ГОДИШЕН ЗБОРНИК
НА ФИЛОЗОФСКИОТ ФАКУЛТЕТ НА УНИВЕРЗИТЕТОТ ВО СКОПЈЕ
Природно-математички оддел
Книга 3 (1950), № 6

ANNUAIRE
DE LA FACULTÉ DE PHILOSOPHIE DE L'UNIVERSITÉ DE SKOPJE
Section des sciences naturelles
Tome 3 (1950), № 6

Dragoslav S. Mitrinović

O JEDNOJ NEODREĐENOJ DIFERENCIJALNOJ JEDNAČINI

Dragoslav S. Mitrinovitch

SUR UNE EQUATION DIFFERENTIELLE INDETERMINEE

Скопје — Skopje
1950

Dragoslav S. Mitrinović

O JEDNOJ NEODREĐENOJ DIFERENCIJALNOJ JEDNAČINI

1. Označimo sa y i z dve funkcije promenljive x; sa

$$y', y'', \cdots, y^{(p)}; \quad z', z'', \cdots, z^{(q)}$$

njihove sukcesivne izvode po x.

Relacija

$$G(x; y, y', y'', \cdots, y^{(p)}; z, z', z'', \cdots, z^{(q)}) = 0 \tag{1}$$

naziva se neodređena diferencijalna jednačina ili Monge-ova jednačina.

Pod integracijom jednačine (1) podrazumeva se određivanje svih sistema od dve funkcije $y(x)$ i $z(x)$ koje zadovoljavaju jednačinu (1).

Hilbert[1] je postavio ovaj problem:

Ispitati da li se rešenje jednačine (1) može izraziti pomoću obrazaca

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t, w, w_1, w_2, \cdots, w_r), \\ y &= \psi(t, w, w_1, w_2, \cdots, w_r), \\ z &= \chi(t, w, w_1, w_2, \cdots, w_r), \end{aligned} \tag{2}$$

gde φ, ψ, χ označavaju određene funkcije naznačenih argumenata, i gde su: t jedan parametar, w proizvoljna funkcija od t i

$$w_k = \frac{d^k w}{dt^k}, \qquad (k = 1, 2, \cdots, r).$$

---

[1]) *Videti:* [4], str. 82 i [8], str. 22. Takođe konsultovati [1], t. IV, str. 432.

Rešenje oblika (2) zove se *eksplicitno rešenje* (u francuskoj literaturi[2]) : *solution explicite;* u nemačkoj literaturi[3]) : *integrallose Auflösung).*

Polazeći od partikularne jednačine

$$z' = y''^2, \tag{3}$$

koja spada u tip (1), Hilbert je dao negativan odgovor na pitanje postavljeno u gore navedenom problemu. Na osnovu zaključka koji je dobio za jednačinu (3), Hilbert je zatim dokazao: *da rešenje jednačine*

$$z' = g(x;\, z;\, y,\, y',\, y'') \tag{4}$$

ne može da se izrazi pomoću obrazaca oblika (2), *tj. da jednačina* (4) *nema eksplicitnog rešenja.*[4])

Time je dokazana *nemogućnost eksplicitne integracije* jednačine (1) u opštem slučaju.

2. *U ovom članku daćemo tri metode za integraciju jednačine*

$$\frac{y''}{y} - \frac{z''}{z} = h, \tag{5}$$

gde je h *neki parametar, nezavisan od* x.

Isključujemo iz posmatranja specijalan slučaj kada su bilo y bilo z oblika $\alpha x + \beta$, gde su α i β konstante.

Prva metoda. Jednačina (5) može se zameniti sistemom

$$y'' = [\Phi(x) + h]\, y, \tag{6}$$

$$z'' = \Phi(x)\, z, \tag{7}$$

gde je Φ proizvoljna funkcija promenljive x.

Analizom jednačina (6) i (7) dobija se ovaj rezultat:

Teorema I. *Kada je linearna jednačina* (6) *integrabilna za dati oblik funkcije* $\Phi(x)$ *i proizvoljno* h, *tada je integrabilna*

---

2) [8], str. 1.

3) [4], str. 83.

4) Hilbert-ov zaključak tekstuelno glasi: „...*Mithin kann die Differentialgleichung* (4) *gewiß nur in dem Falle eine integrallose Auflösung besitzen, wenn g eine ganze lineare Funktion von* y'' *ist.*"— O ovome videti: [4], str. 89.

i jednačina (7) *za isti oblik funkcije* $\Phi(x)$. *Funkcije* $y(x)$ *i* $z(x)$, *rešenja jednačina* (6) *i* (7), *koja odgovaraju istoj funkciji* $\Phi(x)$, *pretstavljaju rešenje neodređene jednačine* (4).

Navedena teorema omogućava da se iskoristi Darboux-Drach-ova metoda[5] na osnovu koje je mogućno obrazovati sve slučajeve[6] u kojima se jednačina (6) integrali pomoću kvadratura, za proizvoljno h. Iz toga izlazi da se za proizvoljno h može formirati beskrajni niz parova funkcija $y(x)$ i $z(x)$, gde će svaki par pretstavljati jedno rešenje jednačine (5). Neka je opšte rešenje jednačine (6), za neki dati oblik funkcije $\Phi(x)$, prikazano relacijom

$$y = C_1\theta_1(x, h) + C_2\theta_2(x, h),$$

gde su C_1 i C_2 dve integracione konstante, a θ_1 i θ_2 dva linearno nezavisna partikularna rešenja jednačine (6). Ako C_3 i C_4 označavaju dve nove integracione konstante, tada funkcije

$$y = C_1\theta_1(x, h) + C_2\theta_2(x, h),$$

$$z = C_3\theta_1(x, 0) + C_4\theta_2(x, 0)$$

određuju jedno rešenje jednačine (5).

Primer. Uzmimo linearnu jednačinu

$$y'' = \left[\frac{m(m-1)}{\sin^2 x} + \frac{n(n-1)}{\cos^2 x} + h\right] y,$$

gde su m i n dva prirodna broja.

Darboux[7] je pokazao da je ta jednačina integrabilna, kada h ima proizvoljnu vrednost. Ako se iskoristi taj rezultat, dobija se jedan par funkcija $y(x)$ i $z(x)$ koji definiše jedno rešenje jednačine (5)

Druga metoda. Izvršimo u jednačini (5) smene

$$y = \exp\left(\int \eta\, dx\right), \tag{8}$$
$$z = \exp\left(\int \zeta\, dx\right),$$

gde su η i ζ dve nove nepoznate funkcije.

---

5) Videti: [1], t. II, str. 210 i [2].

6) Do sada nije sistematski primenjena Darboux-Drach-ova metoda za formiranje integrabilnih jednačina oblika (6) za ma kakvo h, te je poznat mali broj takvih jednačina. Sve te slučajeve stavio je Kamke u svoju zbirku jednačina [5].

7) Videti: [1], str. 211—213; [5], str. 408, jednačina 2.25.

Tada se dobija

(9) $$\eta' - \zeta' + \eta^2 - \zeta^2 = h,$$

ili

(10) $$(\eta - \zeta)' + (\eta - \zeta)(\eta + \zeta) = h.$$

Ako se tu stavi

(11) $$\eta - \zeta = \theta,$$

gde je θ neka proizvoljna funkcija od x, nalazi se

(12) $$\theta' + \theta(\eta + \zeta) = h.$$

Iz (11) i (12) se dobija

(13) $$\eta = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{\theta} - \frac{\theta'}{\theta} + \theta\right), \qquad \zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{\theta} - \frac{\theta'}{\theta} - \theta\right).$$

Prema tome, eksplicitno rešenje jednačine (9) određeno je obrascima (13), gde je θ proizvoljna funkcija promenljive x.

Na osnovu obrazaca (8) dobija se dalje

$$y = \frac{1}{\sqrt{\theta}} \exp\left\{\frac{1}{2}\int\left(\frac{h}{\theta} + \theta\right)dx\right\},$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{\theta}} \exp\left\{\frac{1}{2}\int\left(\frac{h}{\theta} - \theta\right)dx\right\}.$$

Stoga imamo ovaj rezultat:

Teorema II. *Rešenje jednačine* (5) *određeno je obrascima*

(14) $$y = \frac{A}{\sqrt{\theta}} \exp\left\{\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\left(\frac{h}{\theta} + \theta\right)dx\right\}, \qquad z = \frac{B}{\sqrt{\theta}} \exp\left\{\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\left(\frac{h}{\theta} - \theta\right)dx\right\},$$

gde su A i B dve integracione konstante, x_0 jedna numerička konstanta podesno izabrana, θ proizvoljna funkcija od x.

U slučaju kada je $h=0$, jednačina (5) ima eksplicitno rešenje koje je dato obrascima

$$y = A\frac{w}{\sqrt{w'}}, \qquad z = \frac{B}{\sqrt{w'}},$$

gde je w proizvoljna funkcija od x i $w' = dw/dx$.

Stavi li se

$$w = \frac{1}{2} v^2,$$

gde je v neka druga proizvoljna funkcija od x, gornje eksplicitno rešenje ima oblik

$$y = Av(v/v')^{1/2}, \qquad z = B(vv')^{-1/2}.$$

Treća metoda. Ako je T neka neprekidna i diferencijabilna funkcija promenljive z, ispitajmo da li se može naći rešenje jednačine (5), tj. par funkcija $y(x)$ i $z(x)$ koje su vezane relacijom

(15) $$y = T(z).$$

Označimo li sa $\dot{T}$ i $\ddot{T}$ izvode

$$\frac{dT}{dz}, \frac{d^2 T}{dz^2},$$

relacija (15) daje

(16) $$y' = \dot{T} z', \qquad y'' = \ddot{T} z'^2 + \dot{T} z''.$$

Posle unošenja vrednosti (16) u jednačinu (5), dobija se

(17) $$\ddot{T} z z'^2 + \dot{T} z z'' - T z'' = T h z.$$

Stavljajući

(18) $$z' = p, \qquad z'' = p\frac{dp}{dz},$$

jednačina (17) postaje

$$(19) \qquad (z\dot{T}-T)\frac{dp}{dz}+z\ddot{T}p=\frac{hzT}{p},$$

tj. ona je Bernoulli-eva tipa

$$\frac{dp}{dz}+P(z)\,p=Q(z)\,p^k,$$

gde je

$$k=-1,$$

$$P=\frac{z\ddot{T}}{z\dot{T}-T},$$

$$Q=\frac{hzT}{z\dot{T}-T}.$$

Ovde se pretpostavlja da se izraz $z\dot{T}-T$ ne svodi identički na nulu.

Ako se stavi

$$p=u^{1/2},$$

jednačina (19) postaje

$$u'+\frac{2z\ddot{T}}{z\dot{T}-T}u=\frac{2hzT}{z\dot{T}-T},$$

odakle izlazi[8]

$$u=(z\dot{T}-T)^{-2}\left[K_1+2h\int zT(z\dot{T}-T)\,dz\right],$$

gde je K_1 integraciona konstanta.

Dalje se nalazi:

$$p=\frac{1}{z\dot{T}-T}\left[K_1+2h\int zT(z\dot{T}-T)\,dz\right]^{1/2},$$

$$x+K_2=\int(z\dot{T}-T)\left[K_1+2h\int zT(z\dot{T}-T)\,dz\right]^{-1/2}dz,$$

gde je K_2 jedna nova integraciona konstanta.

---

[8]) Prilikom integracije treba voditi računa o identitetu

$$\frac{d}{dz}(z\dot{T}-T)=z\ddot{T}.$$

Prema tome, može se formulisati ovaj rezultat:

Teorema III. *Ako su z_0 i z_1 dve numeričke konstante podesno izabrane, K_1 i K_2 dve proizvoljne konstante i T proizvoljna funkcija od z, tada se nezavisno promenljiva x i nepoznata funkcija y izražavaju obrascima*

$$x + K_2 = \int_{z_1}^{z} (z\dot{T} - T)\left[K_1 + hz^2T^2 - 4h\int_{z_0}^{z} zT^2 dz\right]^{-1/2} dz, \tag{20}$$

$$y = T(z). \tag{21}$$

U obrascima (20) i (21) ulogu parametra igra druga nepoznata funkcija z.

Da bismo dobili rešenje jednačine (5) u obliku

$$y = y(x), \qquad z = z(x), \tag{22}$$

potrebno je izvršiti dve kvadrature i zatim jednu inverziju, što se praktički može ostvariti samo u vrlo izuzetnim slučajevima.

Primer. Posmatrajmo particularni slučaj

$$T(z) = z^s,$$

gde je s neka realna konstanta, različita od 0, 1, − 1.

Ako je

$$h(s+1)/(s-1) = \omega^2,$$

na osnovu obrazaca (20) i (21) nalazi se

$$(23) \qquad \begin{aligned} y &= \alpha\,[\operatorname{ch}(\omega x + \gamma)]^{s/(s+1)}, \\ z &= \beta\,[\operatorname{ch}(\omega x + \gamma)]^{1/(s+1)}. \end{aligned}$$

Ako je

$$h(s+1)/(s-1) = -\omega^2,$$

iz obrazaca (20) i (21) izlazi

$$(24) \qquad \begin{aligned} y &= \alpha\,[\cos(\omega x + \gamma)]^{s/(s+1)}, \\ z &= \beta\,[\cos(\omega x + \gamma)]^{1/(s+1)}. \end{aligned}$$

Obrasci (23), odnosno (24), definišu partikularna eksplicitna rešenja (*integrallose Auflösung*) jednačine (5), tj. rešenja oblika (22). U tim rešenjima $\alpha, \beta, \gamma, \omega$ označavaju realne konstante.

Da bi se ocenilo na kakve se teškoće nailazi ako se traže rešenja oblika (22), dovoljno je uzeti vrlo jednostavan slučaj

$$T(z) = z^2 + z,$$

u kome je, kao što izlazi iz (20), promenljiva x definisana jednim hipereliptičkim integralom.

3. Sada ćemo porediti metode pomoću kojih smo integralili jednačinu (5).

Najpre konstatujemo da je druga od tih metoda najpraktičnija. Ako je $\theta(x)$, na primer, racionalna funkcija po x ili po $\sin x$ i $\cos x$, obrasci (14) daće eksplicitno rešenje jednačine (5).

Dobijanje eksplicitnih rešenja po prvoj i trećoj metodi zahteva da se izvrše ne samo neke kvadrature, već i inverzije.

Međutim, treća metoda je najopštija. Ona će nas dovesti do opšteg rešenja jedne neodređene jednačine oblika (1) uvek kada uspemo da obrazujemo, na primer, jednu takvu relaciju

$$y = T(x; z, z', z'', \cdots, z^{(n)})$$

pomoću koje se jednačina (1) svodi na jednu integrabilnu jednačinu po z, ali pod uslovom da T ostane proizvoljna funkcija naznačenih argumenata.

Na kraju hoćemo da podvučemo da smo naročito izabrali jednačinu (5) koja se može integraliti pomoću sve tri navedene metode. Ali to ne znači da će isti slučaj biti i sa nekom drugom neodređenom jednačinom. Tako, na primer, neodređena jednačina

$$\frac{y''}{y} - \left(\frac{z'''}{z''} + \frac{z'}{z}\right)\frac{y'}{y} + n^2\frac{z''}{z} = 0, \qquad (n = \text{const}), \tag{25}$$

koja se javlja u jednom važnom problemu[9] teorije elasticiteta, integrali se primenom treće metode, uzimajući u pomoć relaciju

$$y = T(z'),$$

gde je T proizvoljna funkcija od z'. Međutim, prva metoda ne može uopšte da se primeni na jednačinu (25), dok druga dovodi do jedne nove neodređene jednačine koju, bar za sada, nismo mogli integraliti.

U jednom novom radu bavićemo se primenom navedenih metoda na opštije tipove neodređenih diferencijalnih jednačina.[10]

---

[9] *Videti* [7], str. 139.

[10] *Videti* [6], gde su neke primene i generalizacije već date.

D. S. Mitrinovitch

SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE INDÉTERMINÉE

(Résumé)

Notations et définitions. Soient:

1° y et z deux fonctions de x;

2° $y', y'', \cdots, y^{(p)}; \; z', z'', \cdots, z^{(q)}$

des dérivées successives de y et de z par rapport à x.

Considérons alors la relation

$$G(x; y, y', y'', \cdots, y^{(p)}; \; z, z', z'', \cdots, z^{(q)}) = 0 \tag{1}$$

qui porte le nom *d'équation différentielle indéterminée* ou d'équation de Monge à deux fonctions inconnues.

L'intégration[1] de l'équation (1) consiste dans la détermination de tous les systèmes de deux fonctions $y(x)$ et $z(x)$ qui satisfont à cette équation.

Au sujet de l'équation (1), Hilbert[2] a proposé la question suivante:

Examiner si l'on peut exprimer la solution de (1) à l'aide des formules:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t, w, w_1, w_2, \cdots, w_r), \\ y &= \psi(t, w, w_1, w_2, \cdots, w_r), \\ z &= \chi(t, w, w_1, w_2, \cdots, w_r), \end{aligned} \tag{2}$$

φ, ψ, χ étant des fonctions déterminées des arguments indiqués, t un paramètre, w une fonction arbitraire de t et

$$w_s = d^s w / dt^s, \qquad (s = 1, 2, \cdots, r).$$

Une solution de la forme (2), solution sans aucun signe de quadrature, est nommée *solution explicite* (en littérature allemande: *integrallose Auflösung*).

En partant de l'équation particulière

$$z' = y''^2,$$

1) *Cf.* [3], p. 249 et [9], p. 66.

2) *Cf.* [4], p. 82 et [8], p. 22.

Hilbert a démontré un théorème[3]) affirmant l'impossibilité d'intégration explicite de (1) dans le cas général, c'est-à-dire l'impossibilité d'exprimer la solution de (1) sous la forme (2).

1. *Dans cet article, on indique trois méthodes d'intégration, sans qu'elle soit explicite, de l'équation*

$$\frac{y''}{y} - \frac{z''}{z} = h, \tag{3}$$

h étant un paramètre indépendant de x.

Première méthode. Au lieu de l'équation (3), on considère le système

$$y'' = [\Phi(x) + h]\, y, \tag{4}$$

$$z'' = \Phi(x)\, z, \tag{5}$$

où Φ désigne une fonction arbitraire de x.

En s'appuyant sur les équations (4) et (5), on énonce le

Théorème I. *Dans le cas où l'équation* (4) *s'intègre par quadratures pour une forme donnée de* Φ *et pour h arbitraire, il en est de même de l'équation* (5) *pour la même forme de* Φ. *Les fonctions* $y(x)$ *et* $z(x)$, *solutions respectives de* (4) *et de* (5), *correspondant à une fonction* Φ, *représentent une solution de l'équation* (3).

On peut former de telles solutions, en nombre illimité, grâce à un théorème[4]) de Darboux-Drach qui offre la possibilité de former tous les cas où l'équation (4), quand h demeure arbitraire, s'intègre par quadratures.

Deuxième méthode. L'équation (3), à l'aide des changements

$$y = \exp\left(\int \eta\, dx\right), \quad z = \exp\left(\int \varsigma\, dx\right), \tag{6}$$

se transforme en

$$(\eta - \varsigma)' + \eta^2 - \varsigma^2 = h. \tag{7}$$

En y posant

$$\eta - \varsigma = \theta(x), \tag{8}$$

on a

$$\theta' + \theta(\eta + \varsigma) = h. \tag{9}$$

---

3) *Voir* [4], p. 84.

4) *Voir* [1], t. II, p. 210 et [2].

Les relations (8) et (9) fournissent

$$
\begin{aligned}
&\eta=\frac{1}{2}\left(\frac{h}{\theta}-\frac{\theta'}{\theta}+\theta\right),\\
(10)\qquad &\\
&\zeta=\frac{1}{2}\left(\frac{h}{\theta}-\frac{\theta'}{\theta}-\theta\right).
\end{aligned}
$$

Par suite, les formules (10) déterminent la solution explicite de l'équation (7).

Théorème II. *La solution générale de l'équation* (3) *est définie par les formules*

$$y=\frac{A}{\sqrt{\theta}}\exp\left[\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\left(\frac{h}{\theta}+\theta\right)dx\right],$$

$$z=\frac{B}{\sqrt{\theta}}\exp\left[\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\left(\frac{h}{\theta}-\theta\right)dx\right],$$

A et B étant deux constantes arbitraires, x_0 *une constante numérique convenablement choisie,* θ *une fonction arbitraire de x.*

Troisième méthode. Le T étant une fonction continue et dérivable de z, examinons si l'on peut arriver à la solution de l'équation (3), en y rattachant la relation

$$y=T(z). \tag{11}$$

Par différentiation, la relation (11) conduit à

$$y'=\dot{T}z',\quad y''=\ddot{T}z'^2+\dot{T}z''$$

avec

$$\dot{T}=\frac{dT}{dz},\qquad \ddot{T}=\frac{d^2T}{dz^2}.$$

Si l'on porte ces valeurs dans (3), on obtient l'équation

$$\ddot{T}zz'^2+\dot{T}zz''-Tz''=hTz, \tag{12}$$

qui, par la nouvelle substitution $z'=p$, devient

$$(z\dot{T}-T)\frac{dp}{dz}+z\ddot{T}p=\frac{hzT}{p}, \tag{13}$$

ce qui est précisément une équation du type de Bernoulli.

En intégrant au préalable l'équation (13), on trouve que la solution générale de (12) est

$$x+K_2=\int (z\dot{T}-T)[K_1+2h\int zT(z\dot{T}-T)\,dz]^{-1/2}\,dz, \tag{14}$$

K_1 et K_2 étant deux constantes arbitraires.

Théorème III. *La fonction* $T(z)$ *étant arbitraire, l'équation* (3) *a comme solution générale deux fonctions* $y(x)$ *et* $z(x)$, *définies par les relations* (11) *et* (14).

Si l'on donne par avance la fonction $T(z)$, pour obtenir la solution de (3) sous la forme explicite

$$y=y(x), \quad z=z(x),$$

il faudrait effectuer deux quadratures et après cela une inversion, ce qui est réalisable dans des cas très rares.

Ainsi, par exemple, dans le cas particulier

$$T(z)=z^s, \qquad (s=\text{constante réelle différente de } 0, 1, -1),$$

l'équation (3) a la solution explicite suivante:

$$\text{(I)} \quad \begin{aligned} y&=\alpha\,[\mathrm{ch}\,(\omega x+\gamma)]^{s/(s+1)},\\ z&=\beta\,[\mathrm{ch}\,(\omega x+\gamma)]^{1/(s+1)}, \end{aligned}$$

si

$$h\,(s+1)\,/\,(s-1)=\omega^2;$$

$$\text{(II)} \quad \begin{aligned} y&=\alpha\,[\cos\,(\omega x+\gamma)]^{s/(s+1)},\\ z&=\beta\,[\cos\,(\omega x+\gamma)]^{1/(s+1)}, \end{aligned}$$

si

$$h\,(s+1)\,/\,(s-1)=-\omega^2.$$

Les α, β, γ, ω intervenant dans les formules (I) et (II) sont des constantes réelles.

3. Si l'on compare entre elles les trois méthodes d'intégration précédemment utilisées, on conclut que la deuxième est la plus pratique, tandis que la troisième est la plus générale.

Du fait que les trois méthodes indiquées ont été employées avec succès dans l'intégration de l'équation (3), il ne faut pas en conclure qu'il en sera de même avec une autre équation indéterminée. En effet, si l'on considère, par exemple, l'équation

$$\frac{y''}{y}-\left(\frac{z'''}{z''}+\frac{z'}{z}\right)\frac{y'}{y}+n^2\frac{z''}{z}=0, \qquad (n=\text{const}), \tag{15}$$

que l'on rencontre dans un problème important de la théorie de l'Élasticité[5]) on trouve, après une étude, que l'intégrale générale de l'équation (15) s'obtient, en y rattachant la relation convenablement choisie suivante

---

[5]) L'équation (15) est l'équation centrale des déplacements d'une couche élastique {*cf.* [7], p. 139}.

$$y = T(z'),$$

où T désigne une fonction arbitraire de z'.

Cependant, la première méthode n'est pas applicable dans ce cas, tandis que la deuxième conduit à une nouvelle équation indéterminée plus compliquée que (15).

Il convient d'ajouter, à la fin, que toutes les méthodes signalées plus haut sont applicables aussi dans l'intégration des équations indéterminées de forme plus générale. Sur cette extension et diverses questions connexes, nous allons rédiger un nouveau travail.[6])

LITERATURA* — INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

[1] G. Darboux

Leçons sur la théorie générale des surfaces, Paris, t. II, deuxième édition, 1915, 579 pages; t. IV, nouveau tirage, 1946, 554 pages.

[2] J. Drach

Détermination des cas de réduction de l'équation différentielle $d^2y/dx^2 = [\varphi(x)+h]y$ (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 168, 1919, p. 47—50);

Sur l'intégration par quadratures de l'équation $d^2y/dx^2 = [\varphi(x) + h]y$ (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 168, 1919, p. 337—340).

[3] E. Goursat

Sur une généralisation du problème de Monge (*Annales de la Faculté des sciences de l'Université de Toulouse*, troisième série, t. 22, 1930, p. 249—295).

[4] D. Hilbert

Ueber den Begriff der Klasse von Differentialgleichungen (*Gesammelte Abhandlungen*, Bd. 3, Berlin, 1935, S. 81—93 = *Mathematische Annalen*, Bd. 73, 1912, S. 95—108).

[5] E. Kamke

Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen, Bd. I, dritte Auflage, Leipzig, 1944, 660 S.

[6] D. S. Mitrinovitch

Sur une équation différentielle indéterminée intervenant dans un problème important de l'Élasticité (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 232, 1951, p. 681—683).

Sur un procédé d'intégration d'une équation de Monge (sous presse).

[7] C. Truesdell

The membrane theory of shells of revolution (*Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 58, 1945, pp. 96—166).

[6]) *Cf.* [6], où certaines généralisations et applications sont faites.

[8] P. Zervos

Le problème de Monge *(Mémorial des sciences mathématiques*, fasc. 53, Paris, 1932, 54 pages).

[9] S. Carrus

Intégration des systèmes d'équations différentielles linéaires d'ordres quelconques, à coefficients quelconques *(Journal de l'Ecole Polytechnique*, IIe série, cahier 28, 1931, p. 65—107).