

АНАЛИЗА НА ЛИНЕАРНАТА И НА ЛАЧНАТА АПРОКСИМАЦИЈА НА СИНТЕТИЧКИТЕ ПОВРШНИНИ

Ристо Ташевски и Владимир Дуковски

Машински факултет, Универзитет "Св. Кирил и Методиј",
п.фах 464, 1000 Скопје, Република Македонија

Во трудот е направена анализа и математички модел на линеарната и лачната апроксимација на синтетичките површини формирани од сплајн-криви во двата правци. Синтетичките површини се користат во геометрискиот и инженерскиот дизајн, а најмногу во CAD/CAM системите. Изработката на сложените синтетички површини се врши со современи NC машини што содржат високо софистицирани контролери. Контролерите на постарите NC машини немаат функции за препознавање на сплајн-кривите. Кај овие машини е неопходна претходна апроксимација на одредена крива со помош на математички апарат.

Клучни зборови: синтетичка површина, сплајн-крива

1. ВОВЕД

Во современите дизајнерски куќи, каде што се моделираат автомобили, авиони, бродови или енергетски постројки се сретнуваат машински делови со сложена геометриска форма. Обликот или формата произлегува од барањето да се постигне естетска или аеродинамичка линија на производот. За постигнување на таквите префинети облици е неизбежна примена на таканаречени синтетички површини [1]. Синтетичките површини се 3Д површини, кои претставуваат спој (синтеза) на повеќе синтетички криви во два правци, а се карактеризираат со мазна (неискршена) криволиниска форма. Синтетичките криви што се протегаат во едниот правец ги викаме подолжни изводници, а во другиот правец попречни изводници. Синтетичките криви можат да бидат криви од втор, трет, четврти, петти, шести и повисок ред. Во индустријата се користат наједноставните криви од втор ред наречени уште коники, и од трет ред наречени кубики.

Криви од втор ред или коники се кругот, елипсата, хиперболата и параболата. Криви од трет ред се сплајн-кривите. На сликата 1 е прикажана синтетичка површина, составена од сплајн-криви во двата правци.

Синтетичката површина може да се претстави со едноставен параметарски израз [1,4]:

$$P(t, u) = [xyz]^T = [x(t, u) y(t, u) z(t, u)]^T$$

каде $0 \leq u \leq 1$ и $0 \leq t \leq 1$

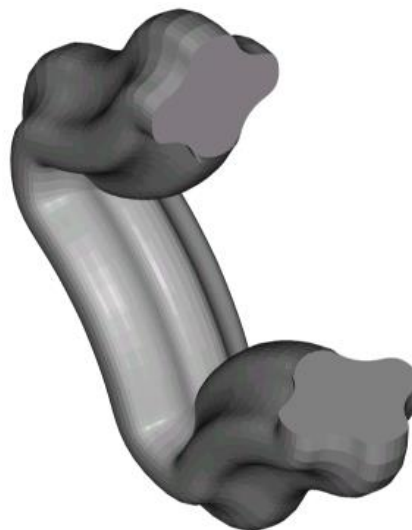
или со збир на мрежа од контролни точки во правец на подолжните и попречните изводници:

$$P(t, u) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m [x_{[i][j]}(t, u) y_{[i][j]}(t, u) z_{[i][j]}(t, u)]$$

Соседните контролни точки се поврзуваат со сплајн-криви во двата правци:

$$f_{(xy)}(t) = \sum_{i=0}^n [x_{[i]}(t) y_{[i]}(t) z_{[i]}(t)]$$

$$f_{(xz)}(u) = \sum_{j=0}^m [x_{[j]}(u) y_{[j]}(u) z_{[j]}(u)]$$



Сл. 1. Синтетичка површина составена од сплајн-криви во два правци

Сплајн-кривите се дефинирани со дополнителни точки што се добиваат со следните математички изрази и што зависат од параметрите u и t :

$$\begin{aligned}x &= x_0 B_0(t) + x_1 B_1(t) + x_2 B_2(t) + x_3 B_3(t) \\y &= y_0 B_0(t) + y_1 B_1(t) + y_2 B_2(t) + y_3 B_3(t) \\z &= z_0 B_0(t) + z_1 B_1(t) + z_2 B_2(t) + z_3 B_3(t)\end{aligned}$$

каде

x, y, z - координати на точки од кривата

$B_0(t)$ - (*Blending function*) функција за спојување

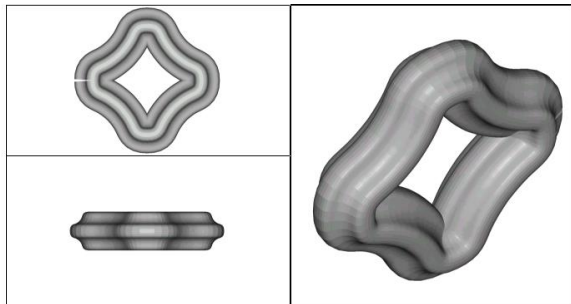
t - параметар

Бројот на дополнителните точки зависи од видот на употребената крива, односно од функцијата за спојување на

2. АПРОКСИМАЦИЈА НА СИНТЕТИЧКИТЕ ПОВРШНИНИ

Проблемот на апроксимација на површина составена од сплајн-криви во двата правци станува многу актуелен поради постарите *NC* машини, кои неможат да ја контролираат функцијата *spline* [4].

Извршена е анализа на произволна синтетичка површина, добиена со синтеза на *Cubic B-spline* криви во двата правци (сл.2.). Синтетичката површина се добива со лизгање на сплајн-кривата $f_{(xy)}$ која лежи во рамнина xu по сплајн-крива $f_{(xz)}$ која лежи во рамнина xz (сл.3.). Апроксимацијата на површината се состои во поединечна апроксимација на сплајн-кривите во двата правци. Сплајн-кривите се апроксимирани со линеарна и лачна линија.

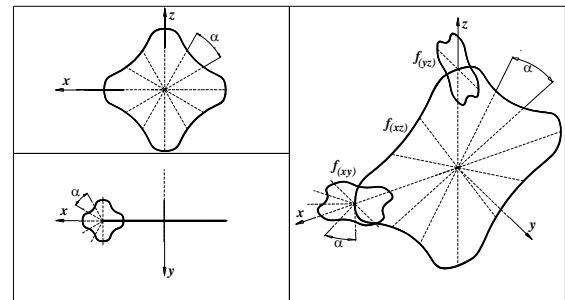


Сл. 2. Синтетичка површина формирана од *Cubic B-spline* криви во двата правци

контролните точки од кривата. Во зависност од функцијата за спојување разликуваме различни сплајн-криви: *B-spline*, *Cubic B-spline*, Безиерова итн. [1,2,3,4].

Функција за спојување на *Cubic B-spline*:

$$\begin{aligned}B_0(t) &= \frac{(1-t)^3}{6} \\B_1(t) &= \frac{t^3}{2} - t^2 + \frac{2}{3} \\B_2(t) &= -\frac{t^3}{2} + \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} + \frac{1}{6} \\B_3(t) &= \frac{t^3}{6}\end{aligned}$$



Сл. 3. Синтетичка површина формирана од *Cubic B-spline* криви $f_{(xy)}$ и $f_{(xz)}$

Апроксимираната линија како една изводница од синтетичката површина се добива со користење на постапка што се состои од радијално поставување прави, кои тргнуваат од тежиштето на сплајн-кривата, под агол α и се сечат со неа во точки $T_0, T_1 \dots T_n$. Добиените точки се поврзуваат со права или лак, при што се добива апроксимираната линија. Очигледно е дека од бројот на точките ќе зависи прецизноста на добиената апроксимација. Со зголемување на бројот на пресечните точки, односно со намалување на аголот α се добиваат помали сегменти, што придонесува за поголема прецизност на апроксимацијата. Споредбата на синтетичката површина и апроксимираната површина добиена со линеарна или лачна апроксимација се врши со статистичка анализа на разликата на нивните волумени. Волумен

на површината изразена со функцијата $f(x,y,z)$ ограничена со тродимензионална област J_3 изнесува:

$$V_S = \iiint_{J_3} f(x, y, z) dx dy dz$$

а волуменот на апроксимираната површина изразена со функцијата $g(x,y,z)$ изнесува:

$$V_L = \iiint_{J_3} g(x, y, z) dx dy dz$$

Разликата на волумените се дефинира со математичкиот израз:

$$\Delta V = V_S \cup V_L - V_S \cap V_L$$

Сличноста на зададената и апроксимираната површина се определува со односот на волумените:

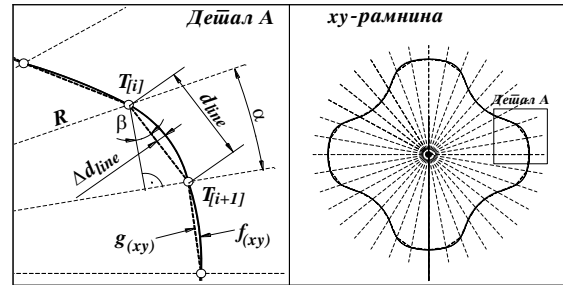
$$S_{\Delta V} = \frac{V_S - \Delta V}{V_S}$$

Сличноста на површините е најголема, ако разликата на волумените на површините е еднаква на нула $\Delta V=0$.

2.1. ЛИНЕАРНА АПРОКСИМАЦИЈА

Со линеарната апроксимација сплајн-кривите од површината се претвораат во искршени полигонални линии. Полигоналната линија претставува спој на точките добиени со пресек на сегментите и сплајн-кривата (сл.4.).

Растојанието од точката до соседната точка на полигоналната линија се обележува со d_{line} а најголемото отстапување на сплајн-кривата до полигоналната линија со Δd_{line} .



Сл. 4. Линеарна апроксимација на Cubic B-spline крива $f_{(xy)}$

Табела 1

Линеарна апроксимација

Број на точки или сегменти T_n	Агол $\alpha [^\circ]$	Отстапување $\Delta d_{line(max)} [mm]$	Отсечок на сегментот $d_{line(max)} [mm]$	Сличност $S_{\Delta d}$	Разлика на волумени $\Delta V [mm^3]$	Сличност $S_{\Delta V}$
Рамнина xy	Рам. xy	Рамнина xy	Рамнина xy	Рамнина xy	$V_S = 157169.7880$	0.1141719
Рамнина xz	Рам. xz	Рамнина xz	Рамнина xz	Рамнина xz		
12	30	6.6148	29.6742	0.8461674	139225.4018	0.8787426
12	30	16.2277	92.7911	0.8701784		
36	10	1.1313	12.2047	0.9736906	2324.5141	0.9852101
36	10	2.3639	38.0947	0.9810888		
120	3	0.1386	3.7880	0.9967767	333.8120	0.9978761
120	3	0.6389	12.1662	0.9948888		
360	1	0.0652	1.3123	0.9984837	~0	~1
360	1	0.1972	4.1460	0.9984224		
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
~∞	~0	~0	~0	~1	~0	~1

Сличноста на полигоналната линија и сплајн-кривата може да се анализира и со односот на максималната должина на отстапувањето $\Delta d_{line(max)}$ и

растојанието на точката до тежиштето на површината $R_{(xy)}$:

$$S_{\Delta d(xy)} = \frac{R_{(xy)} - \Delta d_{line(max)}}{R_{(xy)}}$$

Сличноста на изводниците на површините во другиот правец или во рамнината xz изнесува:

$$S_{\Delta d(xz)} = \frac{R_{(xz)} - \Delta d_{line(max)}}{R_{(xz)}}$$

Споредбата на површината формирана од сплајн-криви и површината формирана од полигонални линии е направена со статистичка анализа претставена во табелата 1. Од статистичката анализа се гледа, дека прецизноста расте со зголемувањето на бројот на точките или сегментите.

Сличноста зависи од закривеноста на кривите. Ако е кривата многу закривена, тогаш треба да се подели на поголем број сегменти. Се поставува прашање на колку сегменти да се подели кривата, односно колку изнесува аголот α . Односпред се дефинира сличноста на сплајн-кривата и полигоналната линија, односно на една од изводниците на синтетичката површина $S_{\Delta d(xy)} = S_{\Delta d(xz)} = 0.999$ и се добива дозволеното отстапување во рамнината xy $\Delta d_{line(max)} = 0.043[mm]$, а во рамнината xz $\Delta d_{line(max)} = 0.125[mm]$. Закривеноста на сплајн-кривата се изразува преку воведениот коефициент на закривеност, кој претставува однос на $\Delta d_{line(max)}/d_{line(max)}$. Анализирајќи го

коефициентот на закривеност во рамнината xy се добива низата на броеви: $0.2229 \rightarrow 0.0927 \rightarrow 0.0571 \rightarrow 0.0497$

За агол $\alpha = 1[^\circ]$ отстапувањето е $\Delta d_{line(max)} = 0.0652[mm]$, коефициентот на закривеност е 0.0497 , што значи за задоволување на претходните барања, истовремено следејќи го тежнението на броевите од низата се претпоставува коефициент на закривеност 0.04 .

Од коефициентот на закривеност во рамнината xz се добива низата на броеви: $0.1749 \rightarrow 0.0621 \rightarrow 0.0525 \rightarrow 0.0476$

Се претпоставува коефициент на закривеност 0.04 . Со тоа ја определевме закривеноста на сплајн-кривите во двата правци. Користејќи ги податоците на закривеноста на кривите се определува $d_{line(max)} = 0.87[mm]$ во рамнината xy и $d_{line(max)} = 2.63[mm]$ во рамнината xz . Потоа се одредува потребниот агол α и бројот на сегментите неопходни за постигнување на однапред дефинираните големини на сличност на синтетичките површини:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{d_{line(max)} \cos \beta}{R}\right)$$

Во случајов, да се задоволи однапред дефинираната сличност на површините аголот треба да е $\alpha = 0.848[^\circ]$ во рамнината xy и $\alpha = 0.852[^\circ]$ во рамнината xz .

2.2. ЛАЧНА АПРОКСИМАЦИЈА

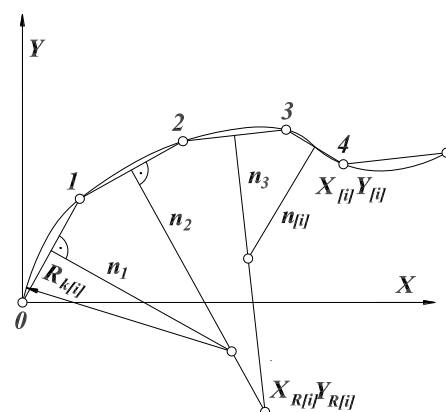
Постапката за добивање на лачно апроксимирана површина е слична како кај линерната апроксимација. Разликата е во тоа што добиените пресечни точки на сегментните линии со сплајн-кривите се поврзуваат со лаци, односно делови од круг. Спојот на две соседни пресечни точки претставува тетива на кружница со радиус R_k (сл. 5).

Центар на лакот се добива со пресек на нормалите на две соседни тетиви :

$$(x_{R[i]}, y_{R[i]}) = n_{[i]} \cap n_{[i+1]}$$

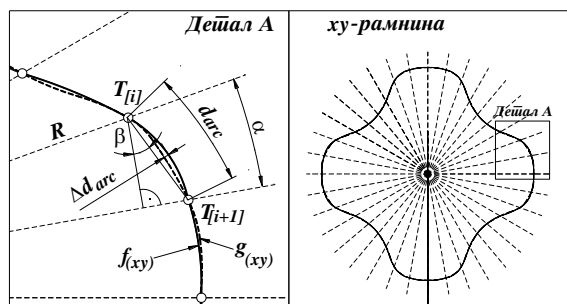
а радиусот на лакот е еднаков на:

$$R_{k[i]} = \sqrt{(x_{R[i]} - x_{[i]})^2 + (y_{R[i]} - y_{[i]})^2}$$



Сл. 5. Модел за лачна апроксимација

Лачното растојание од точката до соседната точка на лачната линија се обележува со d_{arc} а најголемото отстапување на сплајн-кривата до лачната линија со Δd_{arc} (сл. 6.).



Сл. 6. Лачна апроксимација на Cubic B-spline крива $f_{(xy)}$

Сличноста на лачната линија и сплајн-кривата може да се анализира и со односот на максималната должина на отстапувањето $\Delta d_{arc(max)}$ и растојанието на точката до тежиштето на површината $R_{(xy)}$:

$$S_{\Delta d(xy)} = \frac{R_{(xy)} - \Delta d_{arc(max)}}{R_{(xy)}}$$

Сличноста на изводниците на површините во другиот правец или во рамнината xz изнесува:

$$S_{\Delta d(xz)} = \frac{R_{(xz)} - \Delta d_{arc(max)}}{R_{(xz)}}$$

Споредбата на површината формирана од сплајн-криви и површината формирана од лачни линии е направена со статистичка анализа претставена во табелата 2. Од статистичката анализа се гледа, дека прецизноста расте со зголемувањето на бројот на точките или сегментите.

Табела 2
Лачна апроксимација

Број на точки или сегменти T_n	Агол $\alpha [^\circ]$	Отстапување $\Delta d_{arc(max)} [mm]$	Отсечок на сегментот $d_{arc(max)} [mm]$	Сличност $S_{\Delta d}$	Разлика на волумени $\Delta V [mm^3]$	Сличност $S_{\Delta V}$
Рамнина xu	Рам. xu	Рамнина xu	Рамнина xu	Рамнина xu	$V_s = 157169.7880$	0.1490147
Рамнина xz	Рам. xz	Рамнина xz	Рамнина xz	Рамнина xz		
12	30	6.1425	29.6742	0.8571511	133749.1715	0.1490147
12	30	15.8527	92.7911	0.8731784		
36	10	0.5287	12.2047	0.9877046	13960.0633	0.9111784
36	10	2.1567	38.0947	0.9827464		
120	3	0.1145	3.7880	0.9973372	793.0180	0.9949544
120	3	0.3719	12.1662	0.9970248		
360	1	0.0171	1.3123	0.9996023	101.1100	0.9993567
360	1	0.1192	4.1460	0.9990464		
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
$\sim \infty$	~ 0	~ 0	~ 0	~ 1	~ 0	~ 1

Следува пример за одредување на аголот α . Однапред се дефинира сличноста на сплајн-кривата и лачната линија, односно на една од изводниците на синтетичката површина $S_{\Delta d(xy)} = S_{\Delta d(xz)} = 0.999$ и се добива дозволеното отстапување во рамнината xu $\Delta d_{arc(max)} = 0.043 [mm]$, а во рамнината xz $\Delta d_{arc(max)} = 0.125 [mm]$. Закривеноста на сплајн-кривата се изразува преку воведениот коефициент на закривеност, кој претставува однос на $\Delta d_{arc(max)}/d_{arc(max)}$. Анализирајќи го коефициентот на закривеност во рамнината xu се добива низата на броеви: $0.2069 \rightarrow 0.0433 \rightarrow 0.0302 \rightarrow 0.0130$

За агол $\alpha = 1 [^\circ]$ отстапувањето е $\Delta d_{arc(max)} = 0.0171 [mm]$, коефициентот на закривеност е 0.0130 , што значи за задоволување на претходните барања, и истовремено следејќи го тежнението на броевите од низата се претпоставува коефициент на закривеност 0.02 .

Од коефициентот на закривеност во рамнината xz се добива низата на броеви: $0.1708 \rightarrow 0.0566 \rightarrow 0.0306 \rightarrow 0.0287$

Се претпоставува коефициент на закривеност 0.03 . Со тоа ја определевме закривеноста на сплајн-кривите во двата правци. Користејќи ги податоците на закривеноста на кривите се определува $d_{arc(max)} = 2.15 [mm]$ во рамнината xu и

$d_{arc(max)}=4.17[mm]$ во рамнината xz . Потоа се одредува потребниот агол α и бројот на сегментите неопходни за постигнување на однапред дефинираните големини на сличност на синтетичките површини:

$$\alpha = \frac{180 \cdot d_{arc(max)} \cos \beta}{\pi R}$$

Во случајов, да се задоволи однапред дефинираната сличност на површините аголот треба да е $\alpha=2.028[^\circ]$ во рамнината xy и $\alpha=1.351[^\circ]$ во рамнината xz .

3. ЗАКЛУЧОК

Актуелноста на истражувањето на апроксимацијата на синтетичките површини формирани од сплајн-криви во двата правци произлегува од секојдневната примена во индустрискиот дизајн.

Направен е геометриски и математички модел за апроксимација на синтетичките површини формирани од сплајн-криви во двата правци. Со користење на позната постапка сплајн-кривите се делат на одреден број сегменти, кои потоа се спојуваат со линеарна или лачна линија. Анализата

направена со споредување на сплајн кривите и линеарно и лачно апроксимираните линии покажува каква поделба на сегменти треба да се направи за да се постигне одредена сличност. Презентирана е пресметка на аголот на сегментните линии неопходни за апроксимацијата. Методот на пресметката на аголот на сегментите е базиран на воведен коефициент на закривеност на кривите, што резултира со голема прецизност.

ЛИТЕРАТУРА

- | | |
|---|--|
| <p>[1] Richard H. Bartels, John C. Beatty and Brian A. Barksy, <i>An Introduction to Splines for Use in Computer Graphics & Geometric Modeling</i>, CA: Morgan Kaufmann, Los Altos, 1987</p> <p>[2] Lyle Ramshaw, <i>Blossoming: A Connect-the-Dots Approach to Splines</i>. Technical Report 19. Digital Systems Research Center, June 21, 1987.</p> | <p>[3] Jorge Stolfi, <i>Oriented Projective Geometry. A Framework for Geometric Computations</i>. Academic Press, Boston, 1991.</p> <p>[4] Gerald Farin, <i>Curves and Surfaces for CAGD</i>. 3rd edition. Academic Press, Boston, 1993.</p> |
|---|--|

Summary

Analysis of linear and arc approximation of synthetic surfaces

Risto Tashevski and Vladimir Dukovski

Faculty of Mechanical Engineering, The "Sts. Cyril and Methodius" University,
P.O. Box 464, 1000 Skopje, Republic of Macedonia

Key words: synthetic surface, spline

In this paper, an analysis and a mathematical model for linear and arc approximation of the synthetic surfaces are presented. Synthetic surfaces are composed of splines in two directions. Synthetic surfaces are used in engineering design for describing parts with aerodynamic or other functional and esthetic shapes. Synthetic surfaces can be represented with majority of contemporary CAD

systems. The modern NC machines contain highly sophisticated controllers, which provide complex synthetic surfaces manufacturing. The controllers of the older NC machines do not have functions for spline identification. It is necessary to perform a mathematical approximation of synthetic surface form of splines in two directions.