МАТЕМАТИЧКИ ОМНИБУС, 7 (2020), 123 – 134
http://im-pmf.weebly.com/matematicki-omnibus-kniga-7.html

ДЕМОГРАФСКИТЕ ПРОМЕНИ НИЗ ПРИЗМАТА НА МАТЕМАТИЧКИТЕ МОДЕЛИ

Анета Гацовска-Барандовска [1]

Промените во структурата на човечката популација на одредена територија имаат директно влијание на социо-економските промени во општеството. Со продолжувањето на животниот век на човекот, планирањето на речиси секој општествен макроекономски процес и стратегија бара проценка на бројот на учесници во процесот. Така, оценката на бројот на пензионери во наредните години директно влијае на промените во пензискиот систем, почнувајќи од возраста на пензионирање, пензиските придонеси, па сè до износите на исплати на пензии. Оценката на бројот на новородени и имиграционата статистика влијаат на образовните и здравствените политики, а оценката на стапката на морталитет директно влијае на раководењето на различните гранки во осигурителниот бизнис. Уште во 17-тиот век, Џон Гронт (John Graunt, 1620 – 1674), ги истражувал неделните статистики на смртни случаи и крштевања во Лондон. Денес тој се смета за статистичарот кој е Колумбо на биостатистиката. Неговата пионерска демографска студија за жителите на Лондон, *Natural and political observations mentioned in a following index, and made upon the bills of mortality* (*Природни и политички набљудувања споменати во форма на индекси, и направени согласно пресметките за смртност*), издадена далечната 1665-та година ја поставила основата на демографските истражувања, [3]. Во неа Гронт извршил класификација на бројот на смртни случаи според причината на настанатата смрт (меѓу кои и пренаселеноста – забележал дека бројот на смртни случаи во градските средини бил далеку поголем од оние во руралните средини, изразени во проценти). Прв ги поставил таблиците на смртност, користејќи го денешниот принцип на број на преживеани лица од примерокот. Неговиот придонес во поставување на таблиците на смртност уште пред појавата на првите животни осигурувања, оценетите стапки на припадници на војската, бремените жени и вкупната популација на Лондон, ја поставиле основата на демографијата како наука. Во 18-тиот век, оваа навидум општествена дисциплина, ја покажува својата интердисциплинарност, дел од научниот свет ја препознава како феномен со статистички правилности. Влечејќи информации од економијата, социологијата, статистиката, медицината, биологијата, антропологијата и историјата, демографијата станува основа за планирањето и општествен развој. Нашата идеја овде е да укажеме на важноста и примената на математичките модели без кои проекциите на населението и анализата на индексните стапки на смртност, новородени, фертилитет, миграција не би биле возможни. Ова е само уште еден пример како статистичката анализа и работата со податоци се во служба на градењето стратегии за иднината.

Која е прецизната дефиниција за демографијата? Демографијата претставува статистичко истражување на човечката популација во однос на бројноста, густината на населеност, распределеноста, животните статистики: број на новородени, број на смртни случаи, број на склучени бракови и друго. Модерната демографија ги вклучува и врските меѓу движењето на популацијата и економскиот развој, имиграцијата, работната сила и други можни статистики. Основниот начин на обезбедување на сите овие податоци е изведување на попис на населението, кој вклучува севкупност на податоци од интерес и претставува пребројување не само на луѓето, туку и на домаќинствата, фирмите и други важни податоци, на одредена територија во одредено време. Демографските индекси и показатели се многу на број, но нашата цел во овој текст е да разгледаме само дел од математички модели на кои се засноваат бројните демографски показатели, а кои пак во својата основа ги имаат веројатноста и статистиката.

1. ДЕМОГРАФСКИ СТАТИСТИКИ

Основните демографски податоци се прибираат од пописи, анкети или постоечки регистри за различни животни статистики, [1]. Пописот се дефинира како процес на собирање, усогласување и објавување на податоци од демографски или социо-економски карактер, во одредено време, за сите лица на одредена територија. Пописот вообичаено се изведува на 10 години, во некои држави на 5 години. Животните статистики, во годините во кои не е извршен попис се изведуваат согласно утврдени правила. Анкетите спроведени на статистички примерок, се користат за обезбедување информации кои поврзуваат различни пописи или податоци кои не се обезбедуваат при дефинирањето на пописот. Често се користат и за утврдување грешки при покривањето и класификацијата во дефинирањето на одреден попис. Регистрите на податоци за популацијата, посебно на државно и локално ниво, обезбедуваат информации за раѓањата, смртните случаи, посвојувањата, склучените бракови, разводите, имотната состојба и слично. За утврдување и анализа на популациската динамика, демографите користат различни статистики, без разлика дали станува збор за соодветни односи или стапки. Не смее да се занемари и временскиот интервал на кој одредена статистика се разгледува. Некои од таквите статистики се природниот прираст на населението, стапка на наталитет, стапка на смртност, стапка на фертилитет, стапка на смртност на новороденчиња и други. Вообичаено, ако станува збор за стапка, тогаш вредностите се однесуваат на одредена возраст или временски интервал.

2. ТАБЛИЦИ НА СМРТНОСТ

За познавачите на математиката не е тешко да се согледа и разбере важноста на собирањето на одредени податоци, различното нивно претставување, толкување и анализирање. Математичката статистика тоа го поставува на цврсти математички основи. Во време на засилена примена на математиката во други науки, како природни, така и општествени, табелирањето на податоците според строго поставени правила е почетен чекор во обработката на податоците. Прва идеја за тесната врска меѓу демографијата и статистиката ни даваат таканаречените *таблици на смртност*. Првите официјални таблици на смртност, ги објавил Сер Едмунд Хали (Sir Edmund Halley 1656 – 1742), англиски астроном, геофизичар, математичар и физичар, познат по Халеевата комета, [5]. Во тоа време, во 1693 година, детер-министичкиот пристап бил основа за одредувањето на времето на настапување на смртта на одредено лице, во одредена група. Денес, користејќи ја веројатноста, постојат различни начини неизвесноста да се измоделира и детерминистичките модели да добијат случаен карактер. Со првата таблица на смртност е започната ерата на примена на математиката во животното осигурување, уште една применета математичка гранка, за која демографијата игра клучна улога. Таблицата на смртност (општа или по полови) дава временски пресек на бројот на смртни случаи во точно дефинирани временски интервали. Истовремено ни дава слика за тоа како се менува бројот на живи лица во одредена популација во тек на една година. Со правилно толкување, дури и детерминистичкиот пристап во изработката на таблиците на смртност, укажува на правила во доживувањето на одредена возраст на група од новородени лица. Статистичките методи за избор на популациски примерок, овозможуваат оваа група на новородени лица да е хипотетски избрана. На Слика 1 е даден извадок од таблицата за смртност за нашата држава, каде во интерес на просторот се прикажани само некои од возрастите.

Возраст (години)	**Број на доживеани на возраст x**	**Број на умрени на возраст x**	**Очекувано траење на животот (години)**
x	l_x	d_x	e_x
0	100000	677	**76,34**
1	99323	34	**75,86**
2	99289	22	**74,88**
…………	…………	………………	**……**
10	99172	10	**66,97**
11	99162	16	**65,98**
12	99146	7	**64,99**
13	99138	23	**63,99**
14	99115	27	**63,01**
15	99088	23	**62,02**
16	99065	21	**61,04**
17	99044	24	**60,05**
18	99020	28	**59,06**
19	98992	33	**58,08**
20	98959	45	**57,10**
………..	…………	………………	**………**
91	6760	1981	**2,58**
92	4780	1618	**2,44**
93	3162	1063	**2,45**
94	2099	645	**2,45**
95	1454	492	**2,34**
96	962	261	**2,30**
97	700	132	**1,99**
98	569	99	**1,34**
99	469	469	**0,49**

Слика 1. Таблици на смртност, 2017–2019 година, вкупни (мажи и жени), [8].

Бројот на новородени лица во таблицата на смртност се нарекува *кохорта* (број на единки во примерокот) и се бележи со l_0. Нѐ интересира бројот на живи лица на возраст x, од почетната група, обележан со l_x, но и бројот на лица кои починале на возраст x, број кој го бележиме со d_x. Од интерес е и очекуваното времетраење на живот на лице на возраст x, e_x. Очекуваното времетраење на живот ќе биде разгледано подоцна низ текстот. Вредностите на возраста се менуваат на возрасен интервал $x \in [0, \omega)$, каде што ω е првата возраст за која $l_\omega = 0$. Овие два броја, l_x и d_x ги дефинираат првите две колони во таблиците на смртност. За да може проекциите да се направат на целата популација, на овие две колони им се додаваат уште и колони за веројатностите за доживување и смрт на одредена возраст, како и колоните за број на живи лица во однос на вистинскиот број на популацијата. Изворно, таблицата може да се погледне на официјалната интернет страница на Државниот завод за статистика, [8].

а) *Веројатности на доживување и смрт – елементарен пристап.*

Ќе го додефинираме бројот d_x, односно ќе го дообјасниме какоброј на лица кои доживеале возраст x, но не доживеале возраст $x+1$. Односно, тоа се лица кај кои смртта настапила на возрасен интервал $[x, x+1)$. Ова појаснување укажува на условот при кој ги дефинираме веројатностите на доживување и смрт, строго математички гледани како условни веројатности. Веројатноста лице кое е на возраст x, да почине пред да наполни $x+1$ година, ја бележиме со q_x и согласно класичната дефиниција на веројатност:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}.$$

Истовремено е јасно дека $d_x = l_x - l_{x+1}$. Користејќи ја последнава релација, под услов лицето да доживеало возраст x, веројатноста лицето доживее $x+1$ година е зададена со

$$p_x = 1 - q_x = 1 - \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - d_x}{l_x} = \frac{l_{x+1}}{l_x} \quad .$$

Формулата лесно се оправдува и со класичната дефиниција на веројатноста.

Од интерес се и неколку други условни веројатности за доживување и смрт на подолг временски интервал. Ја означуваме со ${}_n p_x$ веројатноста лице да доживее возраст $x+n$, под услов лицето да е на возраст x, која се пресметува според формулата

$$ {}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}, $$

додека условната веројатност лицето на возраст x да почине пред да наполни $x+n$ години е ${}_n q_x = 1 - {}_n p_x$. При разгледување на одредени одложени појави, како на пример пензионирањето, улога игра и веројатноста лице сега на возраст x да почине на одреден временски интервал $[x+m, x+m+n)$, односно да доживее возраст $x+m$, а да почине во следните n години, означена со

$$ {}_{m|n} q_x = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_x}. $$

Повеќе околу изведувањето и докажувањето на релациите за горенаведените веројатности може да се погледне во книгата на Гербер [2].

б) *Веројатности на доживување и смрт – пристап со употреба на случајни променливи.*

Секоја од воведените веројатности, но и многу дополнителни информации, посебно во однос на времетраењето на животниот век на лице на одредена возраст x, може да се добијат со воведувањето на основниот модел од веројатноста кој опишува неизвесност на појавите, а тоа е случајната променлива. Тука нема да се задржуваме на основните дефиниции и својства на случајните променливи и нивните функции на распределба, само ќе направиме директно премостување до веројатностите наведени погоре. За таа цел неопходна ни е случајната променлива T со која се опишува идното времетраење на живот на новородено лице. За потребите на моделирањето ќе направиме претпоставка дека T е случајна променлива од апсолутно непрекинат тип. Нека F е нејзината функција на распределба, $F(t) = P(T \le t)$, која ја дефинира веројатноста новородено лице да доживее најмногу t години возраст. Опашката на функ цијата на распределба F се нарекува функција на доживување и се бележи со $S(t)=1-F(t)=P(T>t)$. Претходно дефинираните веројатности беа условни веројатности дефинирани за лица кои во моментот на разгледување се на возраст x. Затоа, ќе воведеме помошна случајна променлива T_x која го одредува идното времетраење на живот на лице сега на возраст x. Тогаш, почетната случајна промелива е $T=T_0$. Соодветно се означени и функцијата на распределба на случајна променлива T_x, $F_x(t)=P(T_x \le t)$ т.е. веројатноста лице на возраст x да доживее најмногу возраст $x+t$, и функцијата на доживување $S_x(t)=P(T_x>t)$ т.е. веројатноста лицето на возраст x да доживее барем возраст $x+t$. Врската меѓу двете случајни променливи е зададена со:

$$F_x(t)=P(T_x \le t)=P(T \le x+t \,|\, T>x)=\frac{P(x<T \le x+t)}{P(T>x)}=\frac{F(x+t)-F(x)}{S(x)},$$

каде што ја искористивме дефиницијата за условна веројатност, поткрепувајќи ја идејата моделот да го искористиме при дефинирање на претходно дефинираните веројатности за доживување и смрт. Накратко ќе ги наведеме еквивалентните формули, а повеќе за примената може да се најде во [2].

Така,

$$q_x=F_x(1), \qquad p_x=S_x(1), \qquad {}_nq_x=F_x(n), \qquad {}_np_x=S_x(n)$$

и

$${}_{m|n}q_x=P(m<T_x \le m+n)=F_x(m+n)-F_x(m).$$

Колку за споредба, еве два примера:

1) Веројатноста лице на возраст 25 години да почине пред да наполни 60 години се опишува со $F_{25}(35)=P(T_{25} \le 35)={}_{35}\,q_{25}$.
2) Веројатноста лице на возраст 42 година да ја доживее 65-тата година се опишува со $S_{42}(23)=P(T_{42}>23)={}_{23}\,p_{42}$.

Сега сме во можност да разгледаме две варијанти за испитување на очекуваниот број на лица кои би доживееле одредена возраст и очекуваниот број на лица кои би починале на одреден интервал, во одредена популација. Имено, доколку постои долгогодишна статистика и редовни пописи на населението, дискретните вредности на живи лица на одредена возраст може да ги фитуваме и да добиеме временски тренд за движење на бројноста на населението, односно апроксимации на законот за смртност. Согласно статистичките претпоставки, со одредено ниво на значајност може да извршиме изгладување на кривата на бројот на живи лица низ годините и на таков начин да преминеме на работа со диференцијабилни функции, односно на користење на диференцијалното и интегралното сметање како помош во поставување на моделите. Обратно, доколку сме вовеле стохастички модел, можеме лесно да добиеме конкретни вредности за одредени животни статистики на населението. Детално двете насоки може да се разгледаат во [1] и [2].

в) *Интензитет на смртност* (*force of mortality*).

За да приближиме барем уште еден од демографските индекси, ќе разгледаме и математички модел за дефинирање на интензитетот на смртност μ_x.

Интензитет на смртност се дефинира со $\mu_x = -\frac{d}{dx}(\ln l_x)$, спротивната вредност на првиот извод од логаритамот на функцијата на живи лица. Со интегрирање во граници од 0 до x, се добива општ облик на функцијата на живи лица, $l_x = l_0 \cdot e^{-\int_0^x \mu_t \, dt}$. Со малку трансформации се добиваат веројатностите ${}_n p_x = e^{-\int_x^{x+n} \mu_t \, dt}$. Подетално, различни интегрални облици на веројатностите, изразени преку интензитетот на смртност може да се најдат во [1] и [2].

г) *Средно времетраење на живот.*

Во таблиците на смртност, понекогаш се среќава и колоната за очекувано времетраење на живот, види Слика 1. Оваа вредност е првата груба пресметка, најчесто добиена од емпириските податоци, за тоа уште колку години живот му преостануваат на лице на возраст x. Се разбира, генерализацијата да пресметките важат за секое лице, носи грешки, но како и секоја статистичка пресметка, и овде, со одредена веројатност се тврди дека добиената вредност лежи во некој интервал, па за почетна оцена е повеќе од доволно. Најпрво се дефинира средно времетраење на живот, за лице на возраст x, и тоа на два различни начини: доколку се смета дека секој смртен случај настанува на почетокот на годината, за лицата на возраст x, вкупниот број на години кои ќе ги преживеат е збирот $l_{x+1} + l_{x+2} + ... + l_{\omega}$, а средната вредност за едно лице е средното времетраење на живот $e_x = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + ... + l_{\omega}}{l_x}$. Доколку сметаме дека смртта на секое лице настанува на крај на годината којашто се разгледува, тогаш средното времетраење на живот е вредноста $e_x^{'} = \frac{l_x + l_{x+1} + ... + l_{\omega}}{l_x}$. Најбезболно е да се смета дека смртните случаи настануваат на средина на годината, па се дефинира средна вредност на претходно добиените средни траења, која се нарекува очекувано времетраење на живот $\overset{o}{e}_x = \frac{e_x + e_x^{'}}{2} = \frac{1}{2} + e_x$. Ова може и статистички да се докаже дека претставува оценувач на случајната променлива идновреметраење на живот T_x.

Сето претходно кажано може да се искористи за да се дефинира основната демографска стапка на смртност, наречена централна стапка на смртност, зададена со

$$m_x = \frac{q_x}{\int_0^1 {}_t p_x \, dt} \overset{описно}{=} \frac{\text{број на настанати смртности}}{\text{вкупно време на изложеност на ризик}} \, ,$$

и го дава ефектот на смртноста во тек на целата година. Во случај кога интензитетот на смртност е константен, тогаш $m_x = \mu_x = \mu = const.$

Методолошки, на сличен начин се дефинираат и останатите стапки, само базата на основни прибрани податоци се разликува, како и основната карактеристика по која ги групираме податоците.

Стапката на смртност ни оддалеку не е единствена причина за намалување на бројот на единките во примерокот.

Освен таблиците на смртност претставени овде, постојат таблици со повеќе причини на смалување на популацијата, а со нив се занимава повеќедимензионалната математичка демографија, [6]. Голем дел од секојдневните одлуки се носат точно врз основа на такви модели. Пензискиот систем е еден таков пример, секој различен вид на пензија е една причина на смалување во однос на бројот на вработени, па за што поуспешни пресметки за пензиските придонеси, секоја од тие причини треба внимателно да се анализира и да се земе предвид.

ФОРМАЛНИ МОДЕЛИ И ПОПУЛАЦИСКИ ПРОЕКЦИИ

Видовме дел од моделите кои постојано се користат во демографијата, со конкретна илустрација на смртноста на населението. Но за што подобро математичко моделирање, потребни се формални математички модели кои овозможуваат дизајн на експерименти, симулации, проекции и оценки со потребна веродостојност.

Секој формален модел се состои од:

– простор на состојби – состојби во кои демографската карактеристика која се мери може да се најде $\Omega = \{w_1, w_2, ...\}$,

– мерка на карактеристиката, односно асоцирана бројна вредност за секоја состојба $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Во тој случај, демографскиот модел е унија на претходно дефинираните објекти. А дефинирани се и равенки – математички релации кои ги формулираат зависностите меѓу помеѓу објектите:

– Индекс или стапка (зададени со дефиниција),

– Каузални врски (кои дефинираат зависност низ времето).

Повеќе за формалните модели може да се најде во [4] и [7].

Основен таков модел е зададен со равенката на рамнотежа на популацијата, кој претставува и популациска проекција (математички на база на временска серија):

$$P_t = P_{t-1} + B_{t-1,t} - D_{t-1,t} + NM_{t-1,t},$$

модел според кој популација во момент t, P_t, е изразена преку популацијата во претхониот момент $t-1$, бројот на новородени лица на временскиот интервал $\left(t-1,t\right]$ $B_{t-1,t}$, бројот на настанати смртни случаи на временскиот интервал $\left(t-1,t\right]$, $D_{t-1,t}$ и нето миграцијата во последниот измерен временски период $\left(t-1,t\right]$, $NM_{t-1,t}$, [7].

3. МЕСТО ЗАКЛУЧОК

Факт е дека демографските феномени се лесно мерливи, но потешко е со големите популации. Станува збор за голем систем на различни лица кои работат, различни територии, различна достапност до податоците. Затоа, во случај на големи популации, но и заради деталност на податоците и попрецизни демографски стапки и индекси, неопходна е декомпозиција на населението по возраст, пол, образование и други динамички карактеристики. Исто така, неопходно е да се дефинираат ризиците, односно причините за намалување на бројот на единки во поединечните категории. На крај, неопходни се проекции за иднината со цел планирање на социо-економските процеси.

ЛИТЕРАТУРА

[1] R. L. Brown, *Introduction to the Mathematics of Demography,* ACTEX Publications Inc., 1991.

[2] H. U. Gerber, *Life Insurance Mathematics*, Springer, 1997.

[3] J. Graunt, *Natural and political observations mentioned in a following index, and made upon the bills of mortality,* 1665, https://quod.lib.umich.edu/cgi/t/text/text-idx?c=eebo;idno=A41827.0001.001.

[4] L. P. Dudley Jr., Editor, *Handbook of Population*, Springer, 2019.

[5] E. Halley, *An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind, Drawn from Curious Tables of the Births and Funerals at the City of Breslaw*; *With an Attempt to Ascertain the Price of Annuities upon Lives*, Philosophical Transactions, Vol. 17 (1693), pp. 596–610, www.medicine.mcgill.ca/epidemiology/hanley/c609/Material/Halley1693.pdf.

[6] K. C. Land, A. Rogers, *Multidimensional Mathematical Demography*, Academic Press, New York, 1982.

[7] D. P. Smith, N. Keyfitz, *Mathematical Demography,* Demographic Research Monographs, Series of Max Plank Institute of Demographic Research, Selected papers, Springer, 2013.

[8] Државен завод за статистика, Е стат База, http://makstat.stat.gov.mk/PXWeb/pxweb/mk/MakStat/?rxid=46ee0f64-2992-4b45-a2d9-cb4e5f7ec5ef.

[1] Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје
Природно-математички факултет,
ул. Архимедова 3, 1000 Скопје, Р. Северна Македонија
e-mail: aneta@pmf.ukim.mk

Примен: 25.8.2020
Поправен: 28.8.2020
Одобрен: 29.8.2020
Објавен на интернет: 2.9.2020