ГОДИШЕН ЗБОРНИК
НА ФИЛОЗОФСКИОТ ФАКУЛТЕТ НА УНИВЕРЗИТЕТОТ ВО СКОПЈЕ
Природно-математички оддел
Книга 4 (1951), № 7
ANNUAIRE
DE LA FACULTÉ DE PHILOSOPHIE DE L'UNIVERSITÉ DE SKOPJE
Section des sciences naturelles
Tome 4 (1951), № 7

Благој С. Попов

ЗА РЕДУКТИБИЛНОСТА НА ХИПЕРГЕОМЕТРИСКАТА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА

B. S. Popov

FACTORIZATION OF AN OPERATOR

Скопје — Skopje
1951

БЛАГОЈ С. ПОПОВ

ЗА РЕДУКТИБИЛНОСТА НА ХИПЕРГЕОМЕТРИСКАТА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА

1. Frobenius[1]) прв го докажува резултатот за хипергеометриската диференцијална равенка

$$x(x-1)y''+[(\alpha+\beta+1)x-\gamma]y'+\alpha\beta y=0,$$

којашто ние накусо ќе ја пишеме како

$$H(\alpha,\beta,\gamma,y,x)=0,$$

што го формулираме по следниот начин.

Потребен и доволен услов за диференцијалната равенка (1) да биде редуктибилна е, еден од четирите броја

$$\alpha, \beta, \gamma-\alpha, \gamma-\beta,$$

да биде цел позитивен или негативен број.

Доказот на овој резултат Frobenius го дава, појдувајќи од интегралот

$$y=F(\alpha,\beta,\gamma,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(1)_n(\gamma)_n}x^n, \tag{2}$$

$$(r)_k=r(r+1)(r+2)\cdots(r+k-1),\ (r)_0=1,$$

на хипергеометриската диференцијална равенка (1). Кога константите $\alpha, \beta, \gamma-\alpha$, или $\gamma-\beta$ се такви, една од нив да претставува цел позитивен или негативен број, постои конечен хипергеометриски ред од облик (2), кој помножен со еден

[1]) *Ueber den Begriff der Irreductibilität der Theorie der linearen Differentialgleichungen*, Journal für reine math. t. 76. (1873) S. 236—271.

степен на x или $(1-x)$ е интеграл на диференцијална равенка од облик (1). Во тој случај постојат диференцијални равенки од прв ред, коишто имаат заеднички интеграл со хипергеометриската диференцијална равенка, што токму претставува општ услов за редуктибилност на една диференцијална равенка.

До истиот резултат доваѓаат Picard[1]) и Goursat[2]) Goursat тргнува од општиот услов за редуктибилност на една линеарна диференцијална равенка и претпоставува дека хипергеометриската диференцијална равенка (1) има еден заеднички интеграл со линеарната хомогена равенка од први ред

$$y' - R(x)\,y = 0.$$

$R(x)$ е рационална функција од x. Потоа бара обликот на примитивната на оваа функција и од претпоставката дека е тој интеграл и на хипергеометриската диференцијална равенка, ги добива горе спомнатите услови.

Намера на оваа работа е горниот резултат за хипергеометриската диференцијална равенка да го докаже по еден нов по наша мисла поедноставен начин. За таа цел ги користиме резултатите добиени од Floquet[3]) и Митриновић[4]) за редуктибилноста на линеарните диференцијални равенки.

Методот употребен од нас претставува интерес и заради това, што дава во експлицитна форма разлагањето на диференцијалниот оператор

$$L(\alpha,\beta,\gamma) \equiv x(x-1)\,D^2 + [(\alpha+\beta+1)\,x-\gamma]\,D + \alpha\beta,\quad D = \frac{d}{dx},$$

на симболични фактори, заправо хипергеометриската диференцијална равенка (1) на систем од линеарни равенки од прв ред и што може со успех да се примени за други класи диференцијални равенки[5]).

2. По дефиниција за една диференцијална равенка викаме дека е редуктибилна, ако таа има најмалку еден општ интеграл со една друга диференцијална равенка од понизок

---

[1]) *Traité d'analyse*, t. III, Deuxieme edition, (1908) p. 560—561.

[2]) *Propriétés genérales de l'équation d'Euler et de Gauss*, Actualités scientifiques et industrielles, № 333, Paris, (1936) p. 46.

[3]) *Sur la théorie des équations différentiellés linéaires*, Ann. de l'Ec. Norm. II-e Série, t. VIII, (1879) Suppl. 1—131.

[4]) *Sur un cas de reductibilité d'équation différentielles linéaires*, C. R. t. 230, (1950) p. 1130—1132.

[5]) B. S. Popov, Sull'equazione di Bessel, Boll. della Unione Matematica Italiana, Serie III, Anno VII, N. 1 (1952) p. 17.

ред на којашто коефициентите се од исти карактер, како и на претходната[1]).

Митриновиħ[2]) покажува дека за дадена линеарна диференцијална равенка

$$\text{(3)} \qquad \sum_{i=0}^{n} \Phi_i(x)\, y^{(n-i)} = 0,$$

ќе имаме еден случај на редуктибилност ако на дадената диференцијална равенка (3), може да се учини соответен еден систем од линеарни равенки од први ред

$$f_k\, y'_{k-1} + \varphi_k\, y_{k-1} = y_k,\; y_n = 0,\; y_0 = 0,$$

$$f_k = f_k(x),\; \varphi_k = \varphi_k(x), \qquad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

Дека е овој услов и доволен лесно се уверуваме зимајќи предвид дека диференцијалната равенка (3) има заеднички интеграл со линеарната хомогена равенка од прв ред

$$f_i\, y' + \varphi_1\, y = 0.$$

По таков начин за диференцијалните равенки од втори ред

$$\text{(4)} \qquad \Phi_1(x)\, y'' + \Phi_2(x)\, y' + \Phi_3(x)\, y = 0,$$

овој резултат можеме да го искажеме по следниот начин.

Потребен и доволен услов за диференцијалната равенка (4) да биде редуктибилна е, таа да може да се пише во облик

$$\text{(5)} \qquad \Big[\lambda_1(x)\, D + \mu_1(x)\Big]\Big[\lambda_2(x)\, D + \mu_2(x)\Big]\, y = 0.$$

3. Да претположиме дека диференцијалната равенка (1) може да се пише како (5), каде што земаме

$$\text{(6)} \qquad \begin{aligned} \lambda_1(x) &= P_1(x),\; \mu_1(x) = 1, \\ \lambda_2(x) &= P_2(x),\; \mu_2(x) = P_3(x), \end{aligned}$$

$P_i(x)$ се полиноми од x.

---

[1]) F r o b e n i u s, *loc. cit.*

[2]) *Loc. cit.*

Ја разделуваме равенката (1) со $\alpha\beta$ и равенката добиена од (5) по внесување вредностите на $\lambda(x)$ и $\mu(x)$ од (6) со $(P_1 P_3' + P_3)$. Добиваме[1])

$$\left[\frac{x(x-1)}{\alpha\beta} D^2 + \frac{[(\alpha+\beta+1)x-\gamma]}{\alpha\beta} D + 1\right] y = 0,$$

$$\left[\frac{P_1 P_2}{P_1 P_3' + P_3} D^2 + \frac{P_1 P_2' + P_1 P_3 + P_2}{P_1 P_3' + P_3} D + 1\right] y = 0.$$

Употребувајќи ги овие два облика на една иста равенка ги добиваме идентитетите

$$\text{(6)} \qquad \begin{aligned} &p P_1 P_2 - x(x-1)(P_1 P_3' + P_3) \equiv 0, \\ &p(P_1 P_2' + P_1 P_3 + P_2) - (qx - \gamma)(P_1 P_3' + P_3) \equiv 0. \end{aligned}$$

p и q се две константи, уведени за скратување и определени со

$$\alpha + \beta = q - 1,$$

$$\alpha\beta = p.$$

4. Полиномите $P_i(x)$, нека се дадени со

$$\text{(7)} \qquad P_i(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \omega_{i,k} x^{n+1-k}, \qquad i = 1, 2, 3$$

$$\omega_{2,0} \neq 0,$$

$$\omega_{3,0} = 0, \ \omega_{3,1} = 1,$$

$$\omega_{1,k} = 0, \quad k = 0, 2, \cdots, n-1.$$

Внесувајќи ги овие вредности за $P_i(x)$ во (6) ги добиваме системите (8) и (9) од $2n+5$ нелинеарни алгебарски равенки, од кои треба да се определат непознатите параметри $\omega_{i,k}$, како и природниот број n што ја определува степента на полиномите $P_i(x)$, во зависност од константите α, β и γ.

---

[1]) Акцентираните слова означуваат тука и насекаде изводи земени по x.

$$
(8)\left\{
\begin{aligned}
& p\,\omega_{1,n}\,\omega_{2,0}-(n\,\omega_{1,n}+\omega_{3,1}) && =0\\
& p\,(\omega_{1,n+1}\,\omega_{2,0}+\omega_{1,n}\,\omega_{2,1})-\left[(n-1)\,\omega_{1,n}\,\omega_{3,2}+n\,\omega_{1,n+1}\,\omega_{3,1}+\omega_{3,2}\right]+(n\,\omega_{1,n}+\omega_{3,1}) && =0\\
& p\,(\omega_{1,n+1}\,\omega_{2,1}+\omega_{1,n}\,\omega_{2,2})-\left[(n-2)\,\omega_{1,n}\,\omega_{3,3}+(n-1)\,\omega_{1,n+1}\,\omega_{3,2}+\omega_{3,3}\right]+\left[(n-1)\,\omega_{1,n}\,\omega_{3,2}+n\omega_{1,n+1}\,\omega_{3,1}+\omega_{3,2}\right] && =0\\
& -\,-\\
& p\,(\omega_{1,n+1}\,\omega_{2,k-1}+\omega_{1,n}\,\omega_{2,k})-\left[(n-k)\,\omega_{1,n}\,\omega_{3,k+1}+(n-k+1)\,\omega_{1,n+1}\,\omega_{3,k}+\omega_{3,k+1}\right]\\
& \qquad +\left[(n-k+1)\,\omega_{1,n}\,\omega_{3,k}+(n-k+2)\,\omega_{1,n+1}\,\omega_{3,k-1}+\omega_{3,k}\right] && =0\\
& -\,-\\
& p\,(\omega_{1,n+1}\,\omega_{2,n-1}+\omega_{1,n}\,\omega_{2,n})-\left[\omega_{1,n+1}\,\omega_{3,n}+\omega_{3,n+1}\right]+\left[\omega_{1,n}\,\omega_{3,n}+2\,\omega_{1,n+1}\,\omega_{3,n-1}+\omega_{3,n}\right] && =0\\
& p\,(\omega_{1,n+1}\,\omega_{2,n}+\omega_{1,n}\,\omega_{2,n+1})+(\omega_{1,n+1}\,\omega_{3,n}+\omega_{3,n+1}) && =0\\
& p\,\omega_{1,n+1}\,\omega_{2,n+1} && =0
\end{aligned}
\right.
$$

и

$$
(9)\left\{
\begin{array}{l}
p\left\{\left[(n+1)\,\omega_{2,0}+\omega_{3,1}\right]\omega_{1,n}+\omega_{2,0}\right\}-q(n\,\omega_{1,n}+\omega_{3,1}) = 0 \\[2mm]
p\left\{\left[(n+1)\,\omega_{2,0}+\omega_{3,1}\right]\omega_{1,n+1}+\left[n\,\omega_{2,1}+\omega_{3,2}\right]\omega_{1,n}+\omega_{2,1}\right\}-q\left[(n-1)\,\omega_{1,n}\,\omega_{3,2}+n\,\omega_{1,n+1}+\omega_{3,2}\right]+\gamma(n\,\omega_{1,n}+\omega_{3,1}) = 0 \\[2mm]
p\left\{\left[n\,\omega_{2,1}+\omega_{3,2}\right]\omega_{1,n+1}+\left[(n-1)\,\omega_{2,2}+\omega_{3,3}\right]\omega_{1,n}+\omega_{2,2}\right\}-q\left[(n-2)\,\omega_{1,n}\,\omega_{3,3}+(n-1)\,\omega_{1,n+1}\,\omega_{3,2}+\omega_{3,3}\right] \\
\qquad\qquad +\gamma\left[(n-1)\,\omega_{1,n}\,\omega_{3,2}+n\,\omega_{1,n+1}+\omega_{3,2}\right] = 0 \\
-\;- \\
p\left\{\left[(n-k+2)\,\omega_{2,k-1}+\omega_{3,k}\right]\omega_{1,n+1}+\left[(n-k+1)\,\omega_{2,k}+\omega_{3,k+1}\right]\omega_{1,n}+\omega_{2,k}\right\}-q\left[(n-k)\,\omega_{1,n}\,\omega_{3,k+1}\right. \\
\qquad\qquad \left.+(n-k+1)\,\omega_{1,n+1}\,\omega_{3,k}+\omega_{3,k+1}\right]+\gamma\left[(n-k+1)\,\omega_{1,n}\,\omega_{3,k}+(n-k+2)\,\omega_{1,n+1}\,\omega_{3,k-1}+\omega_{3,k}\right] = 0 \\
-\;- \\
p\left\{(2\,\omega_{2,n-1}+\omega_{3,n})\,\omega_{1,n+1}+(\omega_{2,n}+\omega_{3,n+1})\,\omega_{1,n}+\omega_{2,n}\right\}-q\left[\omega_{1,n+1}\,\omega_{3,n}+\omega_{3,n+1}\right] \\
\qquad\qquad +\gamma\left[\omega_{1,n}\,\omega_{3,n}+2\,\omega_{1,n+1}\,\omega_{3,n-1}+\omega_{3,n}\right] = 0 \\[2mm]
p\left\{(\omega_{2,n}+\omega_{3,n+1})\,\omega_{1,n+1}+\omega_{2,n+1}\right\}+\gamma\left[\omega_{1,n+1}\,\omega_{3,n}+\omega_{3,n+1}\right] = 0
\end{array}
\right.
$$

Од последната на равенките (8) имаме

$$\omega_{1,n+1} \ \omega_{2,n+1} = 0,$$

поради $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

Да земеме:

1° $\omega_{1,n+1} = 0$.

Од (8) и (9) добиваме

$$\gamma = \alpha - n \ \text{и} \ \gamma = \beta - n,$$

коишто изрази претставуваат условите диференцијалната равенка (1) за да може да се пишува во облик (5), што го претставува условот за редуктибилност.

Со решавање на истите системи во случај

$$\gamma = \alpha - n,$$

ги добиваме за параметрите $\omega_{i,k}$ вредностите

$$\omega_{1,n} = 1/(\alpha - n),$$

$$\omega_{2,k} = \frac{1}{\beta}\left(A_k^{\alpha,\beta} - A_{k-1}^{\alpha,\beta}\right), \quad A_{-1}^{\alpha,\beta} = 0,$$

$$(k = 0, 1, 2, \cdots n+1),$$

каде што е

$$A_k^{\alpha,\beta} = \frac{(-n)_k \, (1-\alpha)_k}{(1)_k \, (\beta - \alpha + 1)_k},$$

$$(r)_k = r(r+1) \cdots (r+k-1),$$

$$(r)_0 = 1,$$

и понатаму

$$\omega_{3,k+1} = A_k^{\alpha+1, \, \beta+1},$$

$$(k = 0, 1, 2, \cdots n).$$

Полиномите $P_i(x)$ се од облик

$$P_1(x) = \frac{x}{\alpha - n},$$

$$P_2(x) = \frac{1}{\beta}\sum_{k=0}^{n+1}\left(A_k^{\alpha,\beta} - A_{k-1}^{\alpha,\beta}\right) x^{n+1-k},$$

$$P_3(x) = \sum_{k=1}^{n+1} A_{k-1}^{\alpha+1,\,\beta+1}\; x^{n+1-k},$$

или ако ги изразиме со помош на хипергеометриски функции (2), имаме

$$P_1(x) = \frac{x}{\alpha - n},$$

$$P_2(x) = \frac{x-1}{\beta}\, x^n F(-n, 1-\alpha, \beta-\alpha+1, 1/x),$$

$$P_3(x) = x^n F(-n, -\alpha, \beta-\alpha+1, 1/x).$$

Диференцијалната равенка (5) е во овој случај од облик

$$\left[\frac{x}{\alpha-n} D + 1\right]\left[\frac{x-1}{\beta} x^n F(-n, 1-\alpha, \beta-\alpha+1, 1/x)\, D \right.$$
$$\left. + x^n F(-n, -\alpha, \beta-\alpha+1, 1/x)\right] y = 0,$$

или по скратувањето со

$$\frac{x^n}{\beta(\alpha-n)} F(-n, -\alpha, \beta-\alpha+1, 1/x),$$

добиваме

$$H(\alpha, \beta, \alpha-n, y, x) \equiv$$

$$\Big[x D + \alpha + x(\lg F(-n, 1-\alpha, \beta-\alpha+1, 1/x))'\Big]\Big[(x-1) D$$
$$\left. + \frac{\beta F(-n, -\alpha, \beta-\alpha+1, 1/x)}{F(-n, 1-\alpha, \beta-\alpha+1, 1/x)}\right]$$

Аналоген резултат добиваме и за случај

$$\gamma = \beta - n,$$

нешто коешто се гледа и од

$$H(\alpha, \beta, \gamma, y, x) \equiv H(\beta, \alpha, \gamma, y, x),$$

т. е. во добиениот резултат треба да се смени α со β.

2° $\omega_{2,n+1} = 0.$

Собирајќи ги левите и десни страни на (8) добиваме

$$(\omega_{1,n} + \omega_{1,n+1})(\omega_{2,0} + \omega_{2,1} + \cdots + \omega_{2,n}) = 0,$$

Земаме

$$\omega_{1,n} + \omega_{1,n+1} = 0. \tag{10}$$

Од (8) со собирање на второта равенка со првата, третата со втората итн., имаме

$$p\,\omega_{1,n}\,\omega_{2,1} = (n-1)\,\omega_{1,n}\,\omega_{3,2} + n\,\omega_{1,n+1}\,\omega_{3,1} + \omega_{3,2}$$

$$p\,\omega_{1,n}\,\omega_{2,2} = (n-2)\,\omega_{1,n}\,\omega_{3,3} + (n-1)\,\omega_{1,n+1}\,\omega_{3,2} + \omega_{3,3}$$

— — — — — — — — — — — — — — —

$$p\,\omega_{1,n}\,\omega_{2,n} = \qquad\qquad \omega_{1,n+1}\,\omega_{3,n} + \omega_{3,n+1}$$

Овие равенки заедно со првата на (8) даваат

$$p\,\omega_{1,n}(\omega_{2,0} + \omega_{2,1} + \cdots + \omega_{2,n}) = \omega_{3,1} + \omega_{3,2} + \cdots + \omega_{3,n+1}. \tag{11}$$

Од (9) добиваме земајќи предвид (10)

$$p(\omega_{2,0} + \omega_{2,1} + \cdots + \omega_{2,n}) = (q-\gamma)(\omega_{3,1} + \omega_{3,2} + \cdots + \omega_{3,n+1}). \tag{12}$$

Равенките (11) и (12) ни даваат

$$\omega_{1,n} = \frac{1}{q-\gamma} = \frac{1}{\alpha+\beta+1-\gamma}.$$

Од првите равенки на (8) и (9) имаме

$$\omega_{1,n} = 1/(\alpha - n) \text{ и } \omega_{1,n} = 1/(\beta - n).$$

Следователно, ги добиваме условите

$$\gamma = \beta + n + 1 \text{ и } \gamma = \alpha + n + 1,$$

потребни за диференцијалната равенка (1) да може да се напише во облик (5).

Параметрите $\omega_{i,k}$ во овој случај дадени се со

$$\omega_{1,n} = 1/(\alpha - n),$$

$$\omega_{2,n} = 1/(n - \alpha),$$

$$\omega_{2,k} = \frac{1}{\beta} A_k^{1-\beta,\, 1-\alpha},$$

$$\omega_{3,k} = A_{k-1}^{-\beta,\, -\alpha},$$

$$(k = 0, 1, 2, \cdots n+1).$$

Полиномите $P_i(x)$ имаат облик

$$P_1(x) = \frac{x-1}{\alpha - n},$$

$$P_2(x) = \frac{1}{\beta} \sum_{k=0}^{n+1} A_k^{1-\beta,\, 1-\alpha} x^{n+1-k},$$

$$P_3(x) = \sum_{k=1}^{n+1} A_{k-1}^{-\beta,\, -\alpha} x^{n+1-k},$$

или со хипергеометриски функции

$$P_1(x) = \frac{x-1}{\alpha - n},$$

$$P_2(x) = \frac{x^{n+1}}{\beta} F(-n, \beta, \beta - \alpha + 1, 1/x),$$

$$P_3(x) = x^n F(-n, \beta + 1, \beta - \alpha + 1, 1/x).$$

Диференцијалната равенка (5) е од облик

$$\left[\frac{x-1}{\alpha - n} D + 1\right]\left[\frac{x^{n+1}}{\beta} F(-n, \beta, \beta - \alpha + 1, 1/x) D \right.$$

$$\left. + x^n F(-n, \beta + 1, \beta - \alpha + 1, 1/x)\right] y = 0.$$

Ако ја скратиме со

$$\frac{x^n}{\beta(\alpha-n)} F(-n, \beta, \beta-\alpha+1, 1/x),$$

ќе добиеме

$H(\alpha, \beta, \beta+n+1, y, x) \equiv$

$$\Big[(x-1)\Big(D+(lg F(-n, \beta, \beta-\alpha+1, 1/x))'\Big)+\alpha-\frac{n}{x}\Big]\Big[x D$$

$$+\frac{F(-n, \beta+1, \beta-\alpha+1, 1/x)}{F(-n, \beta, \beta-\alpha+1, 1/x)}\beta\Big] y=0.$$

Аналогно се добива и случајот $\gamma-\alpha=n+1$.

5. За да ги добиеме и другите случаи кога хипергеометриската диференцијална равенка (1) може да се претстави во облик (5) т. е. кога е таа редуктибилна, можеме по истиот начин како погоре, зимајќи за полиномите $P_i(x)$ други облици.

Меѓутоа, ние ќе ги ползуваме веќе добиените резултати, како и некои познати трансформации.

1° Со смената

$$y(x)=|x|^{-n-\beta}\eta(x), \quad x \neq 0,$$

диференцијалнатата равенка

(13) $$H(\alpha, \beta, \beta+n+1, y, x)=0,$$

добива облик

(14) $$H(\alpha-\beta-n, -n, 1-\beta-n, \eta, x)=0.$$

Истата смена во

(15) $$\Big[(x-1)\Big(D+(lg F(-n, \beta, \beta-\alpha+1, 1/x))'\Big)+\alpha-\frac{n}{x}\Big]\Big[x D$$

$$+\frac{F(-n, \beta+1, \beta-\alpha+1, 1/x)}{F(-n, \beta, \beta-\alpha+1, 1/x)}\beta\Big] y=0,$$

ни дава

$$(16)\quad \left[(x-1)\left(D+(lg\,F(-n,\beta,\beta-\alpha+1,1/x))'\right)+\frac{n(x-1)+(\beta+n)}{x}\right.$$

$$\left.-(\beta-\alpha+2n)\right]\left[x D-n\,\frac{F(1-n,\beta,\beta-\alpha+1,1/x)}{F(-n,\beta,\beta-\alpha+1,1/x)}\right]\eta=0.$$

Ако ставиме во (14) и (16)

$$\alpha-\beta-n=\beta',$$

$$1-\beta-n=\gamma',$$

и смениме α' со α и β' со β, како и η со y, добиваме

$$H(-n,\beta,\gamma,y,x)\equiv$$

$$\left[(x-1)\left(D+(lg\,F(-n,1-n-\gamma,1-n-\beta,1/x))'+\frac{n}{x}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1-\gamma-(n-\beta)x}{x}\right]\left[x D-\frac{n F(1-n,1-n-\gamma,1-n-\beta,1/x)}{F(-n,1-n-\gamma,1-n-\beta,1/x)}\right]y=0,$$

и аналогно за случаj кога е $\beta=-n$.

2°. Ако во равенката (13) ja извршиме смената

$$y(x)=|x-1|^{n+1-\alpha}\,\eta(x),\qquad x\neq 1,$$

добиваме по скратување со $|x-1|^{n+1-\alpha}$

$$(17)\qquad H(n+1,\beta+n+1-\alpha,\beta+n+1)\,\eta=0.$$

Истата смена во (15) ни дава

$$(18)\quad \left[(x-1)\left(D+(lg\,F(-n,\beta,\beta-\alpha+1,1/x))'+\frac{n}{x}\right)\right.$$

$$\left.+1\right]\left[xD+\frac{n+\beta+1-\alpha}{x-1}\;\frac{F(-n-1,\beta,\beta-\alpha+1,1/x)}{F(-n,\beta,\beta-\alpha+1,1/x)}\right]\eta=0.$$

Ако ставиме во (17) и (18)

$$\beta+n+1-\alpha=\beta',$$

$$\beta+n+1=\gamma',$$

добиваме, сменувајќи β' со β, γ' со γ, како и η со y

$$H(n+1,\beta,\gamma,y,x)=$$

$$\Big[(x-1)\Big(D+(lg F(-n,\gamma-n-1,\beta-n,1/x))'+\frac{n}{x}\Big)+1\Big]\Big[xD$$

$$+\frac{\beta x}{x-1}\,\frac{F(-n-1,\gamma-n-1,\beta-n,1/x)}{F(-n,\gamma-n-1,\beta-n,1/x)}\Big]y=0.$$

Од тука и 1° заклучуваме дека хипергеометриската диференцијална равенка (1) е редуктибилна и за случај кога е α односно β цел позитивен или негативен број.

6. Forsyth-Jacobsthal[1]) ги даваат следните партикуларни случаи на хипергеометриската диференцијална равенка (1)

$$H(1,\beta,\gamma,y,x)=0,$$

$$H(\alpha,\beta,\alpha+1,y,x)=0,$$

$$H(\alpha,\beta,\alpha,y,x)=0,$$

кога е таа интеграбилна.

Со примена на погоре покажаниот метод ќе имаме респективно

$$\Big[(x-1)D+1\Big]\Big[xD+\frac{\beta x-(\gamma-1)}{x-1}\Big]y=0,$$

$$\Big[(x-1)D+\beta\Big]\Big[xD+\alpha\Big]y=0,$$

$$\Big[xD+\alpha\Big]\Big[(x-1)D+\beta\Big]y=0.$$

---

[1]) *Lehrbuch der Differentialglechungen*, Braunschweig, (1912), S. 125. Да се види исто:

Kamke, E. *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen*, B. I. Gewönliche Diferentialgleichungen, Leipzig, (1942). S. 465.

Да земеме исто така нпр. равенките

$$H(\alpha, \beta, \beta+2, y, x) = 0,$$

$$H(\alpha, \beta, \alpha-1, y, x) = 0.$$

Ќе добиеме соодветно разлагањата

$$\left[(x-1)D + \frac{(x-1)}{x}\,\frac{\beta}{(\beta-\alpha+1)x-\beta} + \alpha - \frac{1}{x}\right]\left[xD + \frac{(\beta-\alpha+1)x-(\beta+1)}{(\beta-\alpha+1)x-\beta}\,\beta\right]y = 0,$$

и

$$\left[xD + \frac{1-\alpha}{(\beta-\alpha+1)x-(1-\alpha)} + \alpha\right]\left[(x-1)D + \frac{(\beta-\alpha+1)x+\alpha}{(\beta-\alpha+1)x-(1-\alpha)}\,\beta\right]y = 0.$$

7. Имајќи ја предвид релацијата

$$A_k^{\alpha,\beta} F(-k, \alpha-\beta-k, \alpha-k, x) = x^k F(-k, 1-\alpha, \beta-\alpha+1, 1/x),$$

на симболичните производи дадени погоре, можат да се дадат и други облици. Така нпр. диференцијалната равенка (1) во случај кога е $\gamma = \alpha - n$, може да се пише и како

$$H(\alpha, \beta, \alpha-n, y, x) \equiv$$

$$\left[xD + xD\lg F(-n, \alpha-\beta-n, \alpha-n, x) + \alpha - n\right]\left[(x-1)D + \frac{\alpha\beta}{\alpha-n}\,\frac{F(-n, \alpha-\beta-n, \alpha-n+1, x)}{F(-n, \alpha-\beta-n, \alpha-n, x)}\right].$$

Аналогни резултати се добиваат и за останатите случаи.

B. S. Popov

FACTORISATION OF AN OPERATOR

(Summary)

In this note I establish the following result:

If any number of the $\alpha, \beta, \gamma-\alpha, \gamma-\beta$ *is positive or negative integer, then the differential operator*

$$L(\alpha, \beta, \gamma) = x(x-1) D^2 + [(\alpha+\beta+1)x - \gamma] D + \alpha\beta, \quad D = \frac{d}{dx},$$

can be factored in the form

$$L(\alpha, \beta, \gamma) = \Big[\lambda_1(x) D + \mu_1(x)\Big]\Big[\lambda_2(x) D + \mu_2(x)\Big].$$

In this case we obtain*

$$(1)\quad L(\alpha, \beta, \alpha-n) \equiv \Big[x D + x(lg F(-n, 1-\alpha, \beta-\alpha+1, 1/x))' + \alpha\Big]\Big[(x-1) + \frac{\beta F(-n, -\alpha, \beta-\alpha+1, 1/x)}{F(-n, 1-\alpha, \beta-\alpha+1, 1/x)}\Big].$$

$$(2)\quad L(\alpha, \beta, \beta+n+1) \equiv \Big[(x-1)(D + (lg F(-n, \beta, \beta-\alpha+1, 1/x))') + \alpha - \frac{n}{x}\Big]\Big[xD + \frac{F(-n, \beta+1, \beta-\alpha+1, 1/x)}{F(-n, \beta, \beta-\alpha+1, 1/x)}\beta\Big].$$

$$(3)\quad L(-n, \beta, \gamma) \equiv \Big[(x-1)\Big(D + \frac{n}{x} + (lg F(-n, 1-\gamma-n, 1-\beta-n, 1/x))'\Big) + \frac{1-\gamma-(n-\beta)x}{x}\Big]\Big[xD - n\frac{F(1-n, 1-\gamma-n, 1-\beta-n, 1/x)}{F(-n, 1-\gamma-n, 1-\beta-n, 1/x)}\Big]$$

$$(4)\quad L(n+1, \beta, \gamma) \equiv \Big[(x-1)\Big(D + \frac{n}{x} + (lg F(-n, \gamma-n-1, \beta-n, 1/x))'\Big) + 1\Big]\Big[xD + \frac{\beta x}{x-1}\,\frac{F(-n-1, \gamma-n-1, \beta-n, 1/x)}{F(-n, \gamma-n-1, \beta-n, 1/x)}\Big],$$

where n is a natural number and $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ the well known hypergeometric function

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum_n \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(1)_n (\gamma)_n} x^n,$$

* The primes denote derivatives with respect to x.

$$(\sigma)_n = \frac{\Gamma(\sigma+n)}{\Gamma(\sigma)}.$$

Since

$$L(\alpha, \beta, \gamma) \equiv L(\beta, \alpha, \gamma),$$

we obtain from (1)—(4) still four identities.

To prove we proceed as follows.

Let differential equation

$$L(\alpha, \beta, \gamma)\, y = 0, \tag{5}$$

can be written in the form

$$[P_1(x)\, D+1]\,[P_2 D+P_3]\, y=0, \tag{6}$$

where P_i are the polynomials of x i. e.

$$P_i(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \omega_{i,k}\, x^{n-k+1}, \quad i=1, 2, 3 \tag{7}$$

$$\omega_{2,0} \neq 0, \quad \omega_{3,0}=0, \quad \omega_{3,1}=1,$$

$$\omega_{1,k}=0, \quad k=0, 1, 2, \cdots n-1,$$

and $\omega_{i,k}$ are indetermined constants.

In this case, after cancelation (5) and (6) with $\alpha\beta$ and $(P_1 P_3'+P_3)$ respectively, we obtain

$$\begin{aligned} &p\, P_1 P_2 - x\ x-1)(P_1 P_3' + P_3) \equiv 0, \\ &p\,(P_1 P_2' + P_1 P_3 + P_3) - (qx-\gamma)(P_1 P_3' + P_3) \equiv 0, \end{aligned} \tag{8}$$

where

$$p = \alpha\beta,$$

$$q-1 = \alpha+\beta.$$

Putting $P_i(x)$ in the (8) and equating to zero the coefficients of x^k we obtain the algebric equations

$$p(\omega_{1,n+1}\omega_{2,k-1}+\omega_{1,n}\omega_{2,k}) - \Big[(n-k)\,\omega_{1,n}\omega_{3,k+1}+(n-k+1)\,\omega_{1,n+1}\omega_{3,k}+\omega_{3,k+1}\Big]$$

$$+\Big[(n-k+1)\,\omega_{1,n}\omega_{3,k}+(n-k+2)\,\omega_{1,n+1}\omega_{3,k-1}+\omega_{3,k}\Big]=0,$$

$$(k=0, 1, \cdots n+2),$$

$$p\left\{\left[(n-k+2)\,\omega_{2,k-1}+\omega_{3,k}\right]\omega_{1,n+1}+\left[(n-k+1)\,\omega_{2,k}+\omega_{3,k+1}\right]\omega_{1,n}+\omega_{2,k}\right\}$$

$$-q\left[(n-k)\,\omega_{1,n}\,\omega_{3,k+1}+(n-k+1)\,\omega_{1,n+1}\,\omega_{3,k}+\omega_{3,k+1}\right]$$

$$+\gamma\left[(n-k+1)\,\omega_{1,n}\,\omega_{3,k}+(n-k+2)\,\omega_{1,n+1}\,\omega_{3,k-1}+\omega_{3,k}\right]=0,$$

$$(k=0,\ 1,\cdots n+1).$$

By solving this system we find the condition under which the equation (5) may be written in the form (6) and we determine the parameters $\omega_{i,k}$.

1° $\gamma=\alpha-n,$

$$\omega_{1,n}=1\,(\alpha-n),\quad \omega_{2,n}=0,$$

$$\omega_{2,k}=\frac{1}{\beta}\left(A_k^{\alpha,\beta}-A_{k-1}^{\alpha,\beta}\right),\quad A_{-1}^{\alpha,\beta}=0,$$

$$\omega_{3,k}=A_k^{\alpha+1,\ \beta+1},$$

$$(k=0,\ 1,\cdots n+1),$$

where

$$A_k^{\alpha,\beta}=\frac{(-n)_k\,(1-\alpha)_k}{(1)_k\,(\beta-\alpha+1)_k}.$$

The polynomials $P_i(x)$ are in this case of the form

$$P_1(x)=x/(\alpha-n),$$

$$P_2(x)=\frac{x-1}{\beta}\,x^n\,F(-n,1-\alpha,\beta-\alpha+1,1/x),$$

$$P_3(x)=x^n\,F(-n,-\alpha,\beta-\alpha+1,1/x).$$

If we substitute these forms in (6) and if we cancel with

$$\frac{x^n}{\beta\,(\alpha-n)}\,F(-n,-\alpha,\beta-\alpha+1,1/x),$$

we find (1).

2° $\gamma=\beta+n+1,$

$$\omega_{1,n}=-\omega_{2,n}=1/(\alpha-n),$$

$$\omega_{2,k}=\frac{1}{\beta}\,A_k^{1-\beta,\ 1-\alpha},$$

$$\omega_{3,k+1} = A_k^{-\beta,-\alpha},$$

$$(k=0,\ 1, \cdots n+1).$$

Then the polynomials $P_i(x)$ are

$$P_1(x) = (x-1)/(\alpha-n),$$

$$P_2(x) = \frac{x^{n+1}}{\beta} F(-n, \beta, \beta-\alpha+1, 1/x),$$

$$P_3(x) = x^n F(-n, \beta+1, \beta-\alpha+1, 1/x).$$

Substituting these forms into (6) and canceling with

$$\frac{x^n}{\beta} F(-n, \beta, \beta-\alpha+1, 1/x),$$

we find (2).

In order to obtain another conditions we proceed as follows.

1° Putting into (1)

$$y(x) = x^{-n-\beta}\,\eta(x), \quad x \neq 0,$$

we get (3), where $\beta' = \beta$, $\gamma' = \gamma$, $(\eta)\,x = y(x)$ and

$$1-\beta-n = \gamma',$$

$$\alpha-\beta-n = \beta'.$$

2° If we put into (1)

$$y(x) = (x-1)^{n+1-\alpha}\,\eta(x), \quad x \neq 1,$$

we get (4), where $\beta' = \beta$, $\gamma' = \gamma$, $\eta(x) = y(x)$ and

$$\beta+n+1-\alpha = \beta',$$

$$\beta+n+1 = \gamma'.$$