БЛАГОЈ С. ПОПОВ

ПРИМЕДБА ЗА ДВЕ ДЕТЕРМИНАНТИ

(Примено на 17 декември 1949 год.)

БЛАГОЈ С. ПОПОВ

ПРИМЕДБА ЗА ДВЕ ДЕТЕРМИНАНТИ

I

1. Ставајќи една примедба во врска со континуантата што ја посматра Novarese, покрај другото, E. Cesaro[1]) наведува за детерминантата

$$D_n \equiv \begin{vmatrix} x+a_0+a_1 & x-a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ x-a_1 & x+a_1+a_2 & x-a_2 & \cdots & 0 \\ 0 & x-a_2 & x+a_2+a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & x+a_{n-1}+a_n \end{vmatrix} \qquad (1)$$

вредност

$$a_0 a_1 \cdots a_n \left[\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}+x(\sigma_1+4\sigma_2+\cdots+n^2\sigma_n)\right] \qquad (2)$$

каде што σ_i значи

$$\sigma_i=\frac{1}{a_0 a_i}+\frac{1}{a_1 a_{i+1}}+\cdots+\frac{1}{a_{n-i} a_n}.$$

Дека е горното тврдење неточно, можеме да се увериме развијајќи ја детерминантата по елементите од последниот ред. Ја добиваме рекурзивната формула

$$D_k=(x+a_{k-1}+a_k)\,D_{k-1}-(x-a_{k-1})^2\,D_{k-2} \qquad (3)$$

која што важи за $k=1, 2, \ldots n$.

---

[1]) E. Cesaro, *Remarques sur un contunuant (Mathesis,* t. II, 1892, p. 5—12*).*

Израчунавајќи D_1 и D_2 наоѓаме дека се тие функции од прва степен по x и заменети во (3) даваат за D_3 израз кој што претставува функција од трета степен. Резултатот ште е наведен од Cesaro, покажува дека детерминантата треба да биде функција од прва степен по x, што не одговара на стварноста.

2. Ние ќе се постараме да побараме една детерминанта, вредноста што ќе и биде дадена со изразот (2). За таа цел ќе земеме една заоквирна детерминанта и ќе ја развиеме по Cauchy-евиот образец. Познато ни е, дека ако е дадена некоја детерминанта

$$A = |a_{ik}|, \qquad (i = 1, 2, \ldots n; \; k = 1, 2, \ldots n)$$

може да се образува заоквирна детерминанта, додавајќи и по една или повеќе врсти и колони. Ако на A додадеме една колона со елементите x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ и една врста со елементите y_k, $k = 1, 2, \ldots n$, така што $x_{n+1} = y_{n+1} = z$, ја добиваме детерминантата B.

Развијајќи ја детерминантата B по елементите на последната врста и колона т.е. по производе $x_i y_k$ и имајќи предвид дека е коефициентот од овој производ комплементарниот минор на минорот

$$\begin{vmatrix} a_{ik} & x_i \\ y_k & z \end{vmatrix}$$

го добиваме познатиот Cauchy-ев образец

$$B = Az - \Sigma(-1)^{i+k} x_i y_k A_{ik}. \tag{4}$$

Нека е

$$A \equiv \begin{vmatrix} a_0 + a_1 & -a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & a_1 + a_2 & -a_2 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 + a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & a_{n-1} + a_n \end{vmatrix}$$

и нека се $x_i = x$; $y_k = -1$; $z = +1$ елементи што ги допишуваме. Тогаш детерминантата изменета по контурата добива вид

$$B \equiv \begin{vmatrix} a_0+a_1 & -a_1 & 0 & \dots & 0 & x \\ -a_1 & a_1+a_2 & -a_2 & \dots & 0 & x \\ 0 & -a_2 & a_2+a_3 & \dots & 0 & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & & -1 & 1 \end{vmatrix} \qquad (5)$$

која што развиена по Cauchy-евиот образец станува

$$B = A + x\Sigma(-1)^{i+k}\Delta_{ik}.$$

Но бидејќи е

$$(-1)^{i+k}\Delta_{ik} = \Delta_{ik}$$

за секоје i и k, крајната вредност од заоквирната детерминанта е

$$B = A + x\Sigma\Delta_{ik}.$$

Бидејќи од друга страна е

$$A = a_0 a_1 \dots a_n \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)$$

и

$$\Sigma\Delta_{ik} = a_0 a_1 \dots a_n (\sigma_1 + 4\sigma_2 + \dots + n^2\sigma_n).$$

каде што σ_i има вредност порано спомната, добиваме

$$B = a_0 a_1 \dots a_n \left[\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} + x(\sigma_1 + 4\sigma_2 + \dots + n^2\sigma_n)\right]$$

а това е изразот што е од Cesaro наведен. Меѓутоа детерминантите (1) и (5) не се идентични освен во случајот кога е $n=1, 2$.

3. Ако детерминантата A ја земеме во облик

$$A \equiv \begin{vmatrix} a_0+a_1 & a_0 & a_0 & \dots & a_0 \\ a_0 & a_0+a_2 & a_0 & \dots & a_0 \\ a_0 & a_0 & a_0+a_3 & \dots & a_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0 & a_0 & a_0 & & a_0+a_n \end{vmatrix}$$

заоквирната детерминанта станува

$$B_1 \equiv \begin{vmatrix} a_0+a_1 & a_0 & a_0 & \cdots & a_0 & x \\ a_0 & a_0+a_2 & a_0 & \cdots & a_0 & x \\ a_0 & a_0 & a_0+a_3 & \cdots & a_0 & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ -1 & -1 & -1 & & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

и развиена по истиот образец дава

$$B_1 = a_0\, a_1\, a_2 \ldots a_n \left[\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\frac{x}{a_0}\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\right].$$

II

4. Под Sardi-ева детерминанта се подразбира детерминантата од облик

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & \alpha_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & \alpha_3 & \cdots & x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_1 & x_2 & x_3 & & \alpha_n \end{vmatrix} \tag{1}$$

Развивањето на оваа детерминанта лесно се добива со допишувањето на исти елементи на сите колони[1]) или со помош на една друга особена детерминанта[2])

Ќе ја развиеме сега оваа детерминанта, сведувајќи ја на други специјални типови од детерминанти, на кои што израчунавањето изгледа по просто.

Означиме ли ја детерминантата (1) со D_n и извлечеме од елементите на колоните факторите на елементите x_i, ќе добиеме

$$D_n = \Delta_n \prod_{i=1}^{n} x_i \tag{3}$$

[1]) Rosace, *L'intermédiaire des mathématiciens*, t. II, 1895 p. 127.

[2]) A. Hurwitz, *L'intermédiaire des mathématiciens*, t. II, 1895 p. 368

каде сме со Δ_n означили детерминантата од облик

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 \cdot \cdot \cdot 1 \\ 1 & a_2 & 1 \cdot \cdot \cdot 1 \\ 1 & 1 & a_3 \cdot \cdot \cdot 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 1 & 1 & 1 \quad\quad a_n \end{vmatrix} \tag{3}$$

каде е $\left(a_i = \frac{\alpha_i}{x_i}\right)$.

Оваа детерминанта ќе ја израчунаме поаѓајќи од заоквирната детерминанта, во која што основната детерминанта е Δ_n, а елементите на колоните и врстите што ги додаваме -1, додека е задниот елемент $+1$. Развиена по Cauchy-евот образец последнава дава

$$(a_1-1)(a_2-1)\ldots(a_n-1) = \Delta_n - \Sigma(-1)^{i+k} A_{ik}.$$

Бидејќи е

$$\Sigma(-1)^{i+k} A_{ik} = (a_1-1)\ldots(a_n-1)\left[\frac{1}{a_1-1} + \cdots + \frac{1}{a-{}_n1}\right],$$

добиваме

$$\Delta_n = \frac{(\alpha_1-x_1)(\alpha_2-x_2)\ldots(\alpha_n-x_n)}{x_1 x_2 \ldots x_n}\left[1 + \frac{x_1}{\alpha_1-x_1} + \cdots + \frac{x_n}{\alpha_n-x_n}\right]$$

или земенена во (2), дава

$$D_n = (\alpha_1-x_1)\ldots(\alpha_n-x_n)\left[1 + \frac{x_1}{\alpha_1-x_1} + \cdots + \frac{x_n}{\alpha_n-x_n}\right]. \tag{4}$$

5. Ако од елементите на последната врста ги одземиме елементите што одговараат на претпоследната, од овие претходните и така по ред до втората, ќе добијеме детерминантата

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & x_1 & x_2 & \cdot \cdot \cdot & x_n \\ x_1-\alpha_1 & \alpha_2-x_2 & 0 & \cdot \cdot \cdot & 0 \\ 0 & x_2-\alpha_2 & \alpha_3-x_3 & \cdot \cdot \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & \alpha_n-x_n \end{vmatrix},$$

која што претставува тип на Escherich-ова детерминанта[1]).

[1]) Да се види, напр. Pascal, *Die Determinanten*, немски превод H. Leitzmann, S. 144.

Вредноста на оваа детерминанта е

$$\begin{aligned} D_n = {} & \alpha_1(\alpha_2 - x_2)\cdots(\alpha_n - x_n) \\ & + x_2(\alpha_1 - x_1)\cdots(\alpha_n - x_n) \\ & \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + x_n(\alpha_1 - x_1)\cdots(\alpha_{n-1} - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Со додавање и одземање на производот

$$x_1(\alpha_2 - x_2)\cdots(\alpha_n - x_n)$$

добиваме (4).

Б. С. ПОПОВ

ПРИМЕЧАНИЕ О НЕКОТОРЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯХ

(Вывод)

В нем дается одна исправка в связи с определителем (1) который рассматривает Чезаро.

B. S. POPOV

REMARQUES SUR QUELQUES DÉTERMINANTS*)

(Résumé)

1. E. Cesàro[1]) avait assigné au determinant

$$D_n = \begin{vmatrix} x+a_0+a_1 & x-a_1 & 0 & \dots & 0 \\ x-a_1 & x+a_1+a_2 & x+a_2 & \dots & 0 \\ 0 & x-a_2 & x+a_2+a_3 & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x+a_{n-1}+a_n \end{vmatrix}$$

*) Les renvois bibliographiques se rapportent à même article écrit en langue macédonienne.

considéré par Novarese[2]), la valeur suivante

$$a_0 a_1 \dots a_n \sum_{\nu=0}^{n} \left(\frac{1}{a_\nu} + x\nu^2 \sigma_\nu \right), \tag{1}$$

où l'on a posé

$$\sigma_i = \sum_{\nu=0}^{n-i} \frac{1}{a_\nu a_{\nu+1}}.$$

Or, en développant se déterminant suivant les éléments de la dernière ligne, on obtient pour D_n la formule de récurrence suivante

$$D_k = (x + a_{k-1} + a_k) D_{k-1} - (x - a_{k-1})^2 D_{k-2}, \qquad k = 1, 2, \dots, n.$$

Il s'ensuit que la valeur du déterminant considéré ne correspond aux valeurs (1) que pour $n=1$ et $n=2$, tandis que pour $n \geqslant 3$ ces valeurs en diffèrent, étant donné que, d'après la formule de récurrence, D_n ne peut être un polynome du premier degré en x lorsque $n \geqslant 3$.

Par contre, la valeur (1) correspond au déterminant

$$B(x) = \begin{vmatrix} a_0 + a_1 & -a_1 & 0 & \dots\dots & 0 & x \\ -a_1 & a_1 + a_2 & -a_2 & \dots\dots & 0 & x \\ 0 & -a_2 & a_2 + a_3 & \dots\dots & 0 & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots\dots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

que l'on obtient en encadrant le déterminant

$$B = \begin{vmatrix} a_0 + a_1 & -a_1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_1 & a_1 + a_2 & -a_1 & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 + a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} + a_n \end{vmatrix}.$$

On a, en effet,

$$B(x) = a_0 a_1 \dots a_n \sum_{\nu=0}^{n} \left(\frac{1}{a_\nu} + x\nu^2 \sigma_\nu \right).$$

L'on déduit cette valeur de $B(x)$ en partant de la formule connue de Cauchy

$$A(x_i, y_k, z) = Az - \Sigma (-1)^{i+k} x_i y_k A_{ik}, \tag{2}$$

où A désigne le déterminant

$$A = | a_{ik} |, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$A(x_i, y_k, z)$ le déterminant obtenu en encadrant le déterminant A, en y ajouttant comme dernière collonne les x_i et comme dernière ligne les y_k, et en y posant

$$x_{n+1} = y_{n+1} = z,$$

et où A_{ik} désigne le mineur complémentaire au mineur

$$\begin{vmatrix} a_{ik} & x_i \\ y_k & z \end{vmatrix}.$$

En partant de la formule (2), l'on peut de même obtenir une expression semblable à celle de $B(x)$, donnant la valeur du déterminant que l'on obtient en encadrant le déterminant

$$C = \begin{vmatrix} a_0 + a_1 & a_0 & a_0 & \ldots\ldots & a_0 \\ a_0 & a_0 + a_2 & a_0 & \ldots\ldots & a_0 \\ a_0 & a_0 & a_0 + a_3 & \ldots\ldots & a_0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_0 & a_0 & a_0 & \ldots\ldots & a_0 + a_n \end{vmatrix}.$$

On a, en effet, d'après la notation précédente,

$$C(x-1, 1) = a_0\, a_1\, a_2, \ldots, a_n \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{a_\nu} + \frac{x}{a_\nu} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{a_\nu} \right\}.$$

2. En partant de la formule (2) de Cauchy, on peut de même obtenir la valeur du déterminant de Sardi, (voir de même Rosace[1]) et Hurwitz[2]).

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ x_1 & \alpha_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ x_1 & x_2 & \alpha_3 & \ldots & x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & \alpha_n \end{vmatrix},$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$\Delta = x_1\, x_2, \ldots, x_n\, D, \tag{3}$$

ayant posé

$$a_i = \frac{\alpha_i}{x_i}, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n, \tag{4}$$

et

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a_3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

En encadrant ce dernier déterminant par

$$x_i = y_k = -1 \quad \text{et} \quad z = 1,$$

c. à d. en considérant, d'après la notation précédente, le déterminant

$$D(\;1,\; -1,\; 1),$$

et en lui appliquant la formule (2) de Cauchy, l'on obtient pour le déterminant D la valeur

$$D=(a_1-1)(a_2-1)\dots(a_n-1)\left[1+\frac{1}{a_1-1}+\frac{1}{a_2-1}+\dots+\frac{1}{a_n-1}\right],$$

et d'où l' on déduit, d'après (3) et (4), que

$$\Delta=(\alpha_1-x_1)\dots(\alpha_n-x_n)\left[1+\frac{x_1}{\alpha_1-x_1}+\dots+\frac{x_n}{a_n\;\;x_n}\right]. \tag{5}$$

Remarquons, enfin, qu'en soustrayant les éléments de chaque ligne à ceux de la ligne précédente, le déterminant Δ se reduit à celui de Escherich, (voir Pascal)[1])

$$\Delta=\begin{vmatrix} \alpha_1 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1-\alpha_1 & \alpha_2-x_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2-x_2 & \alpha_3-x_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_n-x_n \end{vmatrix},$$

dont la valeur est donnée par

$$\begin{aligned} \Delta = {} & \alpha_1(\alpha_2-x_2) \;\dots\; (\alpha_n-x_n) \\ & +x_2(\alpha_1-x_1) \;\dots\; (\alpha_n-x_n) \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & +x_n(\alpha_1-x_1) \;\dots\; (\alpha_{n-1}-x_{n-1}), \end{aligned}$$

et qui est identique à l'expression (5).