

АНАЛИЗА НА ЛИНЕАРНАТА И ЛАЧНАТА АПРОКСИМАЦИЈА НА КРИВИТЕ (SPLINES)

Ристо Ташевски и Владимир Дуковски

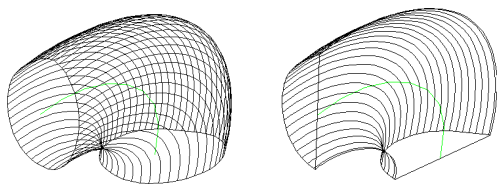
Машински факултет, Универзитет "Св. Кирил и Методиј",
п.фах 464, 91 001 Скопје, Република Македонија

Во трудот е направена анализа и математички модел на линеарната и лачната апроксимација на кривата (*spline*). Сплајн-кривите се дел од синтетичките површини. Синтетичките површини се користат во геометрискиот и инженерскиот дизајн, а најмногу во CAD/CAM системите. Изработката на сложените синтетички површини се врши со современи NC машини што содржат високо софистицирани контролери. Контролерите на постарите NC машини немаат функции за препознавање на сплајн-кривите. Кај овие машини е неопходна претходна апроксимација на одредена крива со помош на математички апарат.

Клучни зборови: сплајн-криви, функција на спојување, NC код

1. ВОВЕД

Во современите дизајнерски куќи, каде што се моделираат автомобили, авиони, бродови или енергетски постројки се сретнуваат машински делови со сложена геометриска форма. Обликот или формата произлегува од барањето да се постигне естетска или аеродинамичка линија на производот. За постигнување на таквите префинети облици е неизбежна примена на таканаречени синтетички површини [1]. Синтетичките површини се 3Д површини, кои претставуваат спој (синтеза) на повеќе синтетички криви во два правци, а се карактеризираат со мазна (неискршена) криволиниска форма. Синтетичките криви што се протегаат во едниот правец ги викаме хоризонтални изводници, а во другиот правец вертикални изводници. Синтетичките криви можат да бидат криви од втор, трет, четврти, петти, шести и повисок ред. Во индустријата се користат наједноставните криви од втор ред наречени уште коники, и од трет ред наречени кубики.



Сл. 1. Синтетичка површина составена од сплајн-криви во два правци

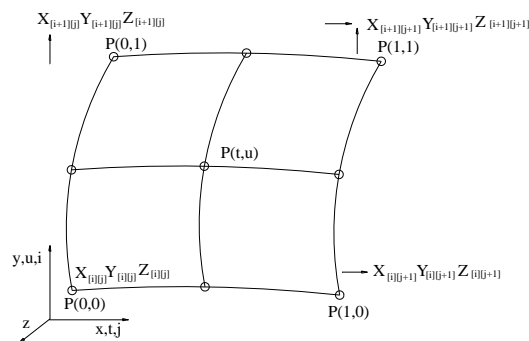
Криви од втор ред или коники се кругот, елипсата, хиперболата и параболата. Криви од трет ред се сплајн-кривите. На сликата 1 е прикажана синтетичка површина, составена од сплајн-криви во двата правци. Синтетичката површина може да се претстави со едноставен параметарски израз [1,4]:

$$P(t, u) = [xyz]^T = [x(t, u)y(t, u)z(t, u)]^T$$

каде $0 \leq u \leq 1$ и $0 \leq t \leq 1$

или со збир на мрежа од контролни точки во правец на хоризонталните и вертикалните изводници (сл. 2):

$$P(t, u) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m [X_{[i][j]}(t, u) Y_{[i][j]}(t, u) Z_{[i][j]}(t, u)]$$



Сл. 2. Дефинирање на контролните точки и функцијата на спојување

Соседните контролни точки се поврзуваат со сплајн-криви во двата правци:

$$f(t) = \sum_{i=0}^n [x_{[i]}(t) y_{[i]}(t) z_{[i]}(t)]$$

$$g(u) = \sum_{j=0}^m [x_{[j]}(u) y_{[j]}(u) z_{[j]}(u)]$$

Сплајн-кривите се дефинирани со дополнителни точки што се добиваат со следните математички изрази и што зависат од параметрите u и t :

$$x = x_0 B_0(t) + x_1 B_1(t) + x_2 B_2(t) + x_3 B_3(t)$$

$$y = y_0 B_0(t) + y_1 B_1(t) + y_2 B_2(t) + y_3 B_3(t)$$

$$z = z_0 B_0(t) + z_1 B_1(t) + z_2 B_2(t) + z_3 B_3(t)$$

каде

x, y, z - координати на точки од кривата

$B_0(t)$ - (*Blending function*) функција за спојување

t - параметар

Бројот на дополнителните точки зависи од видот на употребената крива, односно од функцијата за спојување на контролните точки од кривата. Во зависност од функцијата за спојување

разликуваме различни сплајн-криви: *B-spline*, *Cubic B-spline*, Безиерова итн. [1,2,3,4].

Безиерова функција за спојување:

$$B_0(t) = (1-t)^3$$

$$B_1(t) = 3t(1-t)^2$$

$$B_2(t) = 3t^2(1-t)$$

$$B_3(t) = t^3$$

Функција за спојување на *Cubic B-spline*:

$$B_0(t) = \frac{(1-t)^3}{6}$$

$$B_1(t) = \frac{t^3}{2} - t^2 + \frac{2}{3}$$

$$B_2(t) = -\frac{t^3}{2} + \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} + \frac{1}{6}$$

$$B_3(t) = \frac{t^3}{6}$$

2. ИЗРАБОТКА НА ОБЈЕКТИ СОСТАВЕНИ ОД СИНТЕТИЧКИ ПОВРШНИ

Објектите составени од синтетички површини се изведуваат со компјутеризирани алатки.

NC кодот од компјутерот се пренесува во контролерот на NC машината, каде што се контролира процесот на обработка на производот. Сите криволиниски форми, како, на пример кругот (лакот) или сплајн-кривата преку функциите се дефинирани во контролниот дел од NC машината. Тие функции имаат задача криволиниските форми да ги претворат во линеарна функција со одредена прецизност, што гарантира прецизен процес на обработка. Со употреба на математички израз во каква било геометриска операција, се врши одредена апроксимација и добиениот резултат е само интерпретација на графичкиот елемент. Од претходното може да се заклучи дека и најсофистицираните контролери вршат

апроксимација, и тоа линеарна. Единствената позитивна страна на оваа апроксимација е тоа што директно во контролерот со една функција се дефинира сплајн-кривата, односно се извршуваат неколку линеарни поместувања. Контролерите на постарите NC машини немаат функции за препознавање на сплајн-кривите. Останува претходно да се изврши апроксимација на одредена крива со помош на математички апарат, кој е претставен во трудот. Извршената претходна апроксимација не е понепрецизна од апроксимацијата која ја поседуваат современите контролери. Негативност на оваа дополнителна постапка е потребното време за извршување на апроксимацијата и големината на NC кодот.

NC машините во еден правец успешно ја изведуваат површината,

додека другиот правец зависи од обликот на алатот. Алатот не е прилагодлив на обликот на површината, што значи дека е

невозможно да се добие идеално мазна површина.

3. АНАЛИЗА НА АПРОКСИМАЦИЈА НА КРИВИ

Проблемот на апроксимација на површина или на крива во еден правец станува многу актуелен кај постарите *NC* машини, кои неможат да ја контролираат функцијата *spline* [4].

Извршена е анализа на произволна синтетичка површина, добиена со синтеза на безиеровите криви во двата правци. Безиеровите криви се апроксимирани со линеарна и лачна линија.

Направената анализа се фокусира на споредување на оригиналната крива со добиената апроксимирана линија. Апроксимираната линија се добива со користење постапка што се состои од радијално поставување прави, кои тргнуваат од тежиштето на зададената крива, под агол α и се сечат со неа во точки $T_0, T_1 \dots T_n$. Добиените точки се поврзуваат со права или лак, при што се добива апроксимираната линија. Очигледно е дека од бројот на точките ќе зависи прецизноста на добиената апроксимација. Со зголемување на бројот на пресечните точки, односно со намалување на аголот α се добиваат помали сегменти, што придонесува за поголема прецизност на апроксимацијата. Споредбата на сплајн кривата и добиената искршена или лачна линија се врши со статистичка анализа на површините од истите. Најдобар резултат би се добил ако површината под сплајн-кривата е еднаква на површината под искршената или лачната линија, сметајќи по апсолутна вредност. Тогаш може да се констатира дека апроксимацијата е

идеална, што е невозможно. Површината под сплајн-кривата е еднаква на (сл. 3.):

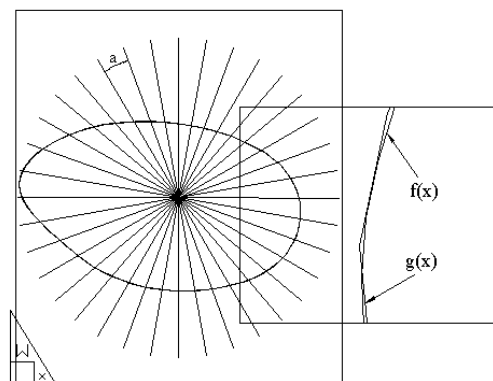
$$P_S = \int_0^y f(x) dx$$

а површината под линеарната или лачната линија е:

$$P_L = \int_0^y g(x) dx$$

Разликата на површините се дефинира со математичкиот израз:

$$\Delta P = |P_S - P_L| = \int_0^y |f(x) - g(x)| dx$$



Сл. 3. Апроксимација на сплајн-крива

Сличноста на зададената и апроксимираната крива се определува со односот на површините под двете криви:

$$S = \left| \frac{P_L}{P_S} \right|$$

3.1. ЛИНЕАРНА АПРОКСИМАЦИЈА

Со линеарната апроксимација кривата едноставно се претвора во искршена полигонална линија, со тежнение што е можно помалку да се

разликуваат една од друга. Споредбата на сплајн-кривата и полигоналната линија е направена со статистичка анализа претставена во табелата 1.

Табела 1
Линеарна апроксимација

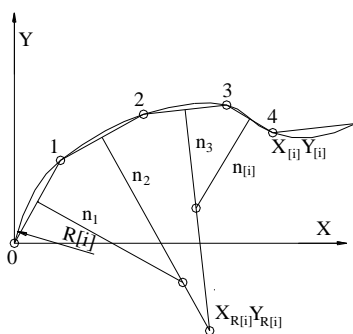
Број на точки или сегменти T_n	Агол α [$^\circ$]	Разлика на површини ΔP [mm]	Сличност $S=P_{\text{line}}/P_{\text{spline}}$
12	30	1733.926	0.9368869
36	10	206.411	0.9924868
360	1	2.146	0.9999218
↓	↓	↓	↓
$\sim\infty$	~ 0	~ 0	~ 1

Од статистичката анализа се гледа, дека прецизноста расте со зголемувањето на бројот на точките или сегментите. Од извршеното истражување произлегува дека задоволителната прецизност на апроксимацијата е кога сличноста на површините на сплајн-

кривата и апроксимираната линија е $S=0.999$. Тоа значи дека е потребно сплајн-кривата да се подели на повеќе од 36 сегменти за да се добие задоволителна линеарна апроксимација.

3.2. ЛАЧНА АПРОКСИМАЦИЈА

Постапката за добивање на лачно апроксимирана крива е слична како кај линеарната апроксимација. Разликата е во тоа што добиените пресечни точки на сегментните линии со сплајн-кривата се поврзуваат со лачи, односно делови од круг. Спојот на две соседни пресечни точки претставува тетива на кружница со радиус R (сл. 4.).



Сл. 4. Модел за лачна апроксимација

Табела 2
Лачна апроксимација

Број на точки или сегменти T_n	Агол α [$^\circ$]	Разлика на површини ΔP [mm]	Сличност $S=P_{\text{arc}}/P_{\text{spline}}$
12	30	18.678	0.9993206
36	10	4.308	0.9998432
360	1	0.718	0.9999738
↓	↓	↓	↓
$\sim\infty$	~ 0	~ 0	~ 1

Центар на лакот се добива со пресек на нормалите на две соседни тетиви :

$$(x_{R[i]}, y_{R[i]}) = n_{[i]} \cap n_{[i+1]}$$

а радиусот на лакот е еднаков на:

$$R_{[i]} = \sqrt{(x_{R[i]} - x_{[i]})^2 + (y_{R[i]} - y_{[i]})^2}$$

Математичкиот модел за одредување на разликата на површините на кривата и добиената лачна апроксимација е еднаков како кај линеарната апроксимација.

Од табелата 2 се гледа дека е доволно сплајн-кривата да се подели на помалку од 12 сегменти, при што се

добива задоволителна прецизност за лачна апроксимација.

4. ЗАКЛУЧОК

Актуелноста на истражувањето на апроксимацијата на сплајн-кривите произлегува од секојдневната примена во индустрискиот дизајн.

Направен е геометриски и математички модел за апроксимација на сплајн-кривите. Со користење на позната постапка сплајн-кривите се делат на

одреден број сегменти, кои потоа се спојуваат со линеарна или лачна линија. Анализата направена со споредување на сплајн кривите и линеарно и лачно апроксимираните линии покажува каква поделба на сегменти треба да се направи за да се постигне одредена сличност.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Richard H. Bartels, John C. Beatty and Brian A. Barksy, *An Introduction to Splines for Use in Computer Graphics & Geometric Modeling*, CA: Morgan Kaufmann, Los Altos, 1987
- [2] Lyle Ramshaw, *Blossoming: A Connect-the-Dots Approach to Splines*. Technical Report 19. Digital Systems Research Center, June 21, 1987.
- [3] Jorge Stolfi, *Oriented Projective Geometry. A Framework for Geometric Computations*. Academic Press, Boston, 1991.
- [4] Gerald Farin, *Curves and Surfaces for CAGD*. 3rd edition. Academic Press, Boston, 1993.

Summary

Analysis of linear and arc approximation of splines

Risto Tashevski and Vladimir Dukovski

*Faculty of Mechanical Engineering, The "Sts. Cyril and Methodius" University,
P.O. Box 464, 91 001 Skopje, Republic of Macedonia*

Key words: spline, blending function, NC code

In this paper, an analysis and a mathematical model for linear and arc approximation of the splines are presented. Synthetic surfaces are composed of splines in two directions. Synthetic surfaces are used in engineering design for describing parts with aerodynamic or other functional and esthetic shapes. Synthetic surfaces can be represented with majority of contemporary CAD systems.

The modern NC machines contain highly sophisticated controllers which provide complex synthetic surfaces manufacturing. The controllers of the older NC machines do not have functions for spline identification. It is necessary to perform a mathematical approximation of a spline.