[l]}$  е Бернулиева случајна променлива со параметар  $1/d_k^{[l]}$ , каде  $d_k^{[l]}$  е степенот на единката  $k$  во димензијата  $l$ ,  $d_k^{[l]} = \sum_h A_{kh}^{[l]}$ ; членот  $\sum_{k \in \mathcal{N}_i^{[l]}} \rho_k^{[l]}(t)$  го опфаќа случајниот број на единки (соседи на  $i$  во  $l$ ) кои испраќаат кооперативно барање до  $i$  во димензијата  $l$  за време на рундата  $t$ .

### 3.2.2 Детерминистичка апроксимација

Го апроксимираме стохастичкиот модел (17) со детерминистички во кој случајните променливи се заменети со нивните очекувања

$$y_i(t) = \sum_l B_i^{[l]}(t) \left[ b^{[l]} \sum_j \frac{A_{ij}^{[l]}}{d_i^{[l]}} B_j^{[l]}(t) p_j(t) - c^{[l]} z_i^{[l]}(t) p_i(t) \right]. \quad (18)$$

Членот  $z_i^{[l]}(t)$  во (18), дефиниран како

$$z_i^{[l]}(t) = \sum_j \frac{A_{ji}^{[l]}}{d_j^{[l]}} B_j^{[l]}(t), \quad (19)$$

е временска екстензија на мрежниот индекс дискутиран во претходната секција, за димензијата  $l$ . Оваа мерка го квантифицира значењето на единката во адресираната димензија, и притоа една единка е поважна доколку има многу соседи кои се во истата димензија, и истите имаат малку свои соседи. Во нашиот модел на интеракција, овие единки почесто би добивале барања за кооперација.

Мотивацијата за употребата на детерминистичкиот модел (18) е тоа што равенката (17) претставува афина мапа во однос на сите случајни променливи, и на тој начин е релевантна апроксимација за стабилната состојба на системот. На Слика 4 даваме пример за детерминистички интеракции помеѓу единки кои се среќаваат во мрежа со две димензии.

Исто така го дефинираме агрегираниот временски индекс за значење на околината  $Z_i(t)$  на единката  $i$  како

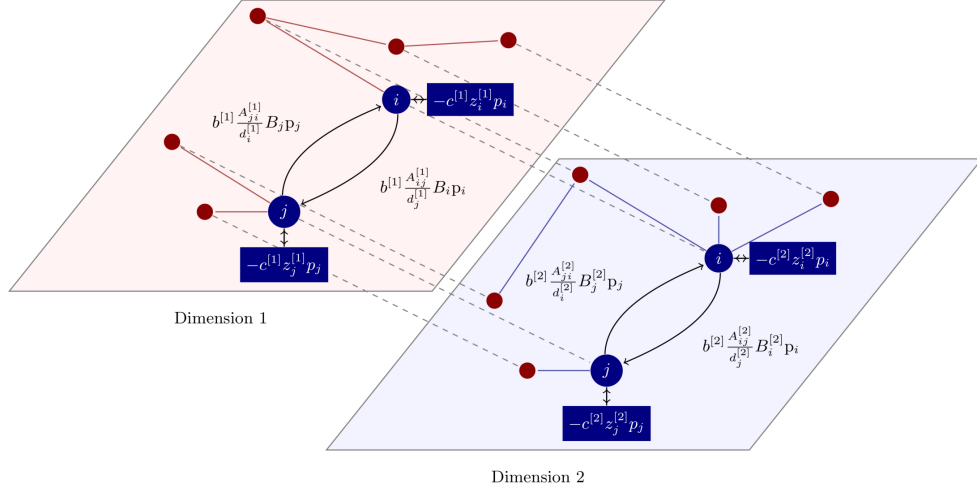
$$Z_i(t) = \frac{\sum_l B_i^{[l]}(t) z_i^{[l]}(t)}{\sum_l B_i^{[l]}(t) \sum_j \frac{A_{ij}^{[l]}}{d_i^{[l]}} B_j^{[l]}(t)}. \quad (20)$$

Во наредните секции ќе ја нагласиме улогата на овој индекс во глобалното кооперативно однесување во мултиплекс мрежи.

## 3.3 Резултати

### 3.4 Аналитички особини на моделот

Во оваа секција ги карактеризираме главните особини на моделот во стабилната состојба. Притоа, разликуваме помеѓу два вида на резултати: 1) резултати со хомогени параметри, дефинирани како идентични бенефити и трошоци низ димензиите на мрежите,  $b^{[l]} = b$  и  $c^{[l]} = c$  за сите  $l \in \mathcal{L}$ ; и 2) резултати со хетерогени параметри, односно погенералниот случај каде дозволуваме различни вредности на бенефитот и трошокот во секоја димензија. Нагласуваме дека резултатите следуваат директно со примена на рамката воведена во [23, 54].



Слика 4: Пример за детерминистички интеракции во мрежа со две димензии помеѓу единките  $i$  и  $j$  (обоени со темно сино). За илустративни цели, ја исклучуваме нотацијата за рундата. Обоените врски означуваат димензии во активната димензија, додека испрекинатите врски се оние од другата димензија.

Следните особини важат во сите случаи:

1. Робустност од експлоатација. Во стабилната точка, единките припаѓаат на едно од двете множества,  $\mathcal{W} = \{w \in \mathcal{N} : y_w^* = 0\}$  и  $\mathcal{S} = \{s \in \mathcal{N} : y_s^* > 0\}$ , и се поделени според нивната добивка  $y_i^*$ . Единките во  $\mathcal{S}$ , се безусловни кооператори ( $p_i^* = 1$ ), додека единките во  $\mathcal{W}$  се парцијални кооператори и може да земаат вредности  $p_i^* = 1$  и  $p_i^* < 1$ , во зависност од параметрите. Односно, во стабилната состојба се задоволени следните релации

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_l B_i^{[l]*} \left[ b^{[l]} \sum_j \frac{A_{ij}^{[l]}}{d_i^{[l]}} B_j^{[l]*} p_j^* - c_l z_i^{[l]*} p_i^* \right], \quad i \in \mathcal{W} \\
 y_i^* &= \sum_l B_i^{[l]*} \left[ b^{[l]*} \sum_j \frac{A_{ij}^{[l]}}{d_i^{[l]}} B_j^{[l]*} p_j^* - c^{[l]} z_i^{[l]*} p_i^* \right], \quad i \in \mathcal{S}.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Притоа, множествата  $\mathcal{W}, \mathcal{S}$ , вредностите  $p_i^*, i \in \mathcal{W}, B_j^{[l]*}, i \in \mathcal{N}, l \in \mathcal{L}$  и константите  $y_i^*, i \in \mathcal{S}$  се непознати.

Следните особини важат само за мултиплекс мрежи со хомогени параметри. Ги релаксираме овие претпоставки во нумеричката анализа спроведена во наредните секции.

2. Постојење на кооперација. Неопходен услов за постоење на кооперација (единки со  $p_i^* > 0$ ) е  $b/c \geq 1$ .

3. Промоција на кооперација. Кога  $b/c > 1$ , опсервираме дека желбите за кооперација на сите единки се поголеми од 0,  $p_i^* > 0$  за сите  $i \in \mathcal{N}$ .

4. Доволен услов за постоење на безусловни кооператори. Кога  $b/c > 1$ , секогаш постои барем еден безусловен кооператор во мрежата.

5. Неопходен услов за постоење на безусловни кооператори. Неопходен услов за постоење на безусловни кооператори е  $Z_i^* \leq b/c$ .

6. Целосна безусловна кооперација. Условот  $b/c \geq Z_{max}^*$ , каде  $Z_{max}^*$  е најголемиот индекс меѓу сите  $Z_i$ ,  $Z_{max}^* = \max_i Z_i^*$ , е доволен и неопходен услов за постоење на целосна безусловна кооперација во популацијата.

### 3.5 Улогата на хетерогени параметри

Продолжуваме со анализата преку релаксирање на претпоставката за хомогени параметри и го разгледуваме случајот каде секоја димензија  $l$  има свој  $b^{[l]}$  и трошок  $c^{[l]}$ . Бидејќи целта е да го разгледаме ефектот на хетерогени параметри, развиваме едноставен модел во кој веројатноста за присуство во една димензија е униформен во секоја рунда.

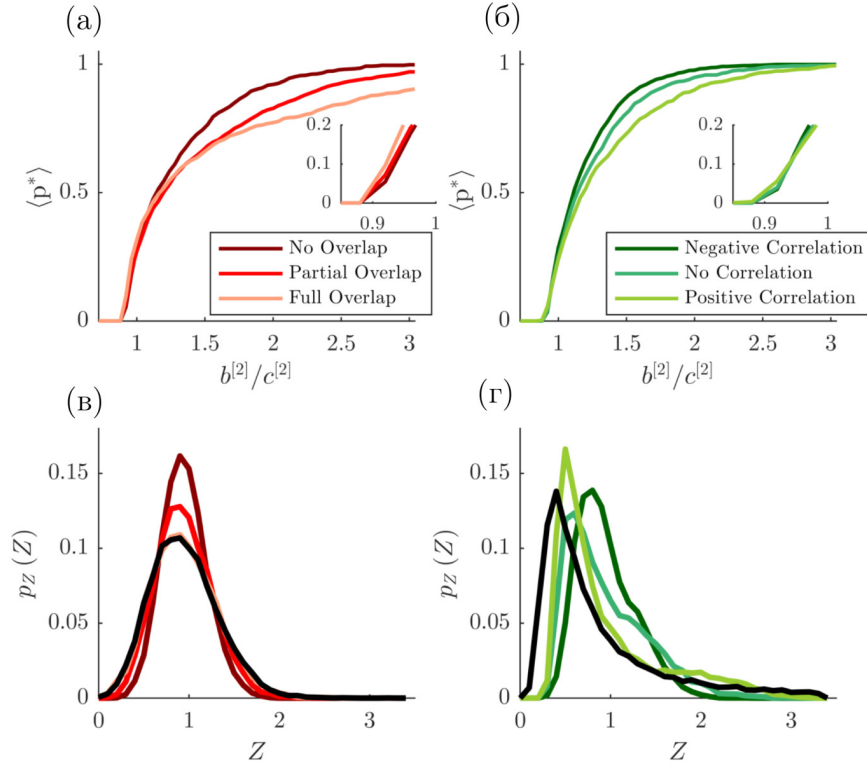
За овој случај, споредуваме два различни видови на мултиплекс мрежи кои се состојат од по две димензии. Првата мултиплекс мрежа е природна генерализација на Ердош-Рени (ER) случајниот граф, додека втората е мултиплекс верзија на Барабаши-Алберт (BA) графот. Поради тоа што корелацијата помеѓу врските во различните димензии би требало да игра огромна улога во детерминирањето на нивото на кооперација во стабилна состојба, разгледуваме три различни сценарија. Во ER графот, ќе ја разгледаме можноста за врски кои се преклопуваат, т.е., ситуации во кои 1) врските во различните димензии воопшто не се преклопуваат, 2) половина од врските се преклопуваат, и 3) сите врски се преклопуваат. Во BA графот истражуваме случаи во кои корелацијата на степените  $\rho$  помеѓу двете димензии е 1) негативна, 2) не постои, и 3) е позитивна. Формално корелацијата ја мериме преку Пирсоновиот коефициент на корелација,

$$\rho_{12} = \frac{\sum_i (d_i^{[1]} - \langle d^{[1]} \rangle) (d_i^{[2]} - \langle d^{[2]} \rangle)}{\sqrt{\sum_i (d_i^{[1]} - \langle d^{[1]} \rangle)^2} \sqrt{\sum_i (d_i^{[2]} - \langle d^{[2]} \rangle)^2}}. \quad (22)$$

Во равенката (22)  $\langle d^{[l]} \rangle$  го означува просечниот степен во димензијата  $l$ .

Резултатите се дадени на Слика 5. Панелите (а)-(б) респективно ја покажуваат еволуцијата на фракцијата на безусловни кооператори кога односот на бенефитот со трошокот  $b^{[2]}/c^{[2]}$  се менува, додека односот во истата димензија е одржан на константно ниво ( $b^{[1]}/c^{[1]} = 1.08$ ).

Во случајот на ER мрежите, може да се забележи дека кога врските целосно се преклопуваат и односот на  $b^{[2]}/c^{[2]}$  е низок, најлесно се промовира и кооперација (вметнатата слика во Слика 5 (а)). Кога односот помеѓу бенефитот и трошокот е висок, најлесно пак се промовира кооперација кога нема преклопување на врските. Слично, позитивна корелација во BA мрежите доведува до поголема фракција на безусловни кооператори за ниски односи на бенефитот со трошокот, (вметнатата слика од Слика 5 (а)), додека негативна корелација помеѓу степените е подобра за промовирање на



Слика 5: (а-б) Фракција на безусловни кооператори  $\langle p^* \rangle$  како функција од односот помеѓу бенефитот и трошокот во втората димензија,  $b^{[2]}/c^{[2]}$ , за примерок од случајните графови кои ги истражуваме, додека  $b^{[1]}/c^{[1]} = 1.08$ . (а) ER мултиплекс мрежи со униформен избор на димензија. (б) BA мултиплекс мрежи со униформен избор на димензија (в-г) Веројатносни распределби за стабилната точка на  $Z$  индексот за истите графови отпросечен од 100 реализации и истите распределби за еднодимензионалните графови (во црно). (в) ER мултиплекс мрежи. (д) BA мултиплекс мрежи. Сите мрежи се состојат со 100 единици и имаат просечен степен 8.

кооперација кога  $b^{[2]}/c^{[2]}$  е висок.

Потенцираме дека поради униформната распределба за избор на димензија постои симетрична врска помеѓу промените на односите помеѓу бенефитите и трошоците и фракцијата на безусловни кооператори. Мали подесувања кон една од димензиите само доведуваат до поголемо значење на истата во промовирање на кооперација, без значајни промени во резултатите. Заради тоа, може да ги употребиме особините развиени во претходната секција како почетна точка за инспекција на резултатите.

Ова ја редуцира анализата до проучување на стабилната состојба на индексот  $Z$ . Нагласуваме дека, според нашиот модел на интеракција, повисоки вредности на индексот значат и почести барања за кооперација и генерално пониско ниво на кооперација. За оваа цел во панелите (в)-(г) од Слика 5 ги визуализираме веројаностите распределби на индексот  $Z$  за истите мултиплекс мрежи. На истата слика, со црно е обележана распределбата на  $Z$  еднодимензионалните ER и BA мрежи. За ER графовите, може да

се примети дека исклучувањето на врски кои се поклопуваат ефективно ја зголемува модата на распределбата. Бидејќи просечното ниво на кооперација во точката каде почнува истата започнува е определено од левата опашка на распределбата, мрежи со помали моди (и поголеми леви опашки) полесно промовираат кооперација. Спротивно на ова, дебелината на десната опашка води до повисоки прагови за целосна кооперација. Забележуваме дека преку намалување на корелацијата помеѓу степените во ВА мулти-плекс мрежата, десната опашка на  $Z$  се намалува, и поради тоа опсервираме понизок праг за целосна кооперација.

За крај, во вметнатите слики во Слика 5 (а)-(б) опсервираме дека вклучувањето на втора димензија доведува до значително намалување на прагот за постоење на кооперација во системот. Ова значи дека втората димензија има улога на помошник за постоењето на кооперација дури и ако оригиналната димензија не го дозволува тоа. Резултатот се појавува поради тоа што негативните добивки од првата димензија се компензирани со позитивните добивки од втората. Доколку барем една единка добива поголема добивка во стабилната точка во димензијата-помошник, отколку загубата во оригиналната, тогаш кооперацијата ќе опстои. Ова е многу важен заклучок за појавата на кооперација во системи каде сите димензии на мрежата не можат да бидат опсервирани и околината не е повољна за кооперација, а сепак овој феномен е пронајден.

### 3.6 Улогата на правило за одлука за избирање на димензија

Однапред детерминираното присуство на единката во една од димензиите е оправдана претпоставка за системи каде протокот помеѓу димензиите е ограничен и единката не е способна да развие верување за кои од димензиите доведуваат до поголема добивка. Пореалистично сценарио е дозволување на динамика за веројатноста единката  $i$  да е присутна во димензијата  $l$  во рундата  $t$ . Додека ова може да биде моделирано преку воведување на Маркови ланци кои ќе ги опишуваат премините од една во друга димензија, или пак да се додадат мемориски стапки за движењето врз база на искуството во претходните рунди, тука воведуваме едноставно правило кое се базира на истиот принцип на генерализирана реципрочност кој го употребивме за моделирање на желбата за кооперација на една единка.

Конкретно, го дефинираме правило врз база на акумулираната добивка во димензијата,

$$Y_i^{[l]}(t) = Y_i^{[l]}(t-1) + y_i^{[l]}(t), \quad (23)$$

каде  $Y_i^{[l]}(0)$  е почетниот услов и  $y_i^{[l]}(0) = 0$ . Во нашиот модел веројатноста за единката  $i$  да биде присутна во димензијата  $l$  во рундата  $t+1$  е дадена со софтвакс функцијата,

$$B_i^{[l]}(t+1) = \frac{\exp\left(Y_i^{[l]}(t)\right)}{\sum_m \exp\left(Y_i^{[m]}(t)\right)}. \quad (24)$$

Динамиката на правилото е во духот на Рот-Ерев методологијата за засилено учење на стратегии во теорија на игри [52]. Всушност, врз основа на (23) и (24), може да биде воспоставена аналогија со поопшти техники за засилено учење [53, 55]. Конекцијата

може да се забележи преку интерпретирање на изборот за присутност на единката  $i$  во димензијата  $l$  од мултиплекс мрежата како селекција на стратегија  $S_l$  (од множество на  $L$  стратегии), каде изборот на димензија е даден со веројатност  $B_i^{[l]}(t)$ . Во овој контекст, акумулираната добивка  $Y_i^{[l]}$  во димензијата  $l$  е аналогна на склоноста да се игра стратегијата  $S_l$ . Истакнуваме дека правилото (24) е различно од тоа што е воведено во оригиналниот Рот-Ерев модел, според кој стратегијата се избира со веројатност  $B_i^{[l]}(t+1) = \frac{Y_i^{[l]}(t)}{\sum_m Y_i^{[m]}(t)}$ . Специфично, нашето правило може да биде опишано во форма на поопшти техники на засилено учење каде акциите се одбираат врз база на генерална Гибс-Болцман распределба

$$B_i^{[l]}(t+1) = \frac{\exp(\lambda \cdot Y_i^{[l]}(t))}{\sum_m \exp(\lambda \cdot Y_i^{[m]}(t))}. \quad (25)$$

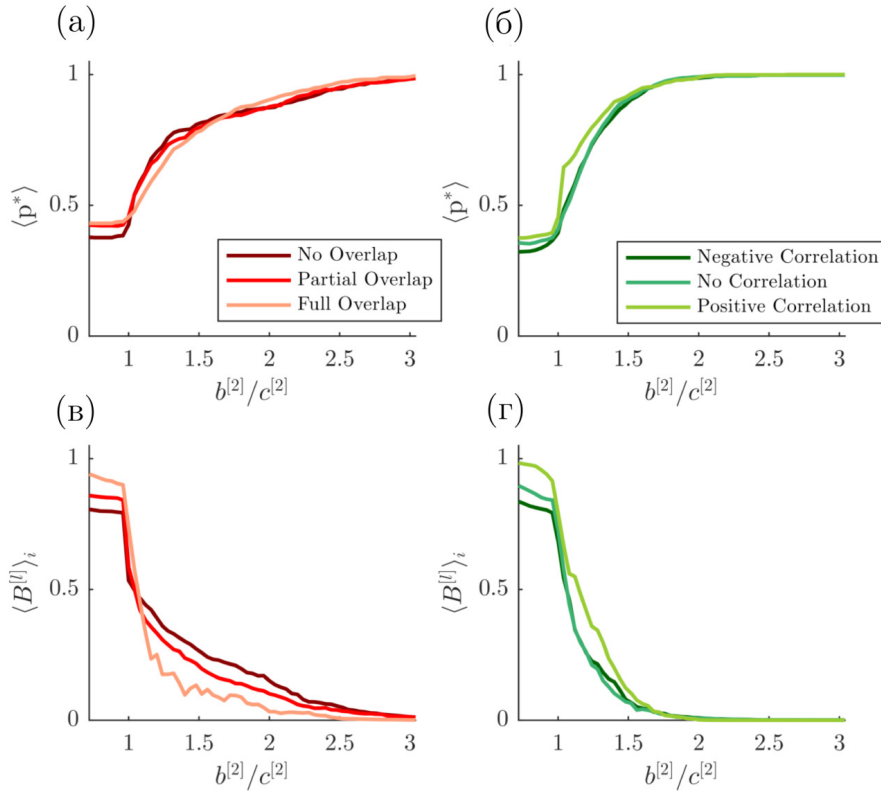
Во (25),  $\lambda$  игра улога на “инверзна температура”, позната во статистичка физика, и ја опфаќа замената помеѓу експлоатација ( $\lambda = \infty$ ), т.е. лакомо учење во кое само акцијата со најголема склоност се избира, и експлорација ( $\lambda = 0$ ), што значи дека секоја стратегија има иста веројатност. Во многу техники за засилено учење, целта е да се најде вредност на  $\lambda$  која овозможува оправдана замена помеѓу експлоатација и експлорација. Во нашиот модел, изборот на овој параметар значајно го одлучува транзиентното како и стабилното однесување кога, на пример, некои од димензиите се избришани. Очекуваме дека во тој случај изборот на параметарот  $\lambda$  кон експлорација ќе даде одговор за одредена робусност кон вакви настани. Точната квантификација на настаните во сценариото на експлорација, заедно со улогата на мрежната структура, е надвор од доменот на овој докторски труд. Сепак, претставува интересна насока за идни истражувања.

Предноста на воведеното правило е тоа што може истото лесно да се примени поради тоа што секоја единка треба да ја знае само својата веројатност  $B_i^{[l]}(t)$  во тековната рунда за сите димензии и остварената добивка  $y_i^{[l]}(t)$  во нив.

Стабилната точка на равенка (24) не е дефинирана ако повеќе од едно  $Y_i^{[l]}$  тежи кон бесконечност. Ова никогаш нема да се случи се додека секоја единка искусува различни динамики кога димензиите се гледаат како посебни мрежи. Друга карактеристика на правилото е тоа што резултирачкиот систем има  $(L-1)N$  степени на слобода, и поради тоа сигурно ќе се опсервира комплексно однесување. За да се редуцира ова однесување, при споредба на резултатите за различни односи на бенефитите и трошоците како почетна точка во веројатноста една единка да биде присутна во одредена димензија ја користиме стабилната точка добиена при анализа на односите на бенефитите и трошоците кои се блиски до неа. На почетокот, при ниски вредности на бенефитите и трошоците, како почетна точка е избрана униформната веројатност користена во претходната секција.

Резултатите за истите мрежи од претходната секција се дадени во Слика 6. Панелите (а)-(б) ја покажуваат фракцијата на безусловни кооператори како функција од односот помеѓу бенефитот и трошокот. Од една страна, прикажаното глобално ниво на





Слика 6: (а-б) а-б-в-г Фракција на безусловни кооператори  $\langle p^* \rangle$  како функција од односот помеѓу беневитот и трошокот во втората димензија за примерок од случајните графови што ги истражуваме, додека  $b^{[1]}/c^{[1]} = 1.08$ . (а) ER мултиплекс мрежа со правило на одлука врз база на генерализирана реципрочност (б) ВА мултиплекс мрежа со правило на одлука врз база на генерализирана реципрочност (в-г) За истите мрежи, фракцијата на единките  $\langle B^{[l]} \rangle_i$  кои во стабилната состојба се во првата димензија.

кооперација за ниски  $b^{[2]}/c^{[2]}$  односи е зголемено за значителна величина во споредба со резултатите од претходната секција. Од друга страна, приметуваме дека за големи односи на беневитот и трошокот, вкупното ниво на кооперација не е конзистентно низ различните мрежи. Поточно, има ситуации кога оваа променлива е намалена (на пр. во ER мрежата без преклопување на врските), како и кога е зголемена (пр. ВА мрежата со позитивна корелација).

Однесувањето може да биде објаснето преку резултатите на Слика 6(в)-(г), каде е прикажана фракцијата од популацијата која во стабилната точка е присутна во првата димензија како функција од истите параметри. Очигледно, димензијата во која се присутни единките во стабилна точка се менува, и е зависна од вредноста на параметрите и мрежната структура. Ова е клучна карактеристика на моделот бидејќи означува дека правилото за одлука врз база на генерализирана реципрочност придонесува единките да го прилагодат своето присуство во димензијата каде или имаат најмали трошоци за кооперација или каде повеќето од нивните кооперативни соседи се присутни. Поради ова, може да се каже дека правилото за определување на димензија ефективно помага

во обезбедување на опстанок на кооперацијата во системот.

Важно е да се напомене дека со тоа што единките го прилагодуваат своето присуство во димензијата каде се и нивните кооперативни соседи, не значи дека и целосната безусловна кооперација е остварена полесно. Всушност, правилото на одлука може да присили некоја единка во стабилната точка да биде присутна во некоја димензија што е помалку добра за индивидуалната добивка само поради тоа што мнозинството од нејзините соседи се таму. Токму ова може да е причина за пониското ниво на кооперација прикажано во ER мрежата без преклопување на врски. Поради начинот на кој се конструирани врските во овој граф, може да се случи некои од единките да имаат поголема важност за кооперација во една од димензиите, а мала во другата. За овие единки униформно правило за одлука би довело до поголема добивка затоа што би имале интеракција и во мрежата каде се помалку оптеретени. Сепак, ако ниеден од своите соседи не се присутни во таа димензија, ваквите единки ќе бидат принудени да се прилагодат на димензијата во која ќе остварат помали добивки.

### 3.7 Заклучок

Во овој дел од докторскиот труд ја истраживме динамиката на кооперација на генерализирана реципрочност во повеќедимензионални мрежи. Моделот, кој е обопштување на резултатите од претходната Глава, доведува до значајни нови наоди за улогата на мрежната структура во промовирање на кооперација во комплексни мултиплекс мрежи. Демонстриравме дека повеќедимензионалната структура може да има улога на помошник на кооперацијата во опсервираната мрежа иако бенефитите и трошоците сами по себе не дозволуваат појава на овој феномен. Овој резултат може да ја објасни појавата на кооперација во системи каде кооперативно однесување е опсервирано дури иако општествената состојба не го дозволува тоа.

Исто така, ја разгледавме и конекцијата помеѓу воведеното правило во повеќедимензионалната мрежа и засилено учење, преку интерпретирање на актот за присуство на единките во димензиите од мултиплекс мрежите како избор на стратегија. Изборот на стратегијата е применета врз база на внатрешната состојба на единката. Во овој контекст, воведовме едноставно правило за моделирање на интеракциите на единките во различни димензии. Заклучивме дека кооперативните влогови на единките се централизираат во димензијата која е најдобра за одржување на кооперацијата.

Како интересна насока за идно истражување е воспоставување на поопшта рамка за истражување на однесувања во духот на “експлорација” наспроти “експлатација”. Во овој контекст, интересно е да се истражи не само стабилната состојба, туку и транзиентниот режим.

## 4 Појава на кооперација во флукутирачки мрежни средини

### 4.1 Вовед

Честа, но неистражена, карактеристика во динамиката на кооперација на комплексни мрежи е присуството на флукутирачка средина, односно ситуации во кои временската еволуција е зависна од релативното движење. Во такви ситуации, се појавува неизвесност која ја нарушува ергодичноста преку поставување на негативен ефект врз временската просечна стапка на раст, иако нема влијание врз стапката на раст на очекувањето [56]. Ова, пак, предизвикува однесување кое суштински се разликува од она забележано во стандардни модели [57, 58].

Оваа Глава од докторскиот труд дава значаен увид на улогата на комплексните мрежи во динамиката на кооперација во флукутирачки средини преку изучување на вмреженото здружување и делење на поединечни акумулирани добивки кои растат според мултипликативен процес. Случајни промени во стапката на раст на акумулираните добивки е најчеста техника користена за опфаќање на потенцијални флукутации [58–60], додека е пронајдено дека здружувањето и делењето на акумулирани добивки е робустен промотор на кооперација во овие околности [61–63].

### 4.2 Математички модел

Формално, е разгледан случајот каде динамиката на акумулираната добивка  $Y_i(t)$  на единката  $i$  во периодот  $t$  следи геометриско Брауново движење (ГБД),

$$dY_i = Y_i(\mu dt + \sigma dW_i), \quad (26)$$

каде  $\mu$  е стапката на промена,  $\sigma$  е амплитудата на шумот и  $dW_i$  е независно Винерово зголемување, т.е.  $W_i(t) = \int_0^t dW_i$ . Без шумот, т.е.  $\sigma = 0$ , моделот е едноставно експоненцијален раст со стапка на раст  $\mu$ . Со  $\sigma \neq 0$  може да биде интерпретиран како експоненцијален раст со флукутирачка стапка на раст. Предноста од моделирање преку ГБД лежи во неговата универзалност, бидејќи процесот претставува атрактор на посложени модели во кои се случува мултипликативен раст [64, 65]. Исто така, неговите не-ергодични својства се многу лесно манифестирани во не-комутативноста на временската просечна стапка на раст и очекуваниот раст. Поточно, оценувачот за стапката на раст на една ГБД траекторија е дефинирана како

$$g_i(Y_i(t), t) = \frac{1}{t} \log \left( \frac{Y_i(t)}{Y_i(0)} \right), \quad (27)$$

каде  $Y_i(0)$  е почетниот услов. За поедноставување, може да се претпостави дека  $Y_i(0) = 1$ .

Просечната временска стапка на раст се наоѓа преку оставање на времето да ја извади стохастичноста во процесот, односно, преку земање на границата кога  $t \rightarrow \infty$ .

Решението на оваа задача е

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g_i(Y_i(t), t) = \mu - \frac{\sigma^2}{2}. \quad (28)$$

Од друга страна, очекуваната стапка на раст се наоѓа преку заменување на  $Y_i(t)$  со просекот  $\langle Y \rangle$  на бесконечна популација, каде  $\langle \cdot \rangle$  е операцијата на отпросечување. Со други зборови, ова се случува преку овозможување на просторната димензија да ја оттргне стохастичноста преку отпросечување на сите можни реализации. Математички, решението е

$$\lim_{N \rightarrow \infty} g_i(\langle Y \rangle, t) = \mu, \quad (29)$$

каде  $N$  е големината на популацијата.

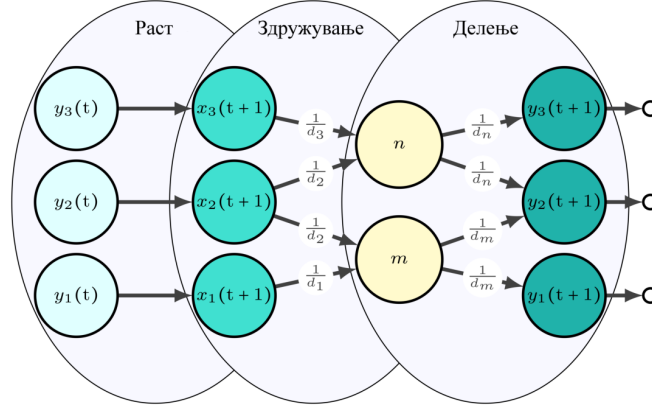
Очигледно, равенката (29) е фиктивна и на долг рок само (28) се набљудува во физички системи. Поради тоа,  $g_i(y_i(t), t)$  се појавува како единствената детерминанта што го оценува еволуционарниот перформанс на една поединечна ГБД траекторија. Многу поважно, во оваа ситуација за акумулираните добивки и нивните промени може многу лесно да се најдат паралелни набљудувања од реални појави. На пример, во еволуционарна теорија на игри просечната временска стапка на раст е позната како геометриски среден фитнес за акумулираната добивка на посебните фенотипи. Дополнително, во економската теорија на одлучување, каде динамиката на богатството следи мултипликативен процес, оваа променлива природно се појавува како единствената мерка за корисност [66].

Главната карактеристика на просечната временска стапка на раст кажува дека единките со помала амплитуда на шумот, треба да имаат и поголеми долгорочни стапки на раст, и на тој начин да бидат фаворизирани при процесот на еволуција. Во овој поглед, откриено е дека фази на раст проследени со здружување и делење на акумулираните добивки промовираат кооперација во флукутирачки средини преку намалување на несигурноста во идниот раст, и, на тој начин, го приближуваат временскиот просек со вредноста на очекувањето [61–63]. За ГБД, овој феномен е прекрасно објаснет во [63]. Конкретно, здружувањето и делењето на акумулирани добивки може да биде објаснето на следниот начин. Мутација предизвикува кооперација во систем од  $N$  поединечни ГБД траектории. Во дискретна верзија од (26), по период на раст, единките ги здружуваат своите акумулирани добивки и потоа ги делат подеднакво меѓу себе. Ова резултира во следната динамика за акумулираните добивки

$$dY = Y \left( \mu dt + \frac{\sigma}{\sqrt{N}} dW \right). \quad (30)$$

Во (30) индексот  $i$  е оттргнат поради еднаквото делење и  $dW = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i dW_i$  претставува здруженото Винерово зголемување.

Се забележува дека равенка (30) е ГБД со амплитуда од  $\sigma/\sqrt{N}$  која предизвикува



Слика 7: Вмрежено здружување и делење на ГБД акумулирани добивки. На сликата се прикажани три единици чии акумулирани добивки растат според (26) и потоа се вложуваат во друштвата  $n$  and  $m$ . На крај, друштвата ги дистрибуираат вложените акумулирани добивки подеднакво меѓу нивните членови. Заради полесна визуелизација, претпоставено е дека  $dt = 1$ .

просечна временска стапка на раст од

$$g_i(Y_i(t), t) = \mu - \frac{\sigma^2}{2} \frac{1}{N}. \quad (31)$$

Како што се зголемува бројот на кооперативни единици, така и просечната временска стапка на раст конвергира кон нејзиното очекување. Ова значи дека во реалистични, конечни, популации вклучувањето на нови единици секогаш ќе резултира со добивка во еволуционарниот перформанс. Поради тоа, здружувањето и делењето на акумулирани добивки е поврзано со еволуцијата на кооперација на најниското можно ниво – преминот кон повеќеклеточност, каде видови од едноклеточни не-кооперативни организми мутираат во повеќеклеточни организми, делејќи хранливи материи преку заеднички мембрани [67, 68]. Истата аналогија е присутна и на највисокото ниво на интелигенција. Како интуитивна илустрација може да се земат ситуации каде индивидуалци се приклучуваат на земјоделски здруженија за да ги разменуваат добрата кои ги произведуваат за фиксен пакет на производи, и на тој начин да го намалат ризикот во одгледување [69]. Друг пример се нации кои се здружуваат во заедници кои целат кон обезбедување на одржлив економски раст преку заеднички цели [70].

Сепак, интеракциите помеѓу единиците ретко се реализираат во такви добро измешани структури. Наместо тоа, тие се водени од комплексна мрежа на контакти [71]. За да се истражи улогата на оваа структура, секоја единица  $i$  се карактеризира со учество во  $d_i$  друштва. Како и во случајот без мрежа, во дискретна верзија од моделот секој период  $t$  започнува со фаза на раст каде акумулираните добивки на  $i$  растат до  $X_i(t + dt)$ . Потоа следува фаза на кооперација каде секоја единица вложува подеднаков дел од акумулираните добивки со кои располага во секое од друштвата каде што припаѓа. На ист начин, секое друштво  $m$  враќа подеднаков дел од вкупните вложени акумулирани добивки до секоја единица  $i$ . Вмреженото здружување и делење на ГБД акумулирани добивки е прикажано на Слика 7.

Математички, структурата на интеракција е опишана преку поврзан бипартитен случаен граф  $\mathbf{B}$  помеѓу конечни множества  $\mathcal{N}$  од  $N$  единки и  $\mathcal{M}$  од  $M$  друштва, со бинарни променливи на врски  $B_{im} \in \{0, 1\}$  помеѓу парови од единки  $i \in \mathcal{N}$  и друштва  $m \in \mathcal{M}$  ( $B_{im} = 1$ , означува присуство на  $i$  во друштвото  $m$ ). Предноста на бипартитната репрезентација од поедноставна монопартитна е во тоа што овозможува опфаќање на поширок спектар од информации за групните композиции [40]. Всушност, секој монопартитен граф може лесно да биде претставен како бипартитен преку хомеоморфизам на графови [72]. Во овој дух, опишаниот модел може да биде поврзан со играта на јавни добра на мрежи [39, 40, 54].

Преку поставување на  $dt \rightarrow 0$ , динамиката на моделот може да биде објаснета со следната равенка

$$dY_i = \left[ \sum_j^N A_{ij} Y_j - Y_i \right] dt + \sum_j^N A_{ij} Y_j (\mu dt + \sigma dW_j), \quad (32)$$

каде  $\mathbf{A}$  е матрица на премин на мрежата со елементи  $A_{ij} = \sum_m^M \frac{B_{im}}{d_m} \frac{B_{jm}}{d_j}$  и која ја определува вкупната вредност на доделените акумулирани добивки од единката  $j$  до единката  $i$ . Равенката (32) потсетува на Бушо–Мезар моделот за релокација на богатство изучуван во референците [73–76], со главна разлика во тоа што сега релокацијата се случува по фазата на раст.

## 4.3 Резултати

### 4.3.1 Просечна временска стапка на раст

Изучување на просечната временска стапка на раст на секоја единка, и преку тоа перформансот на вмрежената единица, само преку равенката (32) е тешка задача. Поради тоа, анализата е започната со проучување на поедноставен дискретен модел,

$$Y_i(t+1) = \sum_j A_{ij} Y_j(t) [1 + \mu + \sigma \varepsilon_j(t)], \quad (33)$$

каде  $\varepsilon_j(t)$  е случајна променлива која следи нормална распределба, и е употребен пристап на средно поле. За оваа цел се дефинирани две дополнителни променливи. Прво, пораснатите акумулирани добивки на секоја единка  $i$  се дадени како

$$X_i(t+1) = Y_i(t) [1 + \mu + \sigma \varepsilon_i(t)],$$

Карактеристично е тоа што за големи  $t$ , временската просечна стапка на раст на оваа променлива е иста како и  $g_i(Y_j(t), t)$ , затоа што нејзината вредност ќе биде доминирана од  $Y_i(t)$ . Второ, е дефинирано средното поле околу единката  $i$  како просечните пораснати акумулирани добивки на сите соседи, вреднувани според нивните придонеси, односно,

$$\langle X_i \rangle = \frac{\sum_j A_{ij} X_j}{\sum_j A_{ij}}.$$

Преку комбинирање на последните две равенки, растот на  $i$  може да биде апроксимиран како

$$g_i(Y_i(t), t) = \frac{\log(v_i)}{t} + \frac{\log(\langle X_i \rangle)}{t}, \quad (34)$$

каде  $v_i = \sum_j A_{ij}$  е локална мерка на централност на единката во мрежата која директно влијае врз распределбата на акумулираните добивки во популацијата.

Две последици произлегуваат од овој заклучок. Прво, во преодниот режим се јавува адитивен член во стапката на раст која е единствено определена од мрежната структура. Поради тоа, за време на овој режим единките кои се подобро поврзани според  $v_i$  исто така ќе имаат и поголеми стапки на раст. Второто, поинтригантно набљудување за еволуционарниот перформанс на кооперативна мрежа е дека последниот член од равенка (34) конвергира до иста вредност за секоја единка. Објаснувањето позади оваа последица, следи од фактот дека се истражува поврзан граф, каде учество во друштво значи дека постои пат помеѓу секој пар од единки. Како последица, се очекува секое  $\langle X_i \rangle$  да биде доминирано од растот на најбогатата единка во мрежата.

Конвергенцијата на долгорочната стапка на раст помеѓу единките укажува дека изучувањето на поединечната стапка на раст е еквивалентно со откривањето на својствата на мрежната стапка на раст  $g(\langle Y \rangle), t) = \frac{d \log(\langle Y \rangle)}{dt}$ , каде сега  $\langle Y \rangle$  е конечна популација конструирана од кооперативната мрежна единица, наместо едноставните ГБД траектории објаснети со равенката (29). Ова е голема предност затоа што овозможува да се примени лемата на Ито и директно да се пресмета просечната временска стапка на раст на мрежата. Формално, лемата вели дека диференцијалот од произволна еднодимензионална функција  $f(t, \mathbf{y})$  регулирана со променлив Ито процес на дифузија (како што е равенка (32)) може да биде најден како

$$df(t, \mathbf{Y}) = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \sum_i \frac{\partial f}{\partial Y_i} dY_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial Y_i \partial Y_j} dY_i dY_j. \quad (35)$$

Во овој случај  $f(t, \mathbf{Y}) = \log(\langle y \rangle)$ . Тогаш, првиот и вториот извод на  $f$  по  $Y_i$  и  $Y_j$  се  $\frac{\partial f}{\partial Y_i} = \frac{1}{N \langle Y \rangle}$  и  $\frac{\partial^2 f}{\partial Y_i \partial Y_j} = -\frac{1}{N^2} \frac{1}{\langle Y \rangle^2}$ . Дополнително, очекувањата за  $dY_i$  и  $dY_i dY_j$  може да бидат апроксимирани како  $\langle dY_i \rangle = (1 + \mu) \sum_j A_{ij} Y_j - Y_i dt$  и  $\langle dY_i dY_j \rangle = \sigma^2 dt \sum_k A_{ik} A_{jk} Y_k^2$  преку игнорирање на членови од ред  $dt^2$  и сметајќи за својството на независното Винерово зголемување  $\langle dW_i^2 \rangle = dt$ . Преку внесување на овие оценки во равенка (35) се добива дека

$$g_i(Y_i(t), t) = \mu - \frac{\sigma^2 \langle \gamma^2 \rangle}{2N}, \quad (36)$$

каде  $\gamma_i = Y_i / \langle y \rangle$  се нормализираните акумулирани добивки на единката  $i$ . Ова е вредност без димензија која го споредува поседот на акумулирани добивки на една единка со просекот на популацијата, и како таква е од особена важност во анализите поврзани со нееднаквоста на богатствата [73]. Всушност, равенката (36) означува дека

перформансот на мрежата од кооператори значајно зависи од распределбата на акумулирани добивки, каде како основна мерка за овој перформанс се појавува варијансата на нормализираните акумулирани добивки  $\langle \gamma^2 \rangle$ . Според овој модел, мрежи со поголема нееднаквост во распределбата на акумулираните добивки, т.е. поголема  $\langle \gamma^2 \rangle$ , се очекуваат да имаат пониски долгорочни стапки на раст од оние каде акумулираните добивки се распределени подеднакво. Овој пронајдок е во согласност со студиите во економија кои посочуваат дека нееднаквоста во распределбата на богатството го влошува растот и развојот на една економија [77, 78].

### 4.3.2 Рамнотежни својства

Во изведувањето на поединечната стапка на раст беше искористено рамнотежно својство на системот. Токму такви својства се клучни за разбирање на улогата на комплексни мрежи во механизмот на здружување и делење на акумулирани добивки. Поточно, може да се забележи дека, во граничните вредности, експоненцијалот од (36) може да биде заменет за секое  $Y_j(t)$  и да се заклучи дека рамнотежната вредност на нормализираните акумулирани добивки е

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_i(t) = v_i. \quad (37)$$

Директна последица е рамнотежната стапка на раст на мрежата

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g_i(Y_i(t), t) = \mu - \frac{\sigma^2 \langle v^2 \rangle}{2N}. \quad (38)$$

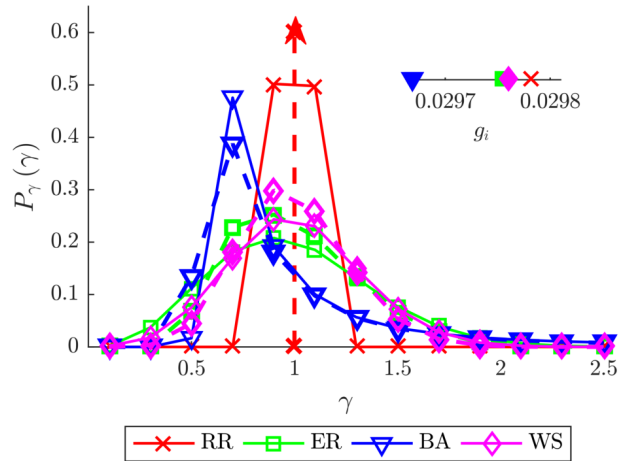
Десната страна на равенката (38) е секогаш поголема од (28). Ова може да биде лесно заклучено преку разгледување на оптимизациониот проблем од максимизирање на  $\langle v^2 \rangle$  притоа земајќи го во предвид ограничувањето  $\sum_i v_i = N$ . Од тука, произлегува дека глобалниот максимум е секогаш помал од  $N$ . Поради тоа, мрежа од здружени единки кои делат акумулирани добивки на долг рок секогаш ќе бидат подобри од поединечна не-кооперативна траекторија.

Иако ова означува дека кооперацијата е доминантна особина во популацијата, наметнува дека, во зависност од распределбата на  $v$ , здружувањето и делењето на акумулирани добивки може да произведе општества каде распределбата на акумулирани добивки драстично се разликува од онаа набљудувана во поединечна ГБД траекторија. Притоа, важно е да се напомене дека распределбата на акумулирани добивки во не-кооперативни ГБД траектории е лог-нормална.

### 4.3.3 Експерименти

За да се проценат разликите помеѓу различните видови на мрежи, спроведени се два експерименти на четири случајни графови генерирани на различен начин: Случаен регуларен граф (RR) [26], Ердош-Рени Поасон граф (ER) [27], Ватс-Строгац мрежа на мал-свет (WS) [28] и Барабаши-Алберт степенска мрежа (BA) [29]. Сите, освен WS графот, ги опишавме во Глава 2. WS графот се наоѓа измеѓу ER и RR графовите, бидејќи при негово конструирање прво се генерира RR граф и потоа со одредена веро-



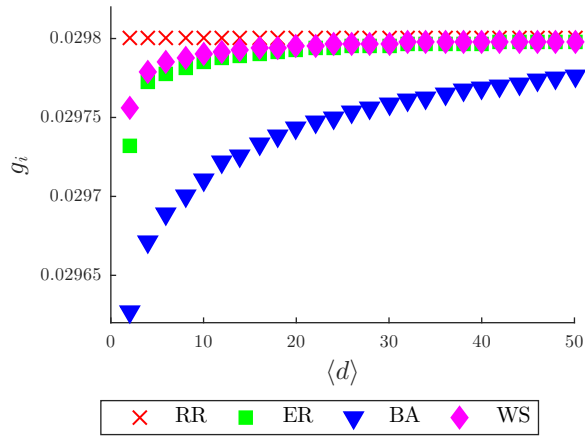


Слика 8: Распределба на нормализираните акумулирани добивки. Оценета распределба за нормализираните акумулирани добивки на четири различни случајни графови – RR, ER, WS и BA. Целосните линии претставуваат симулирани  $X_i$ , додека испрекинатите се аналитичките решенија за  $v_i$ . Вметнатата слика ја дава оценетата стапка на раст за истите графови. Во симулациите,  $\mu = 0.03$  и  $\sigma^2 = 0.4$ . Резултатите се отпросечени од 100 реализации на случајни графови кои содржат 100 јазли (единки и друштва) со просечен број на соседи  $\langle d \rangle = 5$ .

јатност врските се пренасочуваат. Дополнително, сите овие графови се монопартитни, што значи дека секоја единка исто така служи и како друштво преку кои неговите први соседи делат акумулирани добивки. Сепак, преостанува тврдењето дека резултатите прикажани подолу се општи, важат и за останати (бипартитни) поврзани графови и дека оваа селекција е направена само поради едноставните алгоритми за генерирање на истражуваните графови.

Во првиот експеримент, споредена е распределбата на  $v$  помеѓу графовите. Примероци од распределбата се дадени на Слика 8. Лесно може да се забележи совпаѓањето на аналитичкото решение  $v_i$  и нормализираните акумулирани добивки  $\gamma$ . Дополнително, помеѓу графовите се приметува дека распределбата на RR графот конвергира до точката маса, и поради тоа не постои нееднаквост во овој граф, додека во распределбата на ER и WS графовите се појавуваат брзо-опаѓачки опашки на распределбите. За крај, кај нормализираната распределба на BA графот се забележуваат споро-опаѓачки опашки. Како последица на ова, вметнатата слика оценува дека BA графот има најниска долгорочна стапка на раст, проследена од ER и WS графовите.

Вториот експеримент ја истражува улогата на ретки врски, мерена преку просечниот број на соседи  $\langle d \rangle$ , врз еволуционарниот перформанс на одредена мрежа. За да се илустрираат овие резултати, на Слика 9 е прикажана просечната временска стапка на раст како функција од  $\langle d \rangle$ . Додека забелешките за еволуционарниот перформанс помеѓу различните типови на графови преостануваат, се појавуваат разлики внатре во нив. Имено, ER, WS and BA графови во кои врските се почести, имаат подобри перформанси од нивните верзии со ретки врски, додека временската стапка на раст не зависи од просечниот број на соседи во RR графот.



Слика 9: Густина на мрежата и просечната временска стапка на раст. Просечната временска стапка на раст како функција од просечниот број на соседи  $\langle d \rangle$  за истите графови од Слика 8. ГБД параметрите се фиксирани на  $\mu = 0.03$  and  $\sigma^2 = 0.4$ . Резултатите се отпросечени од 100 реализации на случајни графови кои содржат 100 јазли (единки и друштва) со просечен број на соседи  $\langle d \rangle = 5$ .

#### 4.4 Дискусија

Овие заклучоци можеби изгледаат контра-интуитивни, но сепак, произведуваат важни биолошки и општествени последици. Нееднаквоста, како појава, се претпоставува дека ги влошува сите аспекти од благосостојбата на една единка. Навистина, истражуваниот модел го предвидува тоа. Меѓутоа, во него, нееднаквоста во распределбата на акумулирани добивки произлегува како резултат на впреплетената врска помеѓу комплексните мрежи еволуционарно-стабилната кооперација во флукуирачки средини. Додека е познато дека мрежите се склони кон промовирање на овој феномен [29, 79], улогата на кооперативното однесување во структурирани општества е сеуште во почетни истражувања [80–82]. Поради тоа, ова теоретско истражување доведува до подлабоко разбирање на овие две појави.

Како последица на наодите од овој труд, е фактот дека ВА степенскиот граф има најслаб еволуциски перформанс, проследен од ER Поасон случајниот граф и WS графот на мал свет, додека RR графот е најдобриот изведувач според просечната временска стапка на раст. Дополнително, комплексни мрежи со ретки врски се полоши во еволуцијата во споредба со нивните густе верзии. Навистина, се повеќе и повеќе емпириски истражувања укажуваат дека степенските мрежи се ретки во природата [83, 84], дури и теоретски модели за кооперација ја имаат поставено оваа хипотеза заедно со улогата на ретките врски [85–87]. Сепак, и покрај тоа, резултатите не ги оспоруваат наоѓањата во [33, 88] кои заклучуваат дека степенски мрежи се подобри промотори на кооперација. Преостанува тврдењето дека очигледните недоследности пронајдени во литературата се појавуваат поради разликите на начините според кои мрежните интеракции се моделираат. Поради тоа, важно е сите пронаоѓања да бидат преведени само во контекст на истражуваниот модел.

## 4.5 Генерализирана реципрочност во флукуирачки средини

Важно е да се забележи дека досега беше истражуван наједноставниот случај, во кој секоја единка има иста стапка на промена  $\mu$  и амплитуда на шум  $\sigma$ . Во општ случај, единките може да имаат различни способности и среќи, што кореспондира со хетерогени стапки на промена и амплитуди [63]. Вакви ситуации водат до појава на прагови по кои кооперацијата е доминантно набљудување, и дури делумна кооперација може да биде постигната. За полесно промовирање на кооперацијата во овој случај може да помогне правилото на генерализирана реципрочност. Сепак, поради присуството на флукуирачка средина оневозможува да се примени потполно истото правило. Потребна е негова модификација која ќе внимава за постоењето на неергодичната динамика во акумулираната добивка.

Правилото на генерализирана реципрочност во присуство на хетерогена флукуирачка средина гласи

$$p_i(t + dt) = f_{i,t} [g_i(Y_i(t), t)], \quad (39)$$

каде  $f_{i,t} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ . Како специјален пример ја користиме логистичката функција,

$$f_{i,t}(\omega) = [1 + \exp\{-\kappa_i(t)(\omega - \omega_i)\}]^{-1}, \quad (40)$$

каде средната точка  $\omega_i$  е дадена со стабилната точка на  $g_i(Y_i(t), t)$  без здружување и делење. Наклонот на сигмоидната функција  $\kappa_i(t)$  е неограничена растечка функција во однос на  $t$ , и овозможува да се опфати временската зависност на амплитудата на шумот.

Може аналитички да се покаже дека во флукуирачки средини за сите единки, во најлош случај (кога единката безусловно дефектира) растот е еднаков на сопствениот индивидуален раст  $g_i(Y_i(t), t) = \mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}$ . Ова значи дека и при флукуирачки средини, генерализираната реципрочност го задржува своето својство за превенција од експлоатација [89].

## 5 Заклучок

Појавата на кооперација во комплексни мрежи е предводена од постоењето на специфичен механизам за однесување [90]. Поаѓајќи од оваа точка, во овој докторски труд воведовме обединувачка рамка за проучување на улогата на генерализирана реципрочност врз динамиката на кооперација во комплексни мрежи. Механизми од ваков тип се скоро откриени во природни системи кои вклучуваат интеракции помеѓу единки со лимитирачки вештини за процесирање.

И покрај тоа што постојат многу емпириски докази за присуството на вакви механизми во реални системи, истражувањата за улогата на мрежната структура при разновидни интеракции се во своите зачетоци. Во овој контекст, веруваме дека воведената рамка претставува систематски начин за изучување на различни аспекти на кооперација во комплексни мрежи. Поконкретно, генералноста на поставената рамка овозможува вметнување на широка лепеза од општествени дилеми и интеракциски структури во моделирање на кооперација. Интересно, генерализирана реципрочност постои и во високо-интелигентни, човечки интеракции [17, 21].

Покрај својата теоретска вредност, веруваме дека рамката може да биде употребена за да се вреднува кооперацијата во реални системи кои се управувани со слични механизми за однесување. Се упатуваме на неодамнешно експериментално истражување кое сугерира дека принципот на генерализирана реципрочност е подобар промотер на долготрајна кооперација меѓу луѓе од индиректната реципрочност само поради тоа што има помали барања за когнитивни вештини [91]. Во овој контекст, нашиот модел може да доведе до теоретска позадина за опсервациите. Навистина, опсервацијата од [91] може да биде адресирана од перспектива на динамички системи, кои под апликација на генерализирана реципрочност доведуваат до систем со уникатен атрактор каде глобалното ниво на кооперација е максимизирано, а сите единки се зачувани од експлоатација.

Како последна забелешка, истакнуваме дека презентираната рамка може да биде применета дури и во домени надвор од објаснувањето на кооперација. Имено, воведеното правило е директно поврзано со концептот на истражување на нови одлуки, каде единките одлучуваат за своите следни активности врз база на претходното искуство [30]. Овој концепт е сеприсутен во модерните техники за засилено учење и е употребен за развивање на машини кои ефикасно имитираат човечко однесување. Поради тоа, веруваме дека резултатите откриени во овој докторски труд претставуваат почетна рамка за конструирање на машини кои ќе се однесуваат со примена на правилото на генерализирана реципрочност.

## 6 Прилог: Трудови објавени за време на докторатот

### 6.1 Трудови кои се опфатени во докторскиот труд

Promoting cooperation by preventing exploitation: The role of network structure

Zoran Utkovski, Viktor Stojkoski, Lasko Basnarkov, and Ljupco Kocarev

Physical Review E 96, 022315 (2017)

Abstract: A growing body of empirical evidence indicates that social and cooperative behavior can be affected by cognitive and neurological factors, suggesting the existence of state-based decision-making mechanisms that may have emerged by evolution. Motivated by these observations, we propose a simple mechanism of anonymous network interactions identified as a form of generalized reciprocity—a concept organized around the premise “help anyone if helped by someone”—and study its dynamics on random graphs. In the presence of such a mechanism, the evolution of cooperation is related to the dynamics of the levels of investments (i.e., probabilities of cooperation) of the individual nodes engaging in interactions. We demonstrate that the propensity for cooperation is determined by a network centrality measure here referred to as neighborhood importance index and discuss relevant implications to natural and artificial systems. To address the robustness of the state-based strategies to an invasion of defectors, we additionally provide an analysis which redefines the results for the case when a fraction of the nodes behave as unconditional defectors.

Cooperation dynamics of generalized reciprocity in state-based social dilemmas

Viktor Stojkoski, Zoran Utkovski, Lasko Basnarkov, and Ljupco Kocarev

Physical Review E 97, 052305 (2018)

Abstract: We introduce a framework for studying social dilemmas in networked societies where individuals follow a simple state-based behavioral mechanism based on generalized reciprocity, which is rooted in the principle “help anyone if helped by someone.” Within this general framework, which applies to a wide range of social dilemmas including, among others, public goods, donation, and snowdrift games, we study the cooperation dynamics on a variety of complex network examples. By interpreting the studied model through the lenses of nonlinear dynamical systems, we show that cooperation through generalized reciprocity always emerges as the unique attractor in which the overall level of cooperation is maximized, while simultaneously exploitation of the participating individuals is prevented. The analysis elucidates the role of the network structure, here captured by a local centrality measure which uniquely quantifies the propensity of the network structure to cooperation by dictating the degree of cooperation displayed both at the microscopic and macroscopic level. We demonstrate the applicability of the analysis on a practical example by considering an interaction structure that couples a donation process with a public goods game.

## Multiplex Network Structure Enhances the Role of Generalized Reciprocity in Promoting Cooperation

Viktor Stojkoski, Zoran Utkovski, Elisabeth André, and Ljupco Kocarev

Proc. of the 17th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS 2018)

Abstract: In multi-agent systems, cooperative behavior is largely determined by the network structure which dictates the interactions among neighboring agents. These interactions often exhibit multidimensional features, either as relationships of different types or temporal dynamics, both of which may be modeled as a "multiplex" network. Against this background, here we advance the research on cooperation models inspired by generalized reciprocity, a simple pay-it-forward behavioral mechanism, by considering a multidimensional networked society. Our results reveal that a multiplex network structure can act as an enhancer of the role of generalized reciprocity in promoting cooperation by acting as a latent support, even when the parameters in some of the separate network dimensions suggest otherwise (i.e. favor defection). As a result, generalized reciprocity forces the cooperative contributions of the individual agents to concentrate in the dimension which is most favorable for the existence of cooperation.

## The role of multiplex network structure in cooperation through generalized reciprocity

Viktor Stojkoski, Zoran Utkovski, Elisabeth André, and Ljupco Kocarev

Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 531, 121805 (2018)

Abstract: Recent studies suggest that the emergence of cooperative behavior can be explained by generalized reciprocity, a behavioral mechanism based on the principle of "help anyone if helped by someone". In complex systems, the cooperative dynamics is largely determined by the network structure which dictates the interactions among neighboring individuals. These interactions often exhibit multidimensional features, either as relationships of different types or temporal dynamics, both of which may be modeled as a "multiplex" network. Against this background, here we advance the research on cooperation models inspired by generalized reciprocity by considering a multidimensional networked society. Our results reveal that a multiplex network structure may enhance the role of generalized reciprocity in promoting cooperation, whereby some of the network dimensions act as a latent support for the others. As a result, generalized reciprocity forces the cooperative contributions of the individuals to concentrate in the dimension which is most favorable for the existence of cooperation.

## Cooperation dynamics in networked geometric Brownian motion

Viktor Stojkoski, Zoran Utkovski, Lasko Basnarkov, and Ljupco Kocarev

Physical Review E 99, 062312 (2019)

Abstract: Recent works suggest that pooling and sharing may constitute a fundamental mechanism for the evolution of cooperation in well-mixed fluctuating environments. The rationale is that, by reducing the amplitude of fluctuations, pooling and sharing increases the steady-state growth rate at which individuals self-reproduce. However, in reality interactions are seldom realized in a well-mixed structure, and the underlying topology is in general described by a complex network. Motivated by this observation, we investigate the role of the network structure on the cooperative dynamics in fluctuating environments, by developing a model for networked pooling and sharing of resources undergoing a geometric Brownian motion. The study reveals that, while in general cooperation increases the individual steady state growth rates (i.e., is evolutionary advantageous), the interplay with the network structure may yield large discrepancies in the observed individual resource endowments. We comment possible biological and social implications and discuss relations to econophysics.

## Evolution of cooperation in networked heterogeneous fluctuating environments

Viktor Stojkoski, Marko Karbevski, Zoran Utkovski, Lasko Basnarkov, and Ljupco Kocarev

arXiv preprint, arXiv:1912.09205 (2020)

Abstract: Fluctuating environments are circumstances in which random variations play an essential role in the evolutionary outcome. In such environments, cooperators may co-exist with defectors even without the help of an auxiliary mechanism. However, studies on the role of fluctuating environments in promoting cooperation have so far focused on simple settings. Under these settings the population is described as a well-mixed structure of entities displaying homogeneous physical traits which are unable to utilize additional decision making mechanisms. In this paper, we develop a systematic way for investigating structured populations consisting of entities with heterogeneous characteristics. By interpreting the structure as a complex network, we perform a detailed analysis on the role of interaction structures in the evolutionary stability of cooperation in fluctuating environments. We find that in such networked fluctuating environments, the dynamics induces creation of components characterized with distinct evolutionary properties. We utilize this analysis to examine the applicability of a simple decision making rule in a variety of settings. We thereby show that the introduced rule leads to steady state cooperative behavior that is always greater than or equal to the one predicted by evolutionary stability analysis. As a consequence, the implementation of our results may go beyond explaining the evolution of cooperation. In particular, they can be directly applied in domains that deal with the development of artificial systems able to adequately mimic reality, such as reinforcement learning.

## 6.2 Трудови кои не се опфатени во докторскиот труд

Economic complexity unfolded: Interpretable model for the productive structure of economies

Zoran Utkovski, Melanie F. Pradier, Viktor Stojkoski, Fernando Perez-Cruz, Ljupco Kocarev

PloS one 13-8 (2018)

Abstract: Economic complexity reflects the amount of knowledge that is embedded in the productive structure of an economy. It resides on the premise of hidden capabilities – fundamental endowments underlying the productive structure. In general, measuring the capabilities behind economic complexity directly is difficult, and indirect measures have been suggested which exploit the fact that the presence of the capabilities is expressed in a country’s mix of products. We complement these studies by introducing a probabilistic framework which leverages Bayesian non-parametric techniques to extract the dominant features behind the comparative advantage in exported products. Based on economic evidence and trade data, we place a restricted Indian Buffet Process on the distribution of countries’ capability endowment, appealing to a culinary metaphor to model the process of capability acquisition. The approach comes with a unique level of interpretability, as it produces a concise and economically plausible description of the instantiated capabilities.

Sparse three-parameter restricted Indian buffet process for understanding international trade

Melanie F. Pradier, Viktor Stojkoski, Zoran Utkovski, Ljupco Kocarev and Fernando Perez-Cruz

Proc. of 2018 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 2018)

Abstract: This paper presents a Bayesian nonparametric latent feature model specially suitable for exploratory analysis of high-dimensional count data. We perform a non-negative doubly sparse matrix factorization that has two main advantages: not only we are able to better approximate the row input distributions, but the inferred topics are also easier to interpret. By combining the three-parameter and restricted Indian buffet processes into a single prior, we increase the model flexibility, allowing for a full spectrum of sparse solutions in the latent space. We demonstrate the usefulness of our approach in the analysis of countries’ economic structure. Compared to other approaches, empirical results show our model’s ability to give easy-to-interpret information and better capture the underlying sparsity structure of data.



## Evidence of innovation performance in the period of economic recovery in Europe

Elena Makrevska Disoska, Dragan Tevdovski, Katerina Toshevska-Trpchevska and Viktor Stojkoski

Innovation: The European Journal of Social Science Research, 1-16 (2018)

Abstract: This paper provides empirical evidence on the innovation performance in the European countries in the years of recovery from the global economic and financial crisis by using the CDM model of simultaneous equations. The model directly links R&D engagement and intensity to innovation outcomes measured either as process or as product innovation, and then estimates the effectiveness of the innovative efforts leading to productivity gains. The difference between the drivers of innovation systems and its influence over the productivity growth is analyzed between two different institutional settings in Europe. For that purpose a company-level dataset is used from the 2012 round of the Community Innovation Survey. The results indicate that the recent financial crisis had negative influence on the companies' willingness to innovate. The effect of the crisis led to further divergence in the innovation systems of these two institutional settings. Identifying the characteristics of the innovation systems and drivers of innovation during the turmoil shows that policy instruments on EU level should be oriented towards creation of competitive business environment, encouragement to adopt the best management techniques and organizational structures and improvement of well-functioning capital, product and labor markets.

## Correlation patterns in foreign exchange markets

Lasko Basnarkov, Viktor Stojkoski, Zoran Utkovski and Ljupco Kocarev

Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 525, 1026-1037 (2019)

Abstract: The value of an asset in a financial market is given in terms of another asset known as numeraire. The dynamics of the value is non-stationary and hence, to quantify the relationships between different assets, one requires convenient measures such as the means and covariances of the respective log returns. Here, we develop transformation equations for these means and covariances when one changes the numeraire. The results are verified by a thorough empirical analysis capturing the dynamics of numerous assets in a foreign exchange market. We show that the partial correlations between pairs of assets are invariant under the change of the numeraire. This observable quantifies the relationship between two assets, while the influence of the rest is removed. As such the partial correlations uncover intriguing observations which may not be easily noticed in the ordinary correlation analysis.

## The Impact of a Crisis on the Innovation Systems in Europe: Evidence from the CIS10 Innovation Survey

Katerina Toshevska-Trpchevska, Elena Makrevska Disoska, Dragan Tevdovski and Viktor Stojkoski

European Review 27, 4, 543-562 (2019)

Abstract: The varieties of the national innovation systems among European countries are reflected in the large differences, discrepancies and sometimes unexpected results in the innovation processes and their influence on labor productivity growth. The goal of this paper is to find the differences between the drivers of the innovation systems and their influence on growth of productivity between two groups of countries with different institutional settings in the period of the financial and economic crisis in Europe. The first group consists of a selection of CEE (Central and East European) countries. The second group consists of Germany, Norway, Spain and Portugal. In order to measure the role of innovation on productivity growth we use the CDM (Crepon, Duguet and Mairesse) model of simultaneous equations. The model directly links R&D engagement and intensity to innovation outcomes measured either as process or product innovation, and then estimates the effectiveness of the innovative effort leading to productivity gains. The company-level dataset is drawn from the Community Innovation Survey (CIS10). There is one common result for the two groups, that in general the probability for a typical firm to engage in innovation increases with its size. The other factors influencing the decision process differ. A firm's productivity increases significantly with innovation output, but only with firms operating in Western Europe. The results for firms in Central and Eastern Europe indicate that these countries' national innovation systems are vulnerable, and in periods of crises higher level of innovation output leads to lower labor productivity. Therefore, systemic faults in the national innovation systems result in their unsustainability, especially visible in periods of crises, as was the case in 2008–2010. When it comes to Western European countries, the financial and economic crisis did not have negative effects on their innovation systems as innovation activity resulted in higher levels of labor productivity. Regarding the CEE group of countries, the crisis influenced both the innovation process and labor productivity as a whole negatively.

## Robust determinants of companies' capacity to innovate: a Bayesian model averaging approach

Mijalche Santa, Viktor Stojkoski, Marko Josimovski, Igor Trpevski and Ljupco Kocarev  
Technology Analysis & Strategic Management 31, 11, 1283-1296 (2019)

Abstract: Robustness of innovation determinants is a crucial component for the company's capacity to innovate and is increasingly central to our understanding of country (national) innovation capacity. The large number of internal and external determinants therefore raises the question of finding/perceiving the robust determinants of companies' capacity to innovate. By using a Bayesian Model Averaging approach, the World Economic Forum's

(WEF) Competitiveness dataset of 135 countries, 10 periods, and a total of 1.239 observations, has been analysed. From 62 explanatory determinants, 27 determinants were found to be significantly and robustly correlated with companies' capacity to innovate. Our results show that the large number of the previously suggested innovation determinants is not robust. A holistic approach that jointly considers the internal and external determinants of CCI is proposed. A central ingredient of this approach is direct public and private financial support for performing research and development.

### Option pricing with heavy-tailed distributions of logarithmic returns

Lasko Basnarkov, Viktor Stojkoski, Zoran Utkovski and Ljupco Kocarev

International Journal of Theoretical and Applied Finance 22, 7, 1950041 (2019)

Abstract: A growing body of literature suggests that heavy tailed distributions represent an adequate model for the observations of log returns of stocks. Motivated by these findings, here, we develop a discrete time framework for pricing of European options. Probability density functions of log returns for different periods are conveniently taken to be convolutions of the Student's t-distribution with three degrees of freedom. The supports of these distributions are truncated in order to obtain finite values for the options. Within this framework, options with different strikes and maturities for one stock rely on a single parameter — the standard deviation of the Student's t-distribution for unit period. We provide a study which shows that the distribution support width has weak influence on the option prices for certain range of values of the width. It is furthermore shown that such family of truncated distributions approximately satisfies the no-arbitrage principle and the put-call parity. The relevance of the pricing procedure is empirically verified by obtaining remarkably good match of the numerically computed values by our scheme to real market data.

### Lead-lag relationships in foreign exchange markets

Lasko Basnarkov, Viktor Stojkoski, Zoran Utkovski and Ljupco Kocarev

Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 539, 122986 (2020)

Abstract: Lead-lag relationships among assets represent a useful tool for analyzing high frequency financial data. However, research on these relationships predominantly focuses on correlation analyses for the dynamics of stock prices, spots and futures on market indexes, whereas foreign exchange data have been less explored. To provide a valuable insight on the nature of the lead-lag relationships in foreign exchange markets here we perform a detailed study for the one-minute log returns on exchange rates through three different approaches: (i) lagged correlations, (ii) lagged partial correlations and (iii) Granger causality. In all studies, we find that even though for most pairs of exchange rates lagged effects are absent, there are many pairs which pass statistical significance tests. Out of the statistically significant

relationships, we construct directed networks and investigate the influence of individual exchange rates through the PageRank algorithm. The algorithm, in general, ranks stock market indexes quoted in their respective currencies, as most influential. In contrast to the claims of the efficient market hypothesis, these findings suggest that all market information does not spread instantaneously.

## 7 Литература

### Литература

- [1] Charles Darwin. The descent of man: and selection in relation to sex. John Murray, Albemarle Street., 1888.
- [2] J Maynard Smith and GR Price. The logic of animal conflict. *Nature*, 246:15, 1973.
- [3] Elizabeth Pennisi. How did cooperative behavior evolve? *Science*, 309(5731):93–93, 2005.
- [4] Robert L Trivers. The evolution of reciprocal altruism. *Quart. Rev. Biol.*, pages 35–57, 1971.
- [5] Martin A Nowak and Karl Sigmund. Evolution of indirect reciprocity. *Nature*, pages 1291–1298, 2005.
- [6] Robert Axelrod and William D Hamilton. The naked emperor: Seeking a more plausible genetic basis for psychological altruism. *Science*, 211:1390–1396, 1981.
- [7] Sven Van Segbroeck, Jorge M Pacheco, Tom Lenaerts, and Francisco C Santos. Emergence of fairness in repeated group interactions. *Physical review letters*, 108(15):158104, 2012.
- [8] Christoph Hauert, Franziska Michor, Martin A Nowak, and Michael Doebeli. Synergy and discounting of cooperation in social dilemmas. *Journal of theoretical biology*, 239(2):195–202, 2006.
- [9] Timothy Killingback and Michael Doebeli. The continuous prisoner’s dilemma and the evolution of cooperation through reciprocal altruism with variable investment. *The American Naturalist*, 160(4):421–438, 2002.
- [10] Erez Yoeli, Moshe Hoffman, David G Rand, and Martin A Nowak. Powering up with indirect reciprocity in a large-scale field experiment. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 110(Supplement 2):10424–10429, 2013.
- [11] Christian Hilbe, Bin Wu, Arne Traulsen, and Martin A Nowak. Cooperation and control in multiplayer social dilemmas. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 111(46):16425–16430, 2014.
- [12] Christian Hilbe, Bin Wu, Arne Traulsen, and Martin A Nowak. Evolutionary performance of zero-determinant strategies in multiplayer games. *Journal of theoretical biology*, 374:115–124, 2015.
- [13] Liming Pan, Dong Hao, Zhihai Rong, and Tao Zhou. Zero-determinant strategies in iterated public goods game. *Scientific reports*, 5, 2015.

- [14] Gerrit Sander van Doorn and Michael Taborsky. The evolution of generalized reciprocity on social interaction networks. *Evolution*, 66(3):651–664, 2012.
- [15] Michael Taborsky, Joachim G. Frommen, and Christina Riehl. Correlated pay-offs are key to cooperation. *Philos. Trans. Roy. Soc. B.*, 371(1687), 2016.
- [16] Claudia Rutte and Michael Taborsky. Generalized reciprocity in rats. *PLoS Biol*, 5(7):e196, 2007.
- [17] Monica Y Bartlett and David DeSteno. Gratitude and prosocial behavior: Helping when it costs you. *Psychol. Sci.*, 17(4):319–325, 2006.
- [18] Alice M Isen. Positive affect, cognitive processes, and social behavior. In *Advances in experimental social psychology*, volume 20, pages 203–253. Elsevier, 1987.
- [19] Kristin L Leimgruber, Adrian F Ward, Jane Widness, Michael I Norton, Kristina R Olson, Kurt Gray, and Laurie R Santos. Give what you get: capuchin monkeys (*cebus apella*) and 4-year-old children pay forward positive and negative outcomes to conspecifics. *PloS one*, 9(1):e87035, 2014.
- [20] Nastassja Gfrerer and Michael Taborsky. Working dogs cooperate among one another by generalised reciprocity. *Sci. Rep.*, 7, 2017.
- [21] Luca Stanca. Measuring indirect reciprocity: Whose back do we scratch? *J. Econ. Psychol.*, 30(2):190–202, 2009.
- [22] Zoltán Barta, John M McNamara, Dóra B Huszár, and Michael Taborsky. Cooperation among non-relatives evolves by state-dependent generalized reciprocity. *Philos. Trans. Roy. Soc. B.*, 278(1707):843–848, 2011.
- [23] Zoran Utkovski, Viktor Stojkoski, Lasko Basnarkov, and Ljupco Kocarev. Promoting cooperation by preventing exploitation: The role of network structure. *Physical Review E*, 96(2):022315, 2017.
- [24] Matjaz Perc, Jillian J Jordan, David G Rand, Zhen Wang, Stefano Boccaletti, and Attila Szolnoki. Statistical physics of human cooperation. *Physics Reports*, 687:1–51, 2017.
- [25] Manfred Milinski and Bettina Rockenbach. On the interaction of the stick and the carrot in social dilemmas. *Journal of Theoretical Biology*, 299:139–143, 2012.
- [26] Béla Bollobás. *Modern graph theory*, volume 184. Springer Science & Business Media, 2013.
- [27] Paul Erdos and Alfréd Rényi. On the evolution of random graphs. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, 5(1):17–60, 1960.
- [28] Duncan J Watts and Steven H Strogatz. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *nature*, 393(6684):440, 1998.

- [29] Albert-László Barabási and Réka Albert. Emergence of scaling in random networks. *science*, 286(5439):509–512, 1999.
- [30] Joel Lehman and Kenneth O. Stanley. Exploiting open-endedness to solve problems through the search for novelty. In *Proceedings of the Eleventh International Conference on Artificial Life (Alife XI)*. MIT Press, 2008.
- [31] Uzi Motro. Co-operation and defection: playing the field and the ess. *Journal of Theoretical Biology*, 151(2):145–154, 1991.
- [32] Benjamin Kerr, Peter Godfrey-Smith, and Marcus W Feldman. What is altruism? *Trends in ecology & evolution*, 19(3):135–140, 2004.
- [33] F. C. Santos and J. M. Pacheco. Scale-free networks provide a unifying framework for the emergence of cooperation. *Phys. Rev. Lett.*, 95:098104, Aug 2005.
- [34] Elinor Ostrom. *Governing the commons*. Cambridge university press, 2015.
- [35] Michael Doebeli and Christoph Hauert. Models of cooperation based on the prisoner’s dilemma and the snowdrift game. *Ecology Letters*, 8(7):748–766, 2005.
- [36] Marco Archetti and Istvan Scheuring. Game theory of public goods in one-shot social dilemmas without assortment. *Journal of theoretical biology*, 299:9–20, 2012.
- [37] Federico Battiston, Matjaz Perc, and Vito Latora. Determinants of public cooperation in multiplex networks. *New Journal of Physics*, 2017.
- [38] Christian Hilbe, Luis A Martinez-Vaquero, Krishnendu Chatterjee, and Martin A Nowak. Memory-n strategies of direct reciprocity. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 114(18):4715–4720, 2017.
- [39] Francisco C Santos, Marta D Santos, and Jorge M Pacheco. Social diversity promotes the emergence of cooperation in public goods games. *Nature*, 454(7201):213, 2008.
- [40] Matjaž Perc, Jesús Gómez-Gardeñes, Attila Szolnoki, Luis M Floría, and Yamir Moreno. Evolutionary dynamics of group interactions on structured populations: a review. *Journal of the royal society interface*, 10(80):20120997, 2013.
- [41] Mikko Kivela, Alex Arenas, Marc Barthelemy, James P Gleeson, Yamir Moreno, and Mason A Porter. Multilayer networks. *Journal of complex networks*, 2(3):203–271, 2014.
- [42] Scott A Boorman and Harrison C White. Social structure from multiple networks. ii. role structures. *American journal of sociology*, 81(6):1384–1446, 1976.
- [43] Harrison C White, Scott A Boorman, and Ronald L Breiger. Social structure from multiple networks. i. blockmodels of roles and positions. *American journal of sociology*, 81(4):730–780, 1976.

- [44] Andrej Gajduk, Zoran Utkovski, Lasko Basnarkov, and Ljupco Kocarev. Energy-efficiency in decentralized wireless networks: A game-theoretic approach inspired by evolutionary biology. In 2014 12th International Symposium on Modeling and Optimization in Mobile, Ad Hoc, and Wireless Networks (WiOpt), pages 636–643. IEEE, 2014.
- [45] Shan Chu and Xin Wang. Opportunistic and cooperative spatial multiplexing in mimo ad hoc networks. *IEEE/ACM Transactions on Networking (TON)*, 18(5):1610–1623, 2010.
- [46] Rob Sherwood, Michael Chan, Adam Covington, Glen Gibb, Mario Flajslik, Nikhil Handigol, Te-Yuan Huang, Peyman Kazemian, Masayoshi Kobayashi, Jad Naous, et al. Carving research slices out of your production networks with openflow. *ACM SIGCOMM Computer Communication Review*, 40(1):129–130, 2010.
- [47] Navid Nikaein, Eryk Schiller, Romain Favraud, Kostas Katsalis, Donatos Stavropoulos, Islam Alyafawi, Zhongliang Zhao, Torsten Braun, and Thanasis Korakis. Network store: Exploring slicing in future 5g networks. In *Proceedings of the 10th International Workshop on Mobility in the Evolving Internet Architecture*, pages 8–13. ACM, 2015.
- [48] Shatakshi Pandit, Yu Zhou, Lily Shiue, Gabriela Coutinho-Mansfield, Hairi Li, Jinsong Qiu, Jie Huang, Gene W Yeo, Manuel Ares Jr, and Xiang-Dong Fu. Genome-wide analysis reveals sr protein cooperation and competition in regulated splicing. *Molecular cell*, 50(2):223–235, 2013.
- [49] Chris Stark, Bobby-Joe Breitkreutz, Teresa Reguly, Lorrie Boucher, Ashton Breitkreutz, and Mike Tyers. Biogrid: a general repository for interaction datasets. *Nucleic acids research*, 34(suppl\_1):D535–D539, 2006.
- [50] Manlio De Domenico, Vincenzo Nicosia, Alexandre Arenas, and Vito Latora. Structural reducibility of multilayer networks. *Nature communications*, 6:ncomms7864, 2015.
- [51] Manlio De Domenico, Albert Solé-Ribalta, Sergio Gómez, and Alex Arenas. Navigability of interconnected networks under random failures. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 111(23):8351–8356, 2014.
- [52] Alvin E Roth and Ido Erev. Learning in extensive-form games: Experimental data and simple dynamic models in the intermediate term. *Games and economic behavior*, 8(1):164–212, 1995.
- [53] Colin Camerer and Teck Hua Ho. Experience-weighted attraction learning in normal form games. *Econometrica*, 67(4):827–874, 1999.
- [54] Viktor Stojkoski, Zoran Utkovski, Lasko Basnarkov, and Ljupco Kocarev. Cooperation dynamics of generalized reciprocity in state-based social dilemmas. *Physical Review E*, 97(5):052305, 2018.
- [55] Jürgen Jost and Wei Li. Reinforcement learning in complementarity game and population dynamics. *Physical Review E*, 89(2):022113, 2014.



- [56] Ole Peters and William Klein. Ergodicity breaking in geometric brownian motion. *Physical review letters*, 110(10):100603, 2013.
- [57] Filippo Radicchi and Claudio Castellano. Uncertainty reduction for stochastic processes on complex networks. *Physical Review Letters*, 120(19):198301, 2018.
- [58] Frank Stollmeier and Jan Nagler. Unfair and anomalous evolutionary dynamics from fluctuating payoffs. *Physical review letters*, 120(5):058101, 2018.
- [59] Xiu-Deng Zheng, Cong Li, Sabin Lessard, and Yi Tao. Environmental noise could promote stochastic local stability of behavioral diversity evolution. *Physical review letters*, 120(21):218101, 2018.
- [60] Ivana Cvijović, Benjamin H Good, Elizabeth R Jerison, and Michael M Desai. Fate of a mutation in a fluctuating environment. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 112(36):E5021–E5028, 2015.
- [61] Gur Yaari and Sorin Solomon. Cooperation evolution in random multiplicative environments. *The European Physical Journal B*, 73(4):625–632, 2010.
- [62] Thomas Liebmann, Stefan Kassberger, and Martin Hellmich. Sharing and growth in general random multiplicative environments. *European Journal of Operational Research*, 258(1):193–206, 2017.
- [63] Ole Peters and Alexander Adamou. The evolutionary advantage of cooperation. arXiv preprint arXiv:1506.03414, 2015.
- [64] John Aitchison and James AC Brown. The lognormal distribution with special reference to its uses in economics. 1957.
- [65] Sidney Redner. Random multiplicative processes: An elementary tutorial. *American Journal of Physics*, 58(3):267–273, 1990.
- [66] Ole Peters and Murray Gell-Mann. Evaluating gambles using dynamics. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 26(2):023103, 2016.
- [67] Martin B Short, Cristian A Solari, Sujoy Ganguly, Thomas R Powers, John O Kessler, and Raymond E Goldstein. Flows driven by flagella of multicellular organisms enhance long-range molecular transport. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 103(22):8315–8319, 2006.
- [68] Marcus Roper, Mark J Dayel, Rachel E Pepper, and MAR Koehl. Cooperatively generated stresslet flows supply fresh fluid to multicellular choanoflagellate colonies. *Physical review letters*, 110(22):228104, 2013.
- [69] Katherine L Adam. Community supported agriculture. ATTRA-National Sustainable Agriculture Information Service Butte, MT, 2006.

- [70] André Sapir, Philippe Aghion, Giuseppe Bertola, Martin Hellwig, Jean Pisani-Ferry, Dariusz Rosati, José Viñals, Helen Wallace, Marco Buti, Mario Nava, et al. An agenda for a growing Europe: The Sapir report. OUP Oxford, 2004.
- [71] Benjamin Allen, Gabor Lippner, Yu-Ting Chen, Babak Fotouhi, Naghmeh Momeni, Shing-Tung Yau, and Martin A Nowak. Evolutionary dynamics on any population structure. *Nature*, 544(7649):227, 2017.
- [72] Richard J Trudeau. Introduction to graph theory. Courier Corporation, 2013.
- [73] Jean-Philippe Bouchaud and Marc Mézard. Wealth condensation in a simple model of economy. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 282(3-4):536–545, 2000.
- [74] Diego Garlaschelli and Maria I Loffredo. Effects of network topology on wealth distributions. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 41(22):224018, 2008.
- [75] Yonatan Berman, Ole Peters, and Alexander Adamou. An empirical test of the ergodic hypothesis: Wealth distributions in the united states. 2017.
- [76] Takashi Ichinomiya. Wealth distribution on complex networks. *Physical Review E*, 86(6):066115, 2012.
- [77] Dierk Herzer and Sebastian Vollmer. Inequality and growth: evidence from panel cointegration. *The Journal of Economic Inequality*, 10(4):489–503, 2012.
- [78] Andy Berg and Jonathan D Ostry. Equality and efficiency. *Finance & Development*, 48(3):12–15, 2011.
- [79] Matthew J Salganik, Peter Sheridan Dodds, and Duncan J Watts. Experimental study of inequality and unpredictability in an artificial cultural market. *science*, 311(5762):854–856, 2006.
- [80] Akihiro Nishi, Hirokazu Shirado, David G Rand, and Nicholas A Christakis. Inequality and visibility of wealth in experimental social networks. *Nature*, 526(7573):426, 2015.
- [81] Yen-Sheng Chiang. Good samaritans in networks: An experiment on how networks influence egalitarian sharing and the evolution of inequality. *PloS one*, 10(6):e0128777, 2015.
- [82] Milena Tsvetkova, Claudia Wagner, and Andrew Mao. The emergence of inequality in social groups: Network structure and institutions affect the distribution of earnings in cooperation games. *PloS one*, 13(7):e0200965, 2018.
- [83] Anna D Broido and Aaron Clauset. Scale-free networks are rare. arXiv preprint arXiv:1801.03400, 2018.
- [84] Aaron Clauset, Cosma Rohilla Shalizi, and Mark EJ Newman. Power-law distributions in empirical data. *SIAM review*, 51(4):661–703, 2009.

- [85] Tomohiko Konno. A condition for cooperation in a game on complex networks. *J. Theor. Biol.*, 269(1):224 – 233, 2011.
- [86] Martin A Nowak and Robert M May. The spatial dilemmas of evolution. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 3(01):35–78, 1993.
- [87] Feng Fu, Long Wang, Martin A. Nowak, and Christoph Hauert. Evolutionary dynamics on graphs: Efficient method for weak selection. *Phys. Rev. E*, 79:046707, Apr 2009.
- [88] F. C. Santos, J. M. Pacheco, and Tom Lenaerts. Evolutionary dynamics of social dilemmas in structured heterogeneous populations. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 103(9):3490–3494, 2006.
- [89] Viktor Stojkoski, Marko Karbevski, Zoran Utkovski, Lasko Basnarkov, and Ljupco Kocarev. Evolution of cooperation in populations with heterogeneous multiplicative resource dynamics. arXiv preprint arXiv:1912.09205, 2019.
- [90] Martin A Nowak. Five rules for the evolution of cooperation. *Science*, 314(5805):1560–1563, 2006.
- [91] Wayne E Baker and Nathaniel Bulkley. Paying it forward vs. rewarding reputation: Mechanisms of generalized reciprocity. *Organization science*, 25(5):1493–1510, 2014.