О STIRLING-ОВИМ БРОЈЕВИМА

ОД
ДРАГОСЛАВА С. МИТРИНОВИЋА

УВОД

У првој глави ове расправе изводимо формулу за изналажење збира реда са коначним бројем чланова

$$\prod_{r=1}^{r=p} a_r + \prod_{r=1}^{r=p} (a_r + \alpha_r) + \prod_{r=1}^{r=p} (a_r + 2\alpha_r) + \cdots + \prod_{r=1}^{r=p} [a_r + (n-1)\alpha_r],$$

где су n и p цели позитивни бројеви и где су

$$a_r \text{ и } \alpha_r \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots, p)$$

ма какве константе,

Резултати које износимо у овој глави нису без интереса, јер у математичкој литератури нисмо наишли да је проблем, који се овде расправља, дат у таквој генералности како ми то чинимо.

У истој глави показујемо да наше формуле садрже, као партикуларне случајеве, неке формуле које су наведене у Рижик-овим *Таблицама интеграла, збирова, редова и производа*[1].

Предмет друге главе је решавање једначине са коначним диференцијама

$$S_{n+1}^{m} = S_n^{m-1} - n S_n^{m}$$

(m и n су цели позитивни бројеви)

коју задовољавају Stirling-ови коефицијенти прве врсте S_n^m, дефинисани помоћу идентитета

---

[1] И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Огиз-Гостехиздат, 1943, 400 стр., Москва—Ленинград. — У овим *Таблицама* има преко 5000 формула.

$$x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$$
$$\equiv S_n^1 x + S_n^2 x^2 + \cdot\ \cdot + S_n^{n-1} x^{n-1} + S_n^n x^n.$$

У овој глави дајемо једну нову методу[1], елементарну и једноставну, за изналажење решења наведене једначине са коначним диференцијама, што претставља прилог важној теорији Stirling-ових бројева, који интервенишу у разним проблемима[2]. Решавање те једначине заснивамо на резултатима наведеним у првој глави ове расправе.

На крају је приложена таблица Stirling-ових бројева коју је, према нашим формулама, израдила Ковина Милошевић.

Професор Михаило Петровић[3] испитао је 1940 године ову расправу и она је била онда примљена за осму књигу часописа *Publications mathématiques de l'Université de Belgrade.*

За време окупације рукопис те расправе изгорео је са још неколико расправа које су имале да буду објављене у поменутом часопису Математичког семинара Универзитета у Београду. Ми смо једну копију те расправе сачували и тако се она сада појављује, у знатно проширеном облику, у *Годишњем зборнику Филозофског факултета у Скопју*.

ГЛАВА ПРВА

О ЈЕДНОМ НИЗУ АРИТМЕТИЧКИХ ПРОГРЕСИЈА

§ 1. Означимо са n један цео позитиван број, и са

$$a,\ b,\ \alpha,\ \beta$$

ма какве константе.

---

[1] Видети један врло кратак приказ те методе у нашем саопштењу Белгиској академији наука:

D. Mitrinovitch, *Sur un procédé fournissant des solutions d'une équation aux différences finies rattachée à la théorie des coefficients de Stirling* (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, Classe des sciences, 5e série, t. 33, 1947, p. 244–247).

[2] 1° Ch. Jordan, *Calculus of Finite Differences*, 1939, Budapest. — Нарочито видети стр. 142–168.

2° Видети такође:

J. Karamata, *Théorèmes sur la sommabilité exponentielle et d'autres sommabilités s'y rattachant* (*Mathematica*, Cluj, t. 9, 1935, p. 164–178).

[3] Михаило Петровић, велики српски математичар, који је створио математичку школу у Београду, умро је 1943 године у Београду, за време фашистичке окупације.

Посматрајмо две аритметичке прогресије

$$a,\ a+\alpha,\ a+2\alpha,\ \ldots,\ a+(n-1)\alpha;$$
$$b,\ b+\beta,\ b+2\beta,\ \ldots,\ b+(n-1)\beta$$

и формирајмо низ

$$ab,\ (a+\alpha)(b+\beta),\ (a+2\alpha)(b+2\beta),\ \ldots$$
$$\ldots,\ [a+(n-1)\alpha][b+(n-1)\beta]$$

чији су чланови производи чланова истог ранга датих прогресија

Томе низу одговара следећи ред са коначним бројем чланова

(1) $$ab+(a+\alpha)(b+\beta)+(a+2\alpha)(b+2\beta)+\cdots$$
$$\cdots+[a+(n-1)\alpha][b+(n-1)\beta].$$

Поставимо задатак да израчунамо збир тог реда.

§ 2. *Први поступак.* Уочимо израз

(2) $$g(x,y)=\frac{(x^{\alpha}\,y^{\beta})^{n}-1}{x^{\alpha}\,y^{\beta}-1}$$

и формирајмо идентитет

(3) $$g(x,y)\equiv 1+x^{\alpha}\,y^{\beta}+x^{2\alpha}\,y^{2\beta}+\cdots+x^{(n-1)\alpha}\,y^{(n-1)\beta}.$$

Посматрањем израза (1) и идентитета (3) може се написати нови идентитет

$$\lim_{y\to 1}\frac{d}{dy}\left[y^{b}\lim_{x\to 1}\frac{\partial(x^{a}g)}{\partial x}\right]$$
$$\equiv ab+(a+\alpha)(b+\beta)+\cdots+[a+(n-1)\alpha][b+(n-1)\beta],$$

где место g треба ставити његов израз, дефинисан формулом (2).

Када се у последњем идентитету изврше врло заметне и дугачке назначене операције, долази се до врло једноставног идентитета

(4) $$ab+(a+\alpha)(b+\beta)+\cdots+[a+(n-1)\alpha][b+(n-1\beta]$$
$$\equiv\frac{n}{6}\left[2\alpha\beta n^{2}+3(\alpha b+\beta a-\alpha\beta)n+\alpha\beta-3(\alpha b+\beta a)+6ab\right].$$

§ 3. *Други поступак.* Ако се са $f(n)$ означи израз

(5) $$ab+(a+\alpha)(b+\beta)+\cdots+[a+(n-1)\alpha][b+(n-1)\beta].$$

тада се има идентитет

$$(6)\qquad f(n+1)-f(n)\equiv(a+n\alpha)\,(b+n\beta).$$

Израз $f(n)$ је дакле, један полином по n, трећег степена, наиме

$$(7)\qquad f(n)=An^3+Bn^2+Cn+D,$$

где коефицијенте A, B, C, D треба одредити у функцији од a, b, α, β.

Идентитет (6) даје систем једначина:

$$(8)\qquad \begin{aligned} 3A&=\alpha\beta,\\ 3A+2B&=\alpha b+\beta a\\ A+B+C&=ab, \end{aligned}$$

одакле излази:

$$(9)\qquad \begin{aligned} A&=\frac{1}{3}\alpha\beta,\\ B&=\frac{1}{2}(\alpha b+\beta a-\alpha\beta),\\ C&=ab+\frac{1}{6}\alpha\beta-\frac{1}{2}(\alpha b+\beta a). \end{aligned}$$

За $n=1$, израз $f(n)$, према (5) и (7), постаје

$$f(1)=ab=A+B+C+D,$$

и пошто је, према релацијама (8),

$$A+B+C=ab,$$

добија се

$$(10)\qquad D=0.$$

Ако се коефицијенти A, B, C, D у изразу (7) смене нађеним вредностима (9) и (10), долази се до формуле (4) коју смо већ нашли помоћу једног сасвим другог начина.

§ 4. *Трећи поступак.* Посматрајмо израз

$$(11)\qquad [a+(k-1)\alpha]\,[b+(k-1)\beta],$$

чији је развијен облик

$$(12)\qquad (a-\alpha)\,(b-\beta)+(\alpha b+\beta a-2\alpha\beta)\,k+\alpha\beta k^2.$$

Ако се у изразу (11), односно (12), редом ставља

$$k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$$

и тако добијени изрази саберу, добија се

$$(13)\qquad (a-\alpha)(b-\beta)\,n+(\alpha b+\beta a-2\alpha\beta)\,S_1+\alpha\beta\,S_2,$$

где је

$$S_1=1+2+3+\cdots+n,$$
$$S_2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2.$$

Пошто је

$$S_1=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$S_2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

израз (13), после једноставних трансформација, добија облик

$$\frac{n}{6}\left[2\alpha\beta n^2+3(\alpha b+\beta a-\alpha\beta)+\alpha\beta-3(\alpha b+\beta a)+6ab\right]$$

који је идентичан изразу наведеном у формули (4).

Тако смо до формуле (4) дошли на три разна начина.

§ 5. Сада ћемо решити општији проблем.

Нека су

$$n \quad \text{и} \quad p\geqslant 2$$

два цела позитивна броја и нека су

$$a_r \quad \text{и} \quad \alpha_r \qquad\qquad (r=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ p)$$

ма какве константе.

Посматрајмо сада p аритметичких прогресија

$$a_r,\ a_r+\alpha_r,\ a_r+2\alpha_r,\ \ldots,\ a_r+(n-1)\,\alpha_r$$
$$(r=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ p).$$

Формирајмо израз

$$(14)\qquad \prod_{r=1}^{r=p} a_r+\prod_{r=1}^{r=p}(a_r+\alpha_r)+\prod_{r=1}^{r=p}(a_r+2\alpha_r)+\cdots+\prod_{r=1}^{r=p}[a_r+(n-1)\,\alpha_r]$$

и *потражимо збир тог израза са коначним бројем чланова.*

§ 6. Да бисмо нашли збир реда (14), користећи први од наведених поступака (§ 2), имали бисмо да пођемо од израза:

$$(15)\qquad g(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_p)=\frac{\left(x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}\ldots x_p^{\alpha_p}\right)^n-1}{x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}\ldots x_p^{\alpha_p}-1}$$

и да формирамо идентитет

(16) $$g \equiv 1 + x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \dots x_p^{\alpha_p} + x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} x_3^{2\alpha_3} \dots x_p^{2\alpha_p} + \cdots$$
$$\cdots + x_1^{(n-1)\alpha_1} x_2^{(n-1)\alpha_2} x_3^{(n-1)\alpha_3} \dots x_p^{(n-1)\alpha_p}.$$

Овај поступак изискивао је компликована израчунавања и за најпростији случај када је $p=2$, а за $p>2$ изискиваће очевидно далеко заметнија израчунавања.

За $p=3$ требало би израчунати граничну вредност

(17) $$\lim_{x_3 \to 1} \frac{d}{dx_3} \left\{ x_3^{a_3} \lim_{x_2 \to 1} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[x_2^{a_2} \lim_{x_1 \to 1} \frac{\partial (x_1^{a_1} g)}{\partial x_1} \right] \right\},$$

где је

$$g(x_1, x_2, x_3) = \frac{(x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3})^n - 1}{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} - 1}.$$

Израз (17) дефинише збир реда

$$a_1 a_2 a_3 + (a_1 + \alpha_1)(a_2 + \alpha_2)(a_3 + \alpha_3) + \cdots$$
$$\cdots + [a_1 + (n-1)\alpha_1][a_2 + (n-1)\alpha_2][a_3 + (n-1)\alpha_3].$$

У општем случају, треба израчунати изразе:

(18) $$L_1 = \lim_{x_1 \to 1} \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1^{a_1} g),$$
$$L_2 = \lim_{x_2 \to 1} \frac{\partial}{\partial x_2} (x_2^{a_2} L_1),$$
$$L_3 = \lim_{x_3 \to 1} \frac{\partial}{\partial x_3} (x_3^{a_3} L_2),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$L_p = \lim_{x_p \to 1} \frac{d}{dx_p} (x_p^{a_p} L_{p-1}),$$

где је g функција од

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_p$$

дефинисана формулом (15).

Овај поступак, који може имати известан теориски интерес, није подесан за практична израчунавања.

Збир реда (14) одређен је изразом L_p.

§ 7. Да бисмо применили други од наведених поступака за израчунавање збира израза (14), треба узети као полазну тачку идентитет

$$(19) \qquad f(n+1)-f(n)\equiv\prod_{r=1}^{r=p}(a_r+n\alpha_r),$$

где $f(n)$ означава израз (14).

Према томе, $f(n)$ је један полином по n и његов је степен $(p+1)$, тј. полином $f(n)$ је облика

$$(20) \qquad f(n)=A_1 n^{p+1}+A_2 n^p+\cdots+A_{p+1}n+A_{p+2}.$$

Коефицијенти A_i се израчунавају помоћу линеарних једначина.

Заиста, идентитет (19) доводи до овог система линеарних једначина:

$$(21) \qquad \begin{aligned}
&(p+1)A_1=\prod\alpha_r,\\
&\binom{p+1}{2}A_1+\binom{p}{1}A_2=\prod\alpha_r\cdot\sum\frac{a_1}{\alpha_1},\\
&\binom{p+1}{3}A_1+\binom{p}{2}A_2+\binom{p-1}{1}A_3=\prod\alpha_r\cdot\sum\frac{a_1}{\alpha_1}\cdot\frac{a_2}{\alpha_2},\\
&\binom{p+1}{4}A_1+\binom{p}{3}A_2+\binom{p-1}{2}A_3\\
&\qquad\qquad+\binom{p-2}{1}A_4=\prod\alpha_r\cdot\sum\frac{a_1}{\alpha_1}\cdot\frac{a_2}{\alpha_2}\cdot\frac{a_3}{\alpha_3},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\binom{p+1}{k}A_1+\binom{p}{k-1}A_2+\binom{p-1}{k-2}A_3+\binom{p-2}{k-3}A_4+\cdots\\
&\qquad\cdots+\binom{p-k+2}{1}A_k=\prod\alpha_r\cdot\sum\frac{a_1}{\alpha_1}\cdot\frac{a_2}{\alpha_2}\cdots\frac{a_{k-1}}{\alpha_{k-1}},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&A_1+A_2+A_3+\cdots+A_p+A_{p+1}=\Pi a_r.
\end{aligned}$$

У последњем систему једначина употребили смо, ради краткоће у писању, ове ознаке:

$$\prod\alpha_r=\prod_{r=1}^{r=p}\alpha_r,$$

$$\sum\frac{a_1}{\alpha_1}=\frac{a_1}{\alpha_1}+\frac{a_2}{\alpha_2}+\cdots+\frac{a_p}{\alpha_p},$$

$$\sum\frac{a_1}{\alpha_1}\cdot\frac{a_2}{\alpha_2}=\frac{a_1}{\alpha_1}\cdot\frac{a_2}{\alpha_2}+\frac{a_1}{\alpha_1}\cdot\frac{a_3}{\alpha_3}+\cdots+\frac{a_{p-1}}{\alpha_{p-1}}\cdot\frac{a_p}{\alpha_p},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum \frac{a_1}{\alpha_1}\cdot\frac{a_2}{\alpha_2}\cdots\frac{a_k}{\alpha_k} = \text{збиру производа израза}$$

$$\frac{a_1}{\alpha_1},\ \frac{a_2}{\alpha_2},\ldots,\ \frac{a_p}{\alpha_p}$$

узетих k по k $(k \leqq p)$.

Из релације (20) излази

$$f(1) = A_1 + A_2 + \cdots + A_{p+1} + A_{p+2},$$

или, према (14),

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_{p+1} + A_{p+2} = \Pi a_r.$$

Упоређењем ове релације са последњом од наведених у систему (21), добија се

$$A_{p+2} = 0,$$

што значи да је полином $f(n)$ дељив са n.

Систем (21) од $(p+1)$ једначина првога степена са $(p+1)$ непознатих

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{p+1}$$

има јединствени скуп решења, пошто је детерминанта тог система

$$(p+1)!,$$

тј. вредност која је увек различита од нуле, јер је, према претпоставци,

$$p \geqslant 2.$$

Коефицијенти полинома (20)

(22) $$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{p+1}$$

јесу линеарне комбинације израза:

$$\prod \alpha_r,\ \prod \alpha_r \cdot \sum \frac{a_1}{\alpha_1},\ \prod \alpha_r \cdot \sum \frac{a_1}{\alpha_1}\cdot\frac{a_2}{\alpha_2},\ \ldots$$

$$\ldots,\ \prod \alpha_r \cdot \sum \frac{a_1}{\alpha_1}\cdot\frac{a_2}{\alpha_2}\cdots\frac{a_k}{\alpha_k},\ \ldots,\ \prod a_r.$$

Коефицијенти (22) израчунавају се лако на овај начин:

Из прве од једначина система (21) израчунава се A_1, из друге једначине A_2 и уопште из k-те једначине A_k, тако да је A_k линеарна комбинација израза:

$$\prod \alpha_r, \prod \alpha_r \cdot \sum \frac{a_1}{\alpha_1}, \prod \alpha_r \cdot \sum \frac{a_1}{\alpha_1} \frac{a_2}{\alpha_2}, \ldots$$

$$\ldots, \prod \alpha_r \cdot \sum \frac{a_1}{\alpha_1} \cdot \frac{a_2}{\alpha_2} \cdots \frac{a_{k-1}}{\alpha_{k-1}}$$

$$(k = 2,\ 3,\ \ldots,\ p+1).$$

§ 8. За случај када је $p=3$, систем (21) доводи до решења:

$$A_1 = \frac{1}{4} \alpha_1\alpha_2\alpha_3,$$

$$A_2 = \frac{1}{3}(\alpha_1\alpha_2 a_3 + \alpha_2\alpha_3 a_1 + \alpha_3\alpha_1 a_2) - \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2\alpha_3,$$

$$A_3 = \frac{1}{2}(\alpha_1 a_2 a_3 + \alpha_2 a_3 a_1 + \alpha_3 a_1 a_2)$$

(23)
$$- \frac{1}{2}(\alpha_1\alpha_2 a_3 + \alpha_2\alpha_3 a_1 + \alpha_3\alpha_1 a_2) + \frac{1}{4}\alpha_1\alpha_2\alpha_3,$$

$$A_4 = a_1 a_2 a_3 + \frac{1}{6}(\alpha_1\alpha_2 a_3 + \alpha_2\alpha_3 a_1 + \alpha_3\alpha_1 a_2)$$

$$- \frac{1}{2}(\alpha_1 a_2 a_3 + \alpha_2 a_3 a_1 + \alpha_3 a_1 a_2).$$

Према томе, извели смо следећи идентитет:

(24)
$$a_1 a_2 a_3 + (a_1+\alpha_1)(a_2+\alpha_2)(a_3+\alpha_3) + \cdots$$
$$\cdots + [a_1 + (n-1)\alpha_1][a_2 + (n-1)\alpha_2][a_3 + (n-1)\alpha_3]$$
$$\equiv n(A_1 n^3 + A_2 n^2 + A_3 n + A_4),$$

где су коефицијенти A_1, A_2, A_3, A_4 *дефинисани формулама* (23).

§ 9. *Примери за формулу* (24).

1⁰ За партикуларне вредности:

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1,$$
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$$

формула (24) постаје

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 \equiv \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

а то је добро познати идентитет.

2^0 За партикуларне вредноси:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = a_3 = 2,$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1,$$

формула (24) постаје

$$1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \cdots + n(n+1)^2$$

$$\equiv \frac{1}{12} n(n+1)(n+2)(3n+5).$$

У напред цитираним Рижик-овим *Таблицама*, на стр. 242, наведена је формула

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)^2 \equiv \frac{1}{12} n(n+1)(n+2)(3n+5)$$

која је идентична са нашом формулом.

3^0 За партикуларне вредности

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_3 = 2,$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1,$$

добија се идентитет

$$1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 3 + \cdots + n^2(n+1)$$

$$\equiv \frac{1}{12} n(n+1)(n+2)(3n+1).$$

4^0 За партикуларне вредности:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 8,$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 3$$

имамо идентитет

$$1 \cdot 2 \cdot 8 + 2 \cdot 3 \cdot 11 + \cdots + n(n+1)(3n+5)$$

$$\equiv \frac{1}{12} n(n+1)(n+2)(9n+23).$$

§ 10. У случају када је $p=4$, из система (21) добија се:

$$A_1 = \frac{1}{5}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4,$$

$$A_2 = \frac{1}{4}(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 a_4 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 a_3 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 a_2 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 a_1) - \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4,$$

$$\begin{aligned} A_3 = {} & \frac{1}{3}(\alpha_1\alpha_2 a_3 a_4 + \alpha_1\alpha_3 a_2 a_4 + \alpha_1\alpha_4 a_2 a_3 + \alpha_2\alpha_3 a_1 a_4 \\ & \qquad + \alpha_2\alpha_4 a_1 a_3 + \alpha_3\alpha_4 a_1 a_2) \\ & - \frac{1}{2}(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 a_4 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 a_3 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 a_2 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 a_1) \\ & + \frac{1}{3}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_4 = {} & \frac{1}{2}(\alpha_1 a_2 a_3 a_4 + \alpha_2 a_1 a_3 a_4 + \alpha_3 a_1 a_2 a_4 + \alpha_4 a_1 a_2 a_3) \\ & - \frac{1}{2}(\alpha_1\alpha_2 a_3 a_4 + \alpha_1\alpha_3 a_2 a_4 + \alpha_1\alpha_4 a_2 a_3 + \alpha_2\alpha_3 a_1 a_4 \\ & \qquad + \alpha_2\alpha_4 a_1 a_3 + \alpha_3\alpha_4 a_1 a_2) \\ & + \frac{1}{4}(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 a_4 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 a_3 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 a_2 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 a_1), \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} A_5 = {} & a_1 a_2 a_3 a_4 \\ & - \frac{1}{2}(\alpha_1 a_2 a_3 a_4 + \alpha_2 a_1 a_3 a_4 + \alpha_3 a_1 a_2 a_4 + \alpha_4 a_1 a_2 a_3) \\ & + \frac{1}{6}(\alpha_1\alpha_2 a_3 a_4 + \alpha_1\alpha_3 a_2 a_4 + \alpha_1\alpha_4 a_2 a_3 + \alpha_2\alpha_3 a_1 a_4 \\ & \qquad + \alpha_2\alpha_4 a_1 a_3 + \alpha_3\alpha_4 a_1 a_2) \\ & - \frac{1}{30}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4. \end{aligned}$$

Према томе, *извели смо овај идентитет:*

$$\begin{aligned} & a_1 a_2 a_3 a_4 + (a_1+\alpha_1)(a_2+\alpha_2)(a_3+\alpha_3)(a_4+\alpha_4) + \cdots \\ & \cdots + [a_1+(n-1)\alpha_1][a_2+(n-1)\alpha_2][a_3+(n-1)\alpha_3][a_4+(n-1)\alpha_4] \\ & \qquad \equiv n(A_1 n^4 + A_2 n^3 + A_3 n^2 + A_4 n + A_5), \end{aligned} \tag{26}$$

где су коефицијенти A_i *дефинисани формулама* (25).

§ 11. *Примери за формулу* (26).

1° $1\cdot 2\cdot 3\cdot 8 + 2\cdot 3\cdot 4\cdot 11 + \cdots + n(n+1)(n+2)(3n+2)$

$$\equiv \frac{1}{5} n(n+1)(n+2)(n+3)(3n+7);$$

2° $1\cdot 2\cdot 3^2 + 2\cdot 3\cdot 4^2 + \cdots + n(n+1)(n+2)^2$

$$\equiv \frac{1}{20} n(n+1)(n+2)(n+3)(4n+11);$$

3° $1\cdot 2^3 + 2\cdot 3^3 + \cdots + n(n+1)^3$

$$\equiv \frac{1}{60} n(n+1)(n+2)(12n^2+39n+29);$$

4° $1^2\cdot 2^2 + 2^2\cdot 3^2 + \cdots + n^2(n+1)^2 \equiv 2^2 + 6^2 + \cdots + (n^2+n)^2$

$$\equiv \frac{1}{15} n(n+1)(n+2)(3n^2+6n+1);$$

5° $1\cdot 2^2\cdot 3 + 2\cdot 3^2\cdot 4 + \cdots + n(n+1)^2(n+2)$

$$\equiv \frac{1}{10} n(n+1)(n+2)(n+3)(2n+3).$$

§ 12. Посматрањем коефицијената A_i, наведених у § 10, видимо да су они хомогени полиноми по

$$a_r \text{ и } \alpha_r \qquad (r=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

и да је степен хомогенеитета тих полинома 4.

Уопште, степен хомогенеитета полинома A_i једнак је броју аритметичких прогресија из којих се формира наш ред са коначним бројем чланова, множењем чланова истог ранга датих аритметичких прогресија.

Да би формуле, којима су дефинисани коефицијенти A_i, биле што подесније за употребу, уведимо неке нове ознаке.

Ознаком

$$H_i^k \qquad (i \geqslant k)$$

обележимо израз који се добија на овај начин:

1° Формирати комбинације без понављања класе k од i елемената

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_i.$$

2° Формирати комбинације без понављања класе $(i-k)$ од i елемената

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_i.$$

Комбинација и од једних и од других елемената биће подједнак број, јер је

$$\binom{i}{k} = \binom{i}{i-k}.$$

3⁰ Узети две такве комбинације, једну од елемената α_r, другу од елемената a_r, тако да се у тим двема комбинацијама, посматрајући их истовремено, сваки од индекса

$$1, 2, 3, \ldots, i$$

појављује, али само једанпут. За такве две комбинације казаћемо да су *коресйонсенйне*

4⁰ Формирати производе по две и две коресподентне комбинације и тако добијене производе сабрати.

Тим поступком добијени израз, према договору, означимо са H_i^k.

Пример. Дати су елементи:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5;$$

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.$$

Образовати: H_5^3.

Комбинације треће класе од елемената α јесу:

$$\begin{array}{lll} \alpha_1\alpha_2\alpha_3, & \alpha_1\alpha_2\alpha_4, & \alpha_1\alpha_2\alpha_5, \\ \alpha_1\alpha_3\alpha_4, & \alpha_1\alpha_3\alpha_5, & \alpha_1\alpha_4\alpha_5, \\ \alpha_2\alpha_3\alpha_4, & \alpha_2\alpha_3\alpha_5, & \alpha_2\alpha_4\alpha_5, \\ \alpha_3\alpha_4\alpha_5 & & \end{array}$$

Комбинације друге класе од елемената a јесу:

$$\begin{array}{llll} a_1a_2, & a_1a_3, & a_1a_4, & a_1a_5, \\ a_2a_3, & a_2a_4, & a_2a_5, & \\ a_3a_4, & a_3a_5, & & \\ a_4a_5. & & & \end{array}$$

Креспондентне комбинације, на пример, јесу·

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \quad \text{и} \quad a_4a_5;$$
$$\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \quad \text{и} \quad a_1a_5.$$

Према дефиницији израза H_i^k, имамо у конкретном случају:

$$\begin{aligned} H_5^3 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3a_4a_5 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4a_3a_5 + \alpha_1\alpha_2\alpha_5a_3a_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4a_2a_5 \\ + \alpha_1\alpha_3\alpha_5a_2a_4 + \alpha_1\alpha_4\alpha_5a_2a_3 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4a_1a_5 \\ + \alpha_2\alpha_3\alpha_5a_1a_4 + \alpha_2\alpha_4\alpha_5a_1a_3 + \alpha_3\alpha_4\alpha_5a_1a_2. \end{aligned}$$

Са новим симболом H_i^k формуле из § 10 имају облик:

$$A_1 = \frac{1}{5} H_4^4,$$

$$A_2 = \frac{1}{4} H_4^3 - \frac{1}{2} H_4^4,$$

$$A_3 = \frac{1}{3} H_4^2 - \frac{1}{2} H_4^3 + \frac{1}{3} H_4^4,$$

$$A_4 = \frac{1}{2} H_4^1 - \frac{1}{2} H_4^2 + \frac{1}{4} H_4^3,$$

$$A_5 = H_4^0 - \frac{1}{2} H_4^1 + \frac{1}{6} H_4^2 - \frac{1}{30} H_4^4,$$

где је

$$H_4^0 = a_1 a_2 a_3 a_4.$$

Уопште може се доказати да су коефицијенти

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots,\ A_{p+1},$$

који се јављају у изразу (20), облика:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \lambda_{11} H_p^p, \\
A_2 &= \lambda_{21} H_p^{p-1} + \lambda_{22} H_p^p, \\
A_3 &= \lambda_{31} H_p^{p-2} + \lambda_{32} H_p^{p-1} + \lambda_{33} H_p^p, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_k &= \lambda_{k1} H_p^{p-k+1} + \lambda_{k2} H_p^{p-k+2} + \cdots + \lambda_{kk} H_p^p, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_{p+1} &= \lambda_{p+1,\,1} H_p^0 + \lambda_{p+1,\,2} H_p^1 + \cdots + \lambda_{p+1,\,p+1} H_p^p,
\end{aligned}$$

где су $\lambda_{\eta\nu}$ нумеричке константе које треба одредити. Неке од тих констаната могу бити једнаке нули.

§ 13. Да бисмо нашли збир реда (14), на основу поступка наведеног у § 4 ове расправе, потребно је развити израз

$$\prod_{r=1}^{r=p} [a_r + (n-1)\alpha_r]$$

и уредити га по n. То ће бити један полином по n, степена p, наиме

(27) $$\Delta_0 n^p + \Delta_1 n^{p-1} + \cdots + \Delta_{p-1} n + \Delta_p$$

где су коефицијенти

$$\Delta_i \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p)$$

полиноми по

$$a_r \quad \text{и} \quad \alpha_r \qquad (r=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ p).$$

Ако у изразу

$$\Delta_0\, k^p + \Delta_1\, k^{p-1} + \cdots + \Delta_{p-1}\, k + \Delta_p$$

стављамо редом

$$k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,$$

добијамо n израза чији је збир

(28) $$\Delta_0\, S_p + \Delta_1\, S_{p-1} + \cdots + \Delta_{p-1}\, S_1 + n\,\Delta_p,$$

где је

(29) $$S_i = 1^i + 2^i + \cdots + n^i$$
$$(i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ p).$$

Према томе, да бисмо овим поступком нашли збир реда (14), потребно је претходно знати формуле збирова (29).

§ 14. Ради примене поступка наведеног у § 13, узмимо случај $p=4$ Полином (27) тада постаје

$$\Delta_0\, n^4 + \Delta_1\, n^3 + \Delta_2\, n^2 + \Delta_3\, n + \Delta_4,$$

где Δ_0, Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 имају вредности:

$$\begin{aligned}
\Delta_0 &= \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4,\\
\Delta_1 &= \alpha_1\alpha_2\,(\alpha_3 a_4 + \alpha_4 a_3 - 2\,\alpha_3\alpha_4)\\
&\quad + \alpha_3\alpha_4\,(\alpha_1 a_2 + \alpha_2 a_1 - 2\,\alpha_1\alpha_2),\\
\Delta_2 &= \alpha_1\alpha_2\,(a_3 - \alpha_3)\,(a_4 - \alpha_4)\\
&\quad + \alpha_3\alpha_4\,(a_1 - \alpha_1)\,(a_2 - \alpha_2)\\
&\quad + (\alpha_1 a_2 + \alpha_2 a_1 - 2\,\alpha_1\alpha_2)\,(\alpha_3 a_4 + \alpha_4 a_3 - 2\,\alpha_3\alpha_4),\\
\Delta_3 &= (\alpha_1 a_2 + \alpha_2 a_1 - 2\,\alpha_1\alpha_2)\,(a_3 - \alpha_3)\,(a_4 - \alpha_4)\\
&\quad + (\alpha_3 a_4 + \alpha_4 a_3 - 2\,\alpha_3\alpha_4)\,(a_1 - \alpha_1)\,(a_2 - \alpha_2),\\
\Delta_4 &= (a_1 - \alpha_1)\,(a_2 - \alpha_2)\,(a_3 - \alpha_3)\,(a_4 - \alpha_4).
\end{aligned}$$

Израз (28), у овом партикуларном случају, постаје

(30) $$\Delta_0\, S_4 + \Delta_1\, S_3 + \Delta_2\, S_2 + \Delta_3\, S_1 + n\,\Delta_4.$$

На основу познатих формула

$$S_1 = \frac{1}{2}\, n\,(n+1),$$

$$S_2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1),$$

$$S_3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2,$$

$$S_4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1),$$

израз (30), иза извршених трансформација, добија вид

$$B_1 n^5 + B_2 n^4 + B_3 n^3 + B_4 n^2 + B_5 n,$$

где коефицијенти

$$B_i \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

имају вредности:

$$B_1 = \frac{1}{5} \Delta_0,$$

$$B_2 = \frac{1}{4} (2\Delta_0 + \Delta_1),$$

$$B_3 = \frac{1}{6} (2\Delta_0 + 3\Delta_1 + 2\Delta_2),$$

$$B_4 = \frac{1}{4} (\Delta_1 + 2\Delta_2 + 2\Delta_3),$$

$$B_5 = \frac{1}{30} (-\Delta_0 + 5\Delta_2 + 15\Delta_3 + 30\Delta_4).$$

Ако се у ове формуле унесу вредности за Δ_i, које су горе дефинисане, долази се до закључка да су задовољени услови:

$$B_i \equiv A_i$$
$$(i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

где су A_i коефицијенти одређени у § 10.

Значи да смо и овим поступком дошли до формуле (26) већ изведене једним другим начином (§ 10).

§ 15. Ако се упореде три описана поступка за изналажење збира (14), долази се до констатације:

1⁰ да је други поступак најподеснији;

2⁰ да је други поступак општији од трећег, јер да бисмо применили трећи поступак, треба претходно знати збирове

$$S_i = 1^i + 2^i + 3^i + \cdots + n^i;$$

међутим према другом поступку збирови S_i изналазе се као партикуларни случајеви резултата наведених у § 7, ако се стави:

$$\alpha_k = 1, \quad a_k = 1$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots, p).$$

§ 16. За израчунавање збирова

$$S_i = 1^i + 2^i + 3^i + \cdots + n^i$$

обично се употребљавају рекурентне формуле.

Ако искористимо резултате наведене у § 7, за израчунавање збирова S_i можемо употребити доле описани начин.

Полазна тачка јесте систем једначина (21). У томе систему појављују се изрази

$$\prod \alpha_r, \prod \alpha_r \cdot \sum \frac{a_1}{\alpha_1}, \quad \prod \alpha_r \cdot \sum \frac{a_1}{\alpha_1} \cdot \frac{a_2}{\alpha_2}, \ldots$$
$$\ldots, \prod \alpha_r \cdot \sum \frac{a_1}{\alpha_1} \cdot \frac{a_2}{\alpha_2} \cdots \frac{a_{k-1}}{\alpha_{k-1}}, \ldots, \prod a_r .$$

Пошто је у овом случају

$$\alpha_k = 1, \quad a_k = 1 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, p)$$

последњи изрази постају:

$$1, \binom{p}{1}, \binom{p}{2}, \ldots, \binom{p}{k-1}, \ldots, \binom{p}{p}.$$

Према томе, *имамо идентитет:*

$$1^i + 2^i + 3^i + \cdots + n^i \equiv A_1 n^{i+1} + A_2 n^i + \cdots + A_{i+1} n .$$

Коефицијенти

$$A_1, A_2, \ldots, A_{i+1}$$

дефинисани су овим системом линеарних једначина:

$$(i+1)\, A_1 = 1,$$
$$\binom{i+1}{2} A_1 + \binom{i}{1} A_2 = \binom{i}{1},$$
$$\binom{i+1}{3} A_1 + \binom{i}{2} A_2 + \binom{i-1}{1} A_3 = \binom{i}{2},$$
$$\binom{i+1}{4} A_1 + \binom{i}{3} A_2 + \binom{i-1}{2} A_3 + \binom{i-2}{1} A_4 = \binom{i}{3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\binom{i+1}{k}A_1+\binom{i}{k-1}A_2+\binom{i-1}{k-2}A_3+\binom{i-2}{k-3}A_4$$

$$+\cdots+\binom{i-k+2}{1}A_k=\binom{i}{k-1},$$

. . . .

$$A_1+A_2+A_3+\cdots+A_i+A_{i+1}=\binom{i}{i}.$$

§ 17. Да бисмо, на пример, израчунали

$$S_4=1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4$$

можемо поћи од последњег система и тамо ставити $i=4$. Тада се добија

$$5A_1=1,$$

$$\binom{5}{2}A_1+\binom{4}{1}A_2=\binom{4}{1},$$

$$\binom{5}{3}A_1+\binom{4}{2}A_2+\binom{3}{1}A_3=\binom{4}{2},$$

$$\binom{5}{4}A_1+\binom{4}{3}A_2+\binom{3}{2}A_3+\binom{2}{1}A_4=\binom{4}{3},$$

$$A_1+A_2+A_3+A_4+A_5=1.$$

Последњи систем даје решење:

$$A_1=\frac{1}{5},\quad A_2=\frac{1}{2},\quad A_3=\frac{1}{3},\quad A_4=0,\quad A_5=-\frac{1}{30}.$$

Из овог примера се види како можемо израчунати S_i, а да претходно не морамо знати

$$S_{i-1},\quad S_{i-2},\ \ldots,\ S_1.$$

§ 18. У Рижик-овим *Таблицама интеграла, збирова, редова и производа*[1] налазе се на стр. 243 ове формуле:

$$\sum_{k=1}^{n}[p+(k-1)q]\ (p+kq)\equiv\frac{n}{6}(2q^2n^2+6pqn+6p^2-2q^2);$$

[1] И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений,* Огиз-Гостехиздат, 1943, Москва—Ленинград, 400 стр.

$$\sum_{k=1}^{n} [p+(k-1)q]\,(p+kq)\,[p+(k+1)q]$$

$$\equiv \frac{n}{12}[3q^3n^3+6q^2(2p+q)n^2+3q(6p^2+6pq-q^2)n$$

$$+(12p^3+18p^2q-6pq^2-6q^3)];$$

$$\sum_{k=1}^{n} [p+(k-1)q]\,(p+kq)\cdots[p+(k+r)q]$$

$$\equiv \frac{1}{(r+3)q}\Big\{[p+(n-1)q]\,(p+nq)\cdots[p+(n+r+1)q]$$

$$+p(p+q)\cdots[p+(r+1)q]\,(q-p)\Big\};$$

$$\sum_{k=1}^{n} [p+(k-1)q]\,(p+kq)^2\,[p+(k+1)q]$$

$$\equiv \frac{n}{10}[10p^4+20(n+1)p^3q+10n(2n+3)p^2q^2$$

$$+10(n+1)(n^2+n-1)pq^3$$

$$+(n+1)(2n+1)(n^2+n-2)q^4].$$

Прва од горе наведених формула може се написати на овај начин:

(31)
$$p(p+q)+(p+q)\,(p+2q)+\cdots+[p+(n-1)q]\,(p+nq)$$

$$\equiv \frac{n}{6}(2q^2n^2+6pqn+6p^2-2q^2).$$

Израз који се јавља на левој страни последњег идентитета јесте партикуларни случај нашег израза (1) када је

$$a=p,\quad b=p+q,$$

$$\alpha=q,\quad \beta=q.$$

За ове вредности a, b, α, β, полином

$$2\alpha\beta n^2+3(\alpha b+\beta a-\alpha\beta)\,n+\alpha\beta-3(\alpha b+\beta a)+6ab$$

постаје

$$2q^2n^2+6pqn+6p^2-2q^2.$$

Према томе, показали смо да је формула (31), која је спомenута у Рижик-овим *Таблицама*, обухваћена нашом формулом (4), као партикуларни случај.

Ако се сада у формулу (24) унесу вредности

$$a_1 = p, \quad a_2 = p + q; \quad a_3 = p + 2q;$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = q,$$

добија се, после извршених трансформација, друга од формула наведених у Рижик-овим *Таблицама*.

Идентитет (26) за вредности

$$a_1 = p, \quad a_2 = p + q, \quad a_3 = p + q, \quad a_4 = p + 2q;$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = q$$

постоје управо четврта од наведених формула из Рижик-ових *Таблица*.

За трећу формулу није тешко доказати да је и она садржана у нашим резултатима (§ 7), као партикуларни случај.

На стр. 242 Рижик-ових *Таблица* налазе и ове формуле:

$$\sum_{k=1}^{n} k(n^2 - k^2) \equiv \frac{1}{4} n^2 (n^2 - 1),$$

$$\sum_{k=1}^{q} k(n^2 - k^2) \equiv \frac{1}{4} q(q+1)\ (2n^2 - q^2 - q),$$

а на стр. 243

$$\sum_{k=1}^{n} k(p + k - 1) \equiv \frac{1}{6} n(n+1)\ (3p + 2n - 2),$$

$$\sum_{k=1}^{n} (p - k + 1)\ (q - k + 1) \equiv \frac{1}{6} n[6pq - (n-1)(3p + 3q - 2n + 1)].$$

Лако је показати да су последње четири формуле из Рижик-ових *Тадлица* садржане у нашој формули (24) односно (4).

Рижик у својим *Таблицама* наводи да су му Adams-ове *Таблице*[1] послужиле као основни извор за писање IV. одељка који се односи на суме, редове и производе. У Adams-овим *Таблицама* на стр. 28 налазе се ове формуле:

[1] E. P. Adams, *Smithsonian mathematical formulae and tables of elliptic functions*, Washington, 1922, 314 p.

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\cdots+n(n+1)(n+2)\equiv\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3);$$

$$\begin{aligned}1\cdot 2\cdot 3\cdots r+2\cdot 3\cdot 4\cdots(r+1)+&\\ +\cdots+n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)&\\ \equiv\frac{1}{r+1}n(n+1)(n+2)\cdots(n+r);&\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1\cdot p+2\cdot(p+1)+3\cdot(p+2)+\cdots+n(p+n-1)&\\ \equiv\frac{1}{6}n(n+1)(3p+2n-2);&\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p\cdot q+(p-1)\cdot(q-1)+(p-2)\cdot(q-2)+\cdots+(p-n)\cdot(q-n)&\\ \equiv\frac{1}{6}n[6pq-(n-1)(3p+3q-2n+1)].&\end{aligned}$$

Очевидно је да наше формуле (видети §§ 2, 7, 8) обухватају, као партикуларне случајеве, горе наведене формуле из Adams-ових *Таблица*.

§ 19. Посматрајмо два реда са коначним бројем чланова

$$1\cdot 1+3\cdot 4+5\cdot 7+\cdots+(2n-1)\ (3n-2),$$

$$3\cdot 8+4\cdot 9+5\cdot 10+\cdots+(n+2)\ (n+7).$$

Њихови збирови су, према формули (4), респективно

$$\frac{1}{2}n(4n^2-n-1),$$

$$\frac{1}{3}n(n+7)\ (n+8).$$

Према томе, први од напред наведених збирова не може се претставити као производ линеарних фактора по n са рационалним коефицијентима, док се други збир може претставити као производ таквих фактора.

Поставимо сада *задатак*, који може бити од интереса, *да се нађу такве две прогресије:*

$$a,\ a+\alpha,\quad a+2\alpha,\ \ldots,\ a+(n-1)\alpha,$$

$$b,\ b+\beta,\quad b+2\beta,\ \ldots,\ b+(n-1)\beta$$

(a, b, α, β су нумеричке константе и уз то рационални бројеви) *да би збир реда*

$$ab+(a+\alpha)\ (b+\beta)+\cdots+[a+(n-1)\alpha]\ [b+(n-1)\beta] \tag{32}$$

могао бити изражен као производ линеарних фактора по n са рационалним коефицијентима.

Ако збир (32) има наведену особину, казаћемо да ужива особину (R).

Нећемо улазити у решавање овог проблема у општем случају, већ ћемо се ограничити на то што ћемо навести четири довољна услова.

1⁰ Ако је

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1$$

и ако је

$$[3(a+b)+1]^2 - 48ab \tag{33}$$

потпун квадрат, тада израз (32) ужива особину (R).

Пример. За $a=5$, $b=1$ услов (33) је задовољан.

Одговарајући идентитет, према (4), биће

$$5\cdot 1 + 6\cdot 2 + \cdots + (n+4)n \equiv \frac{1}{3} n(n+1)\,(2n+13).$$

2⁰ Ако је $\alpha = a$, збир (32) има особину (R).

У овом случају формула (4) постаје

$$ab + 2a(b+\beta) + \cdots + na\,[b+(n-1)\beta]$$
$$\equiv \frac{1}{6}\, an(n+1)(2\beta n + 3b - 2\beta).$$

Напоменимо да је напред наведена претпоставка да су

$$a, \ b, \ \alpha, \ \beta$$

нумеричке константе и то рационални бројеви.

Примери:

$$1\cdot 5 + 2\cdot 8 + 3\cdot 11 + \cdots + n(3n+2)$$
$$\equiv \frac{1}{2}\, n(n+1)(2n+3);$$

$$3\cdot 7 + 6\cdot 9 + 9\cdot 11 + \cdots + 3n(2n+5)$$
$$\equiv \frac{1}{2}\, n(n+1)(4n+17).$$

3⁰ Ако између

$$a, \ b, \ \alpha, \ \beta$$

постоји веза

$$\alpha = \frac{3\beta - 2b}{5\beta - 3b}\, a, \tag{34}$$

збир (32) има особину (R).

У овом случају збир реда је

$$\frac{1}{3}\,n\,(n+2)\,(\lambda n+\mu),$$

где је

$$\lambda = \alpha\beta = \frac{3\beta-2b}{5\beta-3b}\,a\beta\,,$$

$$\mu = \frac{7\beta b-3\beta^2-3b^2}{5\beta-3b}\,a\,.$$

Пример. Када је

$$a=7,\quad b=1,\quad \alpha=4,\quad \beta=2,$$

услов (34) је задовољен.

Одговарајући идентитет гласи:

$$7\cdot 1+11\cdot 3+\cdots+(4n+1)\,(2n-1)$$

$$\equiv \frac{1}{3}\,n\,(n+2)\,(8\,n-1)\,.$$

Из (34) видимо да је могућно образовати колико хоћемо редова (32) са особином (R) ако су a b, β ма какви рационални бројеви.

4⁰ Ако између бројева

$$a,\ b,\ \alpha,\ \beta$$

постоји зависност исказана релацијом

(35) $$\alpha = \frac{3\beta-4b}{2\beta-3b}\,a,$$

тада ред (32) ужива особину (R).

Збир реда (32) има тада облик:

$$\frac{1}{6}\,n\,(2n+1)\,(\lambda n+\mu),$$

где је

$$\lambda = \alpha\beta = \frac{3\beta-4b}{2\beta-3b}\,a\beta,$$

$$\mu = \frac{8b\beta-3\beta^2-6b^2}{2\beta-3b}.$$

Пример. За

$$a=3,\quad b=1,\quad \alpha=5,\quad \beta=3$$

услов (35) је задовољен и кореспондентни идентитет гласи:

$$3\cdot 1+8\cdot 4+\cdots+(5n-2)(3n-2)$$
$$\equiv \frac{1}{2}n(2n+1)(5n-3).$$

§ 20. Проблем чије смо делимично решење дали у претходном параграфу (§ 19) постаје утолико тежи уколико је број иницијалних прогресија већи, тј. број p (видети § 7)

На овоме проблему нећемо се више задржавати.

ГЛАВА ДРУГА

О ЈЕДНОЈ ЈЕДНАЧИНИ СА КОНАЧНИМ ДИФЕРЕНЦИЈАМА

§ 21. Посматрајмо идентитет

(36)
$$x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)$$
$$\equiv C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \cdots + C_n^{n-1} x$$

(n = цео позитиван број).

N. Nielsen[1], желећи да веже бројеве

$$C_n^p \qquad (C_n^0=1)$$
$$(0 \leqslant p \leqslant n)$$

за име математичара[2] који је први увидео значај тих бројева, назвао је бројеве C_n^p Stirling-овим бројевима *прве врсте*.

Према дефиниционој једнакости (36) може се рећи: да је број C_n^p једнак збиру $\binom{n-1}{p}$ могућних производа формираних од бројева

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n-1,$$

под условом да сваки производ има p разних чинилаца.

Бројеви C_n^p јесу цели позитивни бројеви.

---

[1] N. Nielsen, *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, Leipzig, 1906, S. 67.

[2] J. Stirling, *Methodus differentialis*, London, 1730, p. 11.

N. Nielsen[1], полазећи од идентитета (36), изградио је теорију Stirling-ових бројева на основу богате литературе и својих властитих студија о тим бројевима.

Ch. Jordan објавио је, 1933 године, једну монографију[2] о Stirling-овим бројевима, полазећи од идентитета

$$(37)\qquad x(x-1)\,(x-2)\ldots(x-n+1) \equiv S_n^1 x + S_n^2 x^2 + \cdots + S_n^{n-1} x^{n-1} + S_n^n x^n.$$

Касније, 1939 године, Ch. Jordan објавио је једно обимно дело[3] из рачуна са коначним диференцијама у коме је велика пажња посвећена теорији, хисторијату и примени Stirling-ових бројева.

Навешћемо још ове чињенице према Jordan-у:

1^0 Stirling-ови бројеви S_n^m задовољавају рекурентну релацију

$$(38)\qquad S_{n+1}^m = S_n^{m-1} - n S_n^m,$$

а то је једначина са коначним диференцијама.

2^0 Решење једначине (38), у општем случају, није познато, али полазећи од

$$S_1^0 = 0, \quad S_1^1 = 1,$$

могу се израчунати, један за другим, Stirling-ови бројеви S_n^m. На тај начин могућно је саставити таблицу ових бројева.

3^0 Решења једначине (38) дата су формулом

$$S_n^{m-n} = K_{m,0}\binom{n}{2m} + K_{m,1}\binom{n}{2m-1} + \cdots + K_{m,m-1}\binom{n}{m+1}$$

где су коефицијенти

$$K_{m,p} \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$$

дефинисани помоћу једначине са коначним диференцијама

$$K_{m+1,p} + (2m-p+1)\,(K_{m,p} + K_{m,p-1}) = 0.$$

---

[1] N. Nielsen, у поменутом делу, на стр. 300—320, дао је библиографски индекс у који су ушле све студије о Stirling-овим бројевима, објављене до 1906 године.

[2] Ch. Jordan, *On Stirling's Numbers* (*The Tôhoku Mathematical Journal*, Vol. 37, 1933, p. 254—278). — У овој расправи мађарски математичар Jordan скупио је различите познате формуле о Stirling-овим бројевима и извео неколико нових.

[3] Ch. Jordan, *Calculus of Finite Differences*, Budapest, 1939, 654 стране. — Видети нарочито стр. 142—168. Ово је дело написано с обзиром на нове резултате о Stirling-овим бројевима који су објављени до 1939.

Решавање једначине (38) зависи од последње једначине чије решење у општем случају такође није познато.

§ 22. Полазна тачка наше методе је идентитет

$$(39)\quad \begin{aligned}&(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-n)\\ &\equiv x^n-\Phi_n^1 x^{n-1}+\Phi_n^2 x^{n-2}-\Phi_n^3 x^{n-3}\\ &+\cdots+(-1)^k\Phi_n^k x^{n-k}+\cdots+(-1)^n\Phi_n^n.\end{aligned}$$

Упоређењем идентитета (37) и (39) долази се до релације

$$(40)\qquad \Phi_n^m=(-1)^m S_{n+1}^{n-m+1}$$

којој се може дати и овај облик

$$S_n^m=(-1)^{n-m}\Phi_{n-1}^{n-m}.$$

Тако, на пример, имамо:

$$\Phi_n^1=-S_{n+1}^n,$$

$$\Phi_n^2=S_{n+1}^{n-1},$$

$$\Phi_n^3=-S_{n+1}^{n-2},$$

$$\Phi_n^4=S_{n+1}^{n-3},$$

$$\Phi_n^5=-S_{n+1}^{n-4}.$$

Уопште је

$$\Phi_n^m=\left|S_{n+1}^{n-m+1}\right|.$$

Упоређењем идентитета (36) и (39) добијамо релацију

$$(41)\qquad \Phi_n^m=C_{n+1}^m.$$

Из дефиниционе формуле (39) излази да је број

$$\Phi_n^m \qquad (n\geqslant m>0)$$

збир свих производа формираних од n првих бројева природног низа

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$$

с тим да сваки производ садржи m разних чинилаца.

Бројеви Φ_n^m јесу цели позитивни бројеви.

Непосредно можемо написати ове две формуле:

$$\Phi_n^1=\frac{1}{2}n(n+1),$$

$$\Phi_n^n=n!\,.$$

§ 23. Број Φ_n^2 дефинисан је изразом:

$$\begin{aligned}\Phi_n^2 = &(1\cdot 2+1\cdot 3+\cdots+1\cdot n)\\ &+(2\cdot 3+2\cdot 4+\cdots+2\cdot n)\\ &+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\\ &+(n-1)\,n.\end{aligned}$$

Последњи израз може се овако трансформовати:

$$\begin{aligned}\Phi_n^2 = &\,n\,[1+2+\cdots+(n-1)]\\ &+(n-1)\,[1+2+\cdots+(n-2)]\\ &+\ldots\ldots\ldots+2\cdot 1\end{aligned}$$

и најзад

$$\Phi_n^2 = n\,\Phi_{n-1}^1+(n-1)\,\Phi_{n-2}^1+\cdots+2\,\Phi_1^1. \tag{42}$$

Будући да је:

$$\begin{aligned}\Phi_{n-1}^1 &= \frac{1}{2}\,(n-1)\,n,\\ \Phi_{n-2}^1 &= \frac{1}{2}\,(n-2)\,(n-1)\\ &\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\\ \Phi_1^1 &= 1,\end{aligned}$$

формула (42) постаје

$$2\,\Phi_n^2 = 1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots+(n-1)\,n^2. \tag{43}$$

У § 9 извели смо идентитет

$$\begin{aligned}&1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots+n\,(n+1)^2\\ &\equiv\frac{1}{12}\,n\,(n+1)\,(n+2)\,(3n+5).\end{aligned} \tag{44}$$

Према (43) и (44) добијамо дефинитивни образац

$$\Phi_n^2 = \frac{1}{24}\,(n-1)\,n\,(n+1)\,(3\,n+2). \tag{45}$$

§ 24. Број Φ_n^3 дефинисан је изразом

$$\begin{aligned}\Phi_n^3 = &(1\cdot 2\cdot 3+1\cdot 2\cdot 4+\cdots+1\cdot 2\cdot n)\\ &+(1\cdot 3\cdot 4+1\cdot 3\cdot 5+\cdots+1\cdot 3\cdot n)\\ &+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\\ &+(n-2)\,(n-1)\,n\end{aligned}$$

коме се може дати облик

$$\begin{aligned}\Phi_n^3 = n[1\cdot 2+1\cdot 3+\cdots+(n-2)(n-1)]\\ +(n-1)[1\cdot 2+1\cdot 3+\cdots+(n-3)(n-2)]\\ +\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ +3\cdot 2\cdot 1\end{aligned}$$

или најзад

$$\Phi_n^3 = n\Phi_{n-1}^2+(n-1)\Phi_{n-2}^2+\cdots+3\Phi_2^2. \tag{46}$$

Из формуле (45) следује:

$$\Phi_{n-1}^2 = \frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(3n-1),$$

$$\Phi_{n-2}^2 = \frac{1}{24}(n-3)(n-2)(n-1)(3n-4),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Phi_2^2 = 1\cdot 2.$$

Узимајући у обзир последње обрасце, налазимо

$$\begin{aligned}24\,\Phi_n^3 = 1\cdot 2\cdot 3^2\cdot 8+2\cdot 3\cdot 4^2\cdot 11+3\cdot 4\cdot 5^2\cdot 14\\ +\cdots+(n-2)(n-1)n^2(3n-1).\end{aligned} \tag{47}$$

Применом резултата наведених у §§ 7 и 12, добијамо дефинитивни образац

$$\Phi_n^3 = \frac{1}{48}n^2(n+1)^2(n-1)(n-2). \tag{48}$$

§ 25. Учинићемо у овом параграфу једну малу дигресију, наиме показаћемо како се ефективно примењује поступак из § 6, али нешто измењен, за израчунавање збира

$$1\cdot 2\cdot 3^2\cdot 8+2\cdot 3\cdot 4^2\cdot 11+\cdots+(n-2)(n-1)n^2(3n-1). \tag{49}$$

Узмимо израз

$$g(x,y) = \frac{x^n y^{3n}-1}{xy^3-1} \tag{50}$$

и формирајмо идентитет

$$g \equiv 1+xy^3+x^2y^6+\cdots+x^{n-1}y^{3n-3}.$$

Према томе можемо образовати и ове идентитете:

$$\frac{\partial g}{\partial x} \equiv y^3 + 2\,xy^6 + \cdots + (n-1)\,x^{n-2}\,y^{3n-3},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \equiv 1\cdot 2\cdot y^6 + 2\cdot 3\cdot xy^9 + \cdots + (n-2)\,(n-1)\,x^{n-3}\,y^{3n-3},$$

$$L \equiv \lim_{y\to 1} \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\,\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right)$$

$$\equiv 1\cdot 2\cdot 8 + 2\cdot 3\cdot 11\,x + \cdots + (n-2)\cdot(n-1)\cdot(3n-1)\,x^{n-3},$$

$$H = \frac{d}{dx}(x^3\,L)$$

$$\equiv 1\cdot 2\cdot 3\cdot 8\,x^2 + 2\cdot 3\cdot 4\cdot 11\,x^3 + \cdots + (n-2)\,(n-1)\,n\,(3n-1)\,x^{n-1}$$

$$G = \lim_{x\to 1} \frac{d}{dx}(xH)$$

$$\equiv 1\cdot 2\cdot 3^2\cdot 8 + 2\cdot 3\cdot 4^2\cdot 11 + \cdots + (n-2)\,(n-1)\,n^2\,(3n-1).$$

Сада ћемо поћи од израза $g(x, y)$, који је дефинисан формулом (50), па ћемо редом израчунати

$$\frac{\partial g}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2},\quad L,\quad H.$$

На крају имамо, после заметних трансформација,

$$\begin{aligned}(x-1)^6\,\frac{d}{dx}(xH) = {} & n^2\,(n-1)\,(n-2)\,(3n-1)\,x^{n+5}\\ & - (n-2)\,(n-1)\,(15\,n^3 + 10\,n^2 - 25\,n + 12)\,x^{n+4}\\ & + 2\,(n-2)\,(15\,n^4 + 10\,n^3 - 45\,n^2 - 16\,n + 48)\,x^{n+3}\\ & - 2\,(15\,n^5 - 5\,n^4 - 75\,n^3 - 19\,n^2 + 108\,n + 72)\,x^{n+2}\\ & + n\,(n+1)\,(15\,n^3 - 5\,n^2 - 50\,n - 32)\,x^{n+1}\\ & - n\,(n-1)\,(n+1)^2\,(3\,n+2)\,x^n\\ & + 24\,x^4 + 192\,x^3 + 144\,x^2.\end{aligned}$$

Да бисмо израчунали G, узмимо израз

$$\frac{d}{dx}(xH),$$

дефинисан последњом релацијом и нађимо

$$\lim_{x\to 1} \frac{d}{dx}(xH).$$

Пошто шест пута узастопце применимо L'Hospital-ово правило и извршимо потребне алгебарске трансформације, добијамо идентитет:

$$(51)\qquad 1\cdot 2\cdot 3^2\cdot 8+2\cdot 3\cdot 4^2\cdot 11+\cdots+(n-2)(n-1)n^2(3n-1)$$
$$\equiv \frac{1}{48}n^2(n+1)^2(n-1)(n-2).$$

§ 26. Напред смо извели формуле (§§ 23 и 24):

$$\Phi_n^2=n\,\Phi_{n-1}^1+(n-1)\,\Phi_{n-2}^1+\cdots+2\,\Phi_1^1,$$
$$\Phi_n^3=n\,\Phi_{n-1}^2+(n-1)\,\Phi_{n-2}^2+\cdots+3\,\Phi_2^2.$$

Није тешко показати да у општем случају вреди ова релација:

$$(52)\qquad \Phi_n^m=n\,\Phi_{n-1}^{m-1}+(n-1)\,\Phi_{n-2}^{m-1}+\cdots+m\,\Phi_{m-1}^{m-1}$$

где је

$$0<m\leqslant n.$$

Из формуле (52), која има фундаментални значај у овој расправи, могу се извести, на пример, ови закључци:

1⁰ Да бисмо израчунали Φ_n^m, неопходно је претходно израчунати Φ_n^{m-1}, што у крајњој анализи значи да претходно треба израчунати

$$\Phi_n^1,\quad \Phi_n^2,\ \ldots,\ \Phi_n^{m-1};$$

2⁰ Φ_n^m је полином по n степена $2m$.

§ 27. Ако сада применимо основни образац (52) за израчунавање Φ_n^4, имамо најпре

$$\Phi_n^4=n\,\Phi_{n-1}^3+(n-1)\,\Phi_{n-2}^3+\cdots+4\,\Phi_3^3.$$

Ова једнакост, с обзиром на (48), постаје:

$$(53)\quad 48\,\Phi_n^4=1\cdot 2\cdot 3^2\cdot 4^3+2\cdot 3\cdot 4^2\cdot 5^3+\cdots+(n-2)(n-3)(n-1)^2n^3.$$

Да бисмо нашли збир реда који се налази на десној страни релације (53), применићемо резултате из прве главе ове расправе.

Ради тога пођимо од израза

$$k(k+1)(k+2)^2(k+3)^3,$$

чији је развијен облик

$$k^7+14k^6+80k^5+238k^4+387k^3+324k^2+108k.$$

Стављајући овде редом

$$k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$$

и сабирајући добијене вредности, долазимо до једнакости:

$$(54)\qquad 1\cdot 2\cdot 3^2\cdot 4^3 + 2\cdot 3\cdot 4^2\cdot 5^3 + \cdots + n(n+1)(n+2)^2(n+3)^3$$
$$\equiv \psi_7(n) + 14\,\psi_6(n) + 80\,\psi_5(n) + 238\,\psi_4(n) + 387\,\psi_3(n)$$
$$+ 324\,\psi_2(n) + 108\,\psi_1(n),$$

где је

$$(55)\qquad \psi_p(n) = \sum_{i=1}^{n} i^p$$

$$(p = 1,\ 2,\ \ldots,\ 7).$$

Ако се познате вредности:

$$\psi_1(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2},$$

$$\psi_2(n) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6},$$

$$\psi_3(n) = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4},$$

$$\psi_4(n) = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30},$$

$$\psi_5(n) = \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12},$$

$$\psi_6(n) = \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42},$$

$$\psi_7(n) = \frac{n^8}{8} + \frac{n^7}{2} + \frac{7n^6}{12} - \frac{7n^4}{24} + \frac{n^2}{12}$$

унесу у релацију (54), добија се:

$$(56)\qquad 120\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)^2(k+3)^3 \equiv 15n^8 + 300n^7 + 2510n^6$$
$$+ 11352n^5 + 29855n^4 + 45420n^3 + 36740n^2 + 12048n.$$

Полином који се јавља у последњој једнакости има факторе:

$$n, \; n+1, \; n+2, \; n+3, \; n+4.$$

Према томе, идентитету (56) може се дати прикладнији облик

(57) $$\sum_{k=1}^{n} k\,(k+1)\,(k+2)^2\,(k+3)^3 \equiv$$

$$\frac{1}{5!}\,n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)\,(15n^3+150n^2+485n+502).$$

На основу (53) и (57) налазимо дефинитивно

(58) $$\Phi_n^4 \equiv$$

$$\frac{1}{6!\cdot 8}\,(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(15n^3+15n^2-10n-8).$$

§ 28. Као што видимо, изналажење формуле за Φ_n^m компликује се све више и више са рашћењем броја m.

Наћи ћемо још формулу за број Φ_n^5 који је, према (52), дефинисан релацијом

(59) $$\Phi_n^5 = n\,\Phi_{n-1}^4 + (n-1)\,\Phi_{n-2}^4 + \cdots + 5\,\Phi_4^4.$$

С обзиром на (58) можемо, место (59), писати

(60) $$\Phi_n^5 \equiv$$

$$\frac{1}{6!\cdot 8}\sum_{k=5}^{n} k^2\,(k-1)\,(k-2)\,(k-3)\,(k-4)\,(15k^3-30k^2+5k+2).$$

Посматрајмо сада израз

$$(k+4)^2\,(k+3)\,(k+2)\,(k+1)\,k\,[15(k+4)^3-30\,(k+4)^2+5\,(k+4)+2],$$

чији је развијен облик

$$15k^9+360\,k^8+3710\,k^7+21392\,k^6+75263\,k^5+164840\,k^4+218420\,k^3 + 159008\,k^2+48192\,k.$$

Ако се у последњем изразу дају броју k редом ове вредности

$$k = 1, \; 2, \; 3, \; \ldots, \; n,$$

па се сви тако формирани нумерички изрази саберу, налази се

$$(61)\qquad 15\psi_9(n)+360\,\psi_8(n)+3710\,\psi_7(n)+21392\,\psi_6(n)$$
$$+75263\,\psi_5(n)+164840\,\psi_4(n)+218420\,\psi_3(n)$$
$$+159008\,\psi_2(n)+48192\,\psi_1(n)$$

где је $\psi_p(n)$ израз одређен формулом (55).

Ако се збирови

$$\psi_p(n)\qquad (p=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 7),$$

наведени у § 27, као и збирови:

$$\psi_8(n)=\frac{n^9}{9}+\frac{n^8}{2}+\frac{2n^7}{3}-\frac{7n^5}{15}+\frac{2n^3}{9}-\frac{n}{30},$$

$$\psi_9(n)=\frac{n^{10}}{10}+\frac{n^9}{2}+\frac{3n^8}{4}-\frac{7n^6}{10}+\frac{n^4}{2}-\frac{3n^2}{20}$$

унесу у израз (61), налази се:

$$\frac{n}{2}(3n^9+95n^8+1310n^7+10302\,n^6+50787n^5+162255n^4$$
$$+334620n^3+427348n^2+304480n+91200).$$

Лако је видети, на пример помоћу Horner-ове методе, да је последњи полином дељив производом:

$$(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)^2(n+5)^2.$$

Стога, можемо написати идентитет:

$$(62)\qquad \sum_{k=1}^{n}(k+4)^2(k+3)(k+2)(k+1)\,k\,(15k^3+150k^2+485k+502)$$
$$\equiv\frac{n}{2}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)^2(n+5)^2(3n^2+23n+38).$$

На основу (62), *образац* (60) *добија овај дефинитивни облик:*

$$(63)\qquad \Phi_n^5\equiv$$
$$\frac{1}{6!\cdot 4^2}(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)\,n^2(n+1)^2(3n^2-n-6).$$

§ 29. Досада смо нашли формуле за

$$\Phi_n^m\qquad (m=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5).$$

Применом наше методе у могућности смо да изведемо редом формуле за бројеве

$$\Phi_n^6, \quad \Phi_n^7, \quad \Phi_n^8, \ldots$$

али је претходно потребно израчунати збирове

$$\psi_p(n) = \sum_{i=1}^{n} i^p$$

за

$$p = 10,\ 11,\ 12,\ \ldots,\ 2m-1.$$

Дакле, показали смо да изналажење формула за бројеве

$$\Phi_n^m \qquad (m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n),$$

према нашој методи, изискује само једноставне алгебарске операције.

Ова наша метода не само што је елементарна, већ и није мање практична од других познатих метода[1].

§ 30. Сада ћемо показати како се наша метода може искористити за формирање решења једначине са коначним диференцијама

$$S_{n+1}^m = S_n^{m-1} - n S_n^m. \tag{64}$$

Према обрасцу (40) бројевима

$$\Phi_n^1, \quad \Phi_n^2, \quad \Phi_n^3, \quad \Phi_n^4, \quad \Phi_n^5$$

одговарају респективно:

$$-S_{n+1}^n, \quad S_{n+1}^{n-1}, \quad -S_{n+1}^{n-2}, \quad S_{n+1}^{n-3}, \quad -S_{n+1}^{n-4},$$

тако да на основу обрасца

$$\Phi_n^1 = \frac{1}{2} n(n+1)$$

и образаца (45), (48), (58), (63), долазимо до ових резултата:

---

[1] Упоредити методе које су дали: Cauchy, Schläfli, von Zeipel, Schlömilch а које је анализирао N. Nielsen на стр. 71—72 свога приручника: *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, 1906, Leipzig.

$$S_n^{n-1} = -\frac{1}{2}(n-1)\,n,$$

$$S_n^{n-2} = \frac{1}{24}(n-2)(n-1)\,n\,(3n-1),$$

(65) $$S_n^{n-3} = -\frac{1}{48}(n-3)(n-2)(n-1)^2 n^2,$$

$$S_n^{n-4} = \frac{1}{6!\cdot 2^3}(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)\,n\,(15n^3-30n^2+5n+2),$$

$$S_n^{n-5} = -\frac{1}{6!\cdot 2^4}(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)^2 n^2 (3n^2-7n-2)\,.$$

То су решења једначине са коначним диференцијама (64)
Да бисмо нашли и друга решења те једначине, тј.

$$S_n^{n-6}, \quad S_n^{n-7}, \quad S_n^{n-8}, \ldots$$

треба, применом наше методе, наћи:

$$\Phi_n^6, \quad \Phi_n^7, \quad \Phi_n^8, \ldots$$

Напоменимо да се решењима (65) може дати и овај сажетији облик:

$$S_n^{n-1} = -\binom{n}{2},$$

$$S_n^{n-2} = \frac{1}{4}\binom{n}{3}(3n-1),$$

(66) $$S_n^{n-3} = -\frac{1}{2}\binom{n}{4}\,n\,(n-1),$$

$$S_n^{n-4} = \frac{1}{48}\binom{n}{5}(15n^3-30n^2+5n+2),$$

$$S_n^{n-5} = -\frac{1}{16}\binom{n}{6}\,n\,(n-1)(3n^2-7n-2).$$

§ 31. Према (40), релацији (52) одговара рекурентна формула

(67) $$S_n^{n-m} + (n-1)\,S_{n-1}^{n-m} + (n-2)\,S_{n-2}^{n-m-1} + (n-3)\,S_{n-3}^{n-m-2} + \cdots + m\,S_m^1 = 0\,.$$

Тако, на пример, имамо:

$$S_9^4 = -(8\,S_8^4 + 7\,S_7^3 + 6\,S_6^2 + 5\,S_5^1)$$
$$= -67\,284$$
$$(n = 9,\ m = 5);$$

$$S_{12}^8 = -(11\,S_{11}^8 + 10\,S_{10}^7 + 9\,S_9^6 + 8\,S_8^5$$
$$+ 7\,S_7^4 + 6\,S_6^3 + 5\,S_5^2 + 4\,S_4^1)$$
$$= 357\,423.$$
$$(n = 12,\ m = 4).$$

Релација (67) може такође да послужи као полазна тачка за проучавање Stirling-ових бројева.

5 јануара 1948.
Математички институт
Државног универзитета у Скопју.

ТАБЛИЦА[1] STIRLING-ОВИХ БРОЈЕВА
ТАБЛИЦА[2] STIRLING-ОВЫХ ЧИСЕЛ
TABLEAU[3] DES NOMBRES DE STIRLING

I.

$$S_n^{n-1} = -\binom{n}{2}.$$

$S_2^1 = -1$	$S_{19}^{18} = -171$	$S_{36}^{35} = -630$
$S_3^2 = -3$	$S_{20}^{19} = -190$	$S_{37}^{36} = -666$
$S_4^3 = -6$	$S_{21}^{20} = -210$	$S_{38}^{37} = -703$
$S_5^4 = -10$	$S_{22}^{21} = -231$	$S_{39}^{38} = -741$
$S_6^5 = -15$	$S_{23}^{22} = -253$	$S_{40}^{39} = -780$
$S_7^6 = -21$	$S_{24}^{23} = -276$	$S_{41}^{40} = -820$
$S_8^7 = -28$	$S_{25}^{24} = -300$	$S_{42}^{41} = -861$
$S_9^8 = -36$	$S_{26}^{25} = -325$	$S_{43}^{42} = -903$
$S_{10}^9 = -45$	$S_{27}^{26} = -351$	$S_{44}^{43} = -946$
$S_{11}^{10} = -55$	$S_{28}^{27} = -378$	$S_{45}^{44} = -990$
$S_{12}^{11} = -66$	$S_{29}^{28} = -406$	$S_{46}^{45} = -1\,035$
$S_{13}^{12} = -78$	$S_{30}^{29} = -435$	$S_{47}^{46} = -1\,081$
$S_{14}^{13} = -91$	$S_{31}^{30} = -465$	$S_{48}^{47} = -1\,128$
$S_{15}^{14} = -105$	$S_{32}^{31} = -496$	$S_{49}^{48} = -1\,176$
$S_{16}^{15} = -120$	$S_{33}^{32} = -528$	$S_{50}^{49} = -1\,225$
$S_{17}^{16} = -136$	$S_{34}^{33} = -561$	$S_{51}^{50} = -1\,275$
$S_{18}^{17} = -153$	$S_{35}^{34} = -595$	$S_{52}^{51} = -1\,326$

[1] Ову је Таблицу израдила Ковина Милошевић, студент математичке групе на Филозофском факултету у Скопју.

[2] Эта Таблица исчислена Ковиной Милошевич.

[3] Ce Tableau est fait par K. Milošević.

II.

$$S_n^{n-2} = \frac{1}{4}\binom{n}{3}(3n-1).$$

$S_3^1 = 2$	$S_{24}^{22} = 35\,926$	$S_{45}^{43} = 475\,365$
$S_4^2 = 11$	$S_{25}^{23} = 42\,550$	$S_{46}^{44} = 519\,915$
$S_5^3 = 35$	$S_{26}^{24} = 50\,050$	$S_{47}^{45} = 567\,525$
$S_6^4 = 85$	$S_{27}^{25} = 58\,500$	$S_{48}^{46} = 618\,332$
$S_7^5 = 175$	$S_{28}^{26} = 67\,977$	$S_{49}^{47} = 672\,476$
$S_8^6 = 322$	$S_{29}^{27} = 78\,561$	$S_{50}^{48} = 730\,100$
$S_9^7 = 546$	$S_{30}^{28} = 90\,335$	$S_{51}^{49} = 791\,350$
$S_{10}^8 = 870$	$S_{31}^{29} = 103\,385$	$S_{52}^{50} = 856\,375$
$S_{11}^9 = 1\,320$	$S_{32}^{30} = 117\,800$	$S_{53}^{51} = 925\,327$
$S_{12}^{10} = 1\,925$	$S_{33}^{31} = 133\,672$	$S_{54}^{52} = 998\,361$
$S_{13}^{11} = 2\,717$	$S_{34}^{32} = 151\,096$	$S_{55}^{53} = 1\,075\,635$
$S_{14}^{12} = 3\,731$	$S_{35}^{33} = 170\,170$	$S_{56}^{54} = 1\,157\,310$
$S_{15}^{13} = 5\,005$	$S_{36}^{34} = 190\,995$	$S_{57}^{55} = 1\,243\,550$
$S_{16}^{14} = 6\,580$	$S_{37}^{35} = 213\,675$	$S_{58}^{56} = 1\,334\,522$
$S_{17}^{15} = 8\,500$	$S_{38}^{36} = 238\,317$	$S_{59}^{57} = 1\,430\,396$
$S_{18}^{16} = 10\,812$	$S_{39}^{37} = 265\,031$	$S_{60}^{58} = 1\,531\,345$
$S_{19}^{17} = 13\,566$	$S_{40}^{38} = 293\,930$	$S_{61}^{59} = 1\,637\,545$
$S_{20}^{18} = 16\,815$	$S_{41}^{39} = 325\,130$	$S_{62}^{60} = 1\,749\,175$
$S_{21}^{19} = 20\,615$	$S_{42}^{40} = 358\,750$	$S_{63}^{61} = 1\,866\,417$
$S_{22}^{20} = 25\,025$	$S_{43}^{41} = 394\,912$	$S_{64}^{62} = 1\,989\,456$
$S_{23}^{21} = 30\,107$	$S_{44}^{42} = 433\,741$	$S_{65}^{63} = 2\,118\,480$

III.

$$S_n^{n-3} = -\frac{1}{2}\binom{n}{4}\, n(n-1).$$

$S_4^1 = -6$	$S_{28}^{25} = -7\,739\,550$
$S_5^2 = -50$	$S_{29}^{26} = -9\,642\,906$
$S_6^3 = -225$	$S_{30}^{27} = -11\,921\,175$
$S_7^4 = -735$	$S_{31}^{28} = -14\,631\,225$
$S_8^5 = -1\,960$	$S_{32}^{29} = -17\,836\,160$
$S_9^6 = -4\,536$	$S_{33}^{30} = -21\,605\,760$
$S_{10}^7 = -9\,450$	$S_{34}^{31} = -26\,016\,936$
$S_{11}^8 = -18\,150$	$S_{35}^{32} = -31\,154\,200$
$S_{12}^9 = -32\,670$	$S_{36}^{33} = -37\,110\,150$
$S_{13}^{10} = -55\,770$	$S_{37}^{34} = -43\,985\,970$
$S_{14}^{11} = -91\,091$	$S_{38}^{35} = -51\,891\,945$
$S_{15}^{12} = -143\,325$	$S_{39}^{36} = -60\,947\,991$
$S_{16}^{13} = -218\,400$	$S_{40}^{37} = -71\,284\,200$
$S_{17}^{14} = -323\,680$	$S_{41}^{38} = -83\,041\,400$
$S_{18}^{15} = -468\,180$	$S_{42}^{39} = -96\,371\,730$
$S_{19}^{16} = -662\,796$	$S_{43}^{40} = -111\,439\,230$
$S_{20}^{17} = -920\,550$	$S_{44}^{41} = -128\,420\,446$
$S_{21}^{18} = -1\,256\,850$	$S_{45}^{42} = -147\,505\,050$
$S_{22}^{19} = -1\,689\,765$	$S_{46}^{43} = -168\,896\,475$
$S_{23}^{20} = -2\,240\,315$	$S_{47}^{44} = -192\,812\,565$
$S_{24}^{21} = -2\,932\,776$	$S_{48}^{45} = -219\,486\,240$
$S_{25}^{22} = -3\,795\,000$	$S_{49}^{46} = -249\,166\,176$
$S_{26}^{23} = -4\,858\,750$	$S_{50}^{47} = -282\,117\,500$
$S_{27}^{24} = -6\,160\,050$	$S_{51}^{48} = -318\,622\,500$

IV.

$$S_n^{n-4} = \frac{1}{48}\binom{n}{5}(15n^3 - 30n^2 + 5n + 2).$$

$S_5^1 = 24$	$S_{28}^{24} = 626\,334\,345$
$S_6^2 = 274$	$S_{29}^{25} = 843\,041\,745$
$S_7^3 = 1\,624$	$S_{30}^{26} = 1\,122\,686\,019$
$S_8^4 = 6\,769$	$S_{31}^{27} = 1\,480\,321\,269$
$S_9^5 = 22\,449$	$S_{32}^{28} = 1\,933\,889\,244$
$S_{10}^6 = 63\,273$	$S_{33}^{29} = 2\,504\,645\,364$
$S_{11}^7 = 157\,773$	$S_{34}^{30} = 3\,217\,636\,444$
$S_{12}^8 = 357\,423$	$S_{35}^{31} = 4\,102\,212\,268$
$S_{13}^9 = 749\,463$	$S_{36}^{32} = 5\,192\,609\,268$
$S_{14}^{10} = 1\,474\,473$	$S_{37}^{33} = 6\,528\,574\,668$
$S_{15}^{11} = 2\,749\,747$	$S_{38}^{34} = 8\,156\,055\,558$
$S_{16}^{12} = 4\,899\,622$	$S_{39}^{35} = 10\,127\,949\,468$
$S_{17}^{13} = 8\,394\,022$	$S_{40}^{36} = 12\,504\,921\,117$
$S_{18}^{14} = 13\,896\,582$	$S_{41}^{37} = 15\,356\,289\,117$
$S_{19}^{15} = 22\,323\,822$	$S_{42}^{38} = 18\,760\,986\,517$
$S_{20}^{16} = 34\,916\,946$	$S_{43}^{39} = 22\,808\,599\,177$
$S_{21}^{17} = 53\,327\,946$	$S_{44}^{40} = 27\,600\,486\,067$
$S_{22}^{18} = 79\,721\,795$	$S_{45}^{41} = 33\,250\,985\,691$
$S_{23}^{19} = 116\,896\,626$	$S_{46}^{42} = 39\,888\,712\,941$
$S_{24}^{20} = 168\,423\,871$	$S_{47}^{43} = 47\,657\,950\,791$
$S_{25}^{21} = 238\,810\,495$	$S_{48}^{44} = 56\,720\,141\,346$
$S_{26}^{22} = 333\,685\,495$	$S_{49}^{45} = 67\,255\,480\,866$
$S_{27}^{23} = 460\,012\,995$	$S_{50}^{46} = 79\,464\,623\,490$

V.

$$S_n^{n-5} = -\frac{1}{16}\binom{n}{6} n(n-1)(3n^2-7n-2).$$

$S_6^1 =$	-120
$S_7^2 =$	$-1\,764$
$S_8^3 =$	$-13\,132$
$S_9^4 =$	$-67\,284$
$S_{10}^5 =$	$-269\,325$
$S_{11}^6 =$	$-902\,055$
$S_{12}^7 =$	$-2\,637\,558$
$S_{13}^8 =$	$-6\,926\,634$
$S_{14}^9 =$	$-16\,669\,653$
$S_{15}^{10} =$	$-37\,312\,275$
$S_{16}^{11} =$	$-78\,558\,480$
$S_{17}^{12} =$	$-156\,952\,432$
$S_{18}^{13} =$	$-299\,650\,806$
$S_{19}^{14} =$	$-549\,789\,282$
$S_{20}^{15} =$	$-973\,941\,900$
$S_{21}^{16} =$	$-1\,672\,280\,820$
$S_{22}^{17} =$	$-2\,792\,167\,686$
$S_{23}^{18} =$	$-4\,546\,047\,198$
$S_{24}^{19} =$	$-7\,234\,669\,596$
$S_{25}^{20} =$	$-11\,276\,842\,500$
$S_{26}^{21} =$	$-17\,247\,104\,875$
$S_{27}^{22} =$	$-25\,922\,927\,745$
$S_{28}^{23} =$	$-38\,343\,278\,610$
$S_{29}^{24} =$	$-55\,880\,640\,270$
$S_{30}^{25} =$	$-80\,328\,850\,875$
$S_{31}^{26} =$	$-114\,009\,431\,445$
$S_{32}^{27} =$	$-159\,899\,390\,784$
$S_{33}^{28} =$	$-221\,783\,846\,592$
$S_{34}^{29} =$	$-304\,437\,176\,604$
$S_{35}^{30} =$	$-413\,836\,815\,700$
$S_{36}^{31} =$	$-557\,414\,245\,080$
$S_{37}^{32} =$	$-744\,348\,178\,728$
$S_{38}^{33} =$	$-985\,905\,441\,444$
$S_{39}^{34} =$	$-1\,295\,835\,552\,648$
$S_{40}^{35} =$	$-1\,690\,825\,581\,900$
$S_{41}^{36} =$	$-2\,191\,022\,426\,580$
$S_{42}^{37} =$	$-2\,820\,630\,280\,377$
$S_{43}^{38} =$	$-3\,608\,591\,714\,091$
$S_{44}^{39} =$	$-4\,589\,361\,478\,702$
$S_{45}^{40} =$	$-5\,803\,782\,865\,650$
$S_{46}^{41} =$	$-7\,300\,077\,221\,745$
$S_{47}^{42} =$	$-9\,134\,958\,017\,031$
$S_{48}^{43} =$	$-11\,374\,881\,704\,208$
$S_{49}^{44} =$	$-14\,097\,448\,488\,816$
$S_{50}^{45} =$	$-17\,392\,967\,051\,250$
$S_{51}^{46} =$	$-21\,366\,198\,225\,750$

Резюме

О ЧИСЛАХ STIRLING-A

от

Д. С. МИТРИНОВИЧА

1. Первая глава этой работы относится к исследованию формулы, представляющей сумму выражений

$$\text{(I)}\qquad \prod_{r=1}^{r=p} a_r + \prod_{r=1}^{r=p} (a_r+\alpha_r) + \prod_{r=1}^{r=p} (a_r+2\alpha_r) + \cdots + \prod_{r=1}^{r=p} [a_r+(n-1)\alpha_r],$$

где n и p являются двумя целыми положительными числами, а

$$a_r \text{ и } \alpha_r \qquad (r=1, 2, 3, \ldots, p)$$

обозначают произвольные константы.

Сумму выражений (I) можем получить несколькими способами (см. §§ 5, 6, 7 сербского текста).

В случае если $p=2$, получаем формулу (4).[1]

В случае когда $p=3$, получаем формулы (24) и (23).

За случай $p=4$ соответствующая формула дана выражениями (26) и (25).

В параграфе 18 показываем, что некоторые тождества указанные в Таблицах Рыжика[2] и Адамса[3] являются партикулярными случаями формул, изложенных в этом исследовании (см. §§ 1—17).

2. Вторая глава этой работы посвящена одному способу, который даёт решения уравнения

$$\text{(II)}\qquad S_{n+1}^{m} = S_{n}^{m-1} - n\, S_{n}^{m}$$

связанного с теорией чисел Stirling-a.

Решение уравнения (II) в общем случае неизвестно.

Наш способ прост и обоснован на результатах означенных в главе первой. Этот способ состоится в следующем.

Возьмем тождество

$$\text{(III)}\qquad \begin{aligned} & x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1) \\ & \equiv S_n^1 x + S_n^2 x^2 + \cdots + S_n^{n-1} x^{n-1} + S_n^n x^n \end{aligned}$$

где n обозначает целое положительное число и где S_n^m представляют числа Stirling-a.

Числа Stirling-a удовлетворяют реляцию (II).

Вместо чисел S рассмотрим числа Φ, определенные тождеством

$$\text{(IV)}\qquad \begin{aligned} & (x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-n) \\ & \equiv x^n - \Phi_n^1 x^{n-1} + \Phi_n^2 x^{n-2} - \Phi_n^3 x^{n-3} \\ & + \cdots + (-1)^k \Phi_n^k x^{n-k} + \cdots + (-1)^n \Phi_n^n. \end{aligned}$$

[1]) Формулы, нумерованные, арабскими цифрами относятся к тексту на сербском язике.

[2]) И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Огиз — Гостехиздат, 1943, Москва—Ленинград, 400 стр. — См. особенно стр. 242—243.

[3]) E. P. Adams, *Smithsonian mathematical formulae and tables of elliptic functions*, Washington, 1922, 314 pages. — См. особенно стр. 18.

Если сравним тождества (III) и (IV), получаем

(V)
$$\Phi_n^m = (-1)^m S_{n+1}^{n\ m+1},$$
$$S_n^m = (-1)^{n\ m} \Phi_{n-1}^{n\ m}.$$

Из формулы (IV) получаем

$$\Phi_n^1 = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \Phi_n^n = n!,$$
$$\Phi_n^2 = (1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + \cdots + 1 \cdot n)$$
$$+ (2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \cdots + 2 \cdot n)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ (n-1)n.$$

Последнее выражение можем написать

$$\Phi_n^2 = n[1 + 2 + \cdots + (n-1)]$$
$$+ (n-1)[1 + 2 + \cdots + (n-2)]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ 2 \cdot 1$$

или

(VI)
$$\Phi_n^2 = n\,\Phi_{n-1}^1 + (n-1)\,\Phi_{n-2}^1 + \cdots + 2\,\Phi_1^1.$$

Числа Φ_n^3 определяются формулой

$$\Phi_n^3 = (1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 4 + \cdots + 1 \cdot 2 \cdot n)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ (n-2)(n-1)n$$

или

(VII)
$$\Phi_n^3 = n\,\Phi_{n-1}^1 + (n-1)\,\Phi_{n-2}^2 + \cdots + 3\,\Phi_2^2.$$

В общем случае имеем формулу

$$\Phi_n^m = n\,\Phi_{n-1}^{m-1} + (n-1)\,\Phi_{n-2}^{m-1} + \cdots + m\,\Phi_{m-1}^{m-1}$$

где

$$0 < m \leqslant n.$$

Так как

$$\Phi_{n-1}^1 = \frac{1}{2}(n-1)\,n,$$
$$\Phi_{n-2}^1 = \frac{1}{2}(n-2)(n-1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Phi_1^1 = 1$$

формула (VI) принимает вид

$$2\,\Phi_n^2 = 1\cdot 2^2 + 2\cdot 3^2 + \cdots + (n-1)\,n^2.$$

и наконец (см. § 9, 2⁰)

$$\Phi_n^2 = \frac{1}{24}(n-1)\;n(n+1)\;(3n+2). \tag{VIII}$$

Формула (VII), согласно с формулой (VIII), становится

$$24\,\Phi_n^3 = 1\cdot 2\cdot 3^2\cdot 8 + 2\cdot 3\cdot 4^2\cdot 11 + \cdots + (n-2)\,(n-1)\,n^2\,(3n-1)$$

и наконец (см. § 25, формула 51):

$$\Phi_n^3 = \frac{1}{48}\,n^2(n+1)^2\,(n-1)\,(n-2).$$

Повторяя тот же способ получаем формулы

$$\Phi_n^4 =$$

$$\frac{1}{6!\cdot 8}(n+1)\;n(n-1)\;(n-2)\;(n-3)\;(15n^3+15n^2-10n-8),$$

$$\Phi_n^5 =$$

$$\frac{1}{6!\cdot 16}(n-4)\;(n-3)\;(n-2)\;(n-1)\;n^2(n+1)^2\;(3n^2-n-6),$$

. . . .

Согласно с формулой (V) получаем

$$S_n^{n-1} = -\binom{n}{2},$$

$$S_n^{n-2} = \frac{1}{4}\binom{n}{3}(3n-1),$$

$$S_n^{n-3} = -\frac{1}{2}\binom{n}{4}\,n(n-1),$$

$$S_n^{n-4} = \frac{1}{48}\binom{n}{5}(15n^3-30n^2+5n+2),$$

$$S_n^{n-5} = -\frac{1}{16}\binom{n}{6}\,n(n-1)\;(3n^2-7n-2),$$

. . . .

Последние формулы являются решениями уравнения (II).

3. В конце этой работы приложена, как дополнение, одна таблица Stirling-овых чисел.

Résumé

SUR LES NOMBRES DE STIRLING

par

D. S. MITRINOVITCH

1. Le premier chapitre de cette étude (§§ 1—20) est relatif à la recherche d'une formule fournissant la somme de l'expression

$$\text{(I)} \qquad \prod_{r=1}^{r=p} a_r + \prod_{r=1}^{r=p} (a_r+\alpha_r) + \prod_{r=1}^{r=p} (a_r+2\alpha_r) + \cdots + \prod_{r=1}^{r=p} [a_r+(n-1)\alpha_r],$$

où n et p sont deux entiers positifs et où

$$a_r \text{ et } \alpha_r \qquad (r=1, 2, 3, \ldots, p)$$

désignent des constantes quelconques.

La somme de l'expression (I) peut être obtenue au moyen de plusieurs procédés (*cf.* les §§ 5, 6, 7 du texte en langue serbe).

Pour le cas $p=2$, on a la formule (4).[1]

Dans le cas où $p=3$, on admet les formules (24) et (23).

Pour le cas $p=4$, la formule cherchée est fournie par (26) et (25).

Dans le § 18 on montre que plusieurs identités, indiquées dans les *Tables* de Ryjik[2] et d'Adams[3], sont contenues, comme cas particuliers, dans les formules développées dans cette étude (*cf.* §§ 1—17 du texte en langue serbe).

2. Le second chapitre est consacré à un procédé fournissant des solutions de l'équation aux différences finies

$$\text{(II)} \qquad S_{n+1}^{m} = S_n^{m-1} - n\, S_n^{m},$$

rattachée à la théorie des coefficients de Stirling.

La solution de l'équation (II), dans le cas général, est inconnue.

Le procédé en question, simple et élémentaire, lequel est fondé sur des résultats énoncés dans le premier chapitre, consiste en ceci.

Envisageons l'identité

$$\text{(III)} \qquad x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1) \equiv S_n^1\, x + S_n^2\, x^2 + \cdots + S_n^{n-1}\, x^{n-1} + S_n^n\, x^n,$$

où n désigne l'entier positif et où S_n^m sont les coefficients de Stirling de première espèce.

Les coefficients de Stirling satisfont à la relation (II).

Au lieu des nombres S considérons les nombres Φ définis par l'identité

$$\text{(IV)} \qquad (x-1)(x-2)\cdots(x-n) \equiv x^n - \Phi_n^1 x^{n-1} + \Phi_n^1 x^{n-2} - \Phi_n^3 x^{n-3} + \cdots + (-1)^k\, \Phi_n^k x^{n-k} + \cdots + (-1)^n\, \Phi_n^n.$$

---

1) Les formules numérotés par chiffres arabes se rapportent au texte en langue serbe.

2) Ryjik, *Tables d'intégrales, de sommes, de séries et de produits*, Moscou — Leningrad, 1943, 400 pages (en ruse), — Voir, en particulier, p. 242—243.

3 Adams, *Smithsonian mathematical formulae and tables of elliptic functions*, Washington, 1922, 314 pages. — Voir, particulièrement, p. 28.

La comparaison de (III) et (IV) conduit à

(V)
$$\Phi_n^m = (-1)^m S_{n+1}^{n-m+1}, \quad S_n^m = (-1)^{n-m} \Phi_{n-1}^{n-m}.$$

De (IV) il s'ensuit

$$\Phi_n^1 = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \Phi_n^n = n!,$$

$$\begin{aligned}\Phi_n^2 = &(1\cdot 2 + 1\cdot 3 + \cdots + 1\cdot n)\\ &+(2\cdot 3 + 2.4 + \cdots + 2\cdot n)\\ &+ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ &+(n-1)n.\end{aligned}$$

La dernière expression s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}\Phi_n^2 = &\,n[1+2+\cdots+(n-1)]\\ &+(n-1)[1+2+\cdots+(n-2)]\\ &+ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ &+2\cdot 1\end{aligned}$$

ou bien

(VI)
$$\Phi_n^2 = n\,\Phi_{n-1}^1 + (n-1)\,\Phi_{n-2}^1 + \cdots + 2\,\Phi_1^1.$$

Les nombres Φ_n^3 sont déterminés au moyen de l'expression

$$\begin{aligned}\Phi_n^3 = &(1\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot 2\cdot 4 + \cdots + 1\cdot 2\cdot n)\\ &+ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ &+(n-2)\,(n-1)n\end{aligned}$$

ou bien

(VII)
$$\Phi_n^3 = n.\,\Phi_{n-1}^2 + (n-1)\,\Phi_{n-2}^2 + \cdots + 3\,\Phi_2^2.$$

Dans le cas général, on a la formule

$$\Phi_n^m = n\,\Phi_{n-1}^{m-1} + (n-1)\,\Phi_{n-2}^{m-1} + \cdots + m\,\Phi_{m-1}^{m-1}$$

avec

$$0 < m \leqslant n.$$

Puisque

$$\Phi_{n-1}^1 = \frac{1}{2}(n-1)n,$$

$$\Phi_{n-2}^1 = \frac{1}{2}(n-2)\,(n-1),$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\Phi_1^1 = 1,$$

a formule (VI) devient

$$2\,\Phi_n^2 = 1\cdot 2^2 + 2\cdot 3^2 + \cdots + (n-1)n^2$$

et enfin (*cf.* § 9, exemple 2⁰)

$$\text{(VIII)} \qquad \Phi_n^2 = \frac{1}{24}(n-1)\,n\,(n+1)\,(3n+2).$$

La formule (VII), d'après (VIII), prend la forme

$$24\,\Phi_n^3 = 1\cdot 2\cdot 3^2\cdot 8 + 2\cdot 3\cdot 4^2\cdot 11 + \cdots + (n-2)\,(n-1)\,n^2\,(3n-1)$$

et enfin (*cf.* § 25, formule 51):

$$\Phi_n^3 = \frac{1}{48}\,n^2(n+1)^2\,(n-1)\,(n-2).$$

En suivant la même voie, on t ouve les formules:

$$\Phi_n^4 =$$

$$\frac{1}{6!\cdot 8}(n+1)\,n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(15n^3+15n^2-10n-8),$$

$$\Phi_n^5 =$$

$$\frac{1}{6!\cdot 16}(n-4)\,(n-3)\,(n-2)\,(n-1)\,n^2(n+1)^2\,(3n^2-n-6)$$

. . . .

D'après (V) on obtient:

$$S_n^{n-1} = -\binom{n}{2},$$

$$S_n^{n-2} = \frac{1}{4}\binom{n}{3}(3n-1),$$

$$S_n^{n-3} = -\frac{1}{2}\binom{n}{4}\,n(n-1),$$

$$S_n^{n-4} = \frac{1}{48}\binom{n}{5}(15n^3-30n^2+5n+2),$$

$$S_n^{n-5} = -\frac{1}{16}\binom{n}{6}\,n(n-1)\,(3n^2-7n-2),$$

. . . .

Les dernières formules définissent des solutions de l'équation aux différences finies (II).

3. A la fin de cette étude est donné, comme complément, un tableau des nombres de Stirling.

Le 5 janvier 1948.
Institut de mathématiques de l'Université d'Etat à Skopié