Зборник на трудови. Машински факултет – Скопје, год. **17**, бр. 1, стр. 35–42 (1998)
ISSN 0351–6067
UDC: 004.92
514.753

CODEN: ZTFSEH – 264
Пристигнато: 27 октомври 1997
Прифатено: 23 април 1998

Оригинален научен труд

СТЕРЕОМЕТРИСКО ПРОЕКТИРАЊЕ НА ТРОДИМЕНЗИОНАЛНИ И ЧЕТИРИДИМЕНЗИОНАЛНИ ОБЈЕКТИ ВО ХИПЕРБОЛОИДЕН ПРОЕКТИВЕН ПРОСТОР

Ристо Ташевски и **Владимир Дуковски**

Машински факултет, Универзитет „Св. Кирил и Методиј“,
п. фах. 464, 91001 Скопје, Република Македонија

Направен е математички модел и компјутерска програма за стереометриско проектирање на 3D и 4D објекти во хиперболоиден проективен простор. Целта на споменатото проектирање е реално претставување на објектите од човековата околина. Тоа подразбира претставените објекти да не се разликуваат од реалните. Објектите се проектираат на мрежницата од очниот механизам. Мрежницата нема геометриска форма и идеално би било нејзиниот облик да може да се сними и на таа површина да се проектира. Обликот на мрежницата може да се апроксимира со хиперболоидна површина. Значи, единствен начин на реално визуелно прикажување е стереометриското проектирање во еден од криволиниските проективни простори.

Стереометриски проектираните објекти во разните проективни простори презентирани на дводимензионална рамнина (хартија, екран) се воспримаат со помош на оптички апарати (стереоскоп, наочари и др.).

Клучни зборови: стереометрија; криволиниски (хиперболоиден) проективен простор; 4D објект

ВОВЕД

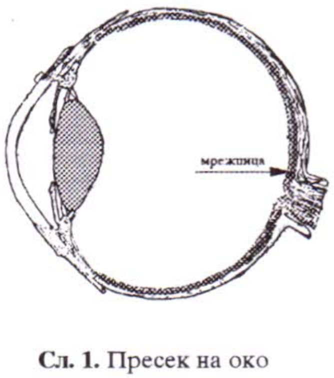
Виртуелната реалност денес е најактуелна и најмодерна тема која се обработува од сите научни профили. Виртуелната реалност претставува визуализација на одреден простор во кој интерактивно може да се дејствува [9, 12]. Просторот во кој се врши визуализацијата може да е реален или имагинарен. Просторот кај човекот треба да создаде мислење дека визуализацијата е реална, односно дека тој се наоѓа во реален свет во кој може активно да учествува. За да се постигне горното, треба да се симулираат сите сетилни компоненти – видот, слухот, допирот, вкусот, чувствата, психичките моменти, реакциите на другите субјекти и објекти во тој простор. За симулација на видот се користи стереометриското проектирање како визуелна компонента на виртуелната реалност.

Стереометриското проектирање претставува проектирање од два центра на вертикална рамнина или површина, при што се добиваат две проекции. Проекциите гледани со помош на оптичка направа создаваат кај корисникот тродимензионална претстава за објектот кој го посматра. Во методот кој ќе се користи за добивање на стереометриските проекции се избегнуваат сложените математички постулати и се вградуваат поедноставните нацртно-геометриски постулати или методи.

Принципите за реално претставување на објектите произлегуваат од самиот човек. Од неговиот очен механизам кој се состои од две очи, односно се проектира од два независни центра. Добиените слики претставуваат проекции кои се добиваат во самото око и се спојуваат во една тродимензионална претстава во мозокот на човекот. Проекциите се добиваат ако објектот што се набљудува се проектира во окото, односно мрежницата од окото која не е рамнина, туку некоја површина. Обликот на површината може да се апроксимира со следните површини: елипсоид, хиперболоид, параболоид и сл. Разработени се сите споменати облици на површини врз кои се проектира, односно видови на проективни простори, но во трудов е прикажан само хиперболоидниот проективен простор.

ПРОЕКТИВЕН ПРОСТОР

Проективен или проекционен простор е просторот врз кој се проектира. Ако се земе дека просторот е бесконечен или бескрајно голем, потребно е негово ограничување. Просторот, од Евклид[1] па сè до појавата на теоријата на Лобачевски[2] и Бојаи[3], бил ограничуван со рамнини. Од тогаш се развиле многу теории за проективниот простор за таканаречениот *НеЕуклидов простор.* Според обликот на проективниот простор и теориите добивале називи како *хиперболична, елиптична геометрија* или едноставно *НеЕуклидова геометрија* [15].



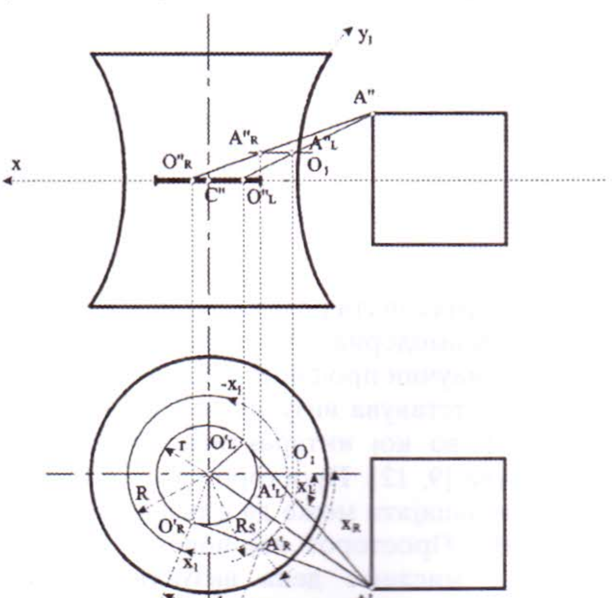
Сл. 1. Пресек на око

Закривената површина или мрежницата (сл. 1) личи на сферна, хиперболоидна или параболоидна површина [6].

Разработен е *хиперболоидниот проективен простор* [21]. Објектите од тродимензионалниот и од четиридимензионалниот простор се проектираат на хиперболоид. Проектирањето се извршува стереометриски од два центра.

Стереометриско проектирање во хиперболоиден проективен простор

Стереометриското проектирање во хиперболоиден проективен простор претставува проектирање од два центра (сл. 2) на хиперболоидна површина. Коцката ABCDEFGH се проектира на хиперболоидна површина со радиус *R* од два центра кои се наоѓаат на *основен круг* со радиус *r* или дијаметар еднаков на очното растојание (65–70 mm) [11, 13, 14, 16, 17, 22, 24].



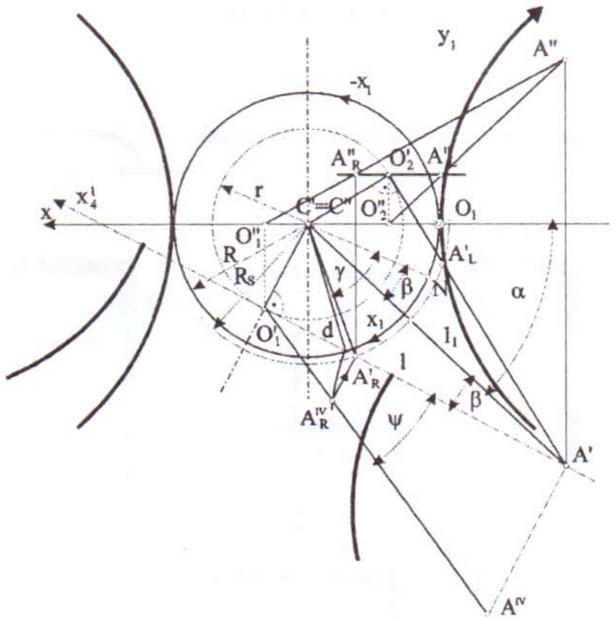
Сл. 2. Метод на добивање на стереометриски проекции на коцка ABCDEFGH во хиперболоиден проективен простор

[1] Euклид – старогрчки математичар кој ги поставил основите на геометријата (3 век пред н.е.).

[2] Николај Лобачевски – руски математичар, основоположник на таканаречената хиперболична геометрија (1793–1856).

[3] Јанош Бојаи (János Bolyai) – унгарски математичар, основоположник на таканаречената хиперболична геометрија (1802–1860).

Со следење на сл. 3 се добива детално објаснување на методот.



Сл. 3. Графички приказ на добивање математички модел на стереометриски проекции во хиперболоиден проективен простор

Се повлекуваат проективни зраци од темето А (од коцката) така да тангираат на основниот круг во точките O_1 и O_2 (очни точки). Каде што проективните зраци го прободуваат хиперболоидот се добиваат стереометриските проекции на точката А, односно A'_L и A'_R врз хоризонтално проектирачката рамнина (прва проекција). На ординатата на првите проекции на точките, а на вторите проекции на проективните зраци, се наоѓаат вторите стереометриски проекции на точката А, A''_L и A''_R. Вторите проекции можат да се добијат и со трансформација, која ни е потребна за добивање на математички модел на стереометриското проектирање во хиперболоиден проективен простор. Трансформацијата се врши според класичен метод со воведување на помошна оска x_4^1.

За да се претставаат добиените стереометриски проекции од тродимензионален проективен простор на хартија или на екран (рамнина), се воведува хиперболоиден координатен систем Ox_1y_1 каде што оската x_1 е со кружна форма, а оската y_1 е со хиперболична форма.

Обележување:

R – радиус на хиперболоидната површина,

r – радиус на основниот круг,

$x_{[i]}, y_{[i]}, z_{[i]}$ – координати на реалниот објект,

$l = \overline{O'_1 A'}$ – растојание од очната точка O_1 до темето A,

$l_1 = \overline{C' A'}$ – растојание од центарот на хиперболоидот до темето A,

d – главно растојание,

a, b – оски на хиперболоидот.

Се воведува помошна точка N која се користи за добивање на координатите на стереометриските точки A_L и A_R (со x_L и x_R). Со збир на растојанијата (должина на кружни лакови, сл. 2) се добива изразот:

$$x_{[i]R} = \overline{AC} - \overline{A'N} + \overline{NA'_R}\,. \qquad (1)$$

Ако растојанијата (должина на кружните лакови) се изразат преку соодветните агли α, β, γ и радиусот R_s, се добива:

$$x_{[i]R} = R_s\alpha - R_s\beta + R_s\gamma\,. \qquad (2)$$

Аглите се заменуваат со координати $x_{[i]}, y_{[i]}, z_{[i]}$ и со параметарот r:

$$x_{[i]R} = R_s \arcsin\frac{y}{\sqrt{x_{[i]}^2 + y_{[i]}^2}} - R_s \arcsin\frac{r}{\sqrt{x_{[i]}^2 + y_{[i]}^2}} + R_s \arcsin\frac{r}{R_s}\,. \qquad (3)$$

Аналогно се определува x_L:

$$x_{[i]L} = R_s \arcsin\frac{y}{\sqrt{x_{[i]}^2 + y_{[i]}^2}} + R_s \arcsin\frac{r}{\sqrt{x_{[i]}^2 + y_{[i]}^2}} - R_s \arcsin\frac{r}{R_s}\,. \qquad (4)$$

Последниот израз е константа

$$a = R_s \arcsin\frac{r}{R_s}\,.$$

Односот на *скратениот радиус* R_s и радиусот на хиперболоидната површина R е:

$$R_s = \sqrt{d^2 + r^2} \qquad (5)$$

каде што

$$d = \frac{lb\sqrt{R^2 - r^2}}{\sqrt{l^2b^2 - z_{[i]}^2}}\ ; \quad l = \sqrt{x_{[i]}^2 + y_{[i]}^2 - r^2}\,.$$

Користејќи ја четвртата проекција, се определуваат координатите y_L и y_R, кои се еднакви на должината на хиперболичниот лак во граници од точка $(a, 0)$ до точка (x, z) изразена со помош на интеграл:

$$y_{[i]R} = y_{[i]L} = \int_a^x \sqrt{\frac{(a^2+b^2)x_{[i]}^2 - a^4}{a^2(x_{[i]}^2 - a^2)}}dx_{[i]} \,. \quad (6)$$

Се воведува нумерички ексцентрицитет e и се заменува $a^2 + b^2 = a^2e^2$, а интегралот во параметарски облик и во граници од 0 до ψ може да се напише :

$$y_{[i]R} = y_{[i]L} = ae\int_0^{\psi} \sqrt{1 - \frac{\cos^2 t}{e^2}} \frac{dt}{\cos^2 t} \quad (7)$$

каде што

$$a = \sqrt{R^2 - r^2} \,.$$

Биномот $\left(1 - \frac{\cos^2 t}{e^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ може да се развие во биномен ред :

$$\left(1 - \frac{\cos^2 t}{e^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{\cos^2 t}{e^2} - \frac{1}{2 \cdot 4}\frac{\cos^4 t}{e^4} -$$

$$- \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{\cos^6 t}{e^6} - \ldots - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}\frac{\cos^{2n} t}{e^{2n}} - \ldots$$

Биномниот ред треба да се интегрира член по член во граници од 0 до ψ, а се земаат онолку членови колку што се потребни за да се определи должината на лакот со одредена апроксимација.

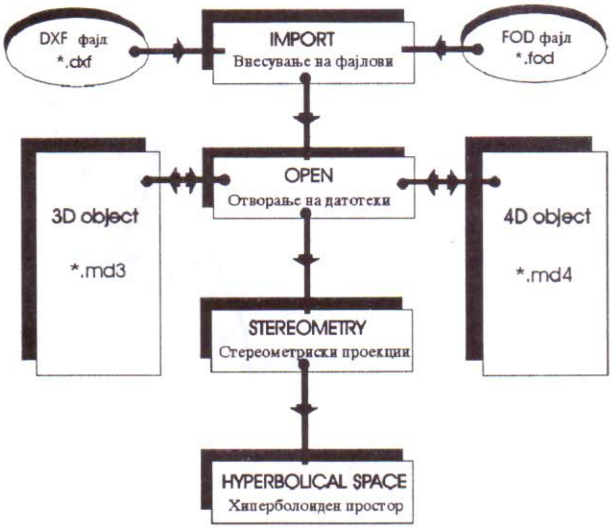
Ако ги имаме стереометриските проекции, лесно може обратно да се добијат координатите на темињата на реалниот објект:

$$x_{[i]} = l_1 \cos\alpha \,;$$
$$y_{[i]} = l_1 \sin\alpha \,;$$
$$z_{[i]} = l \,\tan\psi \,; \quad (8)$$

аглите

$$\alpha = \frac{x_{[i]R} + x_{[i]L}}{2R_s}\,; \quad \psi \approx \frac{y_{[i]R}}{\sqrt{R^2 - r^2}}\,.$$

Применувајќи ги математичките изрази (3), (4) и (7), направен е алгоритам за добивање на стереометриски проекции на 3D и 4D објекти во хиперболоиден проективен простор (сл. 4).



Сл. 4. Блок-дијаграм на алгоритамот за добивање на стереометриски проекции во хиперболоиден проективен простор

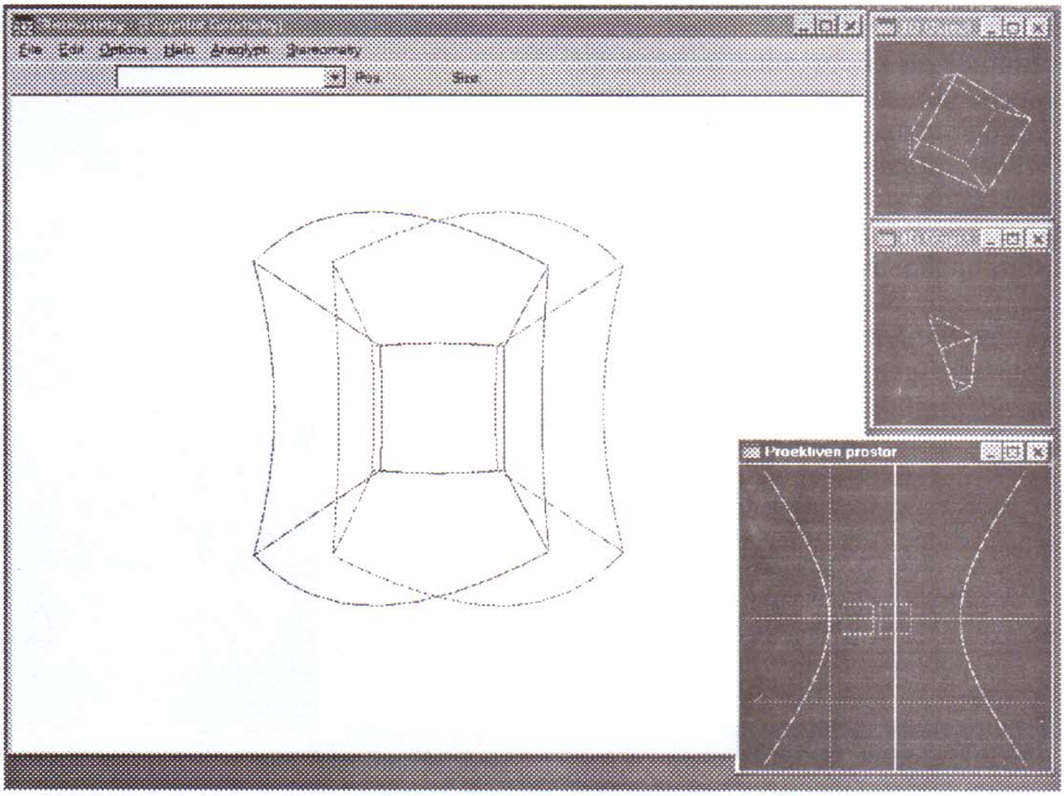
Карактеристично за стереометриското проектирање на хиперболоидна површина (сл. 2) е тоа што сите рабови се криви линии. Кривите линии се должат на кружните и хиперболичните изводници на хиперболоидот. Оваа карактеристика ќе се потврди со примерите во следните поглавја.

3D објекти во хиперболоиден проективен простор

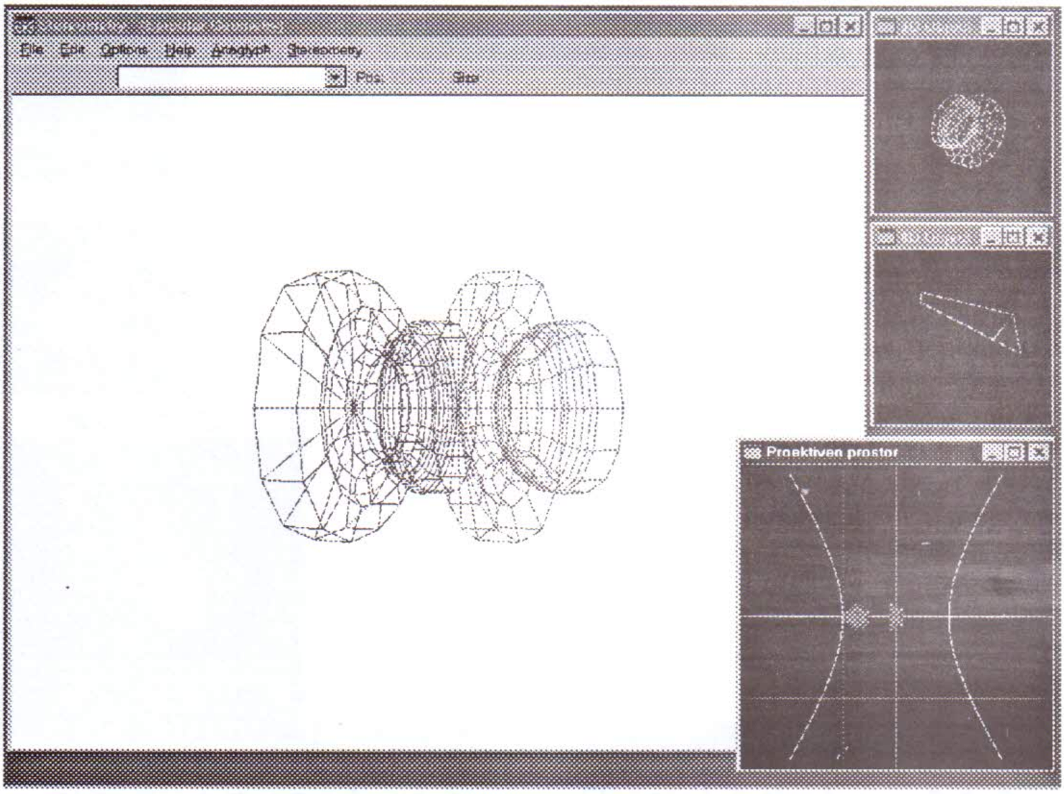
Стереометриските проекции во хиперболоиден проективен простор се добиваат со закривени хоризонтални, вертикални и коси спојници на темињата. Сите спојници стануваат криволиниски поради кружните и хиперболичните изводници што го сочинуваат хиперболоидот [1, 20, 23, 25, 26].

Од големината на радиусот на хиперболоидната површина зависи големината на закривеноста, што се забележува од математичкиот модел.

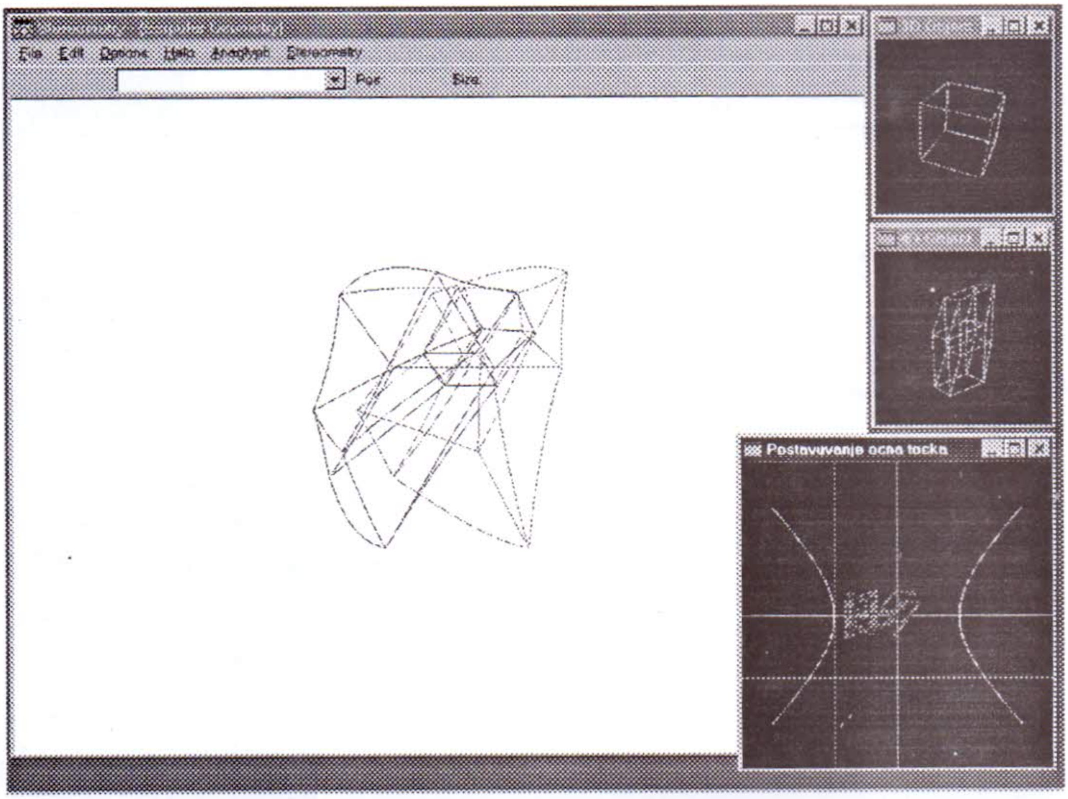
Горното може да се анализира со помош на направената компјутерска програма, следејќи ги примерите на сл. 5 и 6.



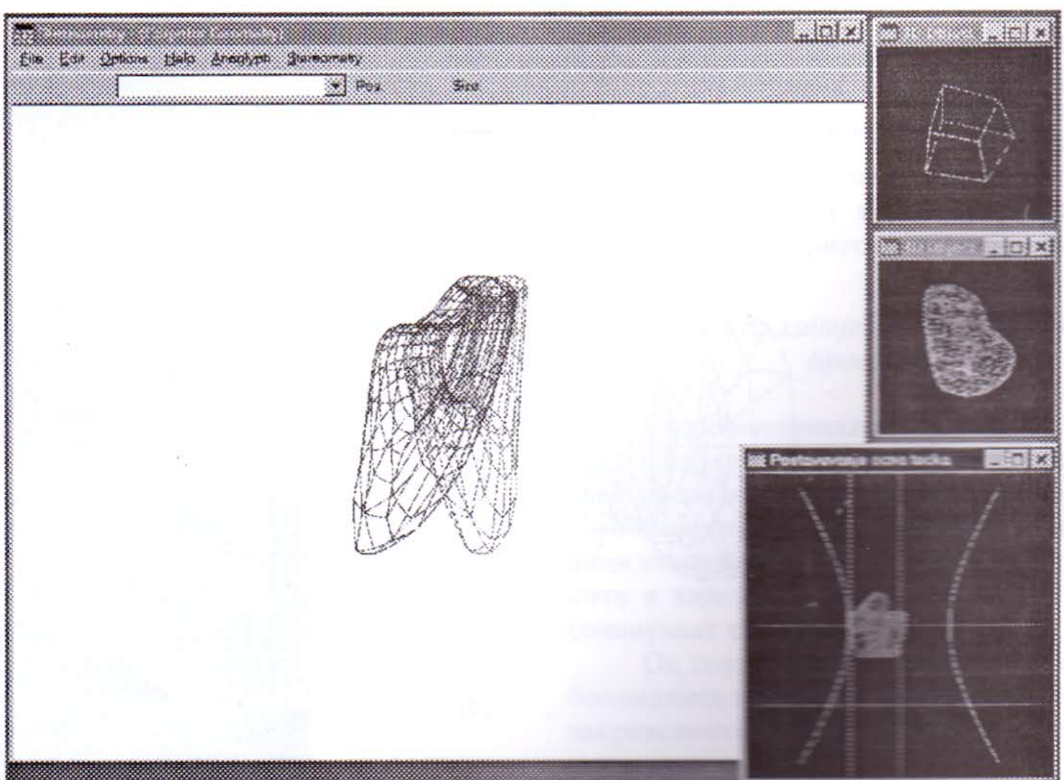
Сл. 5. Стереометриски проекции на коцка во хиперболоиден проективен простор



Сл. 6. Стереометриски проекции на 3D објект во хиперболоиден проективен простор



Сл. 7. Стереометриски проекции на 4D коцка во хиперболоиден проективен простор



Сл. 8. Стереометриски проекции на 4D површина во хиперболоиден проективен простор.
$f(x, y, z, w) = \{\cos(x), \sin(x), \cos(y)\mathrm{sqrt}(y^2), \sin(y)\}$

4D објекти во хиперболоиден проективен простор

Стереометриското проектирање на 4D објекти во хиперболоиден проективен простор е идентично со стереометриското проектирање на 3D објекти, затоа што 4D објекти прво се трансформираат во 3D објекти и потоа низ нивните темиња се поставуваат проективни зраци од две очни точки [2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 19].

Добиените темиња на 4D објекти (рабести, валчести и површини) и нивните пресеци со хиперрамнина се претвораат во темиња од тродимензионалниот простор. Посебните датотеки составени од координатите на тие темиња се со екстензија *.fod и се импортираат во компјутерската програма, каде што се добиваат стереометриски проекции. Примери за ова се прикажани на сл. 7 и 8.

ЗАКЛУЧОК

Трудот на читателот треба да му даде претстава за начинот на претставувањето на стереометриските проекции и да го воведе во начинот на изготвувањето на математичкиот модел за стереометриските проекции.

Стереометриското проектирање во криволиниски проективен простор секако е пореално од стереометриското проектирање на рамнина.

Покрај геометриската анализа и добиените математички модели, направени се алгоритми кои се внесени во компјутерската програмата. Со програмата на корисникот му е овозможено побрзо, попрецизно да ги анализира 3D и 4D објекти и нивните проекции добиени со стереометриското проектирање во хиперболоиден простор.

Сите објекти – рабести, валчести и површини, можат да се добијат во стереометриска форма. Објектите се задаваат и се претставуваат како жичани.

Трудот е поврзан со претходните проучувања направени во магистерскиот труд, а во врска со претставувањето на 4D објекти и 4D површини и нивните пресеци со 4D рамнина. Компјутерската програма што е направена во овој труд има можност на импортирање на објектите добиени во магистерскиот труд. На тој начин сите 4D објекти и површини и нивните пресеци со 4D рамнина можат стереометриски да се претстават.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Allgower E. L., Gnutzmann S.: *An algorithm for piecewise linear approximation of implicity defined two-dimensional surfaces*, New York, 1987.

[2] Banchoff F. T.: *Visualizing two-dimensional phenomena in four-dimensional space*, A computer graphics approach, USA, 1986.

[3] Banchoff F. T.: *Real-Time Computer Graphics Analysis of Figures in Four-dimensional Space*, USA, 1978.

[4] Banchoff F. T.: *Computer Animeted Four-dimensional Geometry*, Washington, 1978.

[5] Banchoff F. T.: *Computer Animation and the Geometry of Surfaces in 3- and 4-D Space*, International Congress, Helsinki, 1978.

[6] Димовски А.: *Анатомија на човекот*, Скопје, 1982.

[7] Ferrucci V., Paoluzzi A.: *Extrusion and boundary evaluation for multidimensional polyedra*, Roma, 1990, CAD, Jan./Feb. 1991.

[8] Hoffmann M. C., Zhou J.: *Some Techniques for Visualizing Surfaces in Four-dimensional space*, West Lafayette, 1990, CAD, Jan./Feb. 1991.

[9] Jancene P., Neyret F., Provot X., Tarel J-Ph., Vezien J-M., Meilhac Ch., Verroust A.: *Computing the Interactions between Real and Virtual Objects in Video Sequences*, INRIA, Le Chesnay Cedex, France, 1996.

[10] Колман. Е.: *Четвертое измерение*, Москва, 1970.

[11] Lengagne R.[1], Fua P.[1], Monga O.[2]: *Using Crest Lines to Guide Surface Reconstruction from Stereo*, [1]INRIA, Le Chesnay Cedex, France, [2]SRI International, Menlo Park, USA, ICPR'96, Vienna, Austria, Aug. 1996.

[12] Lengagne R., Tarel J-Ph., Monga O.: *From 2D Images to 3D Face Geometry*, INRIA, Le Chesnay Cedex, France, FG'96, Killington, USA, Oct. 1996.

[13] Михно О. Д.: *Построение стереоскопических изображений помощу фотосемки*, Прикладная геометрия и инжинерная графика, Киев, 1965.

[14] Niče V.: *Perspektiva*, Zagreb, 1971.

[15] Розенфелд Б. А.: *НеЕвклидови пространства*, Москва, 1969.

[16] Sander P. T., Vinet L., Cohen L., Gagalowicz A.: *Hierarchical Region Based Stereo Matching*, INRIA, Le Chesnay Cedex, France, 1995.

[17] Шотиков А. В., Михно О. Д.: *Сшерео-йанорамные изображения и сйособы их йосшроения*, Научные труды МИИСП, Москва, 1972.
[18] Tarel J-Ph., Vezien J-M.: *CamCal v1.0 Manual – A Complete Software Solution for Camera Calibration*, INRIA, Le Chesnay Cedex, France, Sep. 1996.
[19] Ташевски Ј. Р.: *Графичко йрешсшавување на чеширидимензионални објекши*, Магистерски труд, 1992.
[20] The Geometry Center: *Computational Geometry*, Graphics Archive, University of Minnesota, Oct. 1996.
[21] The Geometry Center, *Hyperbolic Geometry*, Graphics Archive, University of Minnesota, Oct. 1996.
[22] Vinet L., Sander P., Cohen L., Gagalowicz A.: *Cooperative Segmentation and Stereo Matching*, INRIA, Le Chesnay Cedex, France, 1996.
[23] Young D.: *Image Representation and Display*, TEACH VISION1, USA, Jan. 1994.
[24] Young D.: *Stereoscopic Vision and Perspective Projection*, TEACH VISION5, USA, Jan. 1994.
[25] Young D.: *Motion*, TEACH VISION6, USA, Apr. 1994.
[26] Young D.: *Active Contour Models (Snakes)*, TEACH VISION7, USA, Mar. 1995.

Summary

STEREOMETRICAL PROJECTION OF 3D AND 4D OBJECTS IN A HYPERBOLOID PROJECTIVE SPACE

Risto Taševski and **Vladimir Dukovski**

Faculty of Mechanical Engineering, The "Sv. Kiril & Metodij" University,
P.O. Box 464, 91001 Skopje, Republic of Macedonia

Key words: stereometry (stereogeometry); curvilinear (hyperboloid) projective space; 4D object

In this paper a mathematical model and a computer program for stereometrical projection of 3D and 4D objects in hyperboloid projective space is presented. The aim of this projection is a realistic presentation of the objects in the human surrounding: This means that the presented objects should not be different from the real ones. The objects are projected on the retina of the eye mechanism. The retina does not have a regular geometric shape. The surveying of this shape would be ideal. The shape of the retina can be approximated with a hyperboloid surface. So, the only way of realistic visual presentation is the stereometrical projection in one of the curvilinear projective spaces. Three-dimensional presentation should be gotten. Stereometricaly projected objects in various projective spaces presented on two-dimensional plane (paper, monitor) are received by means of certain optical apparatus (stereoscope, glasses).