ГОДИШЕН ЗБОРНИК
НА ФИЛОЗОФСКИОТ ФАКУЛТЕТ НА УНИВЕРЗИТЕТОТ ВО СКОПЈЕ
Природно-математички оддел
Книга 3 (1950), № 2

ANNUAIRE
DE LA FACULTÉ DE PHILOSOPHIE DE L'UNIVERSITÉ DE SKOPJE
Section des sciences naturelles
Tome 3 (1950), № 2

Јоже Улчар

ЗА ЗНАКОИТЕ НА ПАРЦИЈАЛНИТЕ ИЗВОДИ ОД ЕДНА ФУНКЦИЈА СО ДВЕ ПРОМЕНЛИВИ

Jože Ulčar

ÜBER DIE VORZEICHEN DER PARTIELLEN ABLEITUNGEN EINER FUNKTION VON ZWEI VERÄNDERLICHEN

Скопје — Skopje
1950

ЈОЖЕ УЛЧАР

ЗА ЗНАКОИТЕ НА ПАРЦИЈАЛНИТЕ ИЗВОДИ ОД ЕДНА ФУНКЦИЈА СО ДВЕ ПРОМЕНЛИВИ

Во една своја нота[1]) V. Bononcini *дава геометриска интерпретација на знакоите на сукцесини изводи од една функција* $y = f(x)$. *Во овој труд даваме едно обопштение на таа интерпретација за случај на една функција* $z = F(x, y)$, *кај која што знакоите на парцијалните изводи* $F_{x^\nu y^\rho}$ *од исти ред се еднакви или се еднакви само кај оние од нив при кои* ρ (*значи и* ν) *има иста парност — користејќи го во битност методот на* Bononcini.

Нека е $z = F(x, y)$ реална функција од реални променливи x и y, дефинирана во областа

$$|x - x_0| \leqslant a, \quad |y - y_0| \leqslant a,$$

со парцијални изводи од произволен ред и ги задоволува следните услови:

1. Во точката (x_0, y_0) сите парцијални изводи $F_{x^\nu y^\rho}$ од n-ти ред од функцијата $F(x, y)$ не се нула, а нивните знакои се или

(α) сите еднакви, или

(β) еднакви кај оние од нив при кои ρ (значи и ν) има иста парност;

2. прв нареден од n повисок ред на парцијалните изводи со парност спротивна на n што сите не се нула е $n + 2r + 1$, а за навните знаци важи оној од условите (α) и (β) како и за изводите од n-ти ред, и

3. највисокиот ред, помал од n, на парцијалните изводи $F_{x^\nu y^\rho}$ кои не сите се нула е m.

Нека да, понатаму, плоскоста

$$z_m = F_m(x, y), \tag{П}$$

---

1) Vittorio E. Bononcini, *Interpretazione geometrica dei segni delle derivate successive di una funzione $y = f(x)$*. Bolletino della Unione matematica italiana, Serie III, Anno IV, № 3, p. 267, Bologna, 1949.

каде што $F_m(x, y)$ е полином во x и y од m-та степен, има со плоскоста $z = F(x, y)$ во точката $P_0(x_0, y_0, F(x_0, y_0))$ допир од m-ти ред. Плоскоста (П) ќе ја викаме *оскулаторен параболоид од m-ти ред* на дадената плоскост во точката P_0.

При овие претпоставки за околините (A_1), (A_2) и (B_1), (B_2) на точката (x_0, y_0), дефинирани со

$$(A_1) \qquad \delta \geqslant x - x_0 \geqslant 0, \ \delta \geqslant y - y_0 \geqslant 0;$$

$$(A_2) \qquad \delta \geqslant x_0 - x \geqslant 0, \ \delta \geqslant y_0 - y \geqslant 0;$$

$$(B_1) \qquad \delta \geqslant x_0 - x \geqslant 0, \ \delta \geqslant y - y_0 \geqslant 0;$$

$$(B_2) \qquad \delta \geqslant x - x_0 \geqslant 0, \ \delta \geqslant y_0 - y \geqslant 0;$$

при доволно мал $\delta > 0$ за оние два дела Π_{A_1} и Π_{A_2}, односно Π_{B_1} и Π_{B_2}, на оскулаторниот параболоид П чии што проекции на xy-рамнината се областите (A_1), (A_2), односно (B_1), (B_2), важи следната теорема:

Ако $F_x{}^n$ и $F_x{}^{n+2r+1}$, во случај (α), имаат еднакви знаци, тогаш Π_{A_1} побргу се оддалечува[2]) *од плоскоста $z = F(x, y)$ во точката P_0 отколку Π_{A_2}. Ако тие знакови се различни, тогаш Π_{A_2} се оддалечува побргу од Π_{A_1}.*

Ако $F_y{}^n$ и $F_y{}^{n+2r+1}$, во случај (β), имаат еднакви знаци, тогаш Π_{B_1} побргу се оддалечува од плоскоста $z = F(x, y)$ во точката P_0 отколку Π_{B_2}. Ако се тие знакови различни, тогаш Π_{B_2} се оддалечува побргу од Π_{B_1}.

Доказ:

Бидејќи сите парцијални изводи на $F(x, y)$ во (x_0, y_0) до вклучително m-ти ред се равни на соодветните парцијални изводи на $F_m(x, y)$ во таа точка, а спрема претпоставките сите парцијални изводи на $F(x, y)$ во P_0 чии што ред е $m+1$, $m+2$, $m+3, \cdots$, $n-1$; $n+1$, $n+3$, $n+5, \cdots$, $n+2r-1$ се нула, а сите парцијални изводи од n-ти и $n+2r+1$-ви ред не се нула, тоа за разликата $F(x, y) - F_m(x, y)$, развивајќи ја во ред на Taylor околу P_0, добиваме

---

[2]) т. е. произволна крива на П се оддалечува од која да е крива на дадената плоскост побргу на онаа страна од кривата што лежи на Π_{A_1}, само ако двете криви имаат во P_0 таква заедничка тангента што проекцијата ѝ паѓа во (A_1) и (A_2).

$$F(x,y)-F_m(x,y)=\sum_{i=0}^{r}\frac{1}{(n+2i)!}\left[\frac{\partial}{\partial x}k+\frac{\partial}{\partial y}l\right]^{(n+2i)} F(x_0,y_0)+$$

(1)

$$+\frac{1}{(n+2r+1)!}\left[\frac{\partial}{\partial x}k+\frac{\partial}{\partial y}l\right]^{(n+2r+1)} F(x_0,y_0)+$$

$$\frac{1}{(n+2r+2)!}\left[\frac{\partial}{\partial x}k+\frac{\partial}{\partial y}l\right]^{(n+2r+2)} F(x_0+\theta h, y_0+\theta k).$$

Извршувајќи ја смената

$$k=\lambda$$

(2)

$$l=\lambda\upsilon$$

добиваме со

$$x=y_0+k$$

$$y=y_0+l$$

при променливи λ и υ, за $\upsilon>0$ токму оние точки од xy-рамнината што им припаѓаат на областа (A_1) (при $\lambda>0$) и (A_2) (при $\lambda<0$), а при $\upsilon<0$ точките од областа (B_1) (при $\lambda<0$) и од (B_2) (при $\lambda>0$).

Релацијата (1) след оваа смена може да се напише во вид

$$F(x,y)-F_m(x,y)=\frac{\lambda^n}{n!}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\upsilon\right]^{(n)} F(x_0,y_0)+\varepsilon_1(\lambda^2)\right\}+$$

$$+\frac{\lambda^{n+2r+1}}{(n+2r+1)!}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\upsilon\right]^{(n+2r+1)} F(x_0,y_0)+\varepsilon_2(\lambda)\right\},$$

каде што $\varepsilon_1(\lambda^2)$ и $\varepsilon_2(\lambda)$ се стремат кон нула при $\lambda\to 0$.

При фиксен υ, а променлив λ, т. е. ако точката (x,y) се движи по правата што мине низ точката (x_0,y_0) и има аглов коефициент υ, двата суманди од десната страна на (3) се стремат кон нула при $\lambda\to 0$, и тоа првиот со ред кој има спротивна парност од n.

При доволно мал λ изразите во големите загради од десната страна на (3) имаат знак на првите суманди во нив, т. е. знак на

$$(4) \qquad \left[\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\upsilon\right]^{(n)} F(x_0, y_0),$$

односно на

$$(5) \qquad \left[\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\upsilon\right]^{(n+2r+1)} F(x_0, y_0).$$

Коефициентот (4) е во случај (α) при $\upsilon>0$ позитивен или негативен според тоа да ли n-тите парцијални изводи на $F(x,y)$ во (x_0, y_0) се позитивни или негативни. Аналогно важи за коефициентот (5).

Коефициентот (4) е во случај (β) при $\upsilon<0$ позитивен или негативен според тоа да ли е

$$F_{x^{n-\rho} y^{\rho}} = (-1)^{\rho}\, |F_{x^{n-\rho} y^{\rho}}|$$

или

$$F_{x^{n-\rho} y^{\rho}} = (-1)^{\rho+1} |F_{x^{n-\rho} y^{\rho}}|$$

при $\rho = 1, 2, 3, \cdots, n$, и аналогно за коефициентот (5).

Ако парцијалните изводи F_{x^n} и $F_{x^{n+2r+1}}$ имаат еднакви знакови, тогаш се во случај (α) или сите парцијални изводи од n-ти и од $n+2r+1$-ви ред позитивни или сите негативни.

Во првиот случај, ако изводите се позитивни, тогаш коефициентите (4) и (5) при $\upsilon>0$ се позитивни. Затоа за $\lambda>0$ (областа (A_1)) при доволно мали λ двата суманди од десната страна на (3) имаат знак $+$, додека за $\lambda<0$ (областа (A_2)) имаат, поради спротивна парност на n и $n+2r+1$, различни знакови, т. е. навистина Π_{A_1} побргу се оддалечува од плоскоста $z = F(x,y)$ во P_0 одошто Π_{A_2}.

Во вториот случај, ако парцијалните изводи се негативни, се негативни и коефициентите (4) и (5). Затоа при доволно мали $\lambda>0$ (областа (A_1)) двата вопросни суманди се негативни, а при $\lambda<0$ (областа (A_2)) се со спротивни знаци, од каде што излегува пак истиот заклучок како горе.

Аналогно се покажува исправноста на теоремата и во сите други можни случаи.

При ова изведување испадна од областите (A_1), (A_2) и од (B_1) (B_2) правата $x = x_0$. Но покажаното важи и за неа, во што се убедуваме ако место смената (2) ја извршиме смената

$$k = \lambda\upsilon$$

$$l = \lambda.$$

При $y = \text{const.}$ ни ги дава докажаната теорема за функцијата $F(x,y) \equiv f(x)$ резултатите на Bononcini.

Освен докажаната теорема може да се покаже, земајќи ги предвид знакоите на разликата $F(x,y)-F_m(x,y)$ во сите можни случаи, дека важат и следните теореми:

I. Π_{A_1} *и* Π_{A_2} *во случајот* (α), *а* Π_{B_1} *и* Π_{B_2} *во случајот* (β), *се на иста или спротивна страна од плоскоста* $z=F(x,y)$ *според тоа да ли* n *е парен или непарен број.*

II. Ако знакоите на $F_x{}^n$ *и* $F_x{}^{n+2r+1}$ *(или на* $F_y{}^n$ *и* $F_y{}^{n+2r+1}$*) се еднакви, тогаш онаа од двете плоскости* Π_{A_1} *и* Π_{A_2}*, односно од* Π_{B_1} *и* Π_{B_2}*, која побргу се оддалечува од плоскоста* $z=F(x,y)$ *во околината на* P_0 *е „под" или „над" таа плоскост според тоа да ли тие знакови се* $+$ *или* $-$.

Ако знакоите на $F_x{}^n$ *и* $F_x{}^{n+2r+1}$ *(или на* $F_y{}^n$ *и* $F_y{}^{n+2r+1}$*) се различни, тогаш воросната плоскост е „под" „или над" плоскоста* $z=F(x,y)$ *според тоа да ли* n *е парен или непарен при* $F_x{}^n>0$ *(или* $F_y{}^n>0$*), а при* $F_x{}^n<0$ *(или* $F_y{}^n<0$*) според тоа да ли* n *е непарен или парен.*

Jože Ulčar

ÜBER DIE VORZEICHEN DER PARTIELLEN ABLEITUNGEN EINER FUNKTION VON ZWEI VERÄNDERLICHEN

(Auszug)

In einer Note gibt Vittorio E. Bononcini eine geometrische Deutung der Vorzeichen von Ableitungen einer Funktion $y=f(x)$[1]. Hier wird eine Verallgemeinerung dieser Deutung für eine Funktion $z=F(x,y)$ gegeben und zwar nur für den Fall, wo die Vorzeichen der partiellen Ableitungen von derselben Ordnung entweder gleich oder wechselweise gleich sind.

Es soll $z=F(x,y)$ eine reele Funktion von der reelen Veränderlichen x und y sein, die in einer Umgebung von $x=x_0, y=y_0$ definiert ist und partielle Ableitungen von beliebiger Ordnung hat, die folgende Bedingungen erfüllen:

1. Im Punkte (x_0,y_0) sind die partiellen Ableitungen $F_{x^\nu y^\rho}$ von der n-ten Ordnung nicht alle gleich Null; ihre Vorzeichen sind entweder

(α) alle gleich, oder

(β) gleich für gerade ρ und gleich für ungerade ρ;

2. für die Vorzeichen der partiellen Ableitungen deren Ordnung $n+2r+1$ derjenigen niedrigsten Zahl der Folge

$$n+1,\ n+3,\ n+5,\dots$$

gleich sind für welche nicht alle Ableitungen gleich Null sind, gilt wieder diejenige von den Bedingungen (α) und (β), die für die Ableitungen von der n-ten Ordnung gilt.

Es soll ferner die Fläche

$$(\Pi)\qquad z_m=F_m(x,y),$$

---

[1]) Siehe [1]) S. 3.

wo $F_m(x,y)$ ein Polynom von der m-ten Ordnung in x un y, und m die höchste Ordnung, kleiner als n, der partiellen Ableitungen $F_{x^\nu\ y^\rho}$, welche nicht alle gleich Null sind mit der Fläche $z = F(x, y)$ im Punkte

$$P_0(x_0, y_0, (F(x_0, y_0)))$$

eine Berührung von der m-ten Ordnung haben.

Dann gilt für die Umgebungen (A_1), (A_2) und (B_1), (B_2) des Punktes (x_0, y_0), definiert mit

$$\begin{array}{lll} (A_1) & \delta \geqslant x - x_0 \geqslant 0 & \delta \geqslant y - y_0 \geqslant 0 \\ (A_2) & \delta \geqslant x_0 - x \geqslant 0 & \delta \geqslant y_0 - y \geqslant 0 \\ (B_1) & \delta \geqslant x_0 - x \geqslant 0 & \delta \geqslant y - y_0 \geqslant 0 \\ (B_2) & \delta \geqslant x - x_0 \geqslant 0 & \delta \geqslant y_0 - y \geqslant 0 \end{array}$$

bei genügend kleinem $\delta > 0$ für diejenigen Teile Π_{A_1} und Π_{A_2} bzw. Π_{B_1} und Π_{B_2} der Fläche Π, deren Projektionen auf die xy-Ebene die Umgebungen (A_1), (A_2) bzw. (B_1), (B_2) sind, folgender Satz:

Wenn F_{x^n} und $F_{x^{n+2r+1}}$, im Falle (α), gleiche Vorzeichen haben, dann entfernt sich[2] *Π_{A_1} von der Fläche $z = F(x,y)$ im Punkte P_0 schneller als Π_{A_2}. Wenn diese Vorzeichen verschieden sind, dann entfernt sich Π_{A_2} schneller als Π_{A_1}.*

Wenn F_{y^n} und $F_{y^{n+2r+1}}$, im Falle (β), gleiche Vorzeichen haben, dann entfernt sich Π_{B_1} von der Fläche im P_0 schneller als Π_{B_2}. Wenn diese Vorzeichen verschieden sind, dann entfernt sich Π_{B_2} schneller als Π_{B_1}.

Bei $y = \text{const.}$ gibt uns dieser Satz für die Funktion $F(x,y) \equiv f(x)$ die Resultate von Bononcini.

Bei den gleichen Bedingungen 1. und 2. beweist man leicht auch die folgenden zwei Sätze:

I. Im Falle (α) sind Π_{A_1}, Π_{A_2}, und im Falle (β) Π_{B_1}, Π_{B_2}, auf den gleichen oder verschiedenen Seiten der Fläche $z = F(x,y)$ je nachdem n gerade oder ungerade ist.

II. Wenn die Vorzeichen von F_{x^n} und $F_{x^{n+2r+1}}$ (oder von F_{y^n} und $F_{x^{n+2r+1}}$) gleich sind, dann ist diejenige der beiden Flächen Π_{A_1} und Π_{A_2}, bzw. Π_{B_1} und Π_{B_2}, welche sich von der Fläche $z = F(x,y)$ in der Umgebung vom P_0 schneller entfernt, „unter" oder „über" dieser Fläche je nachdem diese Vorzechen $+$ oder $-$ sind.

Wenn die Vorzeichen von F_{x^n} und $F_{x^{n+2r+1}}$ (oder von F_{y^n} und $F_{y^{n+2r+1}}$) verschieden sind, dann ist die genannte Fläche „unter" oder „über" der Fläche $z = F(x,y)$ je nachdem bei $F_{x^n} > 0$ (oder bei $F_{y^n} > 0$) n gerade oder ungerade ist, und bei $F_{x^n} < 0$ (oder bei $F_{y^n} < 0$) je nachdem n ungerade oder gerade ist.

---

[2]) d. h. eine beliebige Kurve auf Π entfernt sich von jeder Kurve auf der gegebenen Fläche schneller auf derjenigen Seite der Kurve, die auf Π_{A_1} liegt, nur wenn die beiden Kurven im P_0 eine solche gemeinsame Tangente haben, daß ihre Projektion in die Umgebungen (A_1) und (A_2) fällt.