

УНИВЕРЗИТЕТ "СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ"
ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИЧКИ НАУКИ И КОМПЈУТЕРСКО
ИНЖЕНЕРСТВО - СКОПЈЕ

ВЕСНА ДИМИТРИЕВСКА РИСТОВСКА

**КВАЗИ-МОНТЕ КАРЛО ИНТЕГРИРАЊЕ ВО
ТЕЖИНСКИ ХИЛБЕРТОВИ ПРОСТОРИ И
ВРСКА СО ДИЈАФОНИЈАТА-
МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛИ И СОФТВЕРСКА
РЕАЛИЗАЦИЈА**

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Скопје, 2013

Ментор: д-р Васил Грозданов, доцент,
Природно-математички факултет
- Благоевград, Бугарија

Коментор: д-р Смиле Марковски,
редовен професор, ФИНКИ, Скопје

Членови на Комисија
за оцена на тезата:

д-р Васил Грозданов, доцент,
Природно-математички факултет
- Благоевград, Бугарија

д-р Смиле Марковски,
редовен професор, ФИНКИ, Скопје

д-р Ванчо Кусакатов,
редовен професор во пензија

д-р Верица Бакева,
редовен професор, ФИНКИ, Скопје

д-р Ласко Баснарков,
доцент, ФИНКИ, Скопје

Посветено на мајка ми

Благодарност

Би сакала да ја искажам мојата огромна благодарност на менторот доцент д-р Васил Станков Грозданов за неговиот вложен труд, несебично залагање, за времето што ми го посвети додека работевме во оваа област, како и за довербата што ми ја укажуваше во текот на работата ...

Би сакала да и се заблагодарам на проф. д-р Верица Бакева за нејзините многубројни корисни идеи и сугестии за конечната верзија на оваа теза, како и на коменторот проф. д-р Смиле Марковски за неговите ведри забелешки и поттикот во текот на изработката на оваа теза.

Посебна благодарност им должам на моите драги колешки и колеги од ФИНКИ за поддршката и разбирањето што ми ги пружија за време на изработката на овој труд.

И секако дека на син ми Стефан му должам големо благодарам за помошта околу изработката на оваа книга...

АПСТРАКТ

Во овој труд се разработени и решени следените задачи: разгледана е повеќедимензионалната Квази-Монте Карло интеграција во тежински Соболев простор $H_{Sob,s,\bar{\gamma},B_4}$ и добиена е формула за средно-квадратната грешка на интегрирање во тој простор во облик на Волш-Фуриев ред. Потоа од оваа формула е добиена горна граница и асимптотско однесување на средно-квадратната грешка на интегрирање со користење на (t, m, s) -мрежи.

Со воведената така наречена "тент"-трансформација при база b , применета на точките од дадена низа од $[0, 1)^s$, добиена е горна граница и асимптотско однесување на средно-квадратната грешка на интегрирање во просторот $H_{Sob,s,\bar{\gamma},B_4}$ со користење на (t, m, s) -мрежа, која е (s, b) -дигитално поместена, а потоа пополнета со тент-трансформација.

Предложена е нова тежинска верзија на дијафонијата од ред b , наречена тежинска $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонија. Докажано е дека тежинската $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонија е квантитативна мерка за нерамномерност на распределба на низи и добиена е пресметувачката сложеност на оваа дијафонија на произволна s -димензионална мрежа, составена од N точки. Пресметан е точниот ред на големина $\mathcal{O}(\frac{1}{N})$ на тежинската $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонија на Обоштената низа на Ван дер Корпут и прикажани се резултатите од софтверските симулации со кои се потврдени добиените теоретски резултати за редот на големина.

Во четвртата глава е истражувана грешката-во-најлош-случај на Квази-Монте Карло интегрирањето во тежински Хилбертов простор $H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\bar{\gamma}}$ и дадени се поедноставни формули за нејзино пресметување. Предложена е конкретна класа од мрежи за кои редот на големина на пресметување на грешката во просторот $H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\bar{\gamma}}$ е подобар од досега познатите редови на големина за конкретни мрежи и во општ случај.

QUASI-MONTE CARLO INTEGRATION IN WEIGHTED HILBERT SPACES AND A RELATION WITH THE DIAPHONY- MATHEMATICAL MODELS AND SOFTWARE REALIZATION

ABSTRACT

We consider problems for the multivariate Quasi-Monte Carlo integration in the weighted Hilbert spaces $H_{Sob,s,\vec{\gamma},\mathcal{B}_4}$ and $H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\vec{\gamma}}$. We obtain an upper bound and the asymptotic behavior of the mean square worst-case error of the integration in weighted Sobolev space $H_{Sob,s,\vec{\gamma},\mathcal{B}_4}$ by using (s,b) -digitally shifted and then folded by the tent transformation in base b a (t,m,s) -net.

We study a new weighted version of the b -adic diaphony, the so-called weighted $(\mathcal{W}(b);\gamma)$ -diaphony. The exact order $\mathcal{O}(\frac{1}{N})$ of the $(\mathcal{W}(b);\gamma)$ -diaphony of the generalized Van der Corput sequence is found.

We introduce the weighted Korobov space $H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\vec{\gamma}}$ and study the worst-case error of the integration in this space. The worst-case error of the integration in the space $H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\vec{\gamma}}$ and the $(\mathcal{W}(b);\gamma)$ -diaphony are connected. We obtain an upper bound and the asymptotic behavior of the worst-case error of the integration in the space $H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\vec{\gamma}}$.

Содржина

Вовед	1
1 Воведни поими и тврдења од теоријата на рамномерно распределените низи и Квази-Монте Карло интегрирањето	15
1.1 Ортонормирани функционални системи	16
1.2 Рамномерна распределба на низи	21
1.2.1 Дефинирање на рамномерно распределена низа	21
1.2.2 Квантитативни мерки за рамномерна распределба на низи	25
1.2.3 Дијафонии од ред b	30
1.3 Примери на рамномерно распределени низи	35
1.3.1 Обопштена низа на Ван дер Корпут	35
1.3.2 (t, m, s) -мрежи	38
1.4 Квази-Монте Карло интегрирање во тежински Хилбертов простор	40
1.4.1 Хилбертови простори	40

1.4.2	Општи поими и тврдења од теоријата на Квази-Монте Карло интегрирањето во тежински Хилбертов простор	41
2	За средно-квадратната грешка на интегрирањето во тежински Соболев простор $H_{Sob,s,\vec{\gamma},B_4}$	45
2.1	Воведни поими	45
2.1.1	Постапка на (s, b) -дигитално поместување	46
2.1.2	Тент-трансформација при база b	48
2.2	Повекедимензионална интеграција во тежински Соболев простор $H_{Sob,s,\vec{\gamma},B_4}$	51
2.2.1	Теориска основа на Соболев простор $H_{Sob,s,\vec{\gamma},B_4}$	51
2.2.2	Формулација на задачите	53
2.3	Средно-квадратна грешка на интегрирање во просторот $H_{Sob,s,\vec{\gamma},B_4}$ преку користење на (s, b) -дигитално поместена мрежа	54
2.3.1	Формула за средно-квадратната грешка на интегрирањето во просторот $H_{Sob,s,\vec{\gamma},B_4}$ преку користење на (s, b) -дигитално поместена мрежа	54
2.3.2	За редот на големина на средно-квадратната грешка на интегрирање во Соболев простор $H_{Sob,s,\vec{\gamma},B_4}$ со користење на (s, b) -дигитално поместена (t, m, s) -мрежа	84
2.4	Средно-квадратна грешка на интегрирање во генериран Хилбертов простор $H_s(K)$ со користење на мрежа, која е (s, b) -дигитално поместена, а потоа пополнета со тент-трансформација	85

2.4.1	Волш-Фуриев развој на јадро кое е (s, b) -дигитално поместено и потоа пополнето со тент-трансформација	86
3	Тежинска $(\mathcal{W}(b); \gamma)$-дијафонија	115
3.1	Формулација на задачата	115
3.2	Тежинската $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ - дијафонија - дефиниција и својства	118
3.2.1	Дефиниција и некои резултати за тежинска $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ - дијафонија	119
3.2.2	Доказ на Теорема 3.1 и Теорема 3.2	122
3.3	Тежинска $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонија на Обоштената низа на Ван дер Корпут	140
3.4	Основни резултати	143
3.4.1	Доказ на Теорема 3.3 и Теорема 3.4	145
3.5	Софтверска верификација на основните резултати	170
3.5.1	Теоретска основа за валидност на нумеричките апроксимации	170
3.5.2	Графички приказ на нумерички резултати	173
4	За грешката на Квази-Монте Карло интегрирањето во тежинскиот Хилбертов простор $H_{\mathcal{W}(b), s, \alpha, \bar{\gamma}}$	181
4.1	Дефинирање на Хилбертов простор $H_{\mathcal{W}(b), s, \alpha, \bar{\gamma}}$ и формулација на задачите	181
4.2	Точна формула за грешката-во-најлош-случај на интегрирањето во просторот $H_{\mathcal{W}(b), s, \alpha, \bar{\gamma}}$	195

4.3	Изражување на грешката на интегрирање во тежински Хилбертов простор $H_{\mathcal{W}(b),s,2,\bar{\gamma}}$ во термини на тежинска $(\mathcal{W}(b), \gamma)$ -дијафонија	197
4.4	Оценка на грешката на интегрирање во Хилбертов простор $H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\bar{\gamma}}$ преку користење на дигитална (t, m, s) -мрежа	199
4.4.1	Формула за грешка-во-најлош-случај во Хилбертов простор $H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\bar{\gamma}}$ со користење на (t, m, s) -мрежа	199
4.4.2	Основни резултати	200
4.4.3	Некои помошни резултати	202
4.4.4	Доказ на Теорема 4.4	207
	Отворени проблеми, сврзани со дисертацијата	223
	Литература	227

ВОВЕД

Квалитетот на распределбата на точките на s -димензионална низа или мрежа се определува со мерки кои даваат квантитативни карактеристики за степенот на отклонување на една конкретна распределба од идеалната распределба на низа или мрежа. Во таа смисла испитувањето на квантитативните мерки за распределба на низи и мрежи, како што се дискрепансата и дијафонијата, зазема централно место во истражувањата сврзани со рамномерна распределба на низи. Многубројни се примените на рамномерно распределените низи во различни научни дисциплини, а централно место зазема користењето на рамномерна распределба на низи во теоријата и практиката на Квази-Монте Карло интегрирањето.

Монте Карло нумеричките методи и Квази-Монте Карло нумеричките методи претставуваат успешна техника за решавање на проблеми најчесто сврзани со нумеричко пресметување на интеграли. Еден класичен резултат од теоријата на рамномерна распределба на низи покажува дека една низа е рамномерно распределена ако и само ако квадратурниот процес, чии јазли се точките на низата е конвергентен. Од тој резултат произлегува големиот интерес кон таа класа од низи.

Имајќи ја предвид горната дискусија, основните цели и задачи на истражувањата во овој труд ќе бидат испитувањата на дијафони-

јата како нумеричка мерка за рамномерна распределба на низи и нејзините примени во Квази-Монте Карло интегрирањето. Како може аспект на примена на дијафонијата ќе биде претставувањето на грешката на Квази-Монте Карло интегрирањето во термините на дијафонијата. На тој начин две карактеристики од принципно различна природа: дијафонија и различни видови на грешки на интегрирањето ќе бидат математички поврзани. Последниот факт ќе биде еден од движечките мотиви за испитувањата во овој труд.

Ортонормираните функционални системи какви што се тригонометрискиот функционален систем, Волш-функционалниот систем и направените во последно време обопштувања на Волш-функционалниот систем се основен инструмент за изучувањата сврзани со рамномерна распределба на низи и нивната примена во Квази-Монте Карло интегрирањето.

Во Прва глава е дефиниран поимот **рамномерно распределена низа**, кој за прв пат е воведен во 1916 година од Херман Вајл [Вај 1].

Следејќи ги Кјојперс и Нидерајтер [КјоНи] се изнесени основите на теоријата на рамномерно распределените низи.

Нека $s \geq 1$ е природен број и $[0, 1]^s$ е единечната s -димензионална коцка. За два вектори $\vec{a} = (a_1, \dots, a_s)$ и $\vec{b} = (b_1, \dots, b_s)$ од $[0, 1]^s$ се вели дека " \vec{a} е помал од \vec{b} ", ако $a_j < b_j$ за секој j , $1 \leq j \leq s$, во тој случај се воведува ознаката $J = [\vec{a}, \vec{b}] = \prod_{j=1}^s [a_j, b_j]$. Нека $\xi = (\vec{x}_n)_{n \geq 0}$ е низа од точки во \mathbb{R}^s . За произволен природен број N и произволен подинтервал $J = [\vec{a}, \vec{b}]$ на единечната коцка $[0, 1]^s$, нека со $A(\xi; J; N)$ биде означен бројот на точки од низата ξ чии децимални делови припаѓаат на J , т.е.

$$A(\xi; J; N) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq N-1, \\ \{\vec{x}_i\} \in J}} 1.$$

Дефиниција Се вели дека низата $\xi = (\vec{x}_n)_{n \geq 0}$ од точки во \mathbb{R}^s е рамномерно распределена по модул 1, ако за секој подинтервал $J = [\vec{a}, \vec{b})$ на $[0, 1]^s$ важи граничното равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} A(\xi; J; N) = \prod_{j=1}^s (b_j - a_j).$$

Вајл [Вај 1] има покажано дека важат следните две теореми во еднодимензионален случај:

Теорема (Експоненцијален критериум на Вајл) Низата $\xi = (\vec{x}_n)_{n \geq 0}$ е рамномерно распределена по модул 1 во \mathbb{R}^s ако и само ако за секој целоброен вектор $\vec{h} \in \mathbb{Z}^s, \vec{h} \neq \vec{0}$, важи

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(2\pi i \langle \vec{h}, \vec{x}_k \rangle\right) = 0.$$

и

Теорема (Интегрален критериум на Вајл) Низата $\xi = (\vec{x}_n)_{n \geq 0}$ е рамномерно распределена по модул 1 во \mathbb{R}^s ако и само ако за секоја комплекснозначна, непрекината, дефинирана над $[0, 1]^s$ функција $f(\vec{x})$, важи равенството

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(\vec{x}_k) = \int_{[0, 1]^s} f(\vec{x}) d\vec{x}.$$

Овие две многу силни теореми во теоријата на рамномерно распределените низи покажуваат дека рамномерно распределените низи можат да се применат за пресметување на определени интеграли од многу широка класа на функции.

Во 2001 година, Грозданов и Стоилова [ГрСт1] предлагаат аналог на експоненцијалниот критериум на Вајл, а имено експоненцијалниот

критериум на Вајл изразен во термините на Волшовите функции ${}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}_n)$ од ред b . Во таа смисла, тие ја имаат докажано следната теорема:

Теорема Низата $\xi = (\vec{x}_n)_{n \geq 0}$ е рамномерно распределена по модул 1 во $[0, 1]^s$ ако и само ако за секој вектор $\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s, \vec{k} \neq \vec{0}$, важи

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} {}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}_n) = 0.$$

За да се одговори на прашањето која од две дадени низи е ”подобро” рамномерно распределена, се воведуваат квантитативни мерки за отстапување на распределбата на низите од една идеална распределба, наречени дискрепанси и дијафонији.

Во 1976 година Цинтерхоф (*Zienterhof*) [Цин] користејќи го тригонометрискиот функционален систем предложува нова нумеричка мерка за рамномерност на распределба на низи во $[0, 1]^s$, која е наречена **класична дијафонија**.

Во 2001 година, авторите Грозданов и Стоилова [ГрСт1] воведуваат нова нумеричка мерка за рамномерна распределба на низи во $[0, 1]^s$, така наречена дијафонија од ред b . За таа цел тие користат класа од ортонормалниот систем на Волшови функции од ред b .

За целите на повеќедимензионалната нумеричка интеграција, Слоан (*Sloan*) и Вожниаковски (*Wozniakowsky*) [СлВо1] предлагаат да се подредат координатите x_1, x_2, \dots, x_s на аргументот на функциите кои се интегрираат и соодветно координатите на мрежите кои се користат во процесот на нумеричка интеграција, на таков начин што x_1 да биде координатата со најголема важност, x_2 да биде следната по важност координата, и.т.н. Ова се реализира со воведување на соодветни нерастечки тежини $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$, соодветни на координатите x_1, x_2, \dots, x_s .

Во 2006 во трудот на Грозданов и Димитријевска Ристовска [РиГр] е воведена тежинска дијафонија како нова квантитативна мерка за рамномерна распределба на низи во $[0, 1]^s$. Таа мерка се базира на тригонометрискиот функционален систем. Дадена е врска меѓу грешката-во-најлош-случај на Квази-Монте Карло интегрирање во тежински Хилбертов простор и тежинската дијафонија. Со специјален избор на параметрите α и γ од кои зависи тежинската дијафонија авторите ја добиваат класичната дијафонија на Цинтерхоф.

Во 2006 година Грозданов [Гр1] воведува нова нумеричка мерка за рамномерна распределба на низи во $[0, 1]^s$, така наречена "тежинска дијафонија од ред b ".

За да добие форма на така наречена "тежинска дијафонија од ред b " авторот [Гр1] користи параметри α и γ . Фиксираниот број $\alpha > 1$ ја карактеризира брзината на опаѓање на Фуриевите коефициенти на специјалната функција $\phi_b(\alpha, \gamma, \cdot)$. Оваа функција има многу важна улога во дефинирањето на поимот на "тежинска дијафонија од ред b ". Со цел да ја окарактеризира важноста на различните координати на точките од мрежата во $[0, 1]^s$, авторот користи вектор од параметри (или тежини) $\vec{\gamma}$.

Изложена е дефиницијата на Обопштена низа на Ван дер Корпут, позната во теоријата на рамномерно распределените низи како една од најдобро распределените низи.

Потоа е претставена конструкцијата на специјална класа од s -димензионални мрежи, така наречени (t, m, s) -мрежи, а дефинирана е и дигитална (t, m, s) -мрежа.

Во последно време така наречените (t, m, s) -мрежи со база b дефинирани од Нидерајтер [Нид] активно се користат во теоријата и практиката на Квази-Монте Карло интегрирањето.

Воведени се поимите за Хилбертов простор $H_s(K)$, како и тежин-

ски Хилбертов простор генериран од репродуцирачко јадро, и грешкаво-најлош-случај на интегрирањето во просторот $H_s(K)$. Хилбертовите простори може да се поделат во две големи класи Коробови и Собољеви простори. Собољевите простори се разгледуваат во Глава 2, каде што се истражува средно-квадратна грешка на интегрирање, а Коробовите простори се разгледуваат во Глава 4, каде што се испитува грешкатаво-најлош-случај на интегрирањето.

Во Глава 2 е разгледано повеќедимензионалното Квази-Монте Карло интегрирање во тежински Собољев простор $H_{Sob,s,\vec{\gamma},B_4}$ воведен од Хикернел [Хик]. Овој простор е генериран од репродуцирачко јадро базирано на полиномите на Бернули до степен 4, при што се апроксимирани интегралите чии интегранди се од овој простор, со Квази-Монте Карло алгоритам со еднакви квадратурни тежини.

Генерирачкото јадро на просторот $H_{Sob,s,\vec{\gamma},B_4}$ е дадено со

$$K_{\vec{\gamma}}(\vec{x}, \vec{y}) = \prod_{j=1}^s K_{\gamma_j}(x_j, y_j), \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_s), \quad \vec{y} = (y_1, \dots, y_s) \in [0, 1]^s,$$

при што за дадени реални броеви $x, y \in [0, 1]$ и дадена тежина $\gamma > 0$ еднодимензионално генерирачко јадро $K_{\gamma}(x, y)$ се дефинира со

$$K_{\gamma}(x, y) = B_0(x)B_0(y) + \gamma B_1(x)B_1(y) + \frac{\gamma^2}{4} B_2(x)B_2(y) - \frac{\gamma^2}{24} B_4(|x - y|),$$

каде што $B_0(x), B_1(x), B_2(x), B_4(x)$ се полиномите на Бернули од степен 0, 1, 2 и 4, соодветно.

Воведен е поимот за (s, b) -дигитално поместена мрежа, што всушност претставува постапка за рандомизација на произволна дадена мрежа, како и поимот за (s, b) -дигитално поместено јадро $K_{(s,b)-ds}$. Потоа е дефинирана средно-квадратна грешка на интегрирањето со користење на (s, b) -дигитално поместена мрежа и воведена е $\Phi(\vec{x})$ така наречена **тент-**

трансформација при база b , како трансформација на точките од дадена низа од $[0, 1]^s$, каде што b е произволен парен природен број. Откако е воведена оваа тент-трансформација при база b , дефинирани се следните три основни поими кои ќе се користат во оваа глава:

- мрежа која е (s, b) -дигитално поместена, а потоа пополнета со тент-трансформација при база b ,

- средно-квадратна грешка $\hat{e}_{(s,b)\text{-ds},\Phi}(H_s(K); P_N)$ на интегрирање во просторот $H_s(K)$ со користење на мрежа која е (s, b) -дигитално поместена, а потоа пополнета со тент-трансформација при база b ,

- јадро кое е (s, b) -дигитално поместено, а потоа пополнето со тент-трансформација при база b .

Оригинаалните резултати во Глава 2 се следните:

Со испитувањата во Теорема 2.1 добивме формула за средно-квадратна-та грешка на интегрирање со користење на (s, b) -дигитално поместена мрежа во тежинскиот Соболев простор $H_{Sob,s,\vec{\gamma},B_4}$ во облик на Волш-Фуриев ред.

Како последица од оваа формула, во Теорема 2.2 ја добивме горната граница и асимптотското однесување $\mathcal{O}(b^{-m})$ на средно-квадратната грешка на интегрирањето во овој простор со користење на (t, m, s) -мрежа, која е (s, b) -дигитално поместена.

Со Теорема 2.3 ја изразивме средно-квадратната грешка на интегрирањето во произволен генериран Хилбертов простор преку користење на произволна мрежа, која е (s, b) -дигитално поместена, а потоа пополнета со тент-трансформација; во термините на обична грешка-во-најлош случај на интегрирањето во некој друг генериран Хилбертов простор.

Добивме точна формула во Теорема 2.4 за средно-квадратната грешка на интегрирањето во произволен генериран Хилбертов простор преку користење на произволна мрежа, која е (s, b) -дигитално помес-

тена, а потоа пополнета со тент-трансформација. Адаптирана е претходната формула за средно-квадратната грешка на интегрирање во произволен генериран Хилбертов простор, но преку користење на произволна (t, m, s) -мрежа, која е (s, b) -дигитално поместена, а потоа пополнета со тент-трансформација.

Понатаму во пресметките во Теорема 2.5 добивме горна граница и асимптотско однесување $\mathcal{O}(b^{-2m})$ на средно-квадратната грешка на интегрирањето во просторот $H_{Sob, s, \bar{\gamma}, B_4}$ со користење на (t, m, s) -мрежа, која е (s, b) -дигитално поместена, а потоа пополнета со тент-трансформација при база b . Овој резултат покажува дека примената на тент-трансформација-та го подобрува редот на големина на средно-квадратната грешка на интегрирањето во овој простор со користење на (t, m, s) -мрежа, која е (s, b) -дигитално поместена.

Резултатите кои ги добивме во истражувањата и се презентирани во оваа глава претставуваат обопштување на резултатите добиени од Кристеа, Дик, Леобахер и Пилишхамер [КДЛП].

Придобивките на оваа глава се: Теорема 2.1, Теорема 2.2, Теорема 2.3, Теорема 2.4 и Теорема 2.5.

Во Трета глава е воведена нова тежинска верзија на дијафонијата од ред b , така наречена тежинска $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонија, а потоа е испитуван редот на големина на тежинска $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонија на Обопштената низа на Ван дер Корпут. Мотивација за воведување на нов тип на дијафонија беше прашањето: дали може да се конструира нов тип на дијафонија од ред b , така што некои добро познати низи, како на пример Обопштената низа на Ван дер Корпут и мрежата на Заремба-Холтон да имаат подобар ред на големина отколку соодветниот ред на големина на досега познатите дијафонии од ред b .

Одговор на ова прашање е дека тоа би било можно доколку ко-

ристиме нови коефициенти кои ќе бидат помали од коефициентите дадени со Дефиниција 1.8 во Глава 1.

Предложена е нова тежинска верзија на дијафонијата од ред b , базирана на коефициенти кои имаат редови на големина како и коефициентите $\widehat{K}_{(s,b)\text{-ds},\Phi}(k, k)$ дефинирани во Глава 2, и која е наречена тежинска $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонија. Потоа е докажано дека тежинската $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонија е квантитативна мерка за нерамномерност на распределба на низи.

Во Теорема 3.2 е добиена пресметувачката сложеност $\mathcal{O}(N^2)$ на тежинската $(\mathcal{W}(b); \tilde{\gamma})$ -дијафонија на произволна мрежа составена од N точки во $[0, 1)^s$.

Во Теорема 3.3 е дадена оценка од горе, а со тоа е добиен и редот на големина $\mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$ на тежинската $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонија на Обоштената низа на Ван дер Корпут $F_N(\mathcal{W}(b); \gamma; S_b^\Sigma)$.

Горната граница на тежинската $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонија $F_N(\mathcal{W}(b); \gamma; S_b^\Sigma)$ на низата S_b^Σ дадена во Теорема 3.3 е дополнета со долна граница и тој резултат е претставен во Теорема 3.4.

Теорема 3.4 *Нека $S_b^\Sigma = (S_b^\Sigma(n))_{n \geq 0}$ е произволна Обоштена низа на Ван дер Корпут. Тогаш неравенството*

$$F_N(\mathcal{W}(b); \gamma; S_b^\Sigma) \geq \sqrt{\frac{(b^2 - 1)(b^2 + b + 1)}{b^3(b + 2)}} \frac{1}{N}$$

важи за бесконечно многу вредности на N од облик $N = b^\nu + 1$, каде што $\nu > 1$ е произволен цел број.

Со Теорема 3.4 е даден точниот ред на големина $\mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$ на тежинската $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонија на произволна Обоштена низа на Ван дер Корпут. За одбележување е фактот дека оценката од горе важи за секоја вредност на N , а оценката од долу е задоволена за бесконечно многу

вредности на N .

Во [ГрСт1] и [ГрСт2] е докажано дека дијафонијата од ред b на произволна Обоштена низа на Ван дер Корпут има точен ред на големина од $\mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\log N}}{N}\right)$. Споредбата на добиените точни редови на големина на овие два типа на дијафонии - дијафонијата од ред b и тежинската $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ - дијафонија на произволна Обоштена низа на Ван дер Корпут, заклучуваме дека тежинската $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ - дијафонија има помал ред на големина отколку дијафонијата од ред b на истата низа.

Во последното поглавје на третата глава се прикажани резултатите од направените софтверски симулации со кои се верифицирани добиените теоретски резултати за тежинската $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ - дијафонија за произволна Обоштена низа на Ван дер Корпут. Специјално за оваа цел во [ДГ] е формулирана и докажана теорема со која е пресметан редот на големина на грешката која се прави кога бесконечната сума која фигурира во дефиницијата на тежинската $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ - дијафонија применета врз произволна еднодимензионална низа ќе се замени со конечна сума. Во продолжение следува формулација на таа теорема.

Теорема 3.5 *Нека $\xi = (x_n)_{n \geq 0}$ е дадена произволна еднодимензионална низа. Тогаш постои константа $C_2(b)$ која зависи само од базата b , така што за секој цел број $M > 0$ важи неравенството:*

$$(F_N(\mathcal{W}(b); \gamma; \xi))^2 \leq C^{-1}(b; 1; \gamma) \sum_{k=1}^{M-1} \rho(b; \gamma; k) \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \text{wal}_k(x_n) \right|^2 + C_2(b) \cdot \frac{1}{M^2}$$

Изложената горна оценка на тежинска $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонија за произволна еднодимензионална низа е изразена преку конечна сума и собирок кој зависи од M . Таа претставува аналог на класичното неравенство на Ердош-Туран-Коксма.

Ова ни дозволува да направиме софтверски симулации за пресметување на вредноста на тежинската $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонија на Обопштената низа на Ван дер Корпут.

Во направените симулации беа земени примери на различни бази b за конструкција на Обопштена низа на Ван дер Корпут, потоа беа земени различни избори на низата Σ од пермутации на множеството $\{0, 1, \dots, b-1\}$, а беа земени и различен број на собироци M со кои бесконечната сума беше заменета со конечна сума. Бројот на собироци M во различните симулации се движеше од 10^3 до 10^8 , но во сите случаи беа потврдени добиените теоретски горна и долна оценка на дијафонијата. Приближните пресметки беа правени со голема прецизност со точност од 30 децимали.

На крајот на тоа поглавје се дадени графички прикази на потврдените теоретски резултати за различни вредности на базата b и за различни вредности на бројот на членови на низата N .

Оригинални резултати во Глава 3 се следните: Теорема 3.1, Теорема 3.2, Теорема 3.3, Теорема 3.4 и Теорема 3.5.

Во Четврта глава од оваа теза е истражувана грешката-во-најлош-случај на Квази-Монте Карло интегрирањето во тежински Хилбертов простор $H_{\mathcal{W}(b), s, \alpha, \bar{\gamma}}$ и дадени се поедноставни формули за нејзино пресметување.

Со Теорема 4.1 е дадена точна формула за грешката-во-најлош-случај на интегрирањето во тежински Хилбертов простор $H_{\mathcal{W}(b), s, \alpha, \bar{\gamma}}$ за произволна s -димензионална мрежа.

Понатаму, со Теорема 4.2 се покажува дека при конкретен избор на параметарот $\alpha = 2$ се дава врската меѓу грешката $e(H_{\mathcal{W}(b), s, 2, \bar{\gamma}}; P_N)$ и тежинската $(\mathcal{W}(b), \gamma)$ -дијафонија. За таа цел е разгледуван просторот $H_{\mathcal{W}(b), s, 2, \bar{\gamma}}$ кој се добива како специјален случај на просторот $H_{\mathcal{W}(b), s, \alpha, \bar{\gamma}}$

при конкретен избор на параметарот $\alpha = 2$, од што следува врска со тежинската $(\mathcal{W}(b), \gamma)$ -дијафонија, и која е изложена во следната теорема.

Теорема 4.2 *Нека $H_{\mathcal{W}(b),s,2,\vec{\gamma}}$ биде тежински Хилбертов простор кој соод-ветствува на изборот на параметарот $\alpha = 2$ и нека*

$$P_N = \{\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{N-1}\}$$

биде произволна мрежа составена од N точки во $[0,1]^s$. Грешката-во-најлош-случај на интегрирањето $e(H_{\mathcal{W}(b),s,2,\vec{\gamma}}; P_N)$ во тежински Хилбертов простор $H_{\mathcal{W}(b),s,2,\vec{\gamma}}$ со користење на мрежата P_N и тежинската $(\mathcal{W}(b), \gamma)$ -дијафонија на мрежата P_N се сврзани со равенството

$$e(H_{\mathcal{W}(b),s,2,\vec{\gamma}}; P_N) = \sqrt{C(b, s, \vec{\gamma})} F(\mathcal{W}(b); \vec{\gamma}; P_N),$$

каде што константата $C(b, s, \vec{\gamma})$ се дефинира со равенството (3.5).

Со Теорема 4.3 е дадена формула за грешката-во-најлош-случај во тежински Хилбертов простор $H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\vec{\gamma}}$ преку користење на (t, m, s) -мрежа.

Понатаму во четвртата глава резултатот кој е добиен во Теорема 4.1 ќе биде применет врз произволена дигитална (t, m, s) -мрежа. Тоа дозволува во Теорема 4.4 да докажеме дека постои (t, m, s) -мрежа \mathcal{P}'_{b^m} за која грешката на интегрирањето $e(H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\vec{\gamma}}; \mathcal{P}'_{b^m})$ во просторот $H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\vec{\gamma}}$ ги има следните редови на големина:

- ако $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$, тогаш $e(H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\vec{\gamma}}; \mathcal{P}'_{b^m}) \in \mathcal{O}(b^{-\frac{m}{2}})$,
- ако $\alpha > 1$, тогаш $e(H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\vec{\gamma}}; \mathcal{P}'_{b^m}) \in \mathcal{O}(b^{-\alpha m})$.

Со последната Теорема 4.4 всушност е предложена конкретна класа од мрежи за кои редот на големина на пресметувањето на грешката во просторот $H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\vec{\gamma}}$ е подобар од досега познатите редови на големина за конкретни мрежи и во општ случај.

Направена е споредба на резултатите добиени во статијата на Дик и Пилишхамер [ДиПи 1] и нашите резултати предложени во Теорема 4.4, а кои се однесуваат на асимптотското однесување кога $m \rightarrow \infty$ на грешката-во-најлош-случај на интегрирањето во Хилбертов простор $H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\bar{\gamma}}$.

Резултатот добиен во [ДиПи 1] применет на тежински Хилбертов простор $H_{Wal,s,\alpha,\bar{\gamma}}$ тврди дека грешката-во-најлош-случај има $\mathcal{O}(b^{-\frac{\alpha m}{2}})$ ред на големина. Нашиот резултат изложен во Теорема 4.4 (ii) во случајот кога $\alpha > 1$ е дека $e(H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\bar{\gamma}}; \mathcal{P}_{b^m}) \in \mathcal{O}(b^{-\alpha m})$, што покажува дека грешката-во-најлош-случај на интегрирањето во тежински Хилбертов простор $H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\bar{\gamma}}$ е подобра (помала) од соодветната грешка во тежински Хилбертов простор $H_{Wal,s,\alpha,\bar{\gamma}}$ изложена во [ДиПи 1].

Оригинални резултати во Глава 4 се следните: Теорема 4.1, Теорема 4.2, Теорема 4.3 и Теорема 4.4.

Во делот **Отворени проблеми, сврзани со дисертацијата** се изложени некои отворени проблеми кои се тесно сврзани со резултатите добиени во тезата.

Глава 1

Воведни поими и тврдења од теоријата на рамномерно распределените низи и Квази-Монте Карло интегрирањето

Квалитетот на распределбата на точките на s -димензионална низа или мрежа се определува со мерки кои даваат квантитативни карактеристики за степенот на отклонување на една конкретна распределба од идеалната распределба на низа или мрежа. Во таа смисла испитувањето на квантитативните мерки за распределба на низи и мрежи, како што се дискрепансата и дијафонијата, зазема централно место во истражувањата сврзани со рамномерна распределба на низи. Многубројни се примените на рамномерно распределените низи во различни научни дисциплини, а централно место зазема користењето на рамномерна распределба на низи во теоријата и практиката на Квази-Монте Карло интегрирањето.

Монте Карло нумеричките методи и Квази-Монте Карло нуме-

ричките методи претставуваат успешна техника за решавање на проблеми најчесто сврзани со нумеричко пресметување на интеграли. Еден класичен резултат од теоријата на рамномерна распределба на низи покажува дека една низа е рамномерно распределена ако и само ако квадратурниот процес, чии јазли се точките на низата, е конвергентен. Од тој резултат произлегува големиот интерес кон таа класа од низи.

Имајќи ја предвид горната дискусија, основните цели и задачи на истражувањата во овој труд ќе бидат испитувањата на дијафонијата како нумеричка мерка за рамномерна распределба на низи и нејзините примени во Квази-Монте Карло интегрирањето. Како можеен аспект на примена на дијафонијата ќе биде претставувањето на грешката на Квази-Монте Карло интегрирањето во термините на дијафонијата. На тој начин две карактеристики од принципно различна природа: дијафонија и различни видови на грешки на интегрирањето ќе бидат математички сврзани. Последниот факт ќе биде еден од движечките мотиви за испитувањата во овој труд.

1.1 Ортонормирани функционални системи

Ортонормираните функционални системи какви што се тригонометрискиот функционален систем, Волш-функционалниот систем и направените во последно време обопштувања на Волш-функционалниот систем се основен инструмент за изучувањата сврзани со рамномерна распределба на низи и нивната примена во Квази-Монте Карло интегрирањето. Поради важноста на овие ортонормираните функционални системи ова поглавје ќе биде посветено на претставување во доволно минимална форма на основните поими и својства од теоријата на ортонормираните функционални системи.

Функционалниот систем

$$\mathcal{F} = \{f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots; \vec{x} \in E\},$$

е **ортонормиран функционален систем** ако во множеството E е дефинирана бинарна операција **скаларен производ** $\langle f_i, f_j \rangle : \mathcal{F}^2 \rightarrow \{0, 1\}$ која ги задоволува условите

$$\langle f_i, f_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{ако } i = j \\ 0, & \text{ако } i \neq j. \end{cases}$$

Комплетноста на ортонормираниот функционален систем е сврзана со можноста секоја непрекината функција со домен $E \subseteq \mathbb{R}^s$ да може да се апроксимира со произволна точност со некоја конечна линеарна комбинација од функциите од \mathcal{F} .

Тригонометрискиот функционален систем

$$\mathcal{T}_1 = \{e_h(x) = \exp(2\pi i h x); h \in \mathbb{Z}, x \in [0, 1)\}$$

претставува еднодимензионален ортонормиран функционален систем, со операција скаларен производ дефинирана со

$$\langle e_h(x), e_m(x) \rangle_x = \int_0^1 e_h(x) \overline{e_m(x)} dx = \int_0^1 \exp(2\pi i (h - m)x) dx.$$

Нека $s \geq 1$ е произволен фиксиран цел број, кој насекаде понатаму во оваа дисертација ќе ја означува димензијата на објектите кои се разгледуваат. Се дефинира s -димензионален ортонормиран тригонометриски функционален систем со

$$\mathcal{T} = \left\{ e_{\vec{h}}(\vec{x}) = \exp\left(2\pi i \langle \vec{h}, \vec{x} \rangle\right) : \vec{h} = (h_1, \dots, h_s) \in \mathbb{Z}^s, \vec{x} = (x_1, \dots, x_s) \in [0, 1)^s \right\},$$

$$\left. \langle \vec{h}, \vec{x} \rangle = \sum_{j=1}^s h_j x_j \right\}. \quad (1.1)$$

Операцијата скаларен производ во функционалниот систем \mathcal{T}_s се дефинира на следниот начин

$$\langle e_{\vec{h}}(\vec{x}), e_{\vec{m}}(\vec{x}) \rangle_{\vec{x}} = \int_{[0,1]^s} e_{\vec{h}}(\vec{x}) \overline{e_{\vec{m}}(\vec{x})} d\vec{x}.$$

Нека $b \geq 2$ е фиксиран природен број. Според Крестенсон [Кре] ќе се повикаме на Волш-функционалниот систем од ред b (познат и како функционален систем на Крестенсон).

Дефиниција 1.1 За секој ненегативен цел број k и реален број $x \in [0, 1)$ со соодветни претставувања во броен систем со основа b : $k = \sum_{j=0}^g k_j b^j$ и $x = \sum_{j=0}^{\infty} x_j b^{-j-1}$, каде што за $j \geq 0$, $k_j, x_j \in \{0, 1, \dots, b-1\}$, $k_g \neq 0$ и за бесконечно многу вредности на j , $x_j \neq b-1$, **к-тата Волш-функција од ред b** , ${}_b wal_k : [0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$, се дефинира на следниот начин:

$${}_b wal_k(x) = \prod_{j=0}^g \left(\exp(2\pi i \frac{k_j x_j}{b}) \right).$$

Множеството $\mathcal{W}_1(b) = \{{}_b wal_k : k = 0, 1, \dots\}$ се нарекува **Волш функционален систем од ред b** , а специјално, кога $b = 2$, добиеното множество $\mathcal{W}_1(2) = \{{}_2 wal_k : k = 0, 1, \dots\}$ е точно оригиналниот Волш [Вол] функционален систем од ред 2.

Нека $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, за произволен вектор $\vec{k} = (k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{N}_0^s$, **Волш-функција од ред b** , што му соодветствува на векторот \vec{k} , ${}_b wal_{\vec{k}}(\vec{x}) : [0, 1)^s \rightarrow \mathbb{C}$, се дефинира на следниот начин:

$${}_b wal_{\vec{k}}(\vec{x}) = \prod_{j=1}^s {}_b wal_{k_j}(x_j), \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_s) \in [0, 1)^s.$$

Множеството $\mathcal{W}(b) = \{ {}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}) : \vec{k} \in \mathbb{N}_0^s, \vec{x} \in [0, 1]^s \}$ се нарекува **s -димензионален Волш функционален систем од ред b** .

За две произволни Волш функции ${}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x})$ и ${}_b\text{wal}_{\vec{l}}(\vec{x})$, нивниот скаларен производ се дефинира со формулата

$$\langle {}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}), {}_b\text{wal}_{\vec{l}}(\vec{x}) \rangle_{\vec{x}} = \int_{[0,1]^s} {}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}) \overline{{}_b\text{wal}_{\vec{l}}(\vec{x})} d\vec{x}.$$

Овде ќе наведеме неколку својства на Волшовите функции кои се општо познати во теоријата, а ќе бидат користени во овој труд:

1. За произволни вектори $\vec{k}, \vec{l} \in \mathbb{N}_0^s$ е точно:

$$\int_{[0,1]^s} {}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}) \overline{{}_b\text{wal}_{\vec{l}}(\vec{x})} d\vec{x} = \begin{cases} 1, & \text{ако } \vec{k} = \vec{l} \\ 0, & \text{ако } \vec{k} \neq \vec{l}. \end{cases}$$

2. За произволни вектори $\vec{k}, \vec{l} \in \mathbb{N}_0^s$, $\vec{x} \in [0, 1]^s$ важи:

$${}_b\text{wal}_{\vec{k}+\vec{l}}(\vec{x}) = {}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}) {}_b\text{wal}_{\vec{l}}(\vec{x}).$$

3. Нека се дефинирани следните две операции \oplus_1^b и \ominus_1^b со:

За произволни реални броеви $x, y \in [0, 1)$ со записи во броен систем со основа b од облик

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i b^{-i-1}, \quad y = \sum_{i=0}^{\infty} y_i b^{-i-1},$$

каде што за $i \geq 0$ $x_i, y_i \in \{0, 1, \dots, b-1\}$, и за бесконечно многу вредности на i важи $x_i \neq b-1$ и $y_i \neq b-1$, нека се дефинирани операциите

$$x \oplus_1^b y = \sum_{i=0}^{\infty} [(x_i + y_i) \pmod{b}] b^{-i-1},$$

$$x \oplus_1^b y = \sum_{i=0}^{\infty} [(b + x_i - y_i) \pmod{b}] b^{-i-1}.$$

За произволни вектори $\vec{x} = (x_1, \dots, x_s) \in [0, 1]^s$, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_s) \in [0, 1]^s$ се дефинираат операциите

$$\vec{x} \oplus_s^b \vec{y} = (x_1 \oplus_1^b y_1, \dots, x_s \oplus_1^b y_s),$$

$$\vec{x} \ominus_s^b \vec{y} = (x_1 \ominus_1^b y_1, \dots, x_s \ominus_1^b y_s).$$

Тогаш се точни следните равенства за Волшовите функции: за произволни вектори $\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s$, $\vec{x}, \vec{y} \in [0, 1]^s$:

$${}_b \text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x} \oplus_s^b \vec{y}) = {}_b \text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}) {}_b \text{wal}_{\vec{k}}(\vec{y}),$$

$${}_b \text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x} \ominus_s^b \vec{y}) = {}_b \text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}) \overline{{}_b \text{wal}_{\vec{k}}(\vec{y})}.$$

За пресметките во овој труд неопходно ќе биде користењето на Волш-Фуриеви коефициенти, па во продолжение е дадена нивната дефиниција. Нека е дадена функција $f(\vec{x})$ над $[0, 1]^s$, тогаш за произволен вектор $\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s$, \vec{k} -тиот Волш-Фуриев коефициент на функцијата $f(\vec{x})$ се дефинира со:

$$\widehat{f}(\vec{k}) = \int_{[0, 1]^s} f(\vec{x}) \overline{{}_b \text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x})} d\vec{x}.$$

Ако редот $\sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s} \widehat{f}(\vec{k}) {}_b \text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x})$ е рамномерно конвергентен, тогаш важи следното равенство

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s} \widehat{f}(\vec{k}) {}_b \text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in [0, 1]^s,$$

т.е. преку горното равенство функцијата $f(\vec{x})$ е развиена во Волш-Фуриев ред.

1.2 Рамномерна распределба на низи

1.2.1 Дефинирање на рамномерно распределена низа

Поимот **рамномерно распределена низа** е воведен за прв пат 1916 година од Херман Вајл (*Herman Weyl*) [Вај 1]. Хронолошки гледано, дела кои претходат на [Вај 1], а се јавуваат како никулци од кои подоцна се развива теоријата на рамномерно распределените низи, се трудови од областа на асимптотска распределба по модул 1, и тоа започнувајќи со истражувањата на Кронекер за однесувањето на децималните делови на линеарните форми, делата на Бол (*Bohl*) [Бол], Сијерпински (*Sierpinsky*) [Сиј 1], [Сиј 2] и Вајл [Вај 2] од 1909 година до 1910 година каде што се испитува распределбата на низата $(\{n\theta\})_{n \geq 0}$, каде што θ е ирационален број.

Интересот за распределбата на низата $(\{n\theta\})_{n \geq 0}$, (позната како **Низа на Вајл**) произлегол од теоријата на отклонување на небесно тело од својата траекторија, поради привлекување од други небесни тела. Преглед на раната литература во однос на тие прашања може да се најде во работата на Коксма (*Koksma*) [Кок, Глава 8].

Следејќи ги Кјојперс и Нидерајтер [КјоНи] ќе ги изнесеме основите на теоријата на рамномерно распределените низи.

Пред да биде изнесен основниот поим во теоријата на рамномерно распределените низи, ќе бидат воведени следните ознаки: за произволен реален број x , нека со $[x]$ биде означен целиот дел од x , т.е. $[x] = \max\{m : m \leq x, m \in \mathbb{Z}\}$, а $\{x\} = x - [x]$ го означува децималниот дел на x , кој што е очевидно дека припаѓа на интервалот $[0, 1)$.

Нека $\xi = (x_n)_{n \geq 0}$ е произволна низа од реални броеви. Нека J е произволен подинтервал од $[0, 1)$, за кој по дефиниција се смета дека е

затворен од лево, а од десно е отворен. За произволен природен број N , нека биде одделена почетната подниза $\{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$ од низата ξ ; со $A(\xi; J; N)$ се означува бројот на точки од таа подниза, чии децимални делови припаѓаат на J , т.е.

$$A(\xi; J; N) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq N-1, \\ \{x_i\} \in J}} 1.$$

Основниот поим во теоријата на рамномерно распределените низи се изложува во следната дефиниција.

Дефиниција 1.2 (Вајл [Вај 1]) *Се вели дека низата $\xi = (x_n)_{n \geq 0}$ од реални броеви е рамномерно распределена по модул 1, ако за секој подинтервал J на $[0, 1)$ важи граничното равенство*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} A(\xi; J; N) = |J|, \quad (1.2)$$

при што со $|J|$ е означена должината на интервалот J .

Геометриската интерпретација на Дефиниција 1.2 е едноставна: низата ξ е рамномерно рапределена по модул 1, ако за доволно голем број N и за произволен подинтервал J на $[0, 1)$, во подинтервалот J припаѓаат приближно $N|J|$ на број точки од низата ξ , т.е. бројот $A(\xi; J; N)$ е пропорционален со должината $|J|$ на интервалот J .

Ако со $\mathcal{X}_+(J; x)$ сезначи карактеристичната функција на интервалот J , тогаш (1.2) може да се запише во следниот вид

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{X}_+(J; \{x_k\}) = \int_0^1 \mathcal{X}_+(J; x) dx,$$

кој покажува дека е конвергентен квадратурниот процес, конструиран

за карактеристичната функција $\mathcal{X}_+(J; x)$, при што како јазли се земени точките $\{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$ од почетната подниза на низата ξ .

Оваа дефиниција на природен начин може да се обопшти и во s -димензионален случај. Нека $s \geq 1$ е природен број и $[0, 1]^s$ е единечната s -димензионална коцка. За два вектори $\vec{a} = (a_1, \dots, a_s)$ и $\vec{b} = (b_1, \dots, b_s)$ од $[0, 1]^s$ се вели дека " \vec{a} е помал од \vec{b} ", ако $a_j < b_j$ за секој j , $1 \leq j \leq s$, во тој случај се воведува ознаката $J = [\vec{a}, \vec{b}] = \prod_{j=1}^s [a_j, b_j]$. Нека $\xi = (\vec{x}_n)_{n \geq 0}$ е низа од точки во \mathbb{R}^s . За произволен природен број N и произволен подинтервал $J = [\vec{a}, \vec{b}]$ на единечниот куб $[0, 1]^s$, нека $A(\xi; J; N)$ ја има истата улога, како и во еднодимензионален случај.

Дефиниција 1.3 (Вајл, [Вај 1]) Се вели дека низата $\xi = (\vec{x}_n)_{n \geq 0}$ од точки во \mathbb{R}^s е рамномерно распределена по модул 1, ако за секој подинтервал $J = [\vec{a}, \vec{b}]$ на $[0, 1]^s$ важи граничното равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} A(\xi; J; N) = \prod_{j=1}^s (b_j - a_j).$$

Вајл [Вај 1] има покажано дека важат следните две теореми во еднодимензионален случај:

Теорема 1.1 (Интегрален критериум на Вајл) Низата $\xi = (x_n)_{n \geq 0}$ од реални броеви е рамномерно распределена по модул 1 ако и само ако за секоја непрекината, реална функција $f(x)$, дефинирана над интервалот $[0, 1]$, важи

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(\{x_k\}) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Оваа многу силна теорема во теоријата на рамномерно распределените низи кажува дека рамномерно распределените низи можат да се применат за пресметување на определени интеграли од многу широка класа на функции. Од Теорема 1.1 непосредно е добиена следната

последица.

Последица 1.1 (Вајл, [Вај 1]) Низата $\xi = (x_n)_{n \geq 0}$ од реални броеви е рамномерно распределена по модул 1, ако и само ако за секоја комплекснозначна, непрекината, дефинирана над \mathbb{R} , функција $f(x)$, периодична, со периода 1, важи равенството

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) = \int_0^1 f(x) dx. \quad (1.3)$$

Функцијата $f(x) = \exp(2\pi i h x)$, за произволен ненулта цел број h , го задоволува условот од Последица 1.1, па од равенството (1.3) следува:

Теорема 1.2 (Експоненцијален критериум на Вајл) Низата $\xi = (x_n)_{n \geq 0}$ од реални броеви е рамномерно распределена по модул 1 ако и само ако за секој цел број $h \neq 0$ важи граничното равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \exp(2\pi i h x_k) = 0.$$

Аналогно на теоремите во еднодимензионалниот случај, важат следните резултати:

Теорема 1.3 Низата $\xi = (\vec{x}_n)_{n \geq 0}$ е рамномерно распределена по модул 1 во \mathbb{R}^s , ако и само ако за секоја комплекснозначна, непрекината, дефинирана над $[0, 1]^s$, функција $f(\vec{x})$, важи равенството

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(\vec{x}_k) = \int_{[0,1]^s} f(\vec{x}) d\vec{x}.$$

Теорема 1.4 (Експоненцијален критериум на Вајл) Низата $\xi = (\vec{x}_n)_{n \geq 0}$ е рамномерно распределена по модул 1 во \mathbb{R}^s ако и само ако за

секој целоброен вектор $\vec{h} \in \mathbb{Z}^s, \vec{h} \neq \vec{0}$, важи

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(2\pi i \langle \vec{h}, \vec{x}_k \rangle\right) = 0.$$

Во 2001 година, Грозданов и Стоилова [ГрСт1] предлагаат аналог на експоненцијалниот критериум на Вајл, а имено експоненцијалниот критериум на Вајл изразен во термините на Волшовите функции од ред b . Во таа смисла, тие ја имаат докажано следната теорема:

Теорема 1.5 *Низата $\xi = (\vec{x}_n)_{n \geq 0}$ е рамномерно распределена по модул 1 во $[0, 1)^s$, ако и само ако за секој вектор $\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s, \vec{k} \neq \vec{0}$, важи*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}_n) = 0.$$

1.2.2 Квантитативни мерки за рамномерна распределба на низи

Претходно изложените дефиниции и теореми даваат само квалитативен аспект за определување дали една низа е рамномерно распределена по модул 1 или не е. Со помош на истите не е можно да се определи која од две низи е ”подобро” рамномерно распределена.

За да се одговори на прашањето која од две дадени низи е ”подобро” рамномерно распределена, се воведуваат квантитативни мерки за отстапување на распределбата на низите од една идеална распределба, наречени дискрепанси и дијафони. Насекаде понатаму во овој труд, терминот ”мрежа” ќе биде користен за означување на конечна низа.

Дефиниција 1.4 *Нека $\xi_N = \{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$ е мрежа од реални броеви.*

Величината $D(\xi_N)$ определена со равенството

$$D(\xi_N) = \sup_{J \subseteq [0,1]} \left| \frac{A(\xi; J; N)}{N} - |J| \right|$$

се вика **дискрепанса** на дадената мрежа.

За бесконечната низа $\xi = (x_n)_{n \geq 0}$ од реални броеви, за секој природен број N , под дискрепанса $D_N(\xi)$ на низата ξ се подразбира дискрепансата на почетната мрежа $\xi_N = \{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$, која ги содржи првите N члена на низата ξ . Во продолжение ќе претставиме неколку различни видови на дискрепанси.

Дефиниција 1.5 За мрежата од реални броеви $\xi_N = \{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$ се дефинира **свезда-дискрепанса** $D^*(\xi_N)$ определена со равенството

$$D^*(\xi_N) = \sup_{0 < \alpha \leq 1} \left| \frac{A(\xi; [0, \alpha]; N)}{N} - \alpha \right|.$$

За бесконечната низа $\xi = (x_n)_{n \geq 0}$ од реални броеви, за секој природен број N , под свезда-дискрепанса $D_N^*(\xi)$ на низата ξ се подразбира свезда-дискрепансата на почетната мрежа $\xi_N = \{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$, која ги содржи првите N членови на низата ξ .

Дефинициите на $D(\xi_N)$ и $D^*(\xi_N)$ во Дефиниција 1.4 и Дефиниција 1.5 на природен начин се обопштуваат и за низи во \mathbb{R}^s .

Дефиниција 1.6 Нека $\xi_N = \{\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{N-1}\}$ е мрежа од N точки во \mathbb{R}^s . Дискрепансата $D(\xi_N)$ и свезда-дискрепансата $D^*(\xi_N)$ на таа мрежа се дефинираат со формулите

$$D(\xi_N) = \sup_J \left| \frac{A(\xi; J; N)}{N} - \mu(J) \right|,$$

$$D^*(\xi_N) = \sup_{J^*} \left| \frac{A(\xi; J^*; N)}{N} - \mu(J^*) \right|,$$

каде што

$$J = \{[\alpha_1, \beta_1) \times \dots \times [\alpha_s, \beta_s) : 0 \leq \alpha_j < \beta_j < 1, 1 \leq j \leq s\},$$

$$J^* = \{[0, \alpha_1) \times \dots \times [0, \alpha_s) : 0 \leq \alpha_j < 1, 1 \leq j \leq s\},$$

а со μ е означена s -мерната Лебегова мера на интервалите J и J^* .

За произволна бесконечната низа $\xi = (\vec{x}_n)_{n \geq 0}$ од точки во \mathbb{R}^s , за секој природен број N , под дискрепанса $D_N(\xi)$ и звезда-дискрепанса $D_N^*(\xi)$ на низата ξ се подразбираат соодветните нумерички карактеристики на почетната мрежа $\xi_N = \{\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{N-1}\}$, која ги содржи првите N членови на низата ξ .

Следните две теореми (докажани во [КјоНи] - фундаментално дело од оваа област, на авторите Кјојперс и Нидерајтер) ја даваат важноста на дискрепансата за теоријата на рамномерно распределени низи по модул 1.

Теорема 1.6 Низата $\xi = (\vec{x}_n)_{n \geq 0}$ од точки во \mathbb{R}^s е рамномерно распределена по модул 1 ако и само ако

$$\lim_{N \rightarrow \infty} D_N(\xi) = 0.$$

Теорема 1.7 Низата $\xi = (\vec{x}_n)_{n \geq 0}$ од точки во \mathbb{R}^s е рамномерно распределена по модул 1 ако и само ако

$$\lim_{N \rightarrow \infty} D_N^*(\xi) = 0.$$

За прв пат терминот ”дискрепанса” се воведува од холандскиот математичар Ван дер Корпут во 1935 година [ВдК], а за прв пат како

самостоен поим се разгледува од Бергстром [Бер] во 1936 година, кој за негово дефинирање го користи терминот ”дисперзија на интензивноста”.

Ван дер Корпут ја изнесува претпоставката дека за секоја низа ξ од точки во \mathbb{R}^s важи

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} N \cdot D_N(\{\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{N-1}\}) = \infty. \quad (1.4)$$

Рот [Рот] ја докажува следната квантитативна теорема, од која се добива равенството (1.4).

Теорема 1.8 *За секоја низа $\xi = (\vec{x}_n)_{n \geq 0}$ од точки во \mathbb{R}^s , $s \geq 1$ и за бесконечно многу природни броеви N важи неравенството*

$$ND_N^*(\xi) > C(s) \ln^{s/2} N,$$

каде што $C(s)$ е константа, која зависи само од димензијата s .

Во случајот кога $s = 1$, Шмит [ШМ] покажал дека оценката во претходната теорема може да се засили, и тој резултат е изложен во следната теорема.

Теорема 1.9 *За секоја низа $\xi = (x_n)_{n \geq 0}$ од точки во \mathbb{R} , неравенството*

$$ND_N^*(\xi) > \frac{1}{100} \ln N$$

е исполнето за бесконечно многу природни броеви N .

Со последната теорема Шмит покажал дека доколку во својство на мерка за рамномерност на распределба на низи се земе свезда-дискрепансата, тогаш во секоја низа е неизбежна нерамномерноста.

Во 1976 година Цинтерхоф (*Zienterhof*) [Цин] користејќи го

тригонометрискиот функционален систем (1.1) предложува нова нумеричка мерка за рамномерност на распределба на низи во $[0, 1]^s$, која е наречена **класична дијафонија**.

Дефиниција 1.7 За секој природен број N , класична дијафонија $F_N(\mathcal{T}; \xi)$ од првите N елементи на низата $\xi = (\vec{x}_n)_{n \geq 0}$ во $[0, 1]^s$ се дефинира со

$$F_N(\mathcal{T}; \xi) = \left(\sum_{\vec{h} \in \mathbb{Z}^s, \vec{h} \neq \vec{0}} R^{-2}(\vec{h}) \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(2\pi i \langle \vec{h}, \vec{x}_n \rangle\right) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

при што за произволен вектор $\vec{h} = (h_1, \dots, h_s) \in \mathbb{Z}^s$, коефициентот $R(\vec{h})$ се дефинира со

$$R(\vec{h}) = \prod_{j=1}^s \max(1, |h_j|).$$

Цинтерхоф ја има докажано точноста на следната теорема:

Теорема 1.10 Низата $\xi = (\vec{x}_n)_{n \geq 0}$ од точки во \mathbb{R}^s е рамномерно распределена по модул 1 ако и само ако е исполнето граничното равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F_N(\mathcal{T}; \xi) = 0.$$

Во 2006 во трудот на Грозданов и Димитриевска Ристовска [РиГр] е воведена тежинска дијафонија како нова квантитативна мерка за рамномерна распределба на низи во $[0, 1]^s$. Таа мерка се базира на тригонометрискиот функционален систем (1.1). Во истиот труд е покажано дека пресметувачката сложеност на тежинската дијафонија на произволна низа од N точки во $[0, 1]^s$ е $\mathcal{O}(sN^2)$. Дадена е врската меѓу грешката-во-најлош-случај на Квази-Монте Карло интегрирањето во тежински Хилбертов простор и тежинската дијафонија. Со специјален избор на параметрите α и γ од кои зависи тежинската дијафонија авторите ја добиваат класичната дијафонија на Цинтерхоф.

1.2.3 Дијафонии од ред b

Во 2001 година, авторите Грозданов и Стоилова [ГрСт1] воведуваат нова нумеричка мерка за рамномерна распределба на низи во $[0, 1]^s$, така наречена **дијафонија од ред b** . За таа цел тие користат класа од ортонормалниот систем на Волшови функции од ред b . Подетален опис на овие функции е направен во [ГрСт2]) од истите автори. Според [ГрСт1] воведувањето на поимот **дијафонија од ред b** , (**b -adic diaphony**) е со следната дефиниција:

Дефиниција 1.8 Дијафонија од ред b $F_N(\mathcal{W}(b); \xi)$ на првите N елементи на произволна низа $\xi = (\vec{x}_n)_{n \geq 0}$ во $[0, 1]^s$ се дефинира со:

$$F_N(\mathcal{W}(b); \xi) = \left(\frac{1}{(b+1)^s - 1} \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s, \vec{k} \neq \vec{0}} \rho(\vec{k}) \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} {}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}_n) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

каде што за произволен вектор $\vec{k} = (k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{N}_0^s$, коефициентот $\rho(\vec{k})$ е дефиниран со:

$$\rho(\vec{k}) = \prod_{j=1}^s \rho(k_j),$$

а за произволен ненегативен цел број k ,

$$\rho(k) = \begin{cases} 1; & \text{ако } k = 0 \\ b^{-2g}; & \forall k, \quad b^g \leq k < b^{g+1}, \quad g \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Тие ја имаат докажано следната теорема.

Теорема 1.11 Низата $\xi = (\vec{x}_n)_{n \geq 0}$ од точки во $[0, 1]^s$ е рамномерно распределена по модул 1 ако и само ако е исполнето граничното равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F_N(\mathcal{W}(b); \xi) = 0.$$

Ако во Дефиниција 1.8 се постави $b = 2$, очигледно е дека како специјален случај на дијафонијата од ред b , се добива така наречена диадична дијафонија (**dyadic diaphony**) $F_N(\mathcal{W}_{\mathbf{z},id}; \xi)$ воведена од Хелекалек и Либ (*Hellekalek, Leeb*) [ХеЛи].

За целите на повеќедимензионалната нумеричка интеграција, Слоан (*Sloan*) и Возниаковски (*Wozniakowsky*) [СлВо1] предлагаат да се подредат координатите x_1, x_2, \dots, x_s на аргументот на функциите кои се интегрираат и соодветно координатите на мрежите кои се користат во процесот на нумеричка интеграција, на таков начин, што x_1 да биде координатата со најголема важност, x_2 да биде следната по важност координата, итн. Ова се реализира со воведување на соодветни нерастечки тежини $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$, соодветни на координатите x_1, x_2, \dots, x_s .

Во 2006 година, Грозданов [Гр1] воведува нова нумеричка мерка за рамномерна распределба на низи во $[0, 1]^s$, така наречена ”тежинска дијафонија од ред b ”. За да добие форма на ”тежинска дијафонија од ред b ” авторот [Гр1] користи параметри α и γ . Фиксираниот број $\alpha > 1$ ќе ја карактеризира брзината на опаѓање на Фуриевите коефициенти на специјалната функција $\phi_b(\alpha, \gamma, \cdot)$ конструирана во Теорема 2 во [Гр1]. Оваа функција има многу важна улога во дефинирањето на поимот на ”тежинска дијафонија од ред b ”. Со цел да ја окарактеризира важноста на различните координати на точките од мрежата во $[0, 1]^s$ авторот користи вектор од параметри (или тежини) $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_s)$, каде што $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \gamma_s > 0$. Со цел да се направи поголемо обопштување на дефиницијата на дијафонијата во [Гр1] се користи произволен комплетен ортонормиран функционален систем $\mathcal{F}(b)$, конструиран во броен систем со основа b :

$$\mathcal{F}(b) = \left\{ f_{\vec{k}}(\vec{x}); \vec{k} \in \mathbb{N}_0^s, \vec{x} \in [0, 1]^s \right\}.$$

Дефиницијата на ”тежинска дијафонија од ред b ” следува во продолжение.

Дефиниција 1.9 Нека $\alpha > 1$ е произволен реален број и нека $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_s)$, каде што $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \gamma_s > 0$ е произволен вектор од тежини. За произволен природен број N , **тежинска дијафонија од ред b** , на првите N елементи на низата ξ се дефинира со

$$F_N(\mathcal{F}(b); \alpha, \vec{\gamma}; \xi) = \left(\frac{1}{\prod_{j=1}^s [1 + \gamma_j \mu_b(\alpha)] - 1} \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s, \vec{k} \neq \vec{0}} r_b(\alpha, \vec{\gamma}; \vec{k}) \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_{\vec{k}}(\vec{x}_n) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

при што, за секој вектор $\vec{k} = (k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{N}_0^s$ коефициентот $r_b(\alpha, \vec{\gamma}; \vec{k})$ се дефинира како:

$$r_b(\alpha, \vec{\gamma}; \vec{k}) = \prod_{j=1}^s r_b(\alpha, \gamma_j; k_j),$$

а за секој цел број $k \geq 0$ коефициентот $r_b(\alpha, \gamma; k)$ се дефинира на следниот начин: за произволен природен број $b \geq 2$, и за произволни реални броеви $\gamma > 0$ и $\alpha > 1$:

$$r_b(\alpha, \gamma; k) = \begin{cases} 1, & \text{ако } k = 0 \\ \gamma b^{-\alpha g}, \quad \forall k, \quad b^g \leq k < b^{g+1}, \quad g \geq 0, \quad g \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{и } \mu_b(\alpha) = \frac{(b-1)b^\alpha}{b^\alpha - b}.$$

Од дефиницијата на тежинска дијафонија од ред b , за специјален избор на параметрите α и γ и конкретен ортонормиран функционален систем над $[0,1)$ се добиваат некои претходно дефинирани типови на дијафонии. Во продолжение се дадени неколку конкретни примери, при што во секој од нив разгледуваниот функционален систем ги задоволува условите $a), b), c), d)$ кои ги задоволува функционалниот систем од дефиницијата на тежинска дијафонија од ред b во [Гр1].

Пример А: Општа дијафонија.

За избор на параметрите $\alpha = 2$ и $\gamma = \vec{1} = (1, \dots, 1)$, од дефиницијата

на тежинската дијафонија од ред b за произволна низа $\xi = (\vec{x}_n)_{n \geq 0}$ од точки во $[0, 1]^s$ се добива така наречена општа дијафонија $F_N(\mathcal{F}(b); 2, \vec{1}; \xi)$ воведена од Грозданов и Стоилова [ГрСтЗ] во 2004 година.

$$F_N(\mathcal{F}(b); 2, \vec{1}; \xi) = \left(\frac{1}{(b+1)^s - 1} \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s, \vec{k} \neq \vec{0}} \rho(\vec{k}) \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_{\vec{k}}(\vec{x}_n) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пример Б: Обопштена дијафонија од ред b .

Нека во примерот А го замениме функционалниот систем $\mathcal{F}(b)$ со Волш функционалниот систем над конечна група G во однос на биекција $\varphi \mathcal{W}_{G, \varphi}$. Тогаш за произволна низа $\xi = (\vec{x}_n)_{n \geq 0}$ од точки во $[0, 1]^s$ се добива така наречена обопштена дијафонија од ред b воведена од [ГрНиСт] во 2003 година:

$$F_N(\mathcal{W}_{G, \varphi}; \xi) = \left(\frac{1}{(b+1)^s - 1} \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s, \vec{k} \neq \vec{0}} \rho(\vec{k}) \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} {}_{G, \varphi} \text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}_n) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пример В: Дијафонија од ред b .

Нека во примерот Б го замениме Волш функционалниот систем над конечна група G во однос на биекција $\varphi \mathcal{W}_{G, \varphi}$ со Волш функционален систем од ред $b \mathcal{W}(b)$. Тогаш за произволна низа $\xi = (\vec{x}_n)_{n \geq 0}$ од точки во $[0, 1]^s$ се добива така наречена дијафонија од ред b воведена од [ГрСт2].

$$F_N(\mathcal{W}(b); \xi) = \left(\frac{1}{(b+1)^s - 1} \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s, \vec{k} \neq \vec{0}} \rho(\vec{k}) \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} {}_b \text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}_n) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пример Г: Диадична дијафонија.

Нека во примерот В се замени системот $\mathcal{W}(b)$ со системот $\mathcal{W}(2)$, тогаш за произволна низа $\xi = (\vec{x}_n)_{n \geq 0}$ од точки во $[0, 1]^s$ се добива така

наречена диадична дијафонија воведена од Хелекалек и Лиb [ХеЛи] во 1997 година.

$$F_N(\mathcal{W}(2); \xi) = \left(\frac{1}{3^s - 1} \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s, \vec{k} \neq \vec{0}} \rho(\vec{k}) \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}_n) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Во 2010 година *PeterHellekalek* [Хе] воведува нов тип на количествена мерка за рамномерна распределба на низи, така наречена ”дијафонија од ред p ” (**p-adic diaphony**), каде што p е прост број. Функционалниот систем кој го користи авторот $\Gamma_p = \left\{ \gamma_{\vec{k}}(\vec{x}); \vec{k} \in \mathbb{N}_0^s, \vec{x} \in [0, 1)^s \right\}$ е дефиниран над s -димензионален торус $[0, 1)^s$ и дефинирањето на Γ_p е сврзано со доста сложена алгебарска структура, кое во овој труд ќе биде изоставено. Следува дефиницијата на ”дијафонијата од ред p ” според [Хе]:

Дефиниција 1.10 Нека $\vec{p} = (p_1, \dots, p_s)$, каде што p_i се прости броеви. **Дијафонија од ред \vec{p}** , $F_N(\xi)$ на првите N елементи на низата $\xi = (\vec{x}_n)_{n \geq 0}$ во $[0, 1)^s$ се дефинира со

$$F_N(\xi) = \left(\frac{1}{\sigma_{\vec{p}} - 1} \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s, \vec{k} \neq \vec{0}} R_{\vec{p}}(\vec{k}) \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \gamma_{\vec{k}}(\vec{x}_n) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

при што $\sigma_{\vec{p}} = \prod_{i=1}^s (p_i + 1)$, $R_{\vec{p}}(\vec{k}) = \prod_{i=1}^s R_{p_i}(k_i)$,

$$R_p(k) = \begin{cases} 1, & \text{ако } k = 0 \\ p^{-2(t-1)}, & \text{ако } p^{t-1} \leq k < p^t, \quad t \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Од 2012 година па наваму, сосема нова тенденција во оваа област е дефинирањето на така наречена ”хибридна дијафонија”. Деталите

за нејзиното дефинирање се многу сложени и тоа излегува надвор од рамките на интересите на оваа дисертација.

1.3 Примери на рамномерно распределени низи

1.3.1 Обоштена низа на Ван дер Корпут

На почеток на ова подпоглавје ќе биде изложена дефиницијата на Обоштена низа на Ван дер Корпут, позната во теоријата на рамномерно распределените низи како една од најдобро распределените низи.

Дефиниција 1.11 (Обоштена низа на Ван дер Корпут) Нека $b \geq 2$ е цел број и нека $\Sigma = (\sigma_i)_{i \geq 0}$ е низа од пермутации на множеството $\{0, 1, \dots, b-1\}$. Ако произволен ненегативен цел број i има претставување во броен систем со основа b :

$$i = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(i) b^j, \quad (1.5)$$

каде што за $j \geq 0$, $a_j(i) \in \{0, 1, \dots, b-1\}$, тогаш се дефинира

$$S_b^{\Sigma}(i) = \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j(a_j(i)) b^{-j-1}.$$

Низата $S_b^{\Sigma} = (S_b^{\Sigma}(i))_{i \geq 0}$ е дефинирана 1981 година од францускиот математичар Анри Фор (*Faure*) [Фор]. Ако во Дефиниција 1.11 се постави Σ да биде низата од идентитети, т.е. $\Sigma = I$, тогаш добиената низа Σ е точно Низата на Холтон (*Halton*) [Хол]. Поради важноста на оваа низа, во продолжение е изложена нејзината оригинална дефиниција.

Дефиниција 1.12 Нека $i \geq 0$ е произволен цел број со запис во броен систем со основа b од видот (1.5), каде што за $j \geq 0$, $a_j(i) \in \{0, 1, \dots, b-1\}$,

тогаш се дефинира

$$S_b^I(i) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(i) b^{-j-1}. \quad (1.6)$$

Низата $S_b^I = (S_b^I(i))_{i \geq 0}$ се вика Низа на Холтон и е дефинирана во 1960 година од американскиот математичар Холтон. Во случајот кога $b = 2$, тогаш добиената низа $S_2^I = (S_2^I(i))_{i \geq 0}$ е познатата класична Низа на Ван дер Корпут (*Van der Corput*) [ВдК], дефинирана во 1935 година од истоимениот холандски математичар.

За конструирање на повеќедимензионални низи Холтон [Хол] предлага да се изберат взаемно прости броеви b_1, b_2, \dots, b_s , за да се конструираат соодветните еднодимензионални низи $(S_{b_j}^I(i))_{i \geq 0}, j = 1, 2, \dots, s$ и потоа повеќедимензионалната низа

$$((S_{b_1}^I(i), S_{b_2}^I(i), \dots, S_{b_s}^I(i)))_{i \geq 0}.$$

Собољ [Соб1] дава друг ефективен пристап за конструирање на добро распределени низи во $[0, 1]^s$, така наречени ЛП $_{\tau}$ -низи.

Има и други трудови посветени на оваа проблематика, но тука ќе го запреме прегледот на најбитните дефиниции и теореми од оваа област.

Неизбежна е нерамномерноста на распределбата на точките на која и да е низа во $[0, 1]^s$. Ако се дадени две различни низи и дијафонијата на секоја од нив тежи кон 0, тогаш порамномерно распределена низа е онаа, чија брзина на тежнење на дијафонијата кон 0 е поголема. Во таа смисла, за секоја низа од точки во $[0, 1]^s$ битно е да се најде точниот ред на големина на тежнење кон 0, на нејзината дијафонија. Точната брзина на тежнење кон 0 (точниот ред на големина) на дијафонијата се наоѓа кога ќе се направат оценки од горе и од долу, а потоа се утврдува дека тие имаат ист ред на големина. Како пример, во магистерскиот

труд [РМаг] се изложени оценки од горе и од долу на обоштената дијафонија од ред b на Обоштената низа на Ван дер Корпут (види Теорема 2.1 и Теорема 2.2). Добиените оценки се од еден ист ред на големина $\mathcal{O}(N^{-1}\sqrt{\log N})$. За одбележување е фактот дека оценката од горе важи за секоја вредност на N , а оценката од долу е задоволена за бесконечно многу вредности на N .

После горните забелешки, ќе бидат изложени некои претходно добиени резултати. Пројнов и Грозданов [ПрГр1] и [ПрГр2] го наоѓаат точниот ред на големина на дијафонијата $F_N(S_b^I)$ на Низата на Холтон.

Грозданов и Стоилова [ГрСт1] во 2001 година и [ГрСт2] во 2004 година ја имаат испитувано дијафонијата од ред b на Обоштената низа на Ван дер Корпут. Добиените резултати се формулирани во следната теорема:

Теорема 1.12 Нека $S_b^\Sigma = (S_b^\Sigma(i))_{i \geq 0}$ биде произволна Обоштена низа на Ван дер Корпут, тогаш важат следните оценки:

(i) За секој природен број N , дијафонијата од ред b , $F_N(\mathcal{W}(b); S_b^\Sigma)$ на низата S_b^Σ ја задоволува оценката од горе

$$F_N(\mathcal{W}(b); S_b^\Sigma) < \frac{1}{N} \sqrt{\frac{4b^3 - 2b^2 - 3b - 1}{(b+1)\log b} \cdot \log[(b-1)N + 1] + \frac{(b-1)^3}{b}},$$

(ii) За бесконечно многу вредности на N , за $F_N(\mathcal{W}(b); S_b^\Sigma)$ дијафонијата од ред b , на низата S_b^Σ е задоволена оценката од долу:

$$F_N(\mathcal{W}(b); S_b^\Sigma) > \frac{1}{N} \sqrt{\frac{b^5 + b^4 - 3b^3 - 4b^2 + 4b + 4}{2b^2(b+1)^2 \log b} \cdot \log[(b^2-1)N + 1] - C(b)},$$

каде што константата $C(b)$ е пресметана точно.

Оценките (i) и (ii) изложени во Теорема 1.12 покажуваат дека ди-

јафонијата од ред b , $F_N(\mathcal{W}(b); S_b^\Sigma)$ на низата S_b^Σ има ред на големина $\mathcal{O}(N^{-1}\sqrt{\log N})$.

Од забелешките по Дефиниција 1.11 и Дефиниција 1.12 јасен е фактот дека од дефиницијата на обоштената дијафонија од ред b на произволна низа од точки во $[0, 1]^s$, како специјален случај се добива дијафонијата од ред b на таа низа.

1.3.2 (t, m, s) –мрежи

Во ова подпоглавје ќе биде претставена конструкцијата на специјална класа од s –димензионални мрежи, така наречени (t, m, s) –мрежи. Во насока на изучување на добро распределени мрежи од точки во $[0, 1]^s$ за кои има ефективни алгоритми за конструкција, работеле многу автори како Собољ [Соб1], Фор [Фор], Нидерајтер [Нид] и други.

Во последно време така наречените (t, m, s) –мрежи со база b дефинирани од Нидерајтер [Нид] активно се користат во теоријата и практиката на Квази-Монте Карло интегрирањето.

Дефиниција 1.13 Нека $b \geq 2$, $s \geq 1$ и $0 \leq t \leq m$ се цели броеви. Множеството P од b^m точки во $[0, 1]^s$ формира (t, m, s) –мрежа со база b , ако секој подинтервал од облик

$$J = \prod_{j=1}^s \left[\frac{a_j}{b^{d_j}}, \frac{a_j + 1}{b^{d_j}} \right)$$

од $[0, 1]^s$, каде што за $1 \leq j \leq s$ целите броеви d_j и a_j ги задоволуваат неравенствата $d_j \geq 0$ и $0 \leq a_j < b^{d_j}$; со волумен b^{t-m} , се состои од точно b^t точки од мрежата P .

Следува дефиниција на дигитална (t, m, s) –мрежа [Нид].

Дефиниција 1.14 Нека $b \geq 2$ е дадена база и нека C_j бидат s дадени

$t \times t$ матрици над \mathbb{Z}_b , за $j = 1, 2, \dots, s$. Нека бројот n , $0 \leq n \leq b^m - 1$ го има следниот запис во база b :

$$n = n_0 + n_1b + \dots + n_{m-1}b^{m-1}$$

и n ќе го идентификуваме со вектор $\vec{n} = (n_0, n_1, \dots, n_{m-1})^T$. За $1 \leq j \leq s$ со множење на матрицата C_j со векторот \vec{n} , се добива

$$(x_{j,n,1}, x_{j,n,2}, \dots, x_{j,n,m})^T = (C_j \cdot \vec{n}) \bmod b.$$

Понатаму ќе дефинираме точки $x_{j,n}$ со

$$x_{j,n} = \frac{x_{j,n,1}}{b} + \frac{x_{j,n,2}}{b^2} + \dots + \frac{x_{j,n,m}}{b^m}$$

и вектор $\vec{x}_n = (x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{s,n})$. Ако постои индекс t така што за $0 \leq t \leq m$, мрежата од точки $P_{b^m} = \{\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{b^m-1}\}$ е (t, m, s) -мрежа со база b , тогаш таа се вика дигитална (t, m, s) -мрежа со база b .

Во продолжение ќе изнесеме многу силен резултат на Дик и Пи-лишхамер [ДиПи 1], кој ќе најде примена во нашите испитувања.

Нека $p \geq 1$, $p \in \mathbb{Z}$ и нека за произволен цел број k , $k \geq 0$ записот на k во броен систем со основа b е $k = \sum_{i=0}^{\infty} k_i b^i$. Нека е дефинирана функција $tr_p(k)$ со

$$tr_p(k) = k_0 + k_1b + \dots + k_{p-1}b^{p-1},$$

и векторска функција $tr_p(\vec{k})$ со

$$tr_p(\vec{k}) = (k_0, k_1, \dots, k_{p-1}) \in \mathbb{Z}_b^p.$$

Нека $\{x_0, \dots, x_{b^m-1}\}$ е произволна дигитална (t, m, s) -мрежа над \mathbb{Z}_b , генерирана од матриците C_1, \dots, C_s , тогаш за секој вектор $\vec{k} = (k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{N}_0^s$

важи равенството:

$$\sum_{n=0}^{b^m-1} {}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}_n) = \begin{cases} b^m, & \text{ако } C_1^T \text{tr}_m(\vec{k}_1) + \dots + C_s^T \text{tr}_m(\vec{k}_s) = \vec{0} \\ 0, & \text{инаку.} \end{cases} \quad (1.7)$$

1.4 Квази-Монте Карло интегрирање во тежински Хилбертов простор

1.4.1 Хилбертови простори

Во ова подпоглавје ќе биде воведен поимот за Хилбертови простори.

Хилбертовите простори настанале како обопштување на просторот \mathbb{R}^3 и најопшто кажано Хилбертов простор H се дефинира како множество функции кои се интегралбилни заедно со својот квадрат над $[0, 1]^s$, ($H \subseteq L_2([0, 1]^s)$), т.е. постојат интегралите

$$\int_{[0,1]^s} f(\vec{x}) d\vec{x}, \quad \forall f \in H$$

и

$$\int_{[0,1]^s} f^2(\vec{x}) d\vec{x}, \quad \forall f \in H.$$

Унитарен или Предхилбертов функционален простор претставува линеарен (векторски) простор од функции (со дефинирани две операции: собирање на функции и множење на функција со скалар од \mathbb{C}), во кој е дефинирана операција скаларен производ $\langle \cdot, \cdot \rangle : H^2 \rightarrow \mathbb{C}$ и операција норма $\| \cdot \|$, која е генерирана од скаларниот производ. Унитарен простор во кој секоја Кошиева низа е конвергентна се вика Хилбертов простор.

Хилбертовите простори може да се поделат во две големи класи Коробови и Собољеви простори. Коробовите простори се простори

од комплексно-вредносни функции со апсолутно конвергентни Фуријеви редови и со периода 1 во однос на секој аргумент. Хикернел [Хик], Слоан и Вожниаковски [СлВо1] и други автори ги разгледуваат Коробовите простори, како функционални простори базирани на конвергенција на Фуриевите редови на функциите во однос на тригонометрискиот ортонормиран функционален систем.

Најопшто кажано Собољевите простори се множества од функции на кои им се наложени услови за глаткост на нивните мешани парцијални изводи до некој одреден ред.

1.4.2 Општи поими и тврдења од теоријата на Квази-Монте Карло интегрирањето во тежински Хилбертов простор

Во ова подпоглавје ќе се повикаме на неколку добро познати дефиниции и резултати, кои се однесуваат на Квази-Монте Карло интегрирањето во тежински Хилбертов простор генериран од репродуцирачки јадра.

Според Аронжујан (Aronszajn) [Аро], следува концептот на генерирачки јадра на Хилбертов простор (*reproducing kernels of Hilbert spaces*).

Дефиниција 1.15 Нека F е множество од функции дефинирани над E , кои што го формираат Хилбертовиот простор. Функцијата $K(x, y)$ со аргументи $x, y \in E$ се вика генерирачко јадро на F , ако се исполнети следните два услова:

- (K1) За секој фиксиран $y \in E$, функцијата $K(x, y)$ како функција од x , припаѓа на F ;
- (K2) **генерирачко својство:** $\forall y \in E, \forall f \in F$ важи својството

$$f(y) = \langle f(x), K(x, y) \rangle_x.$$

Индексот x во скаларниот производ индицира дека скаларниот производ се применува во однос на променливата x .

Следејќи ги Слоан и Возниаковски [СлВо1] ќе го воведеме концептот на Квази-Монте Карло интегрирање во Хилбертов простор генериран со репродуцирачко јадро.

Нека $H_s(K)$ биде Хилбертов простор со репродуцирачко јадро $K(\vec{x}, \vec{y}) : [0, 1]^{2s} \rightarrow \mathbb{C}$ и со норма $\|\cdot\|_{H_s(K)}$.

Повеќедимензионалниот интеграл

$$I_s(f) = \int_{[0,1]^s} f(\vec{x}) d\vec{x}, \quad f \in H_s(K)$$

се апроксимира со Квази-Монте Карло алгоритам со еднакви квадратурни тежини

$$Q_s(f; P_N) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n^{\vec{}}),$$

каде што $P_N = \{\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{N-1}\}$ е дадена мрежа од $N \geq 1$ точки во $[0, 1]^s$.

Грешка-во-најлош-случај на итегрирањето во просторот $H_s(K)$ се дефинира со

$$e(H_s(K); P_N) = \sup_{\substack{f \in H_s(K), \\ \|f\|_{H_s(K)} \leq 1}} |I_s(f) - Q_s(f; P_N)|.$$

Следејќи ги Слоан и Возниаковски [СлВо1] овде ќе го изнесеме следниот резултат: Грешката-во-најлош-случај на интегрирањето $e(H_s(K); P_N)$ во просторот $H_s(K)$ преку користење на $P_N =$

$\{\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{N-1}\}$ - произволна мрежа го задоволува равенството

$$e^2(H_s(K); P_N) = \int_{[0,1]^{2s}} K(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x}d\vec{y} - \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{[0,1]^s} K(\vec{x}_n, \vec{y}) d\vec{y} + \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{h=0}^{N-1} K(\vec{x}_n, \vec{x}_h). \quad (1.8)$$

Во оваа глава беа изнесени основните поими и тврдења од теоријата сврзана со проблематиката која се разгледува во оваа дисертација.

Основните задачи и нивните решенија ќе бидат претставени последователно во текот на следните три глави.

Глава 2

За средно-квадратната грешка на интегрирањето во тежински Собољев простор $H_{Sob,s,\vec{\gamma},\mathcal{B}_4}$

2.1 Воведни поими

Во оваа глава ќе го разгледаме повеќедимензионалното Квази-Монте Карло интегрирање во тежински Собољев простор $H_{Sob,s,\vec{\gamma},\mathcal{B}_4}$ воведен од Хикернел [Хик]. Овој простор е генериран од репродуцирачко јадро базирано на полиномите на Бернули до степен 4. Ние ќе ги апроксимираме интегралите од интеграндите од овој простор со Квази-Монте Карло алгоритам со еднакви квадратурни тежини. Во испитувањата ја добивме средно-квадратната грешка на интегрирање во тежинскиот Собољев простор $H_{Sob,s,\vec{\gamma},\mathcal{B}_4}$ во облик на Волш-Фуриев ред. Како последица од оваа формула ја добиваме горната граница и асимптотското

однесување $\mathcal{O}(b^{-m})$ на средно-квадратната грешка на интегрирањето во овој простор со користење на (t, m, s) -мрежа, која е (s, b) -дигитално поместена.

Во оваа глава ќе воведеме нова трансформација на точките од дадена низа од $[0, 1]^s$, така наречена "тент"-трансформација при база b , при што b е произволен парен природен број.

Понатаму во пресметките ќе биде добиена горна граница и асимптотско однесување $\mathcal{O}(b^{-2m})$ на средно-квадратната грешка на интегрирањето во просторот $H_{Sob, s, \vec{\gamma}, B_4}$ со користење на (t, m, s) -мрежа, која е (s, b) -дигитално поместена, а потоа пополнета со тент-трансформација при база b .

2.1.1 Постапка на (s, b) -дигитално поместување

Резултатите кои ги добивме во истражувањата и се презентирани во оваа глава претставуваат обопштување на резултатите добиени од Кристеа, Дик, Леобахер и Пилишхамер [КДЛП]. Во последните години Кристеа, Дик, Леобахер и Пилишхамер, Дик и Пилишхамер [ДиПи 1] и други автори ги користат Волшовите функции од ред $b \geq 2$ и нивни генерализации како на пример Волшови функции над конечни полиња како алатка за решавање на проблеми од повеќедимензионалната интеграција во тежински Соболев простор $H_{Sob, s, \vec{\gamma}, B_4}$.

Следува потсетување на некои општо познати поими и резултати од теоријата на Квази-Монте Карло интегрирањето.

За произволни реални броеви $x, y \in [0, 1)$ со записи во броен систем

со основа b од облик

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i b^{-i-1}, \quad y = \sum_{i=0}^{\infty} y_i b^{-i-1},$$

каде што за $i \geq 0$ $x_i, y_i \in \{0, 1, \dots, b-1\}$, и за бесконечно многу вредности на i важи $x_i \neq b-1$ и $y_i \neq b-1$, нека е дефинирана операцијата

$$x \oplus_1^b y = \sum_{i=0}^{\infty} [(x_i + y_i) \pmod{b}] b^{-i-1}.$$

За произволни вектори $\vec{x} = (x_1, \dots, x_s) \in [0, 1]^s$, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_s) \in [0, 1]^s$ се дефинира операцијата

$$\vec{x} \oplus_s^b \vec{y} = (x_1 \oplus_1^b y_1, \dots, x_s \oplus_1^b y_s).$$

Нека $P_N = \{\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{N-1}\}$ е произволна мрежа во $[0, 1]^s$. За произволен вектор $\vec{\sigma} \in [0, 1]^s$ се дефинира така наречена (s, b) -**дигитално поместена мрежа** со

$$P_N((s, b); \vec{\sigma}) = \{\vec{x}_0 \oplus_s^b \vec{\sigma}, \vec{x}_1 \oplus_s^b \vec{\sigma}, \dots, \vec{x}_{N-1} \oplus_s^b \vec{\sigma}\}.$$

Со оваа операција се постигнува рандомизирање на почетната мрежа P_N .

Дефиниција 2.1 За произволно генерирачко јадро $K \in L_2([0, 1]^{2s})$ се дефинира соодветно (s, b) -**дигитално поместено јадро** со

$$K_{(s,b)-ds}(\vec{x}, \vec{y}) = \int_{[0,1]^s} K(\vec{x} \oplus_s^b \vec{\sigma}, \vec{y} \oplus_s^b \vec{\sigma}) d\vec{\sigma}, \quad \vec{x}, \vec{y} \in [0, 1]^s.$$

Во продолжение ќе ја изнесеме дефиницијата за средно-квadratната грешка на интегрирањето во Хилбертов простор според Дик и Пилишхамер [ДиПи 1].

Дефиниција 2.2 Нека $H_s(K)$ биде произволен Хилбертов простор генериран со јадро K . Нека P_N биде произволна мрежа составена од N точки во $[0, 1]^s$. Средно-квадратна грешка $\widehat{e}_{(s,b)-ds}(H_s(K); P_N)$ на интегрирањето во просторот $H_s(K)$ со користење на случајна (s, b) - дигитално поместена мрежа P_N се дефинира со

$$\widehat{e}_{(s,b)-ds}(H_s(K); P_N) = \left(\int_{[0,1]^s} e^2(H_s(K); P_N((s, b); \vec{\sigma})) d\vec{\sigma} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Да забележиме дека Дик и Пилишхамер [ДиПи 1] го имаат докажано следниот резултат.

Средно-квадратната грешка $\widehat{e}_{(s,b)-ds}(H_s(K); P_N)$ на интегрирање во просторот $H_s(K)$ со користење на (s, b) -дигитално поместена мрежа P_N го задоволува равенството

$$\widehat{e}_{(s,b)-ds}(H_s(K); P_N) = e(H_s(K_{(s,b)-ds}); P_N),$$

т.е. средно-квадратната грешка $\widehat{e}_{(s,b)-ds}(H_s(K); P_N)$ на интегрирањето во просторот $H_s(K)$ со користење на случајна (s, b) -дигитално поместена мрежа P_N е еднаква на обичната грешка-во-најлош-случај на интегрирањето во Хилбертов простор генериран со (s, b) -дигитално поместено јадро $K_{(s,b)-ds}$ и со користење на оригиналната мрежа P_N .

2.1.2 Тент-трансформација при база b

Во ова подпоглавје ќе дефинираме нов тип на трансформација на s -димензионални мрежи. Да го одбележиме фактот дека за прв пат поимот ”тент”- трансформација е воведен од Хикернел [Хик] и потоа е користен од Кристеа, Дик, Леобахер и Пилишхамер [КДЛП] за решавање на задачи од Квази-Монте Карло интегрирањето во тежински Хилбертов

простор. Тие автори ја разгледуваат тент-трансформацијата само во случај кога $b = 2$.

Овде во нашиот труд ние ќе предложиме едно обопштување на тент-трансформацијата во случај кога $b \geq 2$ е произволен парен број. Како специјален случај на нашата дефиниција за конкретна вредност на $b = 2$ се добива дефиницијата на тент-трансформацијата воведена од Хикернел [Хик]. Во случај кога b е непарен број вложивме многу напори, но не се добија задоволителни резултати.

Според направените истражувања од наша страна, може да предложиме и други трансформации од типот на тент-трансформацијата кои се независни од парноста на b , но по примената на тие трансформации, не се добија очекуваните резултати за подобри редови на големина на средно-квадратната грешка.

Нека $b \geq 2$ е произволна база и b е парен број. Да дефинираме функција $\Phi(x)$ над $[0, 1)$ со

$$\Phi(x) = \begin{cases} b \cdot x - 2\alpha, & \text{ако } x \in \left[\frac{2\alpha}{b}, \frac{2\alpha+1}{b}\right), \quad \alpha = 0, 1, \dots, \frac{b-2}{2}, \\ 2 + 2\alpha - b \cdot x, & \text{ако } x \in \left[\frac{2\alpha+1}{b}, \frac{2\alpha+2}{b}\right), \quad \alpha = 0, 1, \dots, \frac{b-2}{2}, \end{cases} \quad (2.1)$$

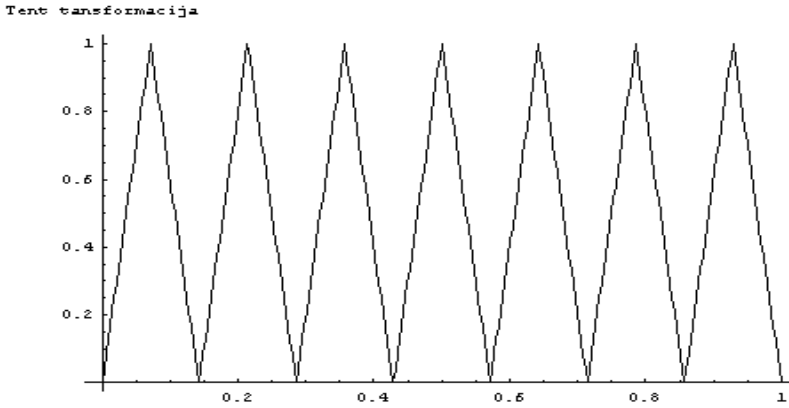
која ќе ја викаме **тент-трансформација при база b** .

Коментар: тент-трансформацијата го добила името според нејзиниот график, кој личи на шатор; на следната слика е претставен график на тент-трансформација при база $b = 14$.

За произволен вектор $\vec{x} = (x_1, \dots, x_s) \in [0, 1]^s$ ќе дефинираме функција

$$\Phi(\vec{x}) = (\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_s)).$$

Врз точките на мрежата $P_N((s, b); \vec{\sigma})$ ќе примениме тент-

Слика 2.1: Тент-трансформација при база $b = 14$

трансформација при база b , па се добива мрежата:

$$P_N((s, b); \Phi; \vec{\sigma}) = \{\Phi(\vec{x}_0 \oplus_s^b \vec{\sigma}), \Phi(\vec{x}_1 \oplus_s^b \vec{\sigma}), \dots, \Phi(\vec{x}_{N-1} \oplus_s^b \vec{\sigma})\},$$

која ќе ја викаме **мрежа која е (s, b) -дигитално поместена, а потоа пополнета со тент-трансформација при база b .**

Со следната дефиниција ќе воведеме нов тип на средно-квадратна грешка на интегрирање во тежинскиот простор $H_s(K)$, а имено:

Дефиниција 2.3 Средно-квадратна грешка $\hat{e}_{(s,b)\text{-ds},\Phi}(H_s(K); P_N)$ на интегрирање во просторот $H_s(K)$ со користење на мрежа P_N , која е (s, b) -дигитално поместена, а потоа пополнета со тент-трансформација при база b , се дефинира со

$$\hat{e}_{(s,b)\text{-ds},\Phi}(H_s(K); P_N) = \left(\int_{[0,1]^s} e^2(H_s(K); P_N((s, b); \Phi; \vec{\sigma})) d\vec{\sigma} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Соодветно на горната дефиниција, во следната дефиниција ќе воведеме

поим за јадро кое е (s, b) -дигитално поместено, а потоа пополнето со тент-трансформација при база b .

Дефиниција 2.4 *За произволно генерирачко јадро $K \in L_2([0, 1]^{2s})$ соодветно (s, b) -дигитално поместено јадро, а потоа пополнето со тент-трансформација се дефинира со*

$$K_{(s,b)\text{-ds},\Phi}(\vec{x}, \vec{y}) = \int_{[0,1]^s} K(\Phi(\vec{x} \oplus_s^b \vec{\sigma}), \Phi(\vec{y} \oplus_s^b \vec{\sigma})) d\vec{\sigma}, \quad \vec{x}, \vec{y} \in [0, 1]^s.$$

Во горната дефиниција беше користен поимот јадро, но попрецизно е на почеток да биде користен поимот ”функција” за $K_{(s,b)\text{-ds},\Phi}$. Следејќи ја општата алгебарска теорија на Аронжујан [Аро] со која се дава неопходен и доволен услов за да една функција биде генерирачко јадро, лесно може да се докаже дека функцијата $K_{(s,b)\text{-ds},\Phi}(\vec{x}, \vec{y})$ е навистина генерирачко јадро. Доказот за тоа се базира на фактот дека функцијата $K(x, y)$ е генерирачко јадро.

2.2 Повеќедимензионална интеграција во тежински Собољев простор $H_{Sob,s,\vec{\gamma},B_4}$

2.2.1 Теориска основа на Собољев простор $H_{Sob,s,\vec{\gamma},B_4}$

Во ова поглавје ќе направиме испитувања за средно-квадратната грешка на интегрирањето во тежински Собољев простор $H_{Sob,s,\vec{\gamma},B_4}$ од функции чии парцијални изводи до ред 2 се интегралбилни заедно со својот квадрат. Овој простор е воведен од Хикернел [Хик]. Следува детална дефиниција на овој простор.

Нека B_k го означува k -тиот полиноми на Бернули, т. е.

$$B_0(x) = 1, \quad B_1(x) = x - \frac{1}{2},$$

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}, \quad B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}.$$

Нека воведеме ознака $\mathcal{B}_4 = \{B_0, B_1, B_2, B_4\}$ и нека $S = \{1, 2, \dots, s\}$ биде множество од индексите на координатите. За дадено подмножество $u \subseteq S$ нека $|u|$ ја означува кардиналноста на u . За даден вектор \vec{x} нека \vec{x}_u го означува векторот добиен од координатите на \vec{x} чии индекси припаѓаат на u . За даден вектор $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_s)$ од реални позитивни тежини каде што $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_s > 0$, нека $\gamma_u = \prod_{j \in u} \gamma_j$. При такви претпоставки, Хикернел [Хик] го дефинира Собољевиот простор:

$$H_{Sob, s, \vec{\gamma}, \mathcal{B}_4} = \{h : \|h\| < \infty\},$$

каде што

$$\|h\| = \sum_{u \subseteq S} \sum_{v \subseteq u} \gamma_u^{-1} \gamma_v^{-1} \int_{[0,1]^{|v|}} \left[\int_{[0,1]^{s-|v|}} \frac{\partial^{|u|+|v|} h}{\partial \vec{x}_u \partial \vec{x}_v} d\vec{x}_{S \setminus v} \right]^2 d\vec{x}_v.$$

Генерирачкото јадро на просторот $H_{Sob, s, \vec{\gamma}, \mathcal{B}_4}$ е дадено со

$$K_{\vec{\gamma}}(\vec{x}, \vec{y}) = \prod_{j=1}^s K_{\gamma_j}(x_j, y_j), \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_s), \quad \vec{y} = (y_1, \dots, y_s) \in [0, 1]^s, \quad (2.2)$$

при што за дадени реални броеви $x, y \in [0, 1]$ и дадена тежина $\gamma > 0$ едно-димензионално генерирачко јадро $K_{\gamma}(x, y)$ се дефинира со

$$K_{\gamma}(x, y) = B_0(x)B_0(y) + \gamma B_1(x)B_1(y) + \frac{\gamma^2}{4} B_2(x)B_2(y) - \frac{\gamma^2}{24} B_4(|x - y|). \quad (2.3)$$

2.2.2 Формулација на задачите

Претходно воведените поими за функционалниот тежински Соболев простор $H_{Sob,s,\bar{\gamma},B_4}$, за средно-квадратната грешка на интегрирањето и различните типови на генерирачки јадра ќе ни дозволат да ги поставиме за решавање следните задачи:

Задача 2.1

Да се најде точна формула за средно-квадратната грешка на интегрирањето во тежински Соболев простор $H_{Sob,s,\bar{\gamma},B_4}$ преку користење на произволна мрежа која е (s, b) -дигитално поместена.

Задача 2.2

Да се најде редот на големина на средно-квадратната грешка на интегрирањето во тежински Соболев простор $H_{Sob,s,\bar{\gamma},B_4}$ преку користење на (s, b) -дигитално поместена (t, m, s) -мрежа.

Задача 2.3

Да се изрази средно-квадратната грешка на интегрирањето во произволен генериран Хилбертов простор преку користење на произволна мрежа, која е (s, b) -дигитално поместена, а потоа пополнета со тент-трансформација; во термините на обична грешка-во-најлош-случај на интегрирањето во некој друг генериран Хилбертов простор.

Задача 2.4

Да се добие точна формула за средно-квадратната грешка на интегрирањето во произволен генериран Хилбертов простор преку користење на произволна мрежа, која е (s, b) -дигитално поместена, а потоа пополнета со тент-трансформација. Потоа да се адаптира таа формула за средно-квадратната грешка на интегрирање во произволен генериран Хилбертов простор, но преку користење на произволна (t, m, s) -мрежа, која е (s, b) -дигитално поместена, а потоа пополнета со

тент-трансформација.

Задача 2.5

Да се докаже дека со користење на тент-трансформација се подобрува редот на големина на средно-квадратната грешка на интегрирањето во просторот $H_{Sob,s,\bar{\gamma},B_4}$.

2.3 Средно-квадратна грешка на интегрирање во просторот $H_{Sob,s,\bar{\gamma},B_4}$ преку користење на (s, b) –дигитално поместена мрежа

Во ова поглавје се направени анализи и испитувања со кои се решени поставените Задача 2.1 и Задача 2.2; имено во ова поглавје е дадена точна формула за средно-квадратната грешка на интегрирањето во просторот $H_{Sob,s,\bar{\gamma},B_4}$ преку користење на произволна (s, b) –дигитално поместена мрежа и одреден е точниот ред на големина на истата грешка преку користење на (t, m, s) –мрежа, која е (s, b) –дигитално поместена.

2.3.1 Формула за средно-квадратната грешка на интегрирањето во просторот $H_{Sob,s,\bar{\gamma},B_4}$ преку користење на (s, b) –дигитално поместена мрежа

Во ова подпоглавје е докажана теорема со која се определува точна формула за средно-квадратната грешка на интегрирањето во просторот $H_{Sob,s,\bar{\gamma},B_4}$ преку користење на (s, b) –дигитално поместена мрежа изразена преку термините на Волшовите функции со база $b \geq 2$. За да ја докажеме точноста на таа теорема, неопходно ќе биде да се докажат некои претходни резултати изложени во следните три леми.

Три корисни равенства

Лема 2.1 Нека $k \geq 1$ е произволен цел број со запис во броен систем со основа b од облик $k = k_{a-1}b^{a-1} + k_{a-2}b^{a-2} + \dots + k_1b + k_0$, каде што за $0 \leq \tau \leq a-1$, $k_\tau \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ и $k_{a-1} \neq 0$. Нека дефинираме функција

$$\rho(b; k_{a-1}) = -\frac{b}{2} \left(1 - \mathbf{i} \cotg \frac{\pi}{b} k_{a-1} \right),$$

каде \mathbf{i} е имагинарната единица. Тогаш важат следните равенства:

$$\int_0^1 x \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} dx = \begin{cases} \frac{\rho(b; k_{a-1})}{b} \frac{1}{b^a}, & \text{ако } k = k_{a-1}b^{a-1}, \quad k_{a-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\}, \\ 0, & \text{инаку;} \end{cases}$$

$$\int_0^1 x^2 \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} dx =$$

$$\begin{cases} \frac{\rho(b; k_{a-1})}{b} \frac{1}{b^a} + \left(\frac{\rho(b; k_{a-1})}{b} + \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \right) \frac{1}{b^{2a}}, & \text{ако } k = k_{a-1}b^{a-1}, \\ & k_{a-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\}, \\ \frac{2\rho(b; k_{a-1})\rho(b; k_{j-1})}{b^2} \frac{1}{b^{a+j}}, & \text{ако } k = k_{a-1}b^{a-1} + k_{j-1}b^{j-1}, \\ & k_{a-1}, k_{j-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\}, \\ 0, & \text{инаку;} \end{cases}$$

и

$$\int_0^1 x^3 \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} dx =$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\rho(b;k_{a-1})}{b} \frac{1}{b^a} + \frac{3\cotg \frac{\pi}{b} k_{a-1}}{4} (\cotg \frac{\pi}{b} k_{a-1} + \mathbf{i}) \frac{1}{b^{2a}} \\ + \left(\frac{3}{4 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} - \frac{1}{2} \right) (1 - \mathbf{i} \cotg \frac{\pi}{b} k_{a-1}) \frac{1}{b^{3a}}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1}, \\ & k_{a-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\}, \\ \frac{3\rho(b;k_{a-1})\rho(b;k_{j-1})}{b^2} \frac{1}{b^{a+j}} \\ + \frac{3\rho(b;k_{j-1})\cotg \frac{\pi}{b} k_{a-1}}{2b} (\cotg \frac{\pi}{b} k_{a-1} + \mathbf{i}) \frac{1}{b^{2a+j}} \\ + \frac{3\rho(b;k_{a-1})\cotg \frac{\pi}{b} k_{j-1}}{2b} (\cotg \frac{\pi}{b} k_{j-1} + \mathbf{i}) \frac{1}{b^{a+2j}}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1} + k_{j-1} b^{j-1}, \\ & k_{a-1}, k_{j-1} \in \{1, \dots, b-1\}, \\ \frac{6\rho(b;k_{a-1})\rho(b;k_{j-1})\rho(b;k_{\mu-1})}{b^3} \frac{1}{b^{a+j+\mu}}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1} + k_{j-1} b^{j-1} \\ & + k_{\mu-1} b^{\mu-1}, \\ & k_{a-1}, k_{j-1}, k_{\mu-1} \\ & \in \{1, 2, \dots, b-1\}, \\ 0, & \text{инаку.} \end{array} \right.$$

Доказ на Лема 2.1.

Нека $k \geq 1$ биде произволен фиксиран цел број со запис во броен систем со основа b даден во условот на Лемата. Ќе го користиме претставувањето

$$\int_0^1 x \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} dx = \sum_{h_1=0}^{b-1} \sum_{h_2=0}^{b-1} \cdots \sum_{h_a=0}^{b-1} \int_{\frac{h_1}{b} + \dots + \frac{h_a}{b^a}}^{\frac{h_1}{b} + \dots + \frac{h_a+1}{b^a}} x \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} dx. \quad (2.4)$$

За $x \in [\frac{h_1}{b} + \dots + \frac{h_a}{b^a}, \frac{h_1}{b} + \dots + \frac{h_a+1}{b^a})$ точно е следното равенство

$${}_b\text{wal}_k(x) = e^{\frac{2\pi\mathbf{i}}{b} h_1 k_0} \cdot e^{\frac{2\pi\mathbf{i}}{b} h_2 k_1} \dots e^{\frac{2\pi\mathbf{i}}{b} h_a k_{a-1}}.$$

Тогаш од (2.4) се добива дека

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 x \cdot \overline{wal_k(x)} dx \\
 = & \sum_{h_1=0}^{b-1} e^{-\frac{2\pi i}{b} h_1 k_0} \sum_{h_2=0}^{b-1} e^{-\frac{2\pi i}{b} h_2 k_1} \dots \sum_{h_a=0}^{b-1} e^{-\frac{2\pi i}{b} h_a k_{a-1}} \int_{\frac{h_1}{b} + \dots + \frac{h_a}{b^a}}^{\frac{h_1}{b} + \dots + \frac{h_a + 1}{b^a}} x dx \\
 = & \sum_{h_1=0}^{b-1} e^{-\frac{2\pi i}{b} h_1 k_0} \dots \sum_{h_a=0}^{b-1} e^{-\frac{2\pi i}{b} h_a k_{a-1}} \times \left[\frac{1}{b^a} \left(\frac{h_1}{b} + \frac{h_2}{b^2} + \dots + \frac{h_a}{b^a} \right) + \frac{1}{2b^{2a}} \right] \\
 = & \frac{1}{b^a} \sum_{h_1=0}^{b-1} \frac{h_1}{b} e^{-\frac{2\pi i}{b} h_1 k_0} \dots \sum_{h_a=0}^{b-1} e^{-\frac{2\pi i}{b} h_a k_{a-1}} \\
 + & \frac{1}{b^a} \sum_{h_1=0}^{b-1} e^{-\frac{2\pi i}{b} h_1 k_0} \sum_{h_2=0}^{b-1} \frac{h_2}{b^2} e^{-\frac{2\pi i}{b} h_2 k_1} \dots \sum_{h_a=0}^{b-1} e^{-\frac{2\pi i}{b} h_a k_{a-1}} + \dots \\
 + & \frac{1}{b^a} \sum_{h_1=0}^{b-1} e^{-\frac{2\pi i}{b} h_1 k_0} \dots \sum_{h_{a-1}=0}^{b-1} e^{-\frac{2\pi i}{b} h_{a-1} k_{a-2}} \sum_{h_a=0}^{b-1} \frac{h_a}{b^a} e^{-\frac{2\pi i}{b} h_a k_{a-1}} \\
 + & \frac{1}{2b^{2a}} \sum_{h_1=0}^{b-1} e^{-\frac{2\pi i}{b} h_1 k_0} \dots \sum_{h_a=0}^{b-1} e^{-\frac{2\pi i}{b} h_a k_{a-1}} \\
 = & \frac{\rho(b; k_{a-1})}{b^{2a}} \sum_{h_1=0}^{b-1} e^{-\frac{2\pi i}{b} h_1 k_0} \dots \sum_{h_{a-1}=0}^{b-1} e^{-\frac{2\pi i}{b} h_{a-1} k_{a-2}},
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

при што го користевме фактот дека за секој број $\beta \in \{1, 2, \dots, b-1\}$

$$\sum_{h=0}^{b-1} h e^{-\frac{2\pi i}{b} h \beta} = \rho(b; \beta).$$

Ако $k_0 = k_1 = \dots = k_{a-2} = 0$, тогаш $k = k_{a-1} b^{a-1}$, па од (2.5) се добива дека

$$\int_0^1 x \cdot \overline{wal_k(x)} dx = \frac{\rho(b; k_{a-1})}{b} \frac{1}{b^a}.$$

Ако постои индекс δ , $1 \leq \delta \leq a - 2$ таков што $k_{\delta-1} \neq 0$, следува дека

$$\sum_{h_\delta=0}^{b-1} e^{-\frac{2\pi i}{b} h_\delta k_{\delta-1}} = 0,$$

па од (2.5) се добива дека

$$\int_0^1 x \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} dx = 0.$$

Конечно е добиена точноста на првата формула од тврдењето на Лема 2.1. Останатите равенства во Лема 2.1 можат да бидат докажани на сличен начин.

Волш-Фуриева презентација на (s, b) -дигитално поместено јадро

Во следните две лемии ќе дадеме Волш-Фуриева презентација на (s, b) -дигитално поместено јадро $K_{(s,b)-ds}$.

Лема 2.2 (i) Нека $K(x, y)$, $x, y \in [0, 1]$ е произволно генерирачко јадро, тогаш соодветното (s, b) -дигитално поместено јадро $K_{(s,b)-ds}(x, y)$ има Волш-Фуриев развој од следниот облик

$$K_{(s,b)-ds}(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{K}_{\mathcal{W}(b)}(k, k) \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} \overline{{}_b\text{wal}_k(y)},$$

каде што за секој $k \in \mathbb{N}_0$

$$\widehat{K}_{\mathcal{W}(b)}(k, k) = \int_0^1 \int_0^1 K(x, y) \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} \overline{{}_b\text{wal}_k(y)} dx dy.$$

(ii) Нека $K \in L_2([0, 1]^{2s})$ е произволно s -димензионално генерирачко јадро, тогаш соодветното (s, b) -дигитално поместено јадро $K_{(s,b)-ds}(\vec{x}, \vec{y})$

има развој во Волш-Фуриев ред од следниот облик:

$$K_{(s,b)-ds}(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s} \widehat{K}_{\mathcal{W}(b), \vec{\gamma}}(\vec{k}, \vec{k}) {}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}) \overline{{}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{y})}, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in [0, 1]^s,$$

каде што за секој вектор $\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s$

$$\widehat{K}_{\mathcal{W}(b), \vec{\gamma}}(\vec{k}, \vec{k}) = \int_{[0,1]^{2s}} K_{\vec{\gamma}}(\vec{x}, \vec{y}) \overline{{}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x})} {}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{y}) d\vec{x} d\vec{y}. \quad (2.6)$$

Доказ на Лема 2.2.

(i) Основното својство на генерирачките јадра дека $\forall x, \forall y \in [0, 1]$ важи $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$, имплицира дека генерирачките јадра имаат специјален вид на нивните Волш-Фуриеви развои:

$$K(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \widehat{K}_{\mathcal{W}(b)}(k, l) {}_b\text{wal}_k(x) \overline{{}_b\text{wal}_l(y)},$$

каде што

$$\widehat{K}_{\mathcal{W}(b)}(k, l) = \int_0^1 \int_0^1 K(x, y) \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} {}_b\text{wal}_l(y) dx dy.$$

Оваа забелешка применета конкретно врз произволно (s, b) -дигитално поместено јадро $K_{(s,b)-ds}$ го дава следниот резултат:

$$K(x \oplus_1^b \sigma, y \oplus_1^b \sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \widehat{K}_{\mathcal{W}(b)}(k, l) {}_b\text{wal}_k(x \oplus_1^b \sigma) \overline{{}_b\text{wal}_l(y \oplus_1^b \sigma)},$$

и

$$K_{(s,b)-ds}(x, y) = \int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \widehat{K}_{\mathcal{W}(b)}(k, l) {}_b\text{wal}_k(x \oplus_1^b \sigma) \overline{{}_b\text{wal}_l(y \oplus_1^b \sigma)} \right] d\sigma$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \widehat{K}_{\mathcal{W}(b)}(k, l) \int_0^1 {}_b\text{wal}_k(x) {}_b\text{wal}_k(\sigma) \overline{{}_b\text{wal}_l(y)} \cdot \overline{{}_b\text{wal}_l(\sigma)} d\sigma \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \widehat{K}_{\mathcal{W}(b)}(k, l) {}_b\text{wal}_k(x) \overline{{}_b\text{wal}_l(y)} \int_0^1 {}_b\text{wal}_k(\sigma) \overline{{}_b\text{wal}_l(\sigma)} d\sigma \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{K}_{\mathcal{W}(b)}(k, k) {}_b\text{wal}_k(x) \overline{{}_b\text{wal}_k(y)},
\end{aligned}$$

со што е докажан делот (i) на лемата.

(ii) Според општата теорија на генерирачки јадра, (види [ДиПи2] и [Аро]), лесно се докажува дека ако $K \in L_2([0, 1]^{2s})$ е произволно генерирачко јадро, тогаш соодветното (s, b) -дигитално поместено јадро $K_{(s, b)-ds}(\vec{x}, \vec{y})$ има Волш-Фуриев развој од облик

$$K_{(s, b)-ds}(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s} \widehat{K}_{\mathcal{W}(b), \vec{\gamma}}(\vec{k}, \vec{k}) {}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}) \overline{{}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{y})}, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in [0, 1]^s,$$

каде што за секој вектор $\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s$

$$\widehat{K}_{\mathcal{W}(b), \vec{\gamma}}(\vec{k}, \vec{k}) = \int_{[0, 1]^{2s}} K_{\vec{\gamma}}(\vec{x}, \vec{y}) \overline{{}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x})} {}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{y}) d\vec{x} d\vec{y},$$

со што е комплетиран доказот на Лема 2.2.

Лема 2.3 (i) Нека за произволен реален број $\gamma > 0$, K_γ е генерирачко јадро, дефинирано со равенството (2.3). Тогаш за секој цел број $k \geq 0$, k -тиот Волш-Фуриев коефициент $\widehat{K}_{\mathcal{W}(b); \gamma}(k, k)$ на функцијата $K_\gamma(x, y)$ е

дефиниран со

$$\widehat{K}_{\mathcal{W}(b),\gamma}(k, k) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{ако } k = 0; \\ \frac{\gamma}{4 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \cdot \frac{1}{b^{2a}} + \gamma^2 \left[\frac{1}{120} + \frac{1}{8 \sin^4 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} - \frac{1}{8 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \right] \frac{1}{b^{4a}}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1}, a \geq 1, \\ & a \in \mathbb{Z}, k_{a-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\}; \\ \gamma^2 \left[\frac{1}{8 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1} \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{j-1}} - \frac{1}{24 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \right] \frac{1}{b^{2(a+j)}} + \gamma^2 \left[\frac{1}{120} + \frac{1}{4 \sin^4 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} - \frac{5}{24 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \right] \frac{1}{b^{4a}}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1} + k_{j-1} b^{j-1} + \\ & k_{j-2} b^{j-2} + \dots + k_0, a \geq 1, \\ & \text{за } 1 \leq j \leq a-1: \\ & k_{a-1}, k_{j-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\}, \\ & \text{за } 0 \leq \tau \leq j-2: \\ & k_\tau \in \{0, 1, \dots, b-1\} \end{array} \right. .$$

(ii) За произволен вектор од тежини $\vec{\gamma}$ нека $K_{\vec{\gamma}}$ биде генерирачкото јадро, дефинирано со равенството (2.2). Тогаш за секој вектор $\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s$, \vec{k} -тиот Воли-Фуриев коефициент $\widehat{K}_{\mathcal{W}(b),\vec{\gamma}}(\vec{k}, \vec{k})$ на функцијата $K_{\vec{\gamma}}(\vec{x}, \vec{y})$ го задоволува равенството:

$$\widehat{K}_{\mathcal{W}(b),\vec{\gamma}}(\vec{k}, \vec{k}) = \prod_{j=1}^s \widehat{K}_{\mathcal{W}(b),\gamma_j}(k_j, k_j).$$

(iii) (s, b) -дигитално поместеното јадро $K_{(s,b)\text{-ds}}(\vec{x}, \vec{y})$ има презентација како Воли-Фуриев ред од облик

$$K_{(s,b)\text{-ds}}(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s} \widehat{K}_{\mathcal{W}(b),\vec{\gamma}}(\vec{k}, \vec{k}) {}_b \text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}) \overline{{}_b \text{wal}_{\vec{k}}(\vec{y})}, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in [0, 1]^s.$$

Доказ на Лема 2.3.

(i) за секој цел број $k \geq 0$ и реален број $\gamma > 0$, согласно со формулата (2.6) од Лема 2.2 имаме дека

$$\begin{aligned}
 \widehat{K}_{\mathcal{W}(b); \gamma}(k, k) &= \int_0^1 \int_0^1 B_0(x) B_0(y) \overline{bwal_k(x)}_b wal_k(y) dx dy \\
 &+ \gamma \int_0^1 \int_0^1 B_1(x) B_1(y) \overline{bwal_k(x)}_b wal_k(y) dx dy \\
 &+ \frac{\gamma^2}{4} \int_0^1 \int_0^1 B_2(x) B_2(y) \overline{bwal_k(x)}_b wal_k(y) dx dy \\
 &- \frac{\gamma^2}{24} \int_0^1 \int_0^1 B_4(|x-y|) \overline{bwal_k(x)}_b wal_k(y) dx dy \\
 &= I_0(k) + \gamma I_1(k) + \frac{\gamma^2}{4} I_2(k) - \frac{\gamma^2}{24} I_4(k).
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Ако поставиме $k = 0$ и од (2.7) лесно се пресметува дека

$$\widehat{K}_{\mathcal{W}(b); \gamma}(0, 0) = 1. \tag{2.8}$$

Нека сега $k \geq 1$ биде произволен цел број со претставување во броен систем со основа b од облик:

$$k = k_{a-1} b^{a-1} + k_{a-2} b^{a-2} + \dots + k_1 b + k_0, \tag{2.9}$$

каде што a е цел број, $a \geq 1$ и за $0 \leq \tau \leq a-1$, $k_\tau \in \{0, 1, \dots, b-1\}$, и $k_{a-1} \neq 0$.

Очигледно е дека

$$I_0(k) = 0. \tag{2.10}$$

Следува пресметување на интегралот $I_1(k)$:

$$I_1(k) = \int_0^1 \int_0^1 B_1(x) B_1(y) \overline{bwal_k(x)}_b wal_k(y) dx dy.$$

Во сила се равенствата:

$$I_1(k) = \int_0^1 B_1(x) \overline{bwal_k(x)} dx \int_0^1 B_1(y) {}_bwal_k(y) dy = |J_1(k)|^2, \quad (2.11)$$

каде што $J_1(k) = \int_0^1 B_1(x) \overline{bwal_k(x)} dx$.

Со користење на првото равенство од Лема 2.1 следува дека

$$\begin{aligned} J_1(k) &= \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) \overline{bwal_k(x)} dx = \int_0^1 x \cdot \overline{bwal_k(x)} dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \overline{bwal_k(x)} dx \\ &= \begin{cases} \frac{\rho(b; k_{a-1})}{b} \frac{1}{b^a}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1}, \quad a \geq 1, \quad k_{a-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\}, \\ 0, & \text{инаку.} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Од (2.11) и (2.12) се добива равенството

$$I_1(k) = \begin{cases} \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \cdot \frac{1}{b^{2a}}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1}, \quad k_{a-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\}, \\ 0, & \text{инаку.} \end{cases} \quad (2.13)$$

Следува пресметување на интегралот

$$I_2(k) = \int_0^1 B_2(x) \overline{bwal_k(x)} dx \int_0^1 B_2(y) {}_bwal_k(y) dy.$$

Добиваме:

$$I_2(k) = \int_0^1 B_2(x) \overline{bwal_k(x)} dx \int_0^1 B_2(y) {}_bwal_k(y) dy = |J_2(k)|^2, \quad (2.14)$$

каде што $J_2(k) = \int_0^1 B_2(x) \overline{bwal_k(x)} dx$. Понатаму следува точноста на равенството

$$J_2(k) = \int_0^1 x^2 \cdot \overline{bwal_k(x)} dx - \int_0^1 x \cdot \overline{bwal_k(x)} dx. \quad (2.15)$$

Со користење на првото и второто равенство на Лема 2.1, од (2.14) и

(2.15) следува равенството

$$I_2(k) = \begin{cases} \frac{\cos^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}}{4 \sin^4 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \cdot \frac{1}{b^{4a}}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1}, k_{a-1} \in \{1, \dots, b-1\}, \\ \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1} \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{j-1}} \cdot \frac{1}{b^{2(a+j)}}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1} + k_{j-1} b^{j-1}, a \geq 1, \\ & 1 \leq j < a; k_{a-1}, k_{j-1} \in \{1, \dots, b-1\}, \\ 0, & \text{инаку.} \end{cases} \quad (2.16)$$

Следува пресметување на вредноста на интегралот:

$$I_4(k) = \int_0^1 \int_0^1 B_4(|x-y|) \overline{b \text{wal}_k(x)}_b \text{wal}_k(y) dx dy.$$

Понатаму следува:

$$\begin{aligned} I_4(k) &= \int_0^1 \int_0^1 \left[|x-y|^4 - 2|x-y|^3 + |x-y|^2 - \frac{1}{30} \right] \overline{b \text{wal}_k(x)}_b \text{wal}_k(y) dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 |x-y|^4 \overline{b \text{wal}_k(x)}_b \text{wal}_k(y) dx dy \\ &\quad - 2 \int_0^1 \int_0^1 |x-y|^3 \overline{b \text{wal}_k(x)}_b \text{wal}_k(y) dx dy + \int_0^1 \int_0^1 |x-y|^2 \overline{b \text{wal}_k(x)}_b \text{wal}_k(y) dx dy \\ &\quad - \frac{1}{30} \int_0^1 \int_0^1 \overline{b \text{wal}_k(x)}_b \text{wal}_k(y) dx dy = A_4(k) - 2A_3(k) + A_2(k) - \frac{1}{30} A_0(k). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Очигледно е дека

$$A_0(k) = 0. \quad (2.18)$$

Со користење на Лема 2.1 последователно се добива:

$$\begin{aligned}
 A_2(k) &= \int_0^1 \int_0^1 |x-y|^2 \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} {}_b\text{wal}_k(y) dx dy \\
 &= \int_0^1 x^2 \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} dx \cdot \int_0^1 {}_b\text{wal}_k(y) dy - 2 \int_0^1 x \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} dx \cdot \int_0^1 y \cdot {}_b\text{wal}_k(y) dy \\
 &+ \int_0^1 \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} dx \cdot \int_0^1 y^2 \cdot {}_b\text{wal}_k(y) dy = -2 \left| \int_0^1 x \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} dx \right|^2 \\
 &= \begin{cases} -2 \frac{|\rho(b; k_{a-1})|^2}{b^{2a}} \cdot \frac{1}{b^{2a}} & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1}, \quad a \geq 1, \quad k_{a-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\}, \\ 0, & \text{инаку} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{-1}{2 \sin^2 \frac{\pi}{b k_{a-1}}} \cdot \frac{1}{b^{2a}}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1}, k_{a-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\}, \\ 0, & \text{инаку.} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Ги имаме следните равенства

$$\begin{aligned}
 A_4(k) &= \int_0^1 \int_0^1 |x-y|^4 \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} {}_b\text{wal}_k(y) dx dy \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 (x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4) \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} {}_b\text{wal}_k(y) dx dy \\
 &= \int_0^1 x^4 \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} dx \int_0^1 {}_b\text{wal}_k(y) dy - 4 \int_0^1 x^3 \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} dx \int_0^1 y \cdot {}_b\text{wal}_k(y) dy \\
 &+ 6 \int_0^1 x^2 \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} dx \int_0^1 y^2 \cdot {}_b\text{wal}_k(y) dy - 4 \int_0^1 x \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} dx \int_0^1 y^3 {}_b\text{wal}_k(y) dy \\
 &+ \int_0^1 \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} dx \int_0^1 y^4 {}_b\text{wal}_k(y) dy \\
 &= -8 \operatorname{Re} \left[\int_0^1 x^3 \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} dx \int_0^1 y \cdot {}_b\text{wal}_k(y) dy \right] + 6 \left| \int_0^1 x^2 \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} dx \right|^2.
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Со користење на Лема 2.1 се добива следниот резултат:

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left[\int_0^1 x^3 \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} dx \int_0^1 y \cdot {}_b\text{wal}_k(y) dy \right] \\ = & \begin{cases} \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \cdot \frac{1}{b^{2a}} \\ + \left(\frac{1}{4 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} - \frac{3}{8 \sin^4 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \right) \cdot \frac{1}{b^{4a}}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1}, k_{a-1} \in \{1, \dots, b-1\}, \\ 0, & \text{инаку} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.21)$$

и

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^1 x^2 \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} dx \right|^2 \\ = & \begin{cases} \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \cdot \frac{1}{b^{2a}} \\ + \frac{\cos^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}}{4 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \cdot \frac{1}{b^{4a}}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1}, k_{a-1} \in \{1, \dots, b-1\}, \\ \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1} \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{j-1}} \cdot \frac{1}{b^{2(a+j)}}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1} + k_{j-1} b^{j-1}, \\ & k_{a-1}, k_{j-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\} \\ 0, & \text{инаку.} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Од (2.20), (2.21) и (2.22) се добива дека

$$\begin{aligned} A_4(k) = & \begin{cases} \left(\frac{-7}{2 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} + \frac{9}{2 \sin^4 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \right) \cdot \frac{1}{b^{4a}}, \\ + \frac{-1}{2 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \cdot \frac{1}{b^{2a}} \\ \frac{3}{2 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1} \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{j-1}} \cdot \frac{1}{b^{2(a+j)}}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1}, k_{a-1} \in \{1, \dots, b-1\}, \\ & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1} + k_{j-1} b^{j-1}, \\ & k_{a-1}, k_{j-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\} \\ 0, & \text{инаку.} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Може да се докаже дека за $\beta \in \{1, 2, \dots, b-1\}$ важат следните равенства:

$$\operatorname{Re} \left[\sum_{u=0}^{b-1} \sum_{v=u}^{b-1} (v-u) e^{\frac{2\pi i}{b}(v-u)\beta} \right] = \frac{-b}{2 \sin^2 \frac{\pi}{b} \beta}; \quad (2.24)$$

$$\operatorname{Re} \left[\sum_{u=0}^{b-1} \sum_{v=u}^{b-1} (v^3 - u^3) e^{\frac{2\pi i}{b}(v-u)\beta} \right] = \frac{-b^2(2b-3)}{4 \sin^2 \frac{\pi}{b} \beta} + \frac{3b(1 + \cos \frac{2\pi}{b} \beta)}{8 \sin^4 \frac{\pi}{b} \beta}. \quad (2.25)$$

Согласно со записот (2.9) на целиот број k , ќе ги добиеме следните равенства:

$$\begin{aligned} A_3(k) &= \int_0^1 \int_0^1 |x-y|^3 \overline{bwal_k(x)} bwal_k(y) dx dy \\ &= \sum_{u=0}^{b^a-1} \sum_{v=0}^{b^a-1} \int_{\frac{u}{b^a}}^{\frac{u+1}{b^a}} \int_{\frac{v}{b^a}}^{\frac{v+1}{b^a}} |x-y|^3 \overline{bwal_k(x)} bwal_k(y) dx dy \\ &= \sum_{u=0}^{b^a-1} \sum_{v=0}^{b^a-1} \overline{bwal_k\left(\frac{u}{b^a}\right)} bwal_k\left(\frac{v}{b^a}\right) \int_{\frac{u}{b^a}}^{\frac{u+1}{b^a}} \int_{\frac{v}{b^a}}^{\frac{v+1}{b^a}} |x-y|^3 dx dy. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Во продолжение ќе користиме техника слична на техниката предложена и развиена во ([ДиПи2]). На таков начин се добива дека важи следното равенство:

$$\int_{\frac{u}{b^a}}^{\frac{u+1}{b^a}} \int_{\frac{v}{b^a}}^{\frac{v+1}{b^a}} |x-y|^3 dx dy = \begin{cases} \frac{1}{10} \frac{1}{b^{5a}}, & \text{ако } u = v \\ \left(|u-v|^3 + \frac{|u-v|}{2} \right) \frac{1}{b^{5a}}, & \text{ако } u \neq v. \end{cases}$$

Сега, од (2.26) се добива дека

$$\begin{aligned} A_3(k) &= \frac{1}{10} \frac{1}{b^{5a}} \sum_{u=0}^{b^a-1} \overline{bwal_k\left(\frac{u}{b^a}\right)} bwal_k\left(\frac{u}{b^a}\right) \\ &+ \frac{1}{2b^{5a}} \sum_{u=0}^{b^a-1} \sum_{\substack{v=0 \\ v \neq u}}^{b^a-1} |u-v| \overline{bwal_k\left(\frac{u}{b^a}\right)} bwal_k\left(\frac{v}{b^a}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{b^{5a}} \sum_{u=0}^{b^a-1} \sum_{\substack{v=0 \\ v \neq u}}^{b^a-1} |u-v|^3 \overline{bwal_k\left(\frac{u}{b^a}\right)} bwal_k\left(\frac{v}{b^a}\right) \\
& = \frac{1}{10} \frac{1}{b^{4a}} + \frac{1}{2b^{5a}} \sum_{u=0}^{b^a-1} \sum_{\substack{v=0 \\ v \neq u}}^{b^a-1} |u-v| \overline{bwal_k\left(\frac{u}{b^a}\right)} bwal_k\left(\frac{v}{b^a}\right) \\
& + \frac{1}{b^{5a}} \sum_{u=0}^{b^a-1} \sum_{\substack{v=0 \\ v \neq u}}^{b^a-1} |u-v|^3 \overline{bwal_k\left(\frac{u}{b^a}\right)} bwal_k\left(\frac{v}{b^a}\right).
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Ќе ја пресметаме првата сума од равенството (2.27). Ако е дадена матрица $A = (a_{u,v})_{u,v=0}^{b^a-1}$ за која $a_{u,v} \in \mathbb{C}$ и $a_{u,v} = \bar{a}_{v,u}$, тогаш важи следното равенство

$$\sum_{u=0}^{b^a-1} \sum_{\substack{v=0 \\ v \neq u}}^{b^a-1} a_{u,v} = 2\operatorname{Re} \left[\sum_{u=0}^{b^a-2} \sum_{v=u+1}^{b^a-1} a_{u,v} \right].$$

Сега го имаме равенството

$$\begin{aligned}
& \sum_{u=0}^{b^a-1} \sum_{\substack{v=0 \\ v \neq u}}^{b^a-1} |u-v| \overline{bwal_k\left(\frac{u}{b^a}\right)} bwal_k\left(\frac{v}{b^a}\right) \\
& = 2\operatorname{Re} \left[\sum_{u=0}^{b^a-2} \sum_{v=u+1}^{b^a-1} (v-u) \overline{bwal_k\left(\frac{u}{b^a}\right)} bwal_k\left(\frac{v}{b^a}\right) \right].
\end{aligned} \tag{2.28}$$

За произволни цели броеви $0 \leq u \leq b^a - 2$ и $0 \leq v \leq b^a - 1$, ќе ги користиме претставувањата

$$u = bu' + u_0, \quad v = bv' + v_0,$$

каде што

$$0 \leq u', v' \leq b^{a-1} - 1 \quad \text{и} \quad 0 \leq u_0, v_0 \leq b - 1.$$

Тогаш, условот $v \geq u + 1$ е еквивалентен на случаите:

прв случај $v' > u'$, $0 \leq u_0, v_0 \leq b - 1$ и

втор случај $v' = u'$, $v_0 > u_0$.

Сега се добива дека

$$\begin{aligned}
 & \sum_{u=0}^{b^a-2} \sum_{v=u}^{b^a-1} \overline{(v-u)_b wal_k \left(\frac{u}{b^a} \right)}_b wal_k \left(\frac{v}{b^a} \right) \\
 = & \sum_{u'=0}^{b^{a-1}-1} \sum_{v'=u'+1}^{b^{a-1}-1} \sum_{u_0=0}^{b-1} \sum_{v_0=0}^{b-1} [(bv' + v_0) - (bu' + u_0)] \\
 & \times \overline{b wal_k \left(\frac{bu' + u_0}{b^a} \right)}_b wal_k \left(\frac{bv' + v_0}{b^a} \right) \\
 + & \sum_{u'=0}^{b^{a-1}-1} \sum_{u_0=0}^{b-1} \sum_{v_0=u_0}^{b-1} (v_0 - u_0) \overline{b wal_k \left(\frac{bu' + u_0}{b^a} \right)}_b wal_k \left(\frac{bu' + v_0}{b^a} \right)
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Ќе ги пресметаме двете суми од горното равенство. Во продолжение следуваат соодветните пресметки.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{u'=0}^{b^{a-1}-1} \sum_{v'=u'+1}^{b^{a-1}-1} \sum_{u_0=0}^{b-1} \sum_{v_0=0}^{b-1} [(bv' + v_0) - (bu' + u_0)] \overline{b wal_k \left(\frac{bu' + u_0}{b^a} \right)}_b wal_k \left(\frac{bv' + v_0}{b^a} \right) \\
 = & \sum_{u'=0}^{b^{a-1}-1} \sum_{v'=u'+1}^{b^{a-1}-1} \sum_{u_0=0}^{b-1} \sum_{v_0=0}^{b-1} [(bv' + v_0) - (bu' + u_0)] \\
 & \times \overline{b wal_k \left(\frac{u'}{b^{a-1}} \right)} e^{-\frac{2\pi i}{b} k_{a-1} u_0} b wal_k \left(\frac{v'}{b^{a-1}} \right) e^{\frac{2\pi i}{b} k_{a-1} v_0} \\
 = & \sum_{u'=0}^{b^{a-1}-1} \overline{b wal_k \left(\frac{u'}{b^{a-1}} \right)} \sum_{v'=u'+1}^{b^{a-1}-1} b wal_k \left(\frac{v'}{b^{a-1}} \right) \\
 & \times \left[bv' \sum_{u_0=0}^{b-1} e^{-\frac{2\pi i}{b} k_{a-1} u_0} \sum_{v_0=0}^{b-1} e^{\frac{2\pi i}{b} k_{a-1} v_0} + \sum_{u_0=0}^{b-1} e^{-\frac{2\pi i}{b} k_{a-1} u_0} \sum_{v_0=0}^{b-1} v_0 e^{\frac{2\pi i}{b} k_{a-1} v_0} \right. \\
 & \left. - bu' \sum_{u_0=0}^{b-1} e^{-\frac{2\pi i}{b} k_{a-1} u_0} \sum_{v_0=0}^{b-1} e^{\frac{2\pi i}{b} k_{a-1} v_0} - \sum_{u_0=0}^{b-1} u_0 e^{-\frac{2\pi i}{b} k_{a-1} u_0} \sum_{v_0=0}^{b-1} e^{\frac{2\pi i}{b} k_{a-1} v_0} \right] = 0.
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

За втората сума на (2.29) се добива

$$\begin{aligned} & \sum_{u'=0}^{b^{a-1}-1} \sum_{u_0=0}^{b-1} \sum_{v_0=u_0}^{b-1} \overline{(v_0 - u_0)_b \text{wal}_k \left(\frac{bu' + u_0}{b^a} \right)} {}_b \text{wal}_k \left(\frac{bu' + v_0}{b^a} \right) = \\ & \sum_{u'=0}^{b^{a-1}-1} \sum_{u_0=0}^{b-1} \sum_{v_0=u_0}^{b-1} (v_0 - u_0) e^{-\frac{2\pi i}{b} k_{a-1} u_0} e^{\frac{2\pi i}{b} k_{a-1} v_0} = b^{a-1} \sum_{u=0}^{b-1} \sum_{v=u}^{b-1} (v - u) e^{\frac{2\pi i}{b} (v-u) k_{a-1}}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Од (2.28), (2.29), (2.30), (2.31) и со користење на равенството (2.24) се добива дека

$$\begin{aligned} & \sum_{u=0}^{b^a-1} \sum_{\substack{v=0 \\ v \neq u}}^{b^a-1} |u - v| {}_b \text{wal}_k \left(\frac{u}{b^a} \right) \overline{{}_b \text{wal}_k \left(\frac{v}{b^a} \right)} \\ & = 2\text{Re} \left[b^{a-1} \sum_{u=0}^{b-1} \sum_{v=u}^{b-1} (v - u) e^{\frac{2\pi i}{b} (v-u) k_{a-1}} \right] = \frac{-b^a}{\sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Го имаме следното претставување:

$$\begin{aligned} & \sum_{u=0}^{b^a-1} \sum_{\substack{v=0 \\ v \neq u}}^{b^a-1} |u - v|^3 \overline{{}_b \text{wal}_k \left(\frac{u}{b^a} \right)} {}_b \text{wal}_k \left(\frac{v}{b^a} \right) \\ & = 2\text{Re} \left\{ \sum_{u'=0}^{b^{a-1}-2} \sum_{v'=u'+1}^{b^{a-1}-1} \sum_{u_0=0}^{b-1} \sum_{v_0=0}^{b-1} [(bv' + v_0) - (bu' + u_0)]^3 \right. \\ & \quad \left. \times \overline{{}_b \text{wal}_k \left(\frac{u'}{b^{a-1}} \right)} {}_b \text{wal}_k \left(\frac{v'}{b^{a-1}} \right) e^{\frac{2\pi i}{b} (v_0 - u_0) k_{a-1}} \right\} \\ & + 2\text{Re} \left\{ \sum_{u'=0}^{b^{a-1}-1} \sum_{u_0=0}^{b-1} \sum_{v_0=u_0}^{b-1} (v_0 - u_0)^3 e^{\frac{2\pi i}{b} (v_0 - u_0) k_{a-1}} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(-\frac{b^2 + 4}{2 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} + \frac{3}{\sin^4 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \right) b^a \\
 &+ 2\operatorname{Re} \left\{ \sum_{u'=0}^{b^{a-1}-2} {}_b\text{wal}_k \left(\frac{u'}{b^{a-1}} \right) \sum_{v'=u'+1}^{b^{a-1}-1} {}_b\text{wal}_k \left(\frac{v'}{b^{a-1}} \right) \right. \\
 &\quad \times \left[b^3 (v' - u')^3 \sum_{u_0=0}^{b-1} e^{-\frac{2\pi i}{b} u_0 k_{a-1}} \sum_{v_0=0}^{b-1} e^{\frac{2\pi i}{b} v_0 k_{a-1}} \right. \\
 &+ 3b^2 (v' - u')^2 \sum_{u_0=0}^{b-1} e^{-\frac{2\pi i}{b} u_0 k_{a-1}} \sum_{v_0=0}^{b-1} v_0 e^{\frac{2\pi i}{b} v_0 k_{a-1}} \\
 &- 3b^2 (v' - u')^2 \sum_{u_0=0}^{b-1} u_0 e^{-\frac{2\pi i}{b} u_0 k_{a-1}} \sum_{v_0=0}^{b-1} e^{\frac{2\pi i}{b} v_0 k_{a-1}} \\
 &+ 3b (v' - u') \sum_{u_0=0}^{b-1} e^{-\frac{2\pi i}{b} u_0 k_{a-1}} \sum_{v_0=0}^{b-1} v_0^2 e^{\frac{2\pi i}{b} v_0 k_{a-1}} \\
 &- 6b (v' - u') \sum_{u_0=0}^{b-1} u_0 e^{-\frac{2\pi i}{b} u_0 k_{a-1}} \sum_{v_0=0}^{b-1} v_0 e^{\frac{2\pi i}{b} v_0 k_{a-1}} \\
 &+ \left. \left. 3b (v' - u') \sum_{u_0=0}^{b-1} u_0^2 e^{-\frac{2\pi i}{b} u_0 k_{a-1}} \sum_{v_0=0}^{b-1} e^{\frac{2\pi i}{b} v_0 k_{a-1}} \right. \right. \\
 &+ \sum_{u_0=0}^{b-1} e^{-\frac{2\pi i}{b} u_0 k_{a-1}} \sum_{v_0=0}^{b-1} v_0^3 e^{\frac{2\pi i}{b} v_0 k_{a-1}} - \sum_{u_0=0}^{b-1} u_0^3 e^{-\frac{2\pi i}{b} u_0 k_{a-1}} \sum_{v_0=0}^{b-1} e^{\frac{2\pi i}{b} v_0 k_{a-1}} \\
 &- \left. \left. 3 \sum_{u_0=0}^{b-1} u_0 e^{-\frac{2\pi i}{b} u_0 k_{a-1}} \sum_{v_0=0}^{b-1} v_0^2 e^{\frac{2\pi i}{b} v_0 k_{a-1}} + 3 \sum_{u_0=0}^{b-1} u_0^2 e^{-\frac{2\pi i}{b} u_0 k_{a-1}} \sum_{v_0=0}^{b-1} v_0 e^{\frac{2\pi i}{b} v_0 k_{a-1}} \right] \right\} \\
 &= \left(-\frac{b^2 + 4}{2 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} + \frac{3}{\sin^4 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \right) b^a \\
 &+ 2\operatorname{Re} \left\{ \sum_{u'=0}^{b^{a-1}-2} {}_b\text{wal}_k \left(\frac{u'}{b^{a-1}} \right) \sum_{v'=u'+1}^{b^{a-1}-1} {}_b\text{wal}_k \left(\frac{v'}{b^{a-1}} \right) \right. \\
 &\quad \times \left[-6b (v' - u') \sum_{u_0=0}^{b-1} u_0 e^{-\frac{2\pi i}{b} u_0 k_{a-1}} \sum_{v_0=0}^{b-1} v_0 e^{\frac{2\pi i}{b} v_0 k_{a-1}} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left. 3 \sum_{u_0=0}^{b-1} u_0^2 e^{-\frac{2\pi i}{b} u_0 k_{a-1}} \sum_{v_0=0}^{b-1} v_0 e^{\frac{2\pi i}{b} v_0 k_{a-1}} - 3 \sum_{u_0=0}^{b-1} u_0 e^{-\frac{2\pi i}{b} u_0 k_{a-1}} \sum_{v_0=0}^{b-1} v_0^2 e^{\frac{2\pi i}{b} v_0 k_{a-1}} \right] \Bigg\} \\
& = \left(-\frac{b^2 + 4}{2 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} + \frac{3}{\sin^4 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \right) b^a \\
& - v \frac{3b^3}{\sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{u'=0}^{b^{a-1}-2} \sum_{v'=u'+1}^{b^{a-1}-1} (v' - u') \overline{{}_b \operatorname{wal}_k \left(\frac{u'}{b^{a-1}} \right)} {}_b \operatorname{wal}_k \left(\frac{v'}{b^{a-1}} \right) \right\} \\
& - \frac{3b^2}{\sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \cot g \frac{\pi}{b} k_{a-1} \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{i} \sum_{u'=0}^{b^{a-1}-2} \sum_{v'=u'+1}^{b^{a-1}-1} \overline{{}_b \operatorname{wal}_k \left(\frac{u'}{b^{a-1}} \right)} {}_b \operatorname{wal}_k \left(\frac{v'}{b^{a-1}} \right) \right\} \\
& = \left(-\frac{b^2 + 4}{2 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} + \frac{3}{\sin^4 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \right) b^a \\
& - \frac{3b^3}{\sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{u'=0}^{b^{a-1}-2} \sum_{v'=u'+1}^{b^{a-1}-1} (v' - u') e^{-\frac{2\pi i}{b} [k_0(v_{a-1}-u_{a-1})+\dots+k_{a-2}(v_1-u_1)]} \right\} \\
& - \frac{3b^2}{\sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \cot g \frac{\pi}{b} k_{a-1} \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{i} \sum_{u'=0}^{b^{a-1}-2} \sum_{v'=u'+1}^{b^{a-1}-1} e^{\frac{2\pi i}{b} [k_0(v_{a-1}-u_{a-1})+\dots+k_{a-2}(v_1-u_1)]} \right\}. \tag{2.33}
\end{aligned}$$

Нека $k = k_{a-1}b^{a-1}$, каде што $a \geq 1$ и $k_{a-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\}$. Тогаш од (2.33) се добива дека

$$\begin{aligned}
& \sum_{u=0}^{b^a-1} \sum_{\substack{v=0 \\ v \neq u}}^{b^a-1} |u - v|^3 \overline{{}_b \operatorname{wal}_k \left(\frac{u}{b^a} \right)} {}_b \operatorname{wal}_k \left(\frac{v}{b^a} \right) \\
& = \left(-\frac{b^2 + 4}{2 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} + \frac{3}{\sin^4 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \right) b^a - \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} b^{3a}. \tag{2.34}
\end{aligned}$$

Нека $1 \leq j \leq a-1$ е најголемиот индекс, така што $k = k_{a-1}b^{a-1} + k_{j-1}b^{j-1} + \dots + k_1b + k_0$, каде што $k_{a-1}, k_{j-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\}$.

Ќе ја користиме нотацијата

$$\begin{aligned} & \sum_{u'=0}^{b^{a-1}-2} \sum_{v'=u'+1}^{b^{a-1}-1} (v' - u') e^{\frac{2\pi i}{b} [k_0(v_{a-1}-u_{a-1})+\dots+k_{a-2}(v_1-u_1)]} \\ = & \sum_{n=0}^{b^{a-1}-2} \sum_{m=n+1}^{b^{a-1}-1} (m - n) e^{\frac{2\pi i}{b} [k_0(m_{a-2}-n_{a-2})+\dots+k_{j-1}(m_{a-j-1}-n_{a-j-1})]}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Овде ќе ги воведеме ознаките

$$n = n' + n_{a-j-1} + n''$$

и

$$m = m' + m_{a-j-1} + m'',$$

каде што

$$n' = n_{a-2}b^{a-2} + \dots + n_{a-j}b^{a-j},$$

$$n'' = n_{a-j-2}b^{a-j-2} + \dots + n_1b + n_0,$$

$$m' = m_{a-2}b^{a-2} + \dots + m_{a-j}b^{a-j}$$

и

$$m'' = m_{a-j-2}b^{a-j-2} + \dots + m_1b + m_0.$$

Тогаш од (2.35) се добива дека

$$\begin{aligned} & \sum_{u'=0}^{b^{a-1}-2} \sum_{v'=u'+1}^{b^{a-1}-1} (v' - u') e^{\frac{2\pi i}{b} [k_0(v_{a-1}-u_{a-1})+\dots+k_{a-2}(v_1-u_1)]} \\ = & \sum_{n''} \sum_{n_{a-j-1}=0}^{b-1} \underbrace{\sum_{n'} \sum_{\substack{m'' \\ m_{a-j-1}=0 \\ m' \\ m \geq n+1}}}_{m \geq n+1} \sum_{m'} [(m' - n') + (m_{a-j-1} - n_{a-j-1})b^{a-j-1}] \\ + & (m'' - n'') e^{\frac{2\pi i}{b} [k_0(m_{a-2}-n_{a-2})+\dots+k_{j-1}(m_{a-j-1}-n_{a-j-1})]}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Условот $m \geq n + 1$ ги наложува случаите:

Првиот случај, каде што $m' > n'$, $0 \leq n_{a-j-1}, m_{a-j-1} \leq b-1$, n'' и m'' може да бидат произволни;

Вториот случај, каде што $m' = n'$, $m_{a-j-1} > n_{a-j-1}$, n'' и m'' може да бидат произволни;

Третиот случај, каде што $m' = n'$, $m_{a-j-1} = n_{a-j-1}$, и $m'' > n''$.

Тогаш од (2.36) се добива дека

$$\begin{aligned}
& \sum_{u'=0}^{b^{a-1}-2} \sum_{v'=u'+1}^{b^{a-1}-1} (v' - u') e^{\frac{2\pi i}{b} [k_0(v_{a-1}-u_{a-1})+\dots+k_{a-2}(v_1-u_1)]} \\
= & \sum_{n''} \sum_{m''} \sum_{n'} \sum_{m'} \sum_{\substack{m' > n' \\ n_{a-j-1}=0 \\ m_{a-j-1}=0}} \sum_{n_{a-j-1}=0}^{b-1} \sum_{m_{a-j-1}=0}^{b-1} [(m' - n') + (m'' - n'')] \\
+ & (m_{a-j-1} - n_{a-j-1}) b^{a-j-1} e^{\frac{2\pi i}{b} [k_0(m_{a-2}-n_{a-2})+\dots+k_{j-1}(m_{a-j-1}-n_{a-j-1})]} \quad (2.37) \\
+ & \sum_{n'} \sum_{n''=0}^{b^{a-j-1}-1} \sum_{m''=0}^{b^{a-j-1}-1} \sum_{n_{a-j-1}=0}^{b-2} \sum_{m_{a-j-1}=n_{a-j-1}+1}^{b-1} [(m'' - n'')] \\
+ & (m_{a-j-1} - n_{a-j-1}) b^{a-j-1} e^{\frac{2\pi i}{b} k_{j-1}(m_{a-j-1}-n_{a-j-1})} \\
+ & \sum_{n'} \sum_{n''=0}^{b^{a-j-1}-2} \sum_{m''=n''+1}^{b^{a-j-1}-1} \sum_{n_{a-j-1}=0}^{b-1} (m'' - n'').
\end{aligned}$$

Ги добивме резултатите:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n''} \sum_{m''} \sum_{n'} \sum_{m'} \sum_{\substack{m' > n' \\ n_{a-j-1}=0 \\ m_{a-j-1}=0}} \sum_{n_{a-j-1}=0}^{b-1} \sum_{m_{a-j-1}=0}^{b-1} [(m' - n') + (m'' - n'')] \\
+ & (m_{a-j-1} - n_{a-j-1}) b^{a-j-1} e^{\frac{2\pi i}{b} [k_0(m_{a-2}-n_{a-2})+\dots+k_{j-1}(m_{a-j-1}-n_{a-j-1})]} = 0; \quad (2.38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n'} \sum_{n''=0}^{b^{a-j-1}-1} \sum_{m''=0}^{b^{a-j-1}-1} \sum_{n_{a-j-1}=0}^{b-2} \sum_{m_{a-j-1}=n_{a-j-1}+1}^{b-1} [(m'' - n'' \\ & + (m_{a-j-1} - n_{a-j-1})b^{a-j-1}] e^{\frac{2\pi i}{b} k_{j-1} (m_{a-j-1} - n_{a-j-1})} \\ & = \frac{-1}{2 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{j-1}} b^j b^{3(a-j-1)}; \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\sum_{n'} \sum_{n''=0}^{b^{a-j-1}-2} \sum_{m''=n''+1}^{b^{a-j-1}-1} \sum_{n_{a-j-1}=0}^{b-1} (m'' - n'') = b^j \left(\frac{b^{3(a-j)}}{6b^3} - \frac{b^{a-j}}{6b} \right). \quad (2.40)$$

Од (2.37), (2.38), (2.39) и (2.40) се добива дека

$$\begin{aligned} & \sum_{u'=0}^{b^{a-1}-2} \sum_{v'=u'+1}^{b^{a-1}-1} (v' - u') e^{\frac{2\pi i}{b} [k_0(v_{a-1}-u_{a-1})+\dots+k_{a-2}(v_1-u_1)]} \\ & = -b^j \left[\frac{3 - \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{j-1}}{6b^3 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{j-1}} b^{3(a-j)} + \frac{b^{a-j}}{6b} \right]. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Ја имаме следната презентација:

$$\begin{aligned} & \sum_{u'=0}^{b^{a-1}-2} \sum_{v'=u'+1}^{b^{a-1}-1} \overline{b \text{wal}_k \left(\frac{u'}{b^{a-1}} \right)} b \text{wal}_k \left(\frac{v'}{b^{a-1}} \right) \\ & = \sum_{n=0}^{b^{a-1}-2} \sum_{m=n+1}^{b^{a-1}-1} e^{\frac{2\pi i}{b} [k_0(m_{a-2}-n_{a-2})+\dots+k_{j-1}(m_{a-j-1}-n_{a-j-1})]} \\ & = \sum_{n''} \sum_{n'} \sum_{m''} \sum_{m'} e^{\frac{2\pi i}{b} [k_0(m_{a-2}-n_{a-2})+\dots+k_{j-2}(m_{a-j}-n_{a-j})]} \\ & \times \sum_{n_{a-j-1}=0}^{b-1} e^{-\frac{2\pi i}{b} k_{j-1} n_{a-j-1}} \sum_{m_{a-j-1}=0}^{b-1} e^{\frac{2\pi i}{b} k_{j-1} m_{a-j-1}} = 0. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Од (2.33), (2.41) и (2.42) во случајот кога $k = k_{a-1}b^{a-1} + k_{j-1}b^{j-1} +$

... + $k_1 b + k_0$ се добива дека

$$\begin{aligned} & \sum_{u=0}^{b^a-1} \sum_{\substack{v=0 \\ v \neq u}}^{b^a-1} |u-v|^3 \overline{b \text{wal}_k \left(\frac{u}{b^a} \right)} b \text{wal}_k \left(\frac{v}{b^a} \right) \\ &= \left(\frac{-2}{\sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} + \frac{3}{\sin^4 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \right) b^a + \frac{3 - \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{j-1}}{2 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1} \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{j-1}} b^j b^{3(a-j)}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Од (2.34) и (2.43) го имаме следниот финален резултат

$$\begin{aligned} & \sum_{u=0}^{b^a-1} \sum_{\substack{v=0 \\ v \neq u}}^{b^a-1} |u-v|^3 \overline{b \text{wal}_k \left(\frac{u}{b^a} \right)} b \text{wal}_k \left(\frac{v}{b^a} \right) \\ &= \begin{cases} \left(\frac{-2}{\sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} + \frac{3}{\sin^4 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \right) \cdot b^a \\ - \frac{b^{3a}}{2 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1}, \\ & k_{a-1} \in \{1, \dots, b-1\}, \\ \left(\frac{-2}{\sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} + \frac{3}{\sin^4 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \right) \cdot b^a \\ + \frac{3 - \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{j-1}}{2 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1} \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{j-1}} \cdot b^j \cdot b^{3(a-j)}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1} + k_{j-1} b^{j-1} + \\ & k_{j-2} b^{j-2} + \dots + k_0, a \geq 1, \\ & 1 \leq j < a, \\ & k_{a-1}, k_{j-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\}. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Тогаш, од (2.27), (2.32) и (2.44) конечно се добива дека

$$A_3(k) = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{10} - \frac{5}{2 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} + \frac{3}{\sin^4 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \right) \frac{1}{b^{4a}}, \\ + \frac{-1}{2 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \frac{1}{b^{2a}} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1}, \\ k_{a-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\}, \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3 - \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{j-1}}{2 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1} \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{j-1}} \frac{1}{b^{2(a+j)}} \\ + \left(\frac{1}{10} - \frac{5}{2 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} + \frac{3}{\sin^4 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \right) \frac{1}{b^{4a}}, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1} + k_{j-1} b^{j-1} + \\ \dots + k_1 b + k_0, \\ k_{a-1}, k_{j-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\}. \end{array}$$

(2.45)

Нека за произволни цели броеви $\alpha, \beta \in \{1, 2, \dots, b-1\}$ поставиме

$$\omega'_1(b; \alpha) = \frac{1}{10} - \frac{5}{2 \sin^2 \frac{\pi}{b} \alpha} + \frac{3}{\sin^4 \frac{\pi}{b} \alpha},$$

$$\omega'_2(b; \alpha; \beta) = \frac{3 - \sin^2 \frac{\pi}{b} \beta}{2 \sin^2 \frac{\pi}{b} \alpha \sin^2 \frac{\pi}{b} \beta}$$

и

$$\omega'_3(b; \alpha) = \frac{1}{10} - \frac{5}{2 \sin^2 \frac{\pi}{b} \alpha} + \frac{3}{\sin^4 \frac{\pi}{b} \alpha}.$$

Тогаш, се добива дека

$$A_3(k) = \begin{cases} \frac{-1}{2 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \frac{1}{b^{2a}} + \omega'_1(b; k_{a-1}) \frac{1}{b^{4a}}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1}, \\ & k_{a-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\}, \\ \omega'_2(b; k_{a-1}; k_{j-1}) \frac{1}{b^{2(a+j)}} + \\ \omega'_3(b; k_{a-1}) \frac{1}{b^{4a}}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1} + k_{j-1} b^{j-1} + \\ & \dots + k_1 b + k_0, \\ & k_{a-1}, k_{j-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\}. \end{cases} \quad (2.46)$$

Од (2.16), (2.17), (2.18), (2.19), (2.23) и (2.45) конечно добиваме

дека

$$I_4(k) = \left\{ \begin{array}{l} 0, \quad \text{ако } k = 0, \\ \left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{2 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} - \frac{3}{2 \sin^4 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \right) \cdot \frac{1}{b^{4a}}, \quad \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1}, \\ \quad \quad \quad a \geq 1, k_{a-1} \in \{1, \dots, b-1\}, \\ \left(-\frac{1}{5} + \frac{5}{\sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} - \frac{6}{\sin^4 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \right) \cdot \frac{1}{b^{4a}} + \\ \quad \quad \quad \frac{-3 + 2 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{j-1}}{2 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1} \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{j-1}} \cdot \frac{1}{b^{2(a+j)}}, \quad \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1} + k_{j-1} b^{j-1}, \\ \quad \quad \quad a \geq 1, 1 \leq j < a, \\ \quad \quad \quad k_{a-1}, k_{j-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\}, \\ \left(-\frac{1}{5} + \frac{5}{\sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} - \frac{6}{\sin^4 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \right) \cdot \frac{1}{b^{4a}} - \\ \quad \quad \quad \frac{3 - \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{j-1}}{\sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1} \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{j-1}} \cdot \frac{1}{b^{2(a+j)}}, \quad \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1} + k_{j-1} b^{j-1} + \\ \quad \quad \quad k_{j-2} b^{j-2} + \dots + k_1 b + k_0, \\ \quad \quad \quad a \geq 1, \quad 1 \leq j < a, \\ \quad \quad \quad k_{a-1}, k_{j-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\}, \\ \quad \quad \quad \text{за } 0 \leq \tau \leq j-2 \\ \quad \quad \quad k_\tau \in \{0, 1, \dots, b-1\}. \end{array} \right. \quad (2.47)$$

Од (2.8), (2.10), (2.13), (2.16) и (2.47), за секој цел број $k \geq 0$ и

реален број $\gamma > 0$ се добива дека

$$\widehat{K}_{\mathcal{W}(b),\gamma}(k, k) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{ако } k = 0, \\ \gamma^2 \left(\frac{1}{120} + \frac{1}{8 \sin^4 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} - \frac{1}{8 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \right) \frac{1}{b^{4a}} \\ + \frac{\gamma}{4 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \frac{1}{b^{2a}} & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1}, \quad a \geq 1, \\ & k_{a-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\}, \\ \gamma^2 \left(\frac{1}{8 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1} \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{j-1}} - \frac{1}{24 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \right) \frac{1}{b^{2(a+j)}} \\ + \gamma^2 \left(\frac{1}{120} - \frac{5}{24 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} + \frac{1}{4 \sin^4 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \right) \frac{1}{b^{4a}}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1} + k_{j-1} b^{j-1} \\ & a \geq 1, \quad 1 \leq j < a, \\ & k_{a-1}, k_{j-1} \in \{1, \dots, b-1\}, \\ \gamma^2 \left(\frac{1}{8 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1} \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{j-1}} - \frac{1}{24 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \right) \frac{1}{b^{2(a+j)}} \\ + \gamma^2 \left(\frac{1}{120} - \frac{5}{24 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} + \frac{1}{4 \sin^4 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \right) \frac{1}{b^{4a}}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1} + k_{j-1} b^{j-1} + \\ & k_{j-2} b^{j-2} + \dots + k_1 b + k_0, \\ & a \geq 1, \quad 1 \leq j < a, \\ & \text{за } 0 \leq \tau \leq j-2, \\ & k_\tau \in \{0, 1, \dots, b-1\}, \\ & k_{a-1}, k_{j-1} \in \{1, \dots, b-1\}, \\ & \text{и постои индекс } i, \\ & 0 \leq i \leq j-2, k_i \neq 0 \end{array} \right.$$

Во последната формула третиот и четвртиот случај може да бидат обе-

динети во еден случај. На тој начин, можеме да запишеме:

$$\widehat{K}_{\mathcal{W}(b),\gamma}(k, k) = \begin{cases} 1, & \text{ако } k = 0, \\ \gamma^2 \left(\frac{1}{120} + \frac{1}{8 \sin^4 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} - \frac{1}{8 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \right) \frac{1}{b^{4a}} \\ + \frac{\gamma}{4 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \frac{1}{b^{2a}} & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1}, \quad a \geq 1, \\ & k_{a-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\}, \\ \gamma^2 \left(\frac{1}{8 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1} \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{j-1}} - \frac{1}{24 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \right) \frac{1}{b^{2(a+j)}} \\ + \gamma^2 \left(\frac{1}{120} - \frac{5}{24 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} + \frac{1}{4 \sin^4 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \right) \frac{1}{b^{4a}}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1} + k_{j-1} b^{j-1} + \\ & k_{j-2} b^{j-2} + \dots + k_1 b + k_0, \\ & a \geq 1, \quad 1 \leq j < a, \\ & \text{за } 0 \leq \tau \leq j-2, \\ & k_\tau \in \{0, 1, \dots, b-1\} \\ & k_{a-1}, k_{j-1} \in \{1, \dots, b-1\}. \end{cases}$$

(ii) Да го забележиме фактот дека за секој вектор $\vec{k} = (k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{N}_0^s$ и вектор од тежини $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_s)$ важат следните равенства:

$$\widehat{K}_{\mathcal{W}(b),\gamma}(\vec{k}, \vec{k}) = \prod_{j=1}^s \widehat{K}_{\mathcal{W}(b),\gamma_j}(k_j, k_j) = \widehat{K}_{\mathcal{W}(b),s,\gamma}(\vec{k}, \vec{k}),$$

со тоа е докажана точноста на дел (i) од оваа лема.

Точноста на (iii) од Лемата следува непосредно од (ii), со што Лема 2.3 е докажана.

Теорема 2.1 Средно-квадратната грешка $\widehat{e}_{(s,b)\text{-ds}}(H_{Sob,s,\vec{\gamma},B_4}; P_N)$ на интегрирањето во тежински Собољев простор $H_{Sob,s,\vec{\gamma},B_4}$ преку користење на произволна случајна (s,b) -дигитално поместена мрежа $P_N =$

$\{\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{N-1}\}$ е дадена со равенството

$$\hat{e}_{(s,b)\text{-ds}}^2(H_{Sob,s,\vec{\gamma},\mathcal{B}_4}; P_N) = -1 + \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{h=0}^{N-1} \sum_{\vec{k} \in \vec{N}_0^s} \widehat{K}_{\mathcal{W}(b),\vec{\gamma}}(\vec{k}, \vec{k})_{b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}_n) \overline{b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}_h)}},$$

каде што за произволен вектор од тежини $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_s)$ и вектор $\vec{k} = (k_1, \dots, k_s) \in \mathbf{N}_0^s$ коефициентот

$$\widehat{K}_{\mathcal{W}(b),\vec{\gamma}}(\vec{k}, \vec{k})$$

е дефиниран во Лема 2.3.

Теорема 2.1 претставува обопштување на резултатите на Кристеа, Дик, Леобахер и Пилишхамер [КДЛП]. Ако во Теорема 2.1 поставиме $b = 2$ се добива резултатот од Теорема 4 од [КДЛП].

Доказ на Теорема 2.1.

Во доказот на оваа теорема ќе го користиме следниот резултат на Дик и Пилишхамер [ДиПи 1], кој беше изложен во Глава 1, но заради неговата важност сега повторно го изнесуваме: средно-квадратната грешка на интегрирањето $\hat{e}_{(s,b)\text{-ds}}(H_s(K); P_N)$ во просторот $H_s(K)$ преку користење на мрежа P_N , која е (s, b) -дигитално поместена го задоволува равенството

$$\hat{e}_{(s,b)\text{-ds}}(H_s(K); P_N) = e(H_s(K_{(s,b)\text{-ds}}); P_N). \quad (2.48)$$

Од Лема 2.3 имаме дека: за произволен вектор од тежини $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_s)$ и вектор $\vec{k} = (k_1, \dots, k_s) \in \mathbf{N}_0^s$ коефициентот

$$\widehat{K}_{\mathcal{W}(b),\vec{\gamma}}(\vec{k}, \vec{k}) = \widehat{K}_{\vec{\gamma}}(\vec{k}, \vec{k}),$$

и за произволен реален број $\gamma > 0$ и за произволен цел број $k \geq 0$, коефициентот $\widehat{K}_{\mathcal{W}(b),\gamma}(k, k)$ е еднаков со $\widehat{K}_{\gamma}(k, k)$. Непосредно следува обликот

на Волш-Фуриева презентација на функцијата $K_{(s,b)-ds}$

$$K_{(s,b)-ds}(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s} \widehat{K}_{\mathcal{W}(b), \vec{\gamma}}(\vec{k}, \vec{k})_{bwal_{\vec{k}}}(\vec{x}) \overline{bwal_{\vec{k}}}(\vec{y}), \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in [0, 1]^s. \quad (2.49)$$

Понатаму со едноставни пресметувања може да се добие дека

$$\int_{[0,1]^{2s}} K_{\vec{\gamma}}(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x} d\vec{y} = 1. \quad (2.50)$$

Навистина, од дефиницијата на $K_{\vec{\gamma}}(\vec{x}, \vec{y})$ имаме дека

$$\begin{aligned} & \int_{[0,1]^{2s}} K_{\vec{\gamma}}(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x} d\vec{y} = \prod_{h=1}^s \int_0^1 \int_0^1 K_{\gamma_h}(x_h, y_h) dx_h dy_h \\ &= \prod_{h=1}^s \left[\int_0^1 \int_0^1 \left(B_0(x_h) B_0(y_h) + \gamma_h B_1(x_h) B_1(y_h) + \frac{\gamma_h^2}{4} B_2(x_h) B_2(y_h) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\gamma_h^2}{24} B_4(|x_h - y_h|) \right) dx_h dy_h \right] \\ &= \prod_{h=1}^s \left[\int_0^1 B_0(x_h) dx_h \int_0^1 B_0(y_h) dy_h + \gamma_h \int_0^1 B_1(x_h) dx_h \int_0^1 B_1(y_h) dy_h \right. \\ & \quad \left. + \frac{\gamma_h^2}{4} \int_0^1 B_2(x_h) dx_h \int_0^1 B_2(y_h) dy_h - \frac{\gamma_h^2}{24} \int_0^1 \int_0^1 B_4(|x_h - y_h|) dx_h dy_h \right]. \end{aligned}$$

За полиномите на Бернули важат следните равенства:

$$\int_0^1 B_0(x) dx = 1, \quad \int_0^1 B_1(x) dx = 0, \quad \int_0^1 B_2(x) dx = 0, \quad \int_0^1 \int_0^1 B_4(|x - y|) dx dy = 0,$$

од каде следува дека

$$\int_{[0,1]^{2s}} K_{\vec{\gamma}}(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x} d\vec{y} = \prod_{h=1}^s 1 = 1.$$

На сосема аналоген начин се покажува дека за секој фиксиран вектор $\vec{x} \in [0, 1]^s$ важи

$$\int_{[0,1]^s} K_{\vec{\gamma}}(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{y} = 1.$$

Конечно од (2.48), (1.8), (2.50) и (2.49) се добива дека

$$\widehat{e}_{(s,b)\text{-ds}}^2(H_{Sob,s,\vec{\gamma},\mathcal{B}_4}; P_N) = -1 + \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{h=0}^{N-1} \sum_{\vec{k} \in \vec{N}_0^s} \widehat{K}_{\mathcal{W}(b),\vec{\gamma}}(\vec{k}, \vec{k})_b \text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}_n) \overline{\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}_h)}.$$

Со тоа доказот на Теорема 2.1 е завршен.

2.3.2 За редот на големина на средно-квадратната грешка на интегрирање во Соболев простор $H_{Sob,s,\vec{\gamma},\mathcal{B}_4}$ со користење на (s, b) -дигитално поместена (t, m, s) -мрежа

Во ова подпоглавје преку резултатот на следната теорема е решена поставената Задача 2.2, односно даден е точниот ред на големина на средно-квадратната грешка на интегрирањето во просторот $H_{Sob,s,\vec{\gamma},\mathcal{B}_4}$ преку користење на (t, m, s) -мрежа, која е (s, b) -дигитално поместена.

Теорема 2.2 (i) (горна граница)

Нека $\frac{1}{4} < \lambda \leq 1$ е даден реален број. Тогаш постои дигитална (t, m, s) -мрежа \mathcal{P}_{b^m} над \mathbb{Z}_b и константи $c_\mu(b, \lambda, \gamma_j)$, каде што $1 \leq \mu \leq 6$, $1 \leq j \leq s$, така што средно-квадратната грешка на интегрирањето во просторот $H_{Sob,s,\vec{\gamma},\mathcal{B}_4}$ со користење на мрежата \mathcal{P}_{b^m} ја задоволува горната граница

$$\widehat{e}_{(s,b)\text{-ds}}^{2\lambda}(H_{Sob,s,\vec{\gamma},\mathcal{B}_4}; \mathcal{P}_{b^m}) \leq -1 + \prod_{j=1}^s \left[1 + c_1(b, \lambda, \gamma_j) \frac{1}{b^{2\lambda m}} + c_2(b, \lambda, \gamma_j) \frac{1}{b^{4\lambda m}} \right] + \frac{1}{b^m} \prod_{j=1}^s \left[c_3(b, \lambda, \gamma_j) + c_4(b, \lambda, \gamma_j) \frac{1}{b^{2\lambda m}} + c_5(b, \lambda, \gamma_j) \frac{1}{b^{4\lambda m}} + c_6(b, \lambda, \gamma_j) \frac{b^m}{b^{4\lambda m}} \right].$$

(ii) (асимптотско однесување)

средно-квадратната грешка на интегрирањето во просторот

$H_{Sob,s,\bar{\gamma},B_4}$ со користење на мрежата \mathcal{P}_{b^m} има асимптотско однесување од следниот тип:

(a) За $\frac{1}{4} < \lambda \leq \frac{1}{2}$

$$\hat{e}_{(s,b)-ds}(H_{Sob,s,\gamma,B_4}; \mathcal{P}_{b^m}) = \mathcal{O}(b^{-m});$$

(б) За $\forall \lambda, \frac{1}{2} < \lambda \leq 1$ постои $\epsilon = \epsilon(\lambda)$, така што

$$\hat{e}_{(s,b)-ds}(H_{Sob,s,\gamma,B_4}; \mathcal{P}_{b^m}) = \mathcal{O}(b^{-m(1-\epsilon)}).$$

Доказот на оваа теорема нема да го изнесеме овде од причина што ова не е најдобриот резултат во нашите испитувања. Овој резултат ќе ни послужи за споредба со добиените подобри резултати во Теорема 2.5.

2.4 Средно-квадратна грешка на интегрирање во генериран Хилбертов простор $H_s(K)$ со користење на мрежа, која е (s, b) -дигитално поместена, а потоа пополнета со тент-трансформација

Во ова поглавје ќе бидат направени испитувања со кои ќе бидат решени поставените Задача 2.3, Задача 2.4 и Задача 2.5. За таа цел неопходно е да ја докажеме точноста на следните три леми, кои се изнесени во следното подпоглавје.

2.4.1 Волш-Фуриев развој на јадро кое е (s, b) -дигитално поместено и потоа пополнето со тент-трансформација

Лема 2.4 Нека $k = k_0 + k_1b + \dots + k_{a-1}b^{a-1}$, каде што за $1 \leq \tau \leq a - 1$ $k_\tau \in \{0, 1, \dots, b - 1\}$ и $k_{a-1} \neq 0$ е произволен цел број. Тогаш следува:

(i) за секоја цифра $\mu \in \{0, 1, \dots, b - 1\}$ од броен систем со основа b и за секој реален број $u \in [0, 1)$ важи равенството

$${}_b\text{wal}_k\left(\frac{\mu}{b} + \frac{u}{b}\right) = e^{\frac{2\pi i}{b}\mu k_0} {}_b\text{wal}_{\lfloor \frac{k}{b} \rfloor}(u);$$

(ii) за секој $\mu \in \{1, 2, \dots, b\}$ и за секој реален број $u \in [0, 1)$ важи равенството

$${}_b\text{wal}_k\left(\frac{\mu - u}{b}\right) = e^{\frac{2\pi i}{b}\mu k_0} e^{-\frac{2\pi i}{b}(k_0 + k_1 + \dots + k_{a-1})} \overline{{}_b\text{wal}_{\lfloor \frac{k}{b} \rfloor}(u)},$$

каде што $\lfloor \frac{k}{b} \rfloor$ го означува стандардниот цел дел од $\frac{k}{b}$.

Доказ на Лема 2.4.

Доказот на оваа лема следува директно од дефиницијата на Волшовите функции.

Лема 2.5 Нека $K \in L_2([0, 1)^{2s})$ е произволно генерирачко јадро. Нека $k \geq 1$ е произволен цел број со претставување во броен систем со основа b од облик $k = k_{a-1}b^{a-1} + k_{a-2}b^{a-2} + \dots + k_1b + k_0$, каде што за $0 \leq \tau \leq a - 1$ $k_\tau \in \{0, 1, \dots, b - 1\}$ и $k_{a-1} \neq 0$. Тогаш k -тиот Волш-Фуриев коефициент на јадро кое е (s, b) -дигитално поместено и потоа пополнето со тент-

трансформација $K_{(s,b)-ds,\phi}$ го задоволува равенството:

$$\widehat{K}_{(s,b)-ds,\phi}(k, k) = \begin{cases} 0, & \text{ако } k_0 \neq 0 \\ & \text{и } k_0 \neq \frac{b}{2}, \\ \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 K(u, v) \overline{{}_b\text{wal}_{\lfloor \frac{k}{b} \rfloor}(u)} \cdot {}_b\text{wal}_{\lfloor \frac{k}{b} \rfloor}(v) dudv \right. \\ \left. + e^{-\frac{2\pi i}{b}(k_0+k_1+\dots+k_{a-1})} \times \int_0^1 \int_0^1 K(u, v) \overline{{}_b\text{wal}_{\lfloor \frac{k}{b} \rfloor}(u)} \cdot \overline{{}_b\text{wal}_{\lfloor \frac{k}{b} \rfloor}(v)} dudv \right\}, & \text{ако } k_0 = 0, \\ & \text{или } k_0 = \frac{b}{2}, \end{cases}$$

и каде што $\operatorname{Re}(z)$ го означува реалниот дел од комплексниот број z .

Доказ на Лема 2.5.

Согласно со Лема 2.2 следува дека за секој цел број $k \geq 1$

$$\widehat{K}_{(s,b)-ds,\Phi}(k, k) = \int_0^1 \int_0^1 K(\Phi(x), \Phi(y)) \overline{\text{wal}_k(x)} \text{wal}_k(y) dx dy.$$

Тогаш ја имаме следната презентација

$$\begin{aligned} \widehat{K}_{(s,b)-ds,\Phi}(k, k) &= \int_0^1 \int_0^1 K(\Phi(x), \Phi(y)) \overline{\text{wal}_k(x)} \text{wal}_k(y) dx dy \\ &= \left[\sum_{\alpha=0}^{\lfloor \frac{b-2}{2} \rfloor} \int_{\frac{2\alpha}{b}}^{\frac{2\alpha+1}{b}} + \sum_{\beta=0}^{\lfloor \frac{b-2}{2} \rfloor} \int_{\frac{2\beta+1}{b}}^{\frac{2\beta+2}{b}} \right] \times \left[\sum_{\gamma=0}^{\lfloor \frac{b-2}{2} \rfloor} \int_{\frac{2\gamma}{b}}^{\frac{2\gamma+1}{b}} + \sum_{\delta=0}^{\lfloor \frac{b-2}{2} \rfloor} \int_{\frac{2\delta+1}{b}}^{\frac{2\delta+2}{b}} \right] \\ &\quad K(\Phi(x), \Phi(y)) \overline{\text{wal}_k(x)} \text{wal}_k(y) dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha=0}^{\frac{b-2}{2}} \sum_{\gamma=0}^{\frac{b-2}{2}} \int_{\frac{2\alpha}{b}}^{\frac{2\alpha+1}{b}} \int_{\frac{2\gamma}{b}}^{\frac{2\gamma+1}{b}} K(\Phi(x), \Phi(y)) \overline{wal_k(x)} wal_k(y) dx dy \\
&+ \sum_{\beta=0}^{\frac{b-2}{2}} \sum_{\delta=0}^{\frac{b-2}{2}} \int_{\frac{2\beta+1}{b}}^{\frac{2\beta+2}{b}} \int_{\frac{2\delta+1}{b}}^{\frac{2\delta+2}{b}} K(\Phi(x), \Phi(y)) \overline{wal_k(x)} wal_k(y) dx dy \\
&+ \sum_{\alpha=0}^{\frac{b-2}{2}} \sum_{\delta=0}^{\frac{b-2}{2}} \int_{\frac{2\alpha}{b}}^{\frac{2\alpha+1}{b}} \int_{\frac{2\delta+1}{b}}^{\frac{2\delta+2}{b}} K(\Phi(x), \Phi(y)) \overline{wal_k(x)} wal_k(y) dx dy \\
&+ \sum_{\beta=0}^{\frac{b-2}{2}} \sum_{\gamma=0}^{\frac{b-2}{2}} \int_{\frac{2\beta+1}{b}}^{\frac{2\beta+2}{b}} \int_{\frac{2\gamma}{b}}^{\frac{2\gamma+1}{b}} K(\Phi(x), \Phi(y)) \overline{wal_k(x)} wal_k(y) dx dy \\
&= \sum_{\alpha=0}^{\frac{b-2}{2}} \sum_{\gamma=0}^{\frac{b-2}{2}} \int_{\frac{2\alpha}{b}}^{\frac{2\alpha+1}{b}} \int_{\frac{2\gamma}{b}}^{\frac{2\gamma+1}{b}} K(bx - 2\alpha, by - 2\gamma) \overline{wal_k(x)} wal_k(y) dx dy \\
&+ \sum_{\beta=0}^{\frac{b-2}{2}} \sum_{\delta=0}^{\frac{b-2}{2}} \int_{\frac{2\beta+1}{b}}^{\frac{2\beta+2}{b}} \int_{\frac{2\delta+1}{b}}^{\frac{2\delta+2}{b}} K(2 + 2\beta - bx, 2 + 2\delta - by) \overline{wal_k(x)} wal_k(y) dx dy \\
&+ \sum_{\alpha=0}^{\frac{b-2}{2}} \sum_{\delta=0}^{\frac{b-2}{2}} \int_{\frac{2\alpha}{b}}^{\frac{2\alpha+1}{b}} \int_{\frac{2\delta+1}{b}}^{\frac{2\delta+2}{b}} K(bx - 2\alpha, 2 + 2\delta - by) \overline{wal_k(x)} wal_k(y) dx dy \\
&+ \sum_{\beta=0}^{\frac{b-2}{2}} \sum_{\gamma=0}^{\frac{b-2}{2}} \int_{\frac{2\beta+1}{b}}^{\frac{2\beta+2}{b}} \int_{\frac{2\gamma}{b}}^{\frac{2\gamma+1}{b}} K(2 + 2\beta - bx, by - 2\gamma) \overline{wal_k(x)} wal_k(y) dx dy.
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Во "парни" сегменти $[\frac{2\alpha}{b}, \frac{2\alpha+1}{b}]$ и $[\frac{2\gamma}{b}, \frac{2\gamma+1}{b}]$ соодветно правиме замена $bx - 2\alpha = u$ и $by - 2\gamma = v$. Во "непарните" сегменти $[\frac{2\beta+1}{b}, \frac{2\beta+2}{b}]$ и $[\frac{2\delta+1}{b}, \frac{2\delta+2}{b}]$ соодветно правиме замена $2 + 2\beta - bx = u$ и $2 + 2\delta - by = v$. Ќе ја

искористиме Лема 2.4 и од (2.51) се добива дека

$$\begin{aligned}
 \widehat{K}_{(s,b)-ds,\Phi}(k, k) &= \frac{1}{b^2} \left| \sum_{\alpha=0}^{\frac{b-2}{2}} e^{\frac{2\pi i}{b} 2\alpha k_0} \right|^2 \left\{ \int_0^1 \int_0^1 K(u, v) \overline{{}_b\text{wal}_{\lfloor \frac{k}{b} \rfloor}(u)} {}_b\text{wal}_{\lfloor \frac{k}{b} \rfloor}(v) dudv \right. \\
 &+ \int_0^1 \int_0^1 K(u, v) {}_b\text{wal}_{\lfloor \frac{k}{b} \rfloor}(u) \cdot \overline{{}_b\text{wal}_{\lfloor \frac{k}{b} \rfloor}(v)} dudv \\
 &+ e^{\frac{4\pi i}{b} \alpha k_0} e^{-\frac{2\pi i}{b} (k_0+k_1+\dots+k_{a-1})} \int_0^1 \int_0^1 K(u, v) \overline{{}_b\text{wal}_{\lfloor \frac{k}{b} \rfloor}(u)} \cdot \overline{{}_b\text{wal}_{\lfloor \frac{k}{b} \rfloor}(v)} dudv \\
 &+ \left. e^{-\frac{4\pi i}{b} k_0} e^{\frac{2\pi i}{b} (k_0+k_1+\dots+k_{a-1})} \int_0^1 \int_0^1 K(u, v) {}_b\text{wal}_{\lfloor \frac{k}{b} \rfloor}(u) {}_b\text{wal}_{\lfloor \frac{k}{b} \rfloor}(v) dudv \right\} \\
 &= \frac{2}{b^2} \left| \sum_{\alpha=0}^{\frac{b-2}{2}} e^{\frac{2\pi i}{b} 2\alpha k_0} \right|^2 \text{Re} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 K(u, v) \overline{{}_b\text{wal}_{\lfloor \frac{k}{b} \rfloor}(u)} {}_b\text{wal}_{\lfloor \frac{k}{b} \rfloor}(v) dudv \right. \\
 &+ \left. e^{\frac{4\pi i}{b} k_0} e^{-\frac{2\pi i}{b} (k_0+k_1+\dots+k_{a-1})} \int_0^1 \int_0^1 K(u, v) \overline{{}_b\text{wal}_{\lfloor \frac{k}{b} \rfloor}(u)} \cdot \overline{{}_b\text{wal}_{\lfloor \frac{k}{b} \rfloor}(v)} dudv \right\}. \tag{2.52}
 \end{aligned}$$

За произволен $\beta \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ да дефинираме функција

$$\delta_b(2\beta) = \begin{cases} 1, & \text{ако } b|2\beta, \\ 0, & \text{ако } b \nmid 2\beta. \end{cases}$$

Тогаш важи равенството

$$\sum_{\alpha=0}^{\frac{b-2}{2}} e^{\frac{2\pi i}{b} (2\alpha) k_0} = \frac{b}{2} \delta_b(2k_0). \tag{2.53}$$

Од (2.52) и (2.53) се добива дека за секој цел број $k \geq 1$

$$\widehat{K}_{(s,b)-ds,\phi}(k, k) = \begin{cases} 0, & \text{ако } k_0 \neq 0 \\ & \text{и } k_0 \neq \frac{b}{2}, \\ \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 K(u, v) \overline{{}_b\text{wal}_{\lfloor \frac{k}{b} \rfloor}(u)} \cdot {}_b\text{wal}_{\lfloor \frac{k}{b} \rfloor}(v) dudv \right. \\ \left. + e^{-\frac{2\pi i}{b}(k_0+k_1+\dots+k_{a-1})} \times \right. \\ \left. \int_0^1 \int_0^1 K(u, v) \overline{{}_b\text{wal}_{\lfloor \frac{k}{b} \rfloor}(u)} \cdot \overline{{}_b\text{wal}_{\lfloor \frac{k}{b} \rfloor}(v)} dudv \right\}, & \text{ако } k_0 = 0, \\ & \text{или } k_0 = \frac{b}{2}, \end{cases}$$

Со ова Лема 2.5 е докажана.

Согласно со Лема 2.5 и од формулата (2.3) за секој цел број $k \geq 0$ и реален број $\gamma > 0$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 K_\gamma(u, v) \overline{{}_b\text{wal}_k(u)} \cdot {}_b\text{wal}_k(v) dudv \\ & + e^{-\frac{2\pi i}{b}(k_0+k_1+\dots+k_{a-1})} \int_0^1 \int_0^1 K_\gamma(u, v) \overline{{}_b\text{wal}_k(u)} \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(v)} dudv \\ & = \int_0^1 \int_0^1 B_0(x) B_0(y) \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} \cdot {}_b\text{wal}_k(y) dx dy \\ & + e^{-\frac{2\pi i}{b}(k_0+k_1+\dots+k_{a-1})} \int_0^1 \int_0^1 B_0(x) B_0(y) \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(y)} dx dy \\ & + \gamma \int_0^1 \int_0^1 B_1(x) B_1(y) \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} \cdot {}_b\text{wal}_k(y) dx dy \\ & + \gamma e^{-\frac{2\pi i}{b}(k_0+k_1+\dots+k_{a-1})} \int_0^1 \int_0^1 B_1(x) B_1(y) \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(y)} dx dy \\ & + \frac{\gamma^2}{4} \int_0^1 \int_0^1 B_2(x) B_2(y) \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} \cdot {}_b\text{wal}_k(y) dx dy \\ & + \frac{\gamma^2}{4} e^{-\frac{2\pi i}{b}(k_0+k_1+\dots+k_{a-1})} \int_0^1 \int_0^1 B_2(x) B_2(y) \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(y)} dx dy \quad (2.54) \\ & - \frac{\gamma^2}{24} \int_0^1 \int_0^1 B_4(|x-y|) \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} \cdot {}_b\text{wal}_k(y) dx dy \\ & - \frac{\gamma^2}{24} e^{-\frac{2\pi i}{b}(k_0+k_1+\dots+k_{a-1})} \int_0^1 \int_0^1 B_4(|x-y|) \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(y)} dx dy. \end{aligned}$$

Нека $k \geq 1$ е произволен фиксиран цел број. Точно е следното равенство

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{Re} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 B_0(x) B_0(y) \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} {}_b\text{wal}_k(y) dx dy \right. \\
 & + \left. e^{-\frac{2\pi i}{b}(k_0+k_1+\dots+k_{a-1})} \int_0^1 \int_0^1 B_0(x) B_0(y) \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(y)} dx dy \right\} \\
 & = \operatorname{Re} \left\{ \int_0^1 \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} dx \int_0^1 {}_b\text{wal}_k(y) dy \right. \\
 & + \left. e^{-\frac{2\pi i}{b}(k_0+k_1+\dots+k_{a-1})} \int_0^1 \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} dx \int_0^1 \overline{{}_b\text{wal}_k(y)} dy \right\} = 0.
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

Користејќи го првото равенство од Лема 2.1 се добива следниот резултат:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \int_0^1 B_1(x) B_1(y) \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(y)} dx dy \\
 & = \left[\int_0^1 B_1(x) \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} dx \right]^2 = \left[\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} \right) \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} dx \right]^2 \\
 & = \begin{cases} \left[\frac{-\cos \frac{2\pi}{b} k_{a-1}}{4 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} - \frac{i}{2} \cotg \frac{\pi}{b} k_{a-1} \right] \frac{1}{b^{2a}}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1}, k_{a-1} \in \{1, \dots, b-1\} \\ 0, & \text{инаку.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Од (2.13) и претходното равенство се добива дека

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{Re} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 B_1(x) B_1(y) \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} {}_b\text{wal}_k(y) dx dy \right. \\
 & + \left. e^{-\frac{2\pi i}{b}(k_0+k_1+\dots+k_{a-1})} \int_0^1 \int_0^1 B_1(x) B_1(y) \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(y)} dx dy \right\} \\
 & = \begin{cases} \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \frac{1}{b^{2a}}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1}, \\ & k_{a-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\} \\ 0, & \text{инаку} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{cases} \frac{-1}{4 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \frac{1}{b^{2a}}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1}, \\ 0, & \text{инаку} \end{cases} \quad k_{a-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\} \\
& = 0.
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Од првото и второто равенство од Лема 2.1, се добива следното:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^1 B_2(x) B_2(y) \overline{{}_b \text{wal}_k(x)} \cdot \overline{{}_b \text{wal}_k(y)} dx dy \\
& = \left[\int_0^1 x^2 \cdot \overline{{}_b \text{wal}_k(x)} dx - \int_0^1 x \cdot \overline{{}_b \text{wal}_k(x)} dx + \frac{1}{6} \int_0^1 \overline{{}_b \text{wal}_k(x)} dx \right]^2 = \\
& \begin{cases} \frac{1}{4} \left(\frac{\cos^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1} \cdot \cos 2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}}{\sin^4 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} + 2i \frac{\cos^3 \frac{\pi}{b} k_{a-1}}{\sin^3 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \right) \frac{1}{b^{4a}}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1}, \\ & k_{a-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\} \\ \frac{1}{4} \left(\frac{\cos 2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}}{\sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} + 2i \coth \frac{\pi}{b} k_{a-1} \right) \times \\ \left(\frac{\cos 2 \frac{\pi}{b} k_{j-1}}{\sin^2 \frac{\pi}{b} k_{j-1}} + 2i \coth \frac{\pi}{b} k_{j-1} \right) \frac{1}{b^{2(a+j)}}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1} + k_{j-1} b^{j-1}, \\ & k_{a-1} \in \{1, \dots, b-1\}, \\ & k_{j-1} \in \{1, \dots, b-1\}, \\ 0, & \text{инаку.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Од (2.16) и горното равенство се добива дека

$$\begin{aligned}
& \text{Re} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 B_2(x) B_2(y) \overline{{}_b \text{wal}_k(x)} \overline{{}_b \text{wal}_k(y)} dx dy \right. \\
& \left. + e^{-\frac{2\pi i}{b}(k_0+k_1+\dots+k_{a-1})} \int_0^1 \int_0^1 B_2(x) B_2(y) \overline{{}_b \text{wal}_k(x)} \cdot \overline{{}_b \text{wal}_k(y)} dx dy \right\} = \\
& \begin{cases} \frac{\cos^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}}{2 \sin^4 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \frac{1}{b^{4a}}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1}, \quad k_{a-1} \in \{1, \dots, b-1\} \\ \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1} \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{j-1}} \frac{1}{b^{2(a+j)}}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1} + k_{j-1} b^{j-1}, \\ & k_{a-1}, k_{j-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\}, \quad j \geq 1, \\ 0, & \text{инаку.} \end{cases} \tag{2.57}
\end{aligned}$$

Ја имаме следната презентација

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{Re} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 B_4(|x-y|) \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} {}_b\text{wal}_k(y) dx dy \right. \\
 & + \left. e^{-\frac{2\pi i}{b}(k_0+k_1+\dots+k_{a-1})} \int_0^1 \int_0^1 B_4(|x-y|) \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(y)} dx dy \right\} \\
 & = \operatorname{Re} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 |x-y|^4 \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} {}_b\text{wal}_k(y) dx dy \right. \\
 & + \left. e^{-\frac{2\pi i}{b}(k_0+k_1+\dots+k_{a-1})} \int_0^1 \int_0^1 |x-y|^4 \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(y)} dx dy \right\} \\
 & - 2\operatorname{Re} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 |x-y|^3 \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} {}_b\text{wal}_k(y) dx dy \right. \\
 & + \left. e^{-\frac{2\pi i}{b}(k_0+k_1+\dots+k_{a-1})} \int_0^1 \int_0^1 |x-y|^3 \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(y)} dx dy \right\} \\
 & + \operatorname{Re} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 |x-y|^2 \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} {}_b\text{wal}_k(y) dx dy \right. \\
 & + \left. e^{-\frac{2\pi i}{b}(k_0+k_1+\dots+k_{a-1})} \int_0^1 \int_0^1 |x-y|^2 \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(y)} dx dy \right\} \\
 & - \frac{1}{30} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} {}_b\text{wal}_k(y) dx dy \right. \\
 & + \left. e^{-\frac{2\pi i}{b}(k_0+k_1+\dots+k_{a-1})} \int_0^1 \int_0^1 \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(y)} dx dy \right\} \\
 & = \operatorname{Re} \left\{ A_4(k) + e^{-\frac{2\pi i}{b}(k_0+k_1+\dots+k_{a-1})} \overline{A_4(k)} \right\} \\
 & - 2\operatorname{Re} \left\{ A_3(k) + e^{-\frac{2\pi i}{b}(k_0+k_1+\dots+k_{a-1})} \overline{A_3(k)} \right\} \\
 & + \operatorname{Re} \left\{ A_2(k) + e^{-\frac{2\pi i}{b}(k_0+k_1+\dots+k_{a-1})} \overline{A_2(k)} \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

Ги имаме следните резултати:

$$\begin{aligned}
 \overline{A_2}(k) &= \int_0^1 |x-y|^2 \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(y)} dx dy = -2 \left[\int_0^1 x \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} dx \right]^2 \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{\cos 2\frac{\pi}{b} k_{a-1}}{\sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} + 2i \cotg \frac{\pi}{b} k_{a-1} \right) \frac{1}{b^{2a}}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1}, \\ 0, & \text{инаку.} \end{cases} \\
 & \qquad \qquad \qquad k_{a-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\}
 \end{aligned}$$

Од (2.19) и претходното равенство се добива дека

$$\operatorname{Re} \left\{ A_2(k) + e^{-\frac{2\pi i}{b}(k_0+k_1+\dots+k_{a-1})} \overline{A_2(k)} \right\} = 0. \quad (2.59)$$

Согласно со (2.20) следува дека

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left\{ A_4(k) + e^{-\frac{2\pi i}{b}(k_0+k_1+\dots+k_{a-1})} \overline{A_4(k)} \right\} \\ = & - 8 \operatorname{Re} \left\{ \int_0^1 x^3 \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} dx \times \int_0^1 y \cdot {}_b\text{wal}_k(y) dy \right. \\ & + e^{-\frac{2\pi i}{b}(k_0+k_1+\dots+k_{a-1})} \int_0^1 x^3 \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} dx \times \int_0^1 y \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(y)} dy \left. \right\} \\ & + 6 \operatorname{Re} \left\{ \left| \int_0^1 x^2 \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} dx \right|^2 + e^{-\frac{2\pi i}{b}(k_0+k_1+\dots+k_{a-1})} \left[\int_0^1 x^2 \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} dx \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Сега ќе ги искористиме првото и третото равенство од Лема 2.1, па се добива:

$$= \begin{cases} \int_0^1 x^3 \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} dx \times \int_0^1 y \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(y)} dy \\ \left\{ \begin{aligned} & \frac{\rho^2(b; k_{a-1})}{b^2} \frac{1}{b^{2a}} + \\ & \frac{3 \cotg \frac{\pi}{b} k_{a-1}}{4} (\cotg \frac{\pi}{b} k_{a-1} + \mathbf{i}) \frac{\rho(b; k_{a-1})}{b} \frac{1}{b^{3a}} + \\ & \left(\frac{3}{4 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} - \frac{1}{2} \right) \times \\ & (1 - \mathbf{i} \cotg \frac{\pi}{b} k_{a-1}) \frac{\rho(b; k_{a-1})}{b} \frac{1}{b^{4a}}, \end{aligned} \right. & \text{ако} \quad \begin{aligned} & k = k_{a-1} b^{a-1}, \\ & k_{a-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\} \end{aligned} \\ 0, & \text{инаку.} \end{cases}$$

Од (2.21) и горното равенство се добива дека

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left\{ \int_0^1 x^3 \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} dx \times \int_0^1 y \cdot {}_b\text{wal}_k(y) dy \right. \\ & + e^{-\frac{2\pi i}{b}(k_0+k_1+\dots+k_{a-1})} \int_0^1 x^3 \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} dx \times \int_0^1 y \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(y)} dy \left. \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Од второто равенство на Лема 2.1 се добива дека

$$\left[\int_0^1 x^2 \cdot \overline{{}_b wal_k(x)} dx \right]^2 = \begin{cases} -\frac{1}{4} \left(\frac{\cos 2\frac{\pi}{b} k_{a-1}}{\sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} + 2i \cotg \frac{\pi}{b} k_{a-1} \right) \frac{1}{b^{2a}} \\ -\frac{1}{2} \cotg \frac{\pi}{b} k_{a-1} \left(2 \cotg \frac{\pi}{b} k_{a-1} - i \frac{\cos 2\frac{\pi}{b} k_{a-1}}{\sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \right) \frac{1}{b^{3a}} \\ + \frac{1}{4} \cotg^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1} \left(\frac{\cos 2\frac{\pi}{b} k_{a-1}}{\sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} + 2i \cotg \frac{\pi}{b} k_{a-1} \right) \frac{1}{b^{4a}}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1}, \\ & k_{a-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\} \\ \left(\frac{\cos 2\frac{\pi}{b} (k_{a-1} + k_{j-1})}{4 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1} \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{j-1}} + \right. \\ \left. i \frac{\sin 2\frac{\pi}{b} (k_{a-1} + k_{j-1})}{4 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1} \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{j-1}} \right) \frac{1}{b^{2(a+j)}}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1} + k_{j-1} b^{j-1}, \\ & k_{a-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\}, \\ & k_{j-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\}, \\ 0, & \text{инаку.} \end{cases}$$

Од (2.22) и претходното равенство се добива дека

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left\{ \left| \int_0^1 x^2 \cdot \overline{{}_b wal_k(x)} dx \right|^2 + e^{-\frac{2\pi i}{b}(k_0+k_1+\dots+k_{a-1})} \left[\int_0^1 x^2 \cdot \overline{{}_b wal_k(x)} dx \right]^2 \right\} \\ & = \begin{cases} \frac{\cos^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}}{2 \sin^4 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \cdot \frac{1}{b^{4a}}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1}, \quad k_{a-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\} \\ \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1} \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{j-1}} \frac{1}{b^{2(a+j)}}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1} + k_{j-1} b^{j-1}, \\ k_{a-1}, k_{j-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\}, \quad j \geq 1 \\ 0, & \text{инаку.} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.62)$$

Од (2.60), (2.61) и (2.62) следува дека

$$\operatorname{Re} \left\{ A_4(k) + e^{-\frac{2\pi i}{b}(k_0+k_1+\dots+k_{a-1})} \overline{A_4(k)} \right\} = \begin{cases} \frac{3 \cos^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}}{\sin^4 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \cdot \frac{1}{b^{4a}}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1}, \\ \frac{3}{\sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1} \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{j-1}} \frac{1}{b^{2(a+j)}}, & \text{ако } k_{a-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\} \\ & k = k_{a-1} b^{a-1} + k_{j-1} b^{j-1}, j \geq 1 \\ & k_{a-1}, k_{j-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\}, \\ 0, & \text{инаку.} \end{cases} \quad (2.63)$$

За произволен цел број $\beta \in \{1, 2, \dots, b-1\}$ се добива следното равен-

СТВО

$$\sum_{u=0}^{b-1} \sum_{v=u}^{b-1} (v-u)^3 e^{-\frac{2\pi i}{b}(u+v)\beta} = \frac{b^3 \cos 2\frac{\pi}{b}\beta + 2b\delta_b(2\beta)}{4 \sin^2 \frac{\pi}{b}\beta} + \frac{3b \cos 2\frac{\pi}{b}\beta (\delta_b(2\beta) - 1)}{8 \sin^4 \frac{\pi}{b}\beta} + \mathbf{i} \left(\frac{b^3}{2} - \frac{3b}{4 \sin^2 \frac{\pi}{b}\beta} \right) \coth \frac{\pi}{b}\beta.$$

Со користење на претходното равенство и применувајќи техника слична на техниката за добивање на равенството (2.46) може да се

докаже дека важи следното равенство

$$\overline{A}_3(k) = \int_0^1 \int_0^1 |x - y|^3 \overline{wal_k(x) wal_k(y)} dx dy =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\cos 2\frac{\pi}{b}k_{a-1}}{2 \sin^2 \frac{\pi}{b}k_{a-1}} + \text{icoth} \frac{\pi}{b}k_{a-1} \right) \cdot \frac{1}{b^{2a}} + \\ \left[\frac{-\cos 2\frac{\pi}{b}k_{a-1}(3 - \sin^2 \frac{\pi}{b}k_{a-1})}{4 \sin^4 \frac{\pi}{b}k_{a-1}} + \right. \\ \left. \frac{3\delta_b(2k_{a-1}) \cos^2 \frac{\pi}{b}k_{a-1}}{4 \sin^4 \frac{\pi}{b}k_{a-1}} + \frac{\delta_b(2k_{a-1})}{10} \right. \\ \left. - \frac{3 - \sin^2 \frac{\pi}{b}k_{a-1}}{2 \sin^2 \frac{\pi}{b}k_{a-1}} \text{icoth} \frac{\pi}{b}k_{a-1} \right] \cdot \frac{1}{b^{4a}}, \quad \text{ако } k = k_{a-1}b^{a-1}, \\ 3 \prod_{h=0}^{j-2} \delta_b(2k_h) \left[\frac{\cos 2\frac{\pi}{b}k_{a-1}}{\sin^2 \frac{\pi}{b}k_{a-1}} + 2\text{icoth} \frac{\pi}{b}k_{a-1} \right] \times \\ \left[\frac{3 \cos 2\frac{\pi}{b}k_{j-1} + \delta_b(2k_{j-1})(2 \sin^2 \frac{\pi}{b}k_{j-1} - 3)}{12 \sin^2 \frac{\pi}{b}k_{j-1}} + \right. \\ \left. \frac{1}{2} \text{icoth} \frac{\pi}{b}k_{j-1} \right] \cdot \frac{1}{b^{2(a+j)}} \\ + \prod_{h=0}^{j-1} \delta_b(2k_h) \left[\frac{\delta_b(2k_{a-1})}{10} + \right. \\ \left. - \frac{\cos 2\frac{\pi}{b}k_{a-1}(3 - \sin^2 \frac{\pi}{b}k_{a-1})}{4 \sin^4 \frac{\pi}{b}k_{a-1}} + \right. \\ \left. \frac{\delta_b(2k_{a-1})(3 \cos 2\frac{\pi}{b}k_{a-1} + \sin^2 \frac{\pi}{b}k_{a-1})}{4 \sin^4 \frac{\pi}{b}k_{a-1}} \right. \\ \left. - \frac{3 - \sin^2 \frac{\pi}{b}k_{a-1}}{2 \sin^2 \frac{\pi}{b}k_{a-1}} \text{icoth} \frac{\pi}{b}k_{j-1} \right] \cdot \frac{1}{b^{4a}}, \quad \text{ако } k = k_{a-1}b^{a-1} + k_{j-1}b^{j-1} \\ \quad + k_{j-2}b^{j-2} + \dots + k_1b + \\ \quad + k_0, \quad 1 \leq j \leq a-1, \\ \quad k_{a-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\}, \\ \quad k_{j-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\}. \end{array} \right. \quad (2.64)$$

За произволен цел број $k = k_{a-1}b^{a-1} + k_{a-2}b^{a-2} + \dots + k_1b + k_0$ и

$1 \leq \tau \leq a - 1$ дефинираме функција

$$\sigma_\tau(k) = k_0 + k_1 + \dots + k_\tau$$

да биде збир од соодветните цифри.

Нека за произволен цел број $\alpha \in \{1, 2, \dots, b - 1\}$ поставиме

$$\omega_1''(b; \alpha) = \frac{\delta_b(2\alpha) \cos 2\frac{\pi}{b}\alpha}{10} - \frac{3 - \sin^2 \frac{\pi}{b}\alpha}{4 \sin^4 \frac{\pi}{b}\alpha} + \frac{3\delta_b(2\alpha) \cos 2\frac{\pi}{b}\alpha \cos^2 \frac{\pi}{b}\alpha}{4 \sin^4 \frac{\pi}{b}\alpha}.$$

За произволни цели броеви $\alpha, \beta \in \{1, 2, \dots, b - 1\}$ и за произволен цел број $j \geq 2$ нека поставиме

$$\omega_2''(b; k; \alpha; \beta) = \prod_{h=0}^{j-2} \delta_b(2k_h) \frac{3 \cos 2\frac{\pi}{b}\sigma_{j-2}(k) + \delta_b(2\beta)(2 \sin^2 \frac{\pi}{b}\beta - 3) \cos 2\frac{\pi}{b}\sigma_{j-1}(k)}{4 \sin^2 \frac{\pi}{b}\alpha \sin^2 \frac{\pi}{b}\beta},$$

и за произволни цели броеви $j \geq 1$ и $\alpha \in \{1, 2, \dots, b - 1\}$ нека:

$$\omega_3''(b; k; \alpha) = \prod_{h=0}^{j-1} \delta_b(2k_h) \left[\frac{\delta_b(2\alpha) \cos 2\frac{\pi}{b}(\sigma_{j-1}(k) + \alpha)}{10} - \frac{(3 - \sin^2 \frac{\pi}{b}\alpha) \cos 2\frac{\pi}{b}\sigma_{j-1}(k)}{4 \sin^4 \frac{\pi}{b}\alpha} \right. \\ \left. + \frac{\delta_b(2\alpha)(3 \cos 2\frac{\pi}{b}\alpha + \sin^2 \frac{\pi}{b}\alpha) \cos 2\frac{\pi}{b}(\sigma_{j-1}(k) + \alpha)}{4 \sin^2 \frac{\pi}{b}\alpha} \right].$$

Тогаш, од (2.64) се добива следниот резултат

$$\operatorname{Re} \left\{ e^{-\frac{2\pi i}{b}(k_0+k_1+\dots+k_{a-1})} \overline{A_3(k)} \right\} = \begin{cases} \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} \frac{1}{b^{2a}} + \omega_1''(b; k_{a-1}) \frac{1}{b^{4a}}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1}, \\ \omega_2''(b; k; k_{a-1}; k_{j-1}) \frac{1}{b^{2(a+j)}} + \omega_3''(b; k; k_{a-1}) \frac{1}{b^{4a}}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1} + k_{j-1} b^{j-1} + k_{j-2} b^{j-2} + \dots + k_1 b + k_0, j \geq 1, \\ & k_{a-1}, k_{j-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\}. \end{cases} \quad (2.65)$$

Од (2.46) и (2.65) се добива дека

$$\operatorname{Re} \left\{ A_3(k) + e^{-\frac{2\pi i}{b}(k_0+k_1+\dots+k_{a-1})} \overline{A_3(k)} \right\} = \begin{cases} (\omega_1'(b; k_{a-1}) + \omega_1''(b; k_{a-1})) \frac{1}{b^{4a}}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1}, \\ (\omega_2'(b; k_{a-1}; k_{j-1}) + \omega_2''(b; k)) \frac{1}{b^{2(a+j)}} + (\omega_3'(b; k_{a-1}) + \omega_3''(b; k)) \frac{1}{b^{4a}}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1} + k_{j-1} b^{j-1} + k_{j-2} b^{j-2} + \dots + k_1 b + k_0, \\ & k_{a-1}, k_{j-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\}, \\ & j \geq 1. \end{cases} \quad (2.66)$$

Од (2.58), (2.59), (2.63) и (2.66) се добива равенството

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{Re} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 B_4(|x-y|) \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} {}_b\text{wal}_k(y) dx dy \right. \\
 & + \left. e^{-\frac{2\pi i}{b}(k_0+k_1+\dots+k_{a-1})} \int_0^1 \int_0^1 B_4(|x-y|) \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} \cdot \overline{{}_b\text{wal}_k(y)} dx dy \right\} \\
 = & \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{3 \cos^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1}}{\sin^4 \frac{\pi}{b} k_{a-1}} - 2(\omega'_1(b; k_{a-1}) \right. \\ \left. + \omega''_1(b; k_{a-1})) \right] \frac{1}{b^{4a}}, \quad \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1} \\ \left[\frac{3}{\sin^2 \frac{\pi}{b} k_{a-1} \sin^2 \frac{\pi}{b} k_{j-1}} \right. \\ - 2(\omega'_2(b; k_{a-1}; k_{j-1}) \\ \left. + \omega''_2(b; k; k_{a-1}; k_{j-1})) \right] \frac{1}{b^{2(a+j)}} \\ - 2(\omega'_3(b; k_{a-1}) + \omega''_3(b; k; k_{a-1})) \frac{1}{b^{4a}}, \quad \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1} + k_{j-1} b^{j-1}, \\ \quad k_{a-1}, k_{j-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\}, \\ \quad j \geq 1 \\ - 2(\omega'_2(b; k_{a-1}; k_{j-1}) + \\ \omega''_2(b; k; k_{a-1}; k_{j-1})) \frac{1}{b^{2(a+j)}} - \\ 2(\omega'_3(b; k_{a-1}) + \omega''_3(b; k; k_{a-1})) \frac{1}{b^{4a}}, \quad \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1} + k_{j-1} b^{j-1} + \\ \quad k_{j-2} b^{j-2} + \dots + k_1 b + k_0, \\ \quad j \geq 1, \\ \quad k_{a-1}, k_{j-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\}. \end{array} \right. \tag{2.67}
 \end{aligned}$$

Тогаш од (2.54), (2.55), (2.56), (2.57) и (2.67) конечно се добива

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{Re} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 K(u, v) \overline{b \operatorname{wal}_k(u)} b \operatorname{wal}_k(v) dudv \right. \\
 & + \left. e^{-\frac{2\pi i}{b}(k_0+k_1+\dots+k_{a-1})} \int_0^1 \int_0^1 K(u, v) \overline{b \operatorname{wal}_k(u)} \cdot \overline{b \operatorname{wal}_k(v)} dudv \right\} \\
 & = \frac{\gamma^2}{12} \begin{cases} (\omega'_1(b; k_{a-1}) + \omega''_1(b; k_{a-1})) \frac{1}{b^{4a}}, & \text{ако } k = k_{a-1}b^{a-1}, \\ (\omega'_2(b; k_{a-1}; k_{j-1}) + \omega''_2(b; k)) \frac{1}{b^{2(a+j)}} \\ + (\omega'_3(b; k_{a-1}) + \omega''_3(b; k)) \frac{1}{b^{4a}}, & \text{ако } k = k_{a-1}b^{a-1} + k_{j-1}b^{j-1} + \\ & k_{j-2}b^{j-2} + \dots + k_1b + k_0, \\ & j \geq 1, \\ & k_{a-1}, k_{j-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\}. \end{cases} \quad (2.68)
 \end{aligned}$$

Од Лема 2.5 и од равенството (2.68) се добива следниот резултат:

Лема 2.6 (i) Нека за произволна тежина $\gamma > 0$, еднодимензионалното генерирачко јадро $K_\gamma(x, y)$, $x, y \in [0, 1]$ е дефинирано со равенството (2.3). Нека $k \geq 1$ биде произволен цел број со запис во броен систем со основа b од облик $k = k_{a-1}b^{a-1} + k_{a-2}b^{a-2} + \dots + k_1b + k_0$, каде што за $0 \leq \tau \leq a-1$ $k_\tau \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ и $k_{a-1} \neq 0$. Тогаш k -тиот Волиш-Фуриев коефициент на $(1, b)$ -дигитално поместеното и потоа пополнето со тент-трансформација јадро $K_{\gamma, (1, b)-ds, \phi}$ го задоволува равенството

$$\widehat{K}_{\gamma, (1, b)-ds, \phi}(k, k) = \begin{cases} 1, & \text{ако } k = 0, \\ 0, & \text{ако } k_1 \neq 0 \text{ и } k_1 \neq \frac{b}{2}, \\ \frac{\gamma^2 b^4}{24} (\omega'_1(b; k_{a-1}) + \omega''_1(b; k_{a-1})) \frac{1}{b^{4a}}, & \text{ако } k = k_{a-1}b^{a-1}, \\ & k_{a-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\}, \quad a \geq 2, \\ \frac{\gamma^2 b^4}{24} (\omega'_2(b; k_{a-1}; k_{j-1}) + \omega''_2(b; k)) \frac{1}{b^{2(a+j)}} \\ + \frac{\gamma^2 b^4}{24} (\omega'_3(b; k_{a-1}) + \omega''_3(b; k)) \frac{1}{b^{4a}}, & \text{ако } k = k_{a-1}b^{a-1} + k_{j-1}b^{j-1} + \\ & k_{j-2}b^{j-2} + \dots + k_1b + k_0, \quad j \geq 1, \\ & k_{a-1}, k_{j-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\}. \end{cases}$$

(ii) Нека за произволен вектор од тежини $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s)$, каде што $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_s > 0$ повеќедимензионалното генерирачко јадро $K_{\vec{\gamma}}(\vec{x}, \vec{y})$, $\vec{x}, \vec{y} \in [0, 1]^s$ биде дефинирано со равенството (2.2). Тогаш за произволен вектор $\vec{k} = (k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{N}_0$, \vec{k} -тиот Воли-Фуриев коефициент на јадро $K_{\vec{\gamma}, (s,b)-ds, \phi}$ (кое е (s, b) -дигитално поместеното и потоа пополнето со тент-трансформација) го задоволува равенството

$$\widehat{K}_{\vec{\gamma}, (s,b)-ds, \phi}(\vec{k}, \vec{k}) = \prod_{j=1}^s \widehat{K}_{\gamma_j, (1,b)-ds, \phi}(k_j, k_j).$$

Следува теорема со која се дава релација помеѓу средно-квадратната грешка на интегрирањето во тежински Хилбертов простор преку користење на мрежа, која е (s, b) -дигитално поместена, а потоа пополнета со тент-трансформација; и обична грешка-во-најлош-случај на интегрирањето во некој друг генериран тежински Хилбертов простор, односно со оваа теорема се дава решението на поставената Задача 2.3.

Теорема 2.3 Нека $K \in L_2([0, 1]^{2s})$ е произволно генерирачко јадро. Средно-квадратната грешка на интегрирањето $\widehat{e}_{(s,b)-ds, \Phi}(H_s(K); P_N)$ во просторот $H_s(K)$ преку користење на произволна мрежа P_N , која е прво (s, b) -дигитално поместена, а потоа пополнета со тент-трансформација го задоволува равенството

$$\widehat{e}_{(s,b)-ds, \Phi}(H_s(K); P_N) = e(H_s(K_{(s,b)-ds, \Phi}); P_N),$$

каде што $(H_s(K_{(s,b)-ds, \Phi}); P_N)$ е грешката-во-најлош-случај на интегрирањето во Хилбертов простор генериран со соодветното (s, b) -дигитално поместено и потоа пополнето со тент-трансформација јадро $K_{(s,b)-ds, \Phi}$.

Доказ на Теорема 2.3.

Согласно со Дефиниција 2.3 и формулата (1.8) се добива дека

$$\begin{aligned}
 \widehat{e}_{(s,b)-ds,\Phi}^2(H_s(K); P_N) &= \int_{[0,1]^s} e^2(H_s(K); P_N((s,b); \Phi; \vec{\sigma})) d\vec{\sigma} \\
 &= \int_{[0,1]^s} \left[\int_{[0,1]^{2s}} K(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x} d\vec{y} \right] d\vec{\sigma} - \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{[0,1]^s} \left[\int_{[0,1]^s} K(\Phi(\vec{x}_n \oplus_s^b \vec{\sigma}), \vec{y}) d\vec{y} \right] d\vec{\sigma} \\
 &+ \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{h=0}^{N-1} \int_{[0,1]^s} K(\Phi(\vec{x}_n \oplus_s^b \vec{\sigma}), \Phi(\vec{x}_h \oplus_s^b \vec{\sigma})) d\vec{\sigma}.
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

За секоја функција $h \in L_1([0,1]^s)$ важат следните равенства

$$\int_{[0,1]^s} h(\vec{x} \oplus_s^b \vec{\sigma}) d\vec{x} = \int_{[0,1]^s} h(\vec{x}) d\vec{x} \quad \text{и} \quad \int_{[0,1]^s} h(\Phi(\vec{x})) d\vec{x} = \int_{[0,1]^s} h(\vec{x}) d\vec{x}.$$

Од последните две равенства и од Дефиниција 2.4 непосредно се добива дека

$$\begin{aligned}
 & \int_{[0,1]^s} \left[\int_{[0,1]^{2s}} K(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x} d\vec{y} \right] d\vec{\sigma} \\
 &= \int_{[0,1]^s} \left[\int_{[0,1]^{2s}} K(\Phi(\vec{x} \oplus_s^b \vec{\sigma}), \Phi(\vec{y} \oplus_s^b \vec{\sigma})) d\vec{x} d\vec{y} \right] d\vec{\sigma} \\
 &= \int_{[0,1]^{2s}} \left[\int_{[0,1]^s} K(\Phi(\vec{x} \oplus_s^b \vec{\sigma}), \Phi(\vec{y} \oplus_s^b \vec{\sigma})) d\vec{\sigma} \right] d\vec{x} d\vec{y} \\
 &= \int_{[0,1]^{2s}} K_{(s,b)-ds,\Phi}(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x} d\vec{y}.
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

За секој фиксиран цел број n , $0 \leq n \leq N-1$ имаме дека

$$\begin{aligned}
 & \int_{[0,1]^s} \left[\int_{[0,1]^s} K(\Phi(\vec{x}_n \oplus_s^b \vec{\sigma}), \vec{y}) d\vec{y} \right] d\vec{\sigma} \\
 &= \int_{[0,1]^s} \left[\int_{[0,1]^s} K(\Phi(\vec{x}_n \oplus_s^b \vec{\sigma}), \Phi(\vec{y} \oplus_s^b \vec{\sigma})) d\vec{y} \right] d\vec{\sigma} \\
 &= \int_{[0,1]^s} \left[\int_{[0,1]^s} K(\Phi(\vec{x}_n \oplus_s^b \vec{\sigma}), \Phi(\vec{y} \oplus_s^b \vec{\sigma})) d\vec{\sigma} \right] d\vec{y} \\
 &= \int_{[0,1]^s} K_{(s,b)-ds,\Phi}(\vec{x}_n, \vec{y}) d\vec{y}.
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

За произволни фиксирани цели броеви $0 \leq n, h \leq N - 1$ имаме дека

$$\int_{[0,1]^s} K(\Phi(\vec{x}_n \oplus_s^b \vec{\sigma}), \Phi(\vec{x}_h \oplus_s^b \vec{\sigma})) d\vec{\sigma} = K_{(s,b)\text{-ds},\Phi}(\vec{x}_n, \vec{x}_h). \quad (2.72)$$

Од (2.69), (2.70), (2.71), (2.72) и (1.8) следува дека

$$\begin{aligned} & \widehat{e}_{(s,b)\text{-ds},\Phi}^2(H_s(K); P_N) \\ &= \int_{[0,1]^{2s}} K_{(s,b)\text{-ds},\Phi}(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x} d\vec{y} - \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{[0,1]^s} K_{(s,b)\text{-ds},\Phi}(\vec{x}_n, \vec{y}) d\vec{y} \\ &+ \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{h=0}^{N-1} K_{(s,b)\text{-ds},\Phi}(\vec{x}_n, \vec{x}_h) = e^2(H_s(K_{(s,b)\text{-ds},\Phi}); P_N), \end{aligned}$$

т.е. се доби дека

$$\widehat{e}_{(s,b)\text{-ds},\Phi}(H_s(K); P_N) = e(H_s(K_{(s,b)\text{-ds},\Phi}); P_N),$$

со што е завршен доказот на Теорема 2.3.

Со следната теорема се дава решение на поставената Задача 2.4.

За произволен цел број $k \geq 0$, со запис во броен систем со основа b од облик $k = \sum_{i=0}^{\infty} k_i b^i$ и даден цел број $g \geq 0$ се дефинира вектор $\text{tr}_g(\vec{k}) = (k_0, k_1, \dots, k_{g-1})^T$.

Теорема 2.4 Нека $K \in L_2([0,1]^{2s})$ е произволно генерирачко јадро, нека $P_N = \{\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{N-1}\}$ е произволна мрежа во $[0,1]^s$ и нека Φ е тент-трансформацијата при база b дефинирана со равенството (2.1). Тогаш важи:

(i) Средно-квадратната грешка $\widehat{e}_{(s,b)\text{-ds},\Phi}(H_s(K); P_N)$ на интегрирање во просторот $H_s(K)$ преку користење на мрежа P_N , која е прво (s,b) -дигитално поместена, а потоа пополнета со тент-

трансформацијата Φ , го задоволува равенството

$$\widehat{e}_{(s,b)\text{-ds},\Phi}^2(H_s(K); P_N) = -1 + \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s} \widehat{K}_{(s,b)\text{-ds},\Phi}(\vec{k}, \vec{k}) \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} {}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}_n) \right|^2,$$

каде што за вектор $\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s$

$$\widehat{K}_{(s,b)\text{-ds},\Phi}(\vec{k}, \vec{k}) = \int_{[0,1]^{2s}} K(\Phi(\vec{x}), \Phi(\vec{y})) \overline{{}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x})} {}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{y}) d\vec{x} d\vec{y}$$

(ii) Нека сега $\mathcal{P}_{b^m} = \{\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{b^m-1}\}$ биде произволна (t, m, s) -мрежа во \mathbb{Z}_b , генерирана со матриците C_1, C_2, \dots, C_s . Тогаш средно-квадратната грешка на интегрирањето $\widehat{e}_{(s,b)\text{-ds},\Phi}(H_s(K); \mathcal{P}_{b^m})$ во просторот $H_s(K)$ преку користење на мрежа \mathcal{P}_{b^m} , која е прво (s, b) -дигитално поместена, а потоа пополнета со тент-трансформацијата Φ , го задоволува равенството

$$\widehat{e}_{(s,b)\text{-ds},\Phi}^2(H_s(K); \mathcal{P}_{b^m}) = -1 + \sum_{\vec{k} \in \chi} \widehat{K}_{(s,b)\text{-ds},\Phi}(\vec{k}, \vec{k}),$$

каде што $\chi = \{\vec{k} = (k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{N}_0^s : C_1^T \text{tr}_m(\vec{k}_1) + \dots + C_s^T \text{tr}_m(\vec{k}_s) = \vec{0}\}$.

(iii) Средно-квадратната грешка на интегрирањето $\widehat{e}_{(s,b)\text{-ds},\Phi}(H_{Sob,s,\vec{\gamma},B_4}(K); \mathcal{P}_{b^m})$ во просторот $H_{Sob,s,\vec{\gamma},B_4}$ го задоволува равенството

$$\widehat{e}_{(s,b)\text{-ds},\Phi}^2(H_{Sob,s,\vec{\gamma},B_4}(K); \mathcal{P}_{b^m}) = -1 + \sum_{\vec{k} \in \chi} \widehat{K}_{\vec{\gamma},(s,b)\text{-ds},\Phi}(\vec{k}, \vec{k}),$$

при што за произволен вектор $\vec{k} = (k_1, \dots, k_s)$ и вектор од тежини $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_s)$, $\widehat{K}_{\vec{\gamma},(s,b)\text{-ds},\Phi}(\vec{k}, \vec{k}) = \prod_{j=1}^s \widehat{K}_{\gamma_j,(1,b)\text{-ds},\Phi}(k_j, k_j)$; и за произволен цел број $k \geq 0$ и произволен реален број $\gamma > 0$ коефициентите $\widehat{K}_{\gamma,(1,b)\text{-ds},\Phi}(k, k)$

се дефинирани во Лема 2.6 и се дадени со следната формула:

$$\widehat{K}_{\gamma,(1,b)-ds,\phi}(k, k) = \begin{cases} 1, & \text{ако } k = 0, \\ 0, & \text{ако } k_1 \neq 0 \text{ или } k_1 \neq \frac{b}{2}, \\ \frac{\gamma^2 b^4}{24} (\omega'_1(b; k_{a-1}) + \omega''_1(b; k_{a-1})) \frac{1}{b^{4a}}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1}, a \geq 2, \\ & k_{a-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\}, \\ \frac{\gamma^2 b^4}{24} (\omega'_2(b; k_{a-1}; k_{j-1}) + \omega''_2(b; k)) \frac{1}{b^{2(a+j)}} \\ + \frac{\gamma^2 b^4}{24} (\omega'_3(b; k_{a-1}) + \omega''_3(b; k)) \frac{1}{b^{4a}}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1} + k_{j-1} b^{j-1} + \\ & k_{j-2} b^{j-2} + \dots + k_1 b + k_0, j \geq 1, \\ & k_{a-1}, k_{j-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\}. \end{cases}$$

Доказ на Теорема 2.4.

Делот (i) од Теорема 2.4 е директна последица од Теорема 2.3, од формулата (1.8) и Волш-Фуриевата презентација на јадрото $K_{(s,b)-ds,\Phi}$.

Делот (ii) е последица од делот (i) и се базира на точната вредност на тригонометриската сума $\sum_{n=0}^{N-1} {}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}_n)$ во однос на точките на произволна (t, m, s) -мрежа, кој резултат е изложен во поглавје 1.3 во Глава 1, а докажан е во [ДиПи2]. Делот (iii) е последица од (ii) и претставува конкретна адаптација на просторот $H_{Sob,s,\vec{\gamma},B_4}$ и ги користи Волш-Фуриевите коефициенти на јадрото K_γ , пресметани во Лема 2.6. Со тоа е завршен доказот на Теорема 2.4.

За да ја формулираме Теорема 2.5 неопходно ќе биде да дефинираме три типа на константи. За да се поедностави формулацијата на оваа теорема, тие константи ќе ги дефинираме пред теоремата.

За произволни реални броеви $0 < \lambda \leq 1$ и $\gamma > 0$ ги дефинираме

следните константи:

$$\begin{aligned}
 & c_1(b, \lambda, \gamma) = c_2(b, \lambda, \gamma) \\
 = & \frac{\gamma^{2\lambda} b^{4\lambda}}{24^\lambda} \left(\frac{1}{5} + \frac{8}{\sin^4 \frac{\pi}{b}} \right)^\lambda \frac{1 - 2b + (b^3 - b^2 + b)b^{-4\lambda} + b^{2-2\lambda} - b^{2-6\lambda}}{(b^{4\lambda} - 1)(b^{1-2\lambda} - 1)(1 - b^{1-4\lambda})}, \\
 & c_3(b, \lambda, \gamma) = \frac{\gamma^{2\lambda} b^{4\lambda}}{24^\lambda} \left(\frac{1}{5} + \frac{8}{\sin^4 \frac{\pi}{b}} \right)^\lambda \frac{2b^{3-6\lambda} - 2b^{2-6\lambda} - b^{2-2\lambda} - b^{1-2\lambda} + b^{1-4\lambda} + 1}{(b^{2\lambda} - 1)(b^{1-2\lambda} - 1)(b^{1-4\lambda} - 1)}, \\
 & c_4(b, \lambda, \gamma) = \frac{\gamma^{2\lambda} b^{4\lambda}}{24^\lambda} \left(\frac{1}{5} + \frac{8}{\sin^4 \frac{\pi}{b}} \right)^\lambda \\
 \times & \frac{2b^{3-6\lambda} + b^{3-4\lambda} - 2b^{2-6\lambda} - 3b^{2-4\lambda} + 2b^{1-4\lambda} - b^{2-2\lambda} + b^{1-2\lambda}}{(b^{4\lambda} - 1)(b^{1-2\lambda} - 1)(1 - b^{1-4\lambda})}.
 \end{aligned} \tag{2.73}$$

Теорема 2.5 (i) (горна граница)

Нека $\frac{1}{4} < \lambda \leq 1$ е произволен реален број. Тогаш постои дигитална (t, m, s) -мрежа \mathcal{P}_{b^m} над \mathbb{Z}_b , така што средно-квадратната грешка на интегрирањето во просторот $H_{Sob, s, \bar{\gamma}, B_4}$ со користење на мрежата \mathcal{P}_{b^m} , која е прво (s, b) -дигитално поместена, а потоа пополнета со тент-трансформацијата при база b , ја задоволува оценката од горе

$$\begin{aligned}
 \hat{e}_{(s,b)-ds,\Phi}^{2\lambda}(H_{Sob, s, \bar{\gamma}, B_4}; \mathcal{P}_{b^m}) & \leq -1 + \prod_{j=1}^s \left[1 + c_1(b, \lambda, \gamma_j) \frac{1}{b^{4\lambda m}} \right] \\
 & + \frac{1}{b^m} \prod_{j=1}^s \left[1 + c_2(b, \lambda, \gamma_j) + c_3(b, \lambda, \gamma_j) \frac{b^m}{b^{4\lambda m}} + c_4(b, \lambda, \gamma_j) \frac{1}{b^{4\lambda m}} \right],
 \end{aligned}$$

при што константите $c_\mu(b, \lambda, \gamma_j)$, за $1 \leq \mu \leq 4$ и $1 \leq j \leq s$ се дефинирани со равенството (2.73).

(ii) (асимптотско однесување)

За средно-квадратната грешка на интегрирањето во просторот $H_{Sob, s, \bar{\gamma}, B_4}$ со користење на мрежата \mathcal{P}_{b^m} , која е прво (s, b) -дигитално поместена, а потоа пополнета со тент-трансформацијата при база b е

точно

$$\widehat{e}_{(s,b)\text{-ds},\Phi}(H_{Sob,s,\vec{\gamma},\mathcal{B}_4}; \mathcal{P}_{b^m}) = \mathcal{O}(b^{-2m}).$$

Доказ на Теорема 2.5.

(i) Нека $M_{b,m}$ е множеството од сите $m \times m$ матрици со елементи од $\{0, 1, \dots, b-1\}$ и нека $C_{b,m,s} = \{(C_1, \dots, C_s) : C_j \in M_{b,m}, j = 1, \dots, s\}$.

Нека \mathcal{P}_{b^m} е (t, m, s) -мрежата, генерирана од матриците C_1, \dots, C_s и нека $\widehat{e}_{(s,b)\text{-ds},\Phi}(H_{Sob,s,\vec{\gamma},\mathcal{B}_4}; \mathcal{P}_{b^m}) = \widehat{e}_{(s,b)\text{-ds},\Phi}(C_1, \dots, C_s)$. Нека $0 < \lambda \leq 1$ е даден реален број. Тогаш постои избор од матрици C'_1, \dots, C'_s , така што

$$\widehat{e}_{(s,b)\text{-ds},\Phi}^{2\lambda}(C'_1, \dots, C'_s) \leq \frac{1}{b^{m^2 \cdot s}} \sum_{(C_1, \dots, C_s) \in C_{b,m,s}} \widehat{e}_{(s,b)\text{-ds},\Phi}^{2\lambda}(C_1, \dots, C_s).$$

Сега ја применуваме оценката изложена во Теорема 2.4 (iii), па се добива:

$$\widehat{e}_{(s,b)\text{-ds},\Phi}^{2\lambda}(C'_1, \dots, C'_s) \leq \frac{1}{b^{m^2 \cdot s}} \sum_{(C_1, \dots, C_s) \in C_{b,m,s}} \left[\sum_{\vec{k} \in \chi \setminus \{\vec{0}\}} \widehat{K}_{\gamma,(s,b)\text{-ds},\Phi}(\vec{k}, \vec{k}) \right]^\lambda.$$

Ако го примениме неравенството на Јенсен на горниот израз, се добива:

$$\begin{aligned} \widehat{e}_{(s,b)\text{-ds},\Phi}^{2\lambda}(C'_1, \dots, C'_s) &\leq \frac{1}{b^{m^2 \cdot s}} \sum_{(C_1, \dots, C_s) \in C_{b,m,s}} \sum_{\vec{k} \in \chi \setminus \{\vec{0}\}} \widehat{K}_{\gamma,(s,b)\text{-ds},\Phi}^\lambda(\vec{k}, \vec{k}) \\ &= \frac{1}{b^{m^2 \cdot s}} \sum_{\vec{k} \in \chi \setminus \{\vec{0}\}} \widehat{K}_{\gamma,(s,b)\text{-ds},\Phi}^\lambda(\vec{k}, \vec{k}) \sum_{\substack{(C_1, \dots, C_s) \in C_{b,m,s} \\ C_1^T \text{tr}_m(\vec{k}_1) + \dots + C_s^T \text{tr}_m(\vec{k}_s) = \vec{0}, \vec{k} \neq \vec{0}}} 1 \\ &= -1 + \frac{1}{b^{m^2 \cdot s}} \sum_{\vec{k} \in \chi} \widehat{K}_{\gamma,(s,b)\text{-ds},\Phi}^\lambda(\vec{k}, \vec{k}) \sum_{\substack{(C_1, \dots, C_s) \in C_{b,m,s} \\ C_1^T \text{tr}_m(\vec{k}_1) + \dots + C_s^T \text{tr}_m(\vec{k}_s) = \vec{0}}} 1. \end{aligned} \tag{2.74}$$

Ќе ја искористиме идејата изложена во [ДиПи2]: за да сумираме

по векторите во множествотот χ ќе ги разгледаме двата различни начини на претставување на векторот \vec{k} во зависност од бројот на ненулта цифри во неговиот запис во броен систем со основа b . Има два случаи: бројот k може да има точно една ненулта цифра или најмалку две ненулта цифри. Дополнителна битна информација за пресметките во доказот на оваа теорема е дали најдесниот m -потстринг од записот на векторот \vec{k} во броен систем со основа b е составен само од нули или не.

Согласно со претходната дискусија имаме дека векторот \vec{k} може да биде од облик $\vec{k} = b^m \cdot \vec{l}$, каде што $\vec{l} \in \mathbb{N}_0^s$, или од облик $\vec{k} = b^m \cdot \vec{l} + \vec{k}^*$, каде што $\vec{k}^* \neq \vec{0}$, и ако $\vec{k}^* = (k_1^*, \dots, k_s^*)$ тогаш избираме дека $0 \leq k_j^* \leq b^m - 1$ за сите $j = 1, 2, \dots, s$. Ќе воведеме ознака $\|\vec{k}^*\|_\infty < b^m \iff \forall j, 1 \leq j \leq s$ $0 \leq k_j^* \leq b^m - 1$. Тогаш од (2.74) се добива дека

$$\begin{aligned}
 & \widehat{e}_{(s,b)\text{-ds},\Phi}^{2\lambda}(C'_1, \dots, C'_s) \\
 \leq & - 1 + \frac{1}{b^{m^2 \cdot s}} \sum_{\vec{l} \in \mathbb{N}_0^s} \widehat{K}_{\vec{\gamma},(s,b)\text{-ds},\Phi}^\lambda(b^m \cdot \vec{l}, b^m \cdot \vec{l}) \sum_{\substack{(C_1, \dots, C_s) \in C_{b,m,s} \\ C_1^T \text{tr}_m(\vec{k}_1) + \dots + C_s^T \text{tr}_m(\vec{k}_s) = \vec{0}}} 1 \\
 & + \frac{1}{b^{m^2 \cdot s}} \sum_{\vec{l} \in \mathbb{N}_0^s} \sum_{\substack{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s \setminus \{\vec{0}\} \\ \|\vec{k}\|_\infty < b^m}} \widehat{K}_{\vec{\gamma},(s,b)\text{-ds},\Phi}^\lambda(b^m \cdot \vec{l} + \vec{k}, b^m \cdot \vec{l} + \vec{k}) \times \\
 & \sum_{\substack{(C_1, \dots, C_s) \in C_{b,m,s} \\ C_1^T \text{tr}_m(\vec{k}_1) + \dots + C_s^T \text{tr}_m(\vec{k}_s) = \vec{0}}} 1 \\
 = & - 1 + \left(1 - \frac{1}{b^m}\right) \sum_{\vec{l} \in \mathbb{N}_0^s} \widehat{K}_{\vec{\gamma},(s,b)\text{-ds},\Phi}^\lambda(b^m \cdot \vec{l}, b^m \cdot \vec{l}) \\
 & + \frac{1}{b^m} \sum_{\vec{l} \in \mathbb{N}_0^s} \sum_{\substack{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s \\ \|\vec{k}\|_\infty < b^m}} \widehat{K}_{\vec{\gamma},(s,b)\text{-ds},\Phi}^\lambda(b^m \cdot \vec{l} + \vec{k}, b^m \cdot \vec{l} + \vec{k})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq - 1 + \prod_{j=1}^s \sum_{l_j=0}^{\infty} \widehat{K}_{\gamma_j, (1,b)\text{-ds}, \Phi}^{\lambda}(b^m \cdot l_j, b^m \cdot l_j) \\
&\quad + \frac{1}{b^m} \prod_{j=1}^s \sum_{l_j=0}^{\infty} \sum_{k_j=0}^{b^m-1} \widehat{K}_{\gamma_j, (1,b)\text{-ds}, \Phi}^{\lambda}(b^m \cdot l_j + k_j, b^m \cdot l_j + k_j).
\end{aligned} \tag{2.75}$$

Согласно со Лема 2.6 ја имаме следната оценка: за произволен реален број $\gamma > 0$

$$\widehat{K}_{\gamma, (1,b)\text{-ds}, \Phi}(k, k) \leq \begin{cases} 1, & \text{ако } k = 0, \\ \frac{\gamma^2 b^4}{24} \left(\frac{1}{5} + \frac{8}{\sin^4 \frac{\pi}{b}} \right) \frac{1}{b^{4a}}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1}, \\ \frac{\gamma^2 b^4}{24} \left(\frac{1}{5} + \frac{8}{\sin^4 \frac{\pi}{b}} \right) \left(\frac{1}{b^{2(a+j)}} + \frac{1}{b^{4a}} \right), & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1} + k_{j-1} b^{j-1} + \\ & k_{j-2} b^{j-2} + \dots + k_1 b + k_0, \\ & k_{a-1}, k_{j-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\}. \end{cases} \tag{2.76}$$

Со користење на (2.76) за произволен реален број $\gamma > 0$ се добива дека

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{\infty} \widehat{K}_{\gamma, (1,b)\text{-ds}, \Phi}^{\lambda}(b^m \cdot l, b^m \cdot l) \\
&= \widehat{K}_{\gamma, (1,b)\text{-ds}, \Phi}^{\lambda}(0, 0) + \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{l_{a-1}=1}^{b-1} \widehat{K}_{\gamma, (1,b)\text{-ds}, \Phi}^{\lambda}(b^m \cdot l_{a-1} b^{a-1}, b^m \cdot l_{a-1} b^{a-1}) \\
&+ \sum_{a=2}^{\infty} \sum_{l_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{l_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{l=l_{a-1} b^{a-1} + (l_{j-1} + 1) b^{j-1} - 1}^{l_{a-1} b^{a-1} + (l_{j-1} + 1) b^{j-1} - 1} \widehat{K}_{\gamma, (1,b)\text{-ds}, \Phi}^{\lambda}(b^m \cdot l, b^m \cdot l) \\
&\leq 1 + \frac{\gamma^{2\lambda} b^{4\lambda}}{24^\lambda} \left(\frac{1}{5} + \frac{8}{\sin^4 \frac{\pi}{b}} \right)^\lambda \frac{1}{b^{4\lambda m}} \\
&\times \left[\sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{b^{4\lambda a}} \sum_{l_{a-1}=1}^{b-1} 1 + \sum_{a=2}^{\infty} \frac{1}{b^{2\lambda a}} \sum_{l_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} \frac{1}{b^{2\lambda j}} \sum_{l_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{l=l_{a-1} b^{a-1} + (l_{j-1} + 1) b^{j-1} - 1}^{l_{a-1} b^{a-1} + (l_{j-1} + 1) b^{j-1} - 1} 1 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq 1 + \frac{\gamma^{2\lambda} b^{4\lambda} (b-1)}{24^\lambda} \left(\frac{1}{5} + \frac{8}{\sin^4 \frac{\pi}{b}} \right)^\lambda \frac{1}{b^{4\lambda m}} \\ &\times \left[\sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{b^{4\lambda a}} + \sum_{a=2}^{\infty} \frac{1}{b^{2\lambda a}} \sum_{j=1}^{a-1} \frac{b^j}{b^{2\lambda j}} + \sum_{a=2}^{\infty} \frac{1}{b^{4\lambda a}} \sum_{j=1}^{a-1} b^j \right]. \end{aligned} \quad (2.77)$$

За да биде загарантирана конвергенцијата на сите три претходни редови, овде ќе го искористиме условот $\frac{1}{4} < \lambda \leq 1$. Од (2.77), за $\frac{1}{4} < \lambda \leq 1$, се добива следното

$$\sum_{l=0}^{\infty} \widehat{K}_{\gamma, (1,b)\text{-ds}, \Phi}^{\lambda}(b^m \cdot l, b^m \cdot l) \leq 1 + c_1(b, \lambda, \gamma) \frac{1}{b^{4\lambda m}}, \quad (2.78)$$

при што константите $c_1(b, \lambda, \gamma)$ се дефинирани во (2.73).

За да ја пресметаме или оцениме двојната сума во (2.75) ќе ја користиме следната презентација:

$$\begin{aligned} &\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{b^m-1} \widehat{K}_{\gamma, (1,b)\text{-ds}, \Phi}^{\lambda}(b^m \cdot l + k, b^m \cdot l + k) = \sum_{k=0}^{b^m-1} \widehat{K}_{\gamma, (1,b)\text{-ds}, \Phi}^{\lambda}(k, k) \\ &+ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{b^m-1} \widehat{K}_{\gamma, (1,b)\text{-ds}, \Phi}^{\lambda}(b^m \cdot l + k, b^m \cdot l + k) = \Sigma_1 + \Sigma_2. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Следен чекор ќе биде да се пресметаат или оценат вредностите на сумите Σ_1 и Σ_2 . За $\forall \lambda, 0 < \lambda \leq 1$ со користење на (2.76) следува дека

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{k=0}^{b^m-1} \widehat{K}_{\gamma, (1,b)\text{-ds}, \Phi}^{\lambda}(k, k) \\ &= \widehat{K}_{\gamma, (1,b)\text{-ds}, \Phi}^{\lambda}(0, 0) + \sum_{a=1}^m \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \widehat{K}_{\gamma, (1,b)\text{-ds}, \Phi}^{\lambda}(k_{a-1} b^{a-1}, k_{a-1} b^{a-1}) \\ &+ \sum_{a=2}^m \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{k=k_{a-1} b^{a-1} + (k_{j-1} + 1) b^{j-1} - 1}^{k_{a-1} b^{a-1} + (k_{j-1} + 1) b^{j-1} - 1} \widehat{K}_{\gamma, (1,b)\text{-ds}, \Phi}^{\lambda}(k, k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 1 + \frac{\gamma^{2\lambda} b^{4\lambda}}{24^\lambda} \left(\frac{1}{5} + \frac{8}{\sin^4 \frac{\pi}{b}} \right)^\lambda (b-1) \\
&\times \left[\sum_{a=1}^m \frac{1}{b^{4\lambda a}} + \sum_{a=2}^m \frac{1}{b^{2\lambda a}} \sum_{j=1}^{a-1} \frac{b^j}{b^{2\lambda j}} + \sum_{a=2}^m \frac{1}{b^{4\lambda a}} \sum_{j=1}^{a-1} b^j \right] \\
&\leq 1 + \frac{\gamma^{2\lambda} b^{4\lambda} (b-1)}{24^\lambda} \left(\frac{1}{5} + \frac{8}{\sin^4 \frac{\pi}{b}} \right)^\lambda \\
&\times \left[\frac{1-2b+(b^3-b^2+b)b^{-4\lambda}+b^{2-2\lambda}-b^{2-6\lambda}}{(b^{4\lambda}-1)(1-b^{1-4\lambda})(b^{1-2\lambda}-1)} + \frac{b^{1-4\lambda}(b-2+b^{1-2\lambda})}{(b^{1-4\lambda}-1)(b^{1-2\lambda}-1)} \frac{b^m}{b^{4\lambda m}} \right. \\
&\left. + \frac{b^{1-2\lambda}(b-1)}{(b^{1-2\lambda}-1)(b^{2\lambda}-1)} \frac{1}{b^{2\lambda m}} - \frac{b-1}{b^{4\lambda}-1} \frac{1}{b^{4\lambda m}} \right]. \tag{2.80}
\end{aligned}$$

За $\forall \lambda, \frac{1}{4} < \lambda \leq 1$ со користење на (2.76) имаме дека

$$\begin{aligned}
\Sigma_2 &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{b^m-1} \widehat{K}_{\gamma, (1,b)\text{-ds}, \Phi}^\lambda (b^m \cdot l + k, b^m \cdot l + k) \\
&= \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{l_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{k=0}^{b^m-1} \widehat{K}_{\gamma, (1,b)\text{-ds}, \Phi}^\lambda (b^m \cdot l_{a-1} b^{a-1} + k, b^m l_{a-1} b^{a-1} + k) \\
&+ \sum_{a=2}^{\infty} \sum_{l_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{l_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{l=l_{a-1} b^{a-1} + l_{j-1} b^{j-1}}^{l_{a-1} b^{a-1} + (l_{j-1} + 1) b^{j-1} - 1} b^{m-1} \widehat{K}_{\gamma, (1,b)\text{-ds}, \Phi}^\lambda (b^m \cdot l + k, b^m \cdot l + k) \\
&= \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{l_{a-1}=1}^{b-1} \widehat{K}_{\gamma, (1,b)\text{-ds}, \Phi}^\lambda (l_{a-1} \cdot b^{(a+m)-1}, l_{a-1} \cdot b^{(a+m)-1}) \\
&+ \sum_{a=2}^{\infty} \sum_{l_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^m \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{k=k_{j-1} b^{j-1}}^{(k_{j-1} + 1) b^{j-1} - 1} \widehat{K}_{\gamma, (1,b)\text{-ds}, \Phi}^\lambda (l_{a-1} b^{(a+m)-1} + k, l_{a-1} b^{(a+m)-1} + k) \\
&+ \sum_{a=2}^{\infty} \sum_{l_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{l_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{l=l_{a-1} b^{a-1} + l_{j-1} b^{j-1}}^{l_{a-1} b^{a-1} + (l_{j-1} + 1) b^{j-1} - 1} b^{m-1} \widehat{K}_{\gamma, (1,b)\text{-ds}, \Phi}^\lambda (b^m \cdot l + k, b^m \cdot l + k) \\
&\leq \frac{\gamma^{2\lambda} b^{4\lambda}}{24^\lambda} \left(\frac{1}{5} + \frac{8}{\sin^4 \frac{\pi}{b}} \right)^\lambda (b-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[\frac{1}{b^{4\lambda m}} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{b^{4\lambda a}} + \frac{1}{b^{2\lambda m}} \sum_{a=2}^{\infty} \frac{1}{b^{2\lambda a}} \sum_{j=1}^m \frac{b^j}{b^{2\lambda j}} + \frac{1}{b^{4\lambda m}} \sum_{a=2}^{\infty} \frac{1}{b^{4\lambda a}} \sum_{j=1}^m b^j \right. \\
 & + \left. \frac{1}{b^{4\lambda m}} \sum_{a=2}^{\infty} \frac{1}{b^{2\lambda a}} \sum_{j=1}^{a-1} \frac{b^j}{b^{2\lambda m}} + \frac{1}{b^{4\lambda m}} \sum_{a=2}^{\infty} \frac{1}{b^{4\lambda a}} \sum_{j=1}^{a-1} b^j \right] \\
 & \leq \frac{\gamma^{2\lambda} b^{4\lambda}}{24^\lambda} \left(\frac{1}{5} + \frac{8}{\sin^4 \frac{\pi}{b}} \right)^\lambda (b-1) \\
 & \times \left[\frac{2b^{2-2\lambda} - b^{1-2\lambda} - 1}{(b-1)(b^{1-2\lambda} - 1)(b^{2\lambda} - 1)} \frac{b^m}{b^{4\lambda m}} - \frac{b^{1-2\lambda}}{(b^{1-2\lambda} - 1)(b^{2\lambda} - 1)} \frac{1}{b^{2\lambda m}} \right. \\
 & + \left. \frac{b^{3-4\lambda} + b^{3-6\lambda} - b^{2-6\lambda} - 2b^{2-4\lambda} + b^{1-4\lambda} - b + 1}{(b-1)(b^{4\lambda} - 1)(b^{1-2\lambda} - 1)(1 - b^{1-4\lambda})} \frac{1}{b^{4\lambda m}} \right].
 \end{aligned} \tag{2.81}$$

Од (2.79), (2.80) и (2.81) за $\forall \lambda, \frac{1}{4} < \lambda \leq 1$ ја добиваме следната горна оценка

$$\begin{aligned}
 & \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{b^m-1} \widehat{K}_{\gamma, (1,b)\text{-ds}, \Phi}^\lambda(b^m \cdot l + k, b^m \cdot l + k) \\
 & \leq 1 + c_2(b, \lambda, \gamma) + c_3(b, \lambda, \gamma) \frac{b^m}{b^{4\lambda m}} + c_4(b, \lambda, \gamma) \frac{1}{b^{4\lambda m}},
 \end{aligned} \tag{2.82}$$

при што константите $c_2(b, \lambda, \gamma)$, $c_3(b, \lambda, \gamma)$ и $c_4(b, \lambda, \gamma)$ се дефинирани во (2.73).

Од (2.75), (2.78) и (2.82) следува точноста на делот (i) од Теорема 2.5.

(ii) Асимптотското однесување на $\widehat{e}_{(s,b)\text{-ds}, \Phi}(H_{Sob, s, \gamma, B_4}; \mathcal{P}_{b^m})$ е директна последица од делот (i). Со докажувањето на делот (i) и делот (ii) целосно е докажана точноста на Теорема 2.5.

Со ова конечно се решени сите поставени задачи во подпоглавје 2.2.2 на оваа глава.

Глава 3

Тежинска $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ –дијафонија

3.1 Формулација на задачата

Во Глава 2 на дисертацијата беше покажан видот на коефициентите на Волш-Фурие на јадро кое е $(1, b)$ –дигитално поместено, а потоа пополнето со тент-трансформација

$$\widehat{K}_{(1,b)\text{-ds},\Phi}(k, k) = \begin{cases} 1, & \text{ако } k = 0, \\ c_1 \frac{1}{b^{4a}}, & \text{ако } k = k_{a-1}b^{a-1}, a \geq 1, k_{a-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\}, \\ c_2 \frac{1}{b^{2(a+j)}} + c_3 \frac{1}{b^{4a}}, & \text{ако } k = k_{a-1}b^{a-1} + k_{j-1}b^{j-1} + k_{j-2}b^{j-2} + \dots + k_1b + k_0, \\ & a \geq 2, 1 \leq j < a, k_{a-1}, k_{j-1} \in \{1, 2, \dots, b-1\}, \\ & \text{за } 0 \leq \tau \leq j-2, k_\tau \in \{0, 1, \dots, b-1\}. \end{cases} \quad (3.1)$$

со позитивни константи c_1, c_2 и c_3 дефинирани во експлицитна форма во Глава 2, а кои овде се изоставени заради упростување на резултатите.

Во статијата [БДЛНП] од 2012 година Балдо, Пилишхамер и

други автори разгледуваат простор од функции со одредена брзина на опаѓање на нивните Волш-Фуриеви коефициенти. За произволен цел број $k \in \mathbb{N}_0$, тие со посебен интерес го разгледуваат бројот на ненулти цифри на k во броен систем со основа b , кој го означуваат со $\#k$, при што $\#0 = 0$. При таква ознака, произволен цел број k на единствен начин се претставува во облик:

$$k = \sum_{i=1}^{\#k} k_{a_i} b^{a_i}, k_{a_i} \in \{1, 2, \dots, b-1\}, a_1 > a_2 > \dots > a_{\#k} \geq 0.$$

Потоа за фиксиран цел број $\alpha > 1$ и произволен вектор $\vec{k} = (k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{N}_0^s$ и вектор $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_s)$ од позитивни тежини, коефициентите $r_\alpha(\vec{\gamma}, \vec{k})$ ги дефинираат со

$$r_\alpha(\vec{\gamma}, \vec{k}) = \prod_{h \in U} \gamma_h r_\alpha(k_h),$$

каде што за произволен цел број $k \in \mathbb{N}_0$, коефициентот $r_\alpha(k)$ го дефинираат со

$$r_\alpha(k) = b^{-\sum_{i=1}^{\min(\#k, \alpha)} (\alpha_i + 1)}, r_\alpha(0) = 1,$$

а множеството U е дефинирано со $U = \{j : 1 \leq j \leq s, k_j \neq 0\}$.

Во горниот труд, параметарот α е тесно поврзан со глаткоста на функцијата. Предмет на истражување во [БДЛНП] е и грешката-во-најлош-случај на интегрирањето во разгледуваниот простор со користење на полиномијална мрежа од повисок ред.

Очигледно е дека тенденцијата во гореспоменатиот труд е да се разгледува класа на функции за кои k -тиот Волш-Фуриев коефициент зависи од блокови од ненулти цифри со должина α , во развојот на k во броен систем со основа b .

Обопштената низа на Ван дер Корпут е дефинирана со Глава 1, но поради нејзината важност повторно ќе ја изнесеме овде:

(Обопштена низа на Ван дер Корпут) Нека $b \geq 2$ е цел број и нека $\Sigma = (\sigma_i)_{i \geq 0}$ е низа од пермутации на множеството $\{0, 1, \dots, b-1\}$. Ако произволен ненегативен цел број i има претставување во броен систем со основа b :

$$i = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(i)b^j, \quad (3.2)$$

каде што за $j \geq 0$, $a_j(i) \in \{0, 1, \dots, b-1\}$, тогаш се дефинира

$$S_b^\Sigma(i) = \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j(a_j(i))b^{-j-1}.$$

Разработките во оваа глава имаат за цел да бидат решени следните задачи:

Задача 3.1

Да се предложи нова тежинска верзија на дијафонијата од ред b , базирана на коефициенти кои ќе имаат редови на големина како и коефициентите $\widehat{K}_{(s,b)\text{-ds},\Phi}(k,k)$ дефинирани со равенството во Лема 2.6 (i) во Глава 2, и која ќе ја наречеме тежинска $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонија

Задача 3.2

Да се докаже дека тежинската $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонија е квантитативна мерка за нерамномерност на распределба на низи.

Задача 3.3

Да се најде пресметувачката сложеност на новата $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонија на произволна s -димензионална мрежа, составена од N точки.

Задача 3.4

Да се пресмета точниот ред на големина на тежинската $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонија на Обопштената низа на Ван дер Корпут.

Задача 3.5

Да се изработат софтверски продукти со кои ќе се верифицираат добиените теоретски резултати за тежинска $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонија на Обоштената низа на Ван дер Корпут.

Решавањето на сите поставени задачи ќе биде последователно реализирано до крајот на оваа глава.

3.2 Тежинска $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонија - дефиниција и својства

Во ова поглавје ќе биде воведен нов тип на тежинска дијафонија согласно со поставената Задача 3.1. Мотивација за воведување на нов тип на дијафонија беше прашањето: дали може да се конструира нов тип на дијафонија од ред b , така што некои добро познати низи, како на пример Обоштената низа на Ван дер Корпут и мрежата на Заремба-Холтон да имаат подобар ред на големина отколку соодветниот ред на големина на досега познатите дијафонии од ред b .

Одговор на ова прашање е дека тоа би било можно доколку користиме нови коефициенти кои ќе бидат помали од коефициентите дадени со Дефиниција 1.8 во Глава 1.

Во ова поглавје ќе бидат решени задачите Задача 3.1, Задача 3.2 и Задача 3.3, поставени во поглавје 3.1, т.е. ќе биде воведен нов тип на тежинска дијафонија, ќе биде покажано дека таа е квантитативна мерка за нерамномерна распределба на низи и ќе биде дадена нејзината пресметувачка сложеност за произволна s -димензионална мрежа, составена од N точки.

3.2.1 Дефиниција и некои резултати за тежинска $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонија

Во [ДГКС] авторите воведуваат нов тип на тежинска дијафонија од ред b , чија дефиниција следува, и со тоа се дава решение на поставената Задача 3.1.

Дефиниција 3.1 Нека $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s)$, каде што $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_s > 0$ е произволен вектор од тежини. За секој цел број $N \geq 1$ се дефинира **тежинска $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонија** $F_N(\mathcal{W}(b); \gamma; \xi)$ на првите N елементи од низата $\xi = (\vec{x}_n)_{n \geq 0}$ од точки во $[0, 1]^s$ на следниот начин:

$$F_N(\mathcal{W}(b); \vec{\gamma}; \xi) = \left(C^{-1}(b; s; \vec{\gamma}) \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s, \vec{k} \neq \vec{0}} R(b; \vec{\gamma}; \vec{k}) \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} b \text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}_n) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

за секој вектор $\vec{k} = (k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{N}_0^s$ коефициентот $R(b; \vec{\gamma}; \vec{k})$ е дефиниран со

$$R(b; \vec{\gamma}; \vec{k}) = \prod_{h=1}^s \rho(b; \gamma_h; k_h), \quad (3.3)$$

и за секој реален број $\gamma > 0$ и произволен цел број $k \geq 0$, коефициентот $\rho(b; \gamma; k)$ е даден со

$$\rho(b; \gamma; k) = \begin{cases} 1, & \text{ако } k = 0, \\ \gamma b^{-4a}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1}, \quad k_{a-1} \in \{1, \dots, b-1\}, \quad a \geq 1, \\ \gamma b^{-2(a+j)} + \gamma b^{-4a}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1} + k_{j-1} b^{j-1} + k_{j-2} b^{j-2} + \dots + k_0, \\ & k_{a-1}, \quad k_{j-1} \in \{1, \dots, b-1\}, \quad 1 \leq j < a, \quad a \geq 2, \end{cases} \quad (3.4)$$

и константата $C(b; s; \vec{\gamma})$ се дадена со формулата

$$C(b; s; \vec{\gamma}) = \prod_{h=1}^s \left[1 + \frac{\gamma_h(b+2)}{b(b+1)(b^2+b+1)} \right] - 1. \quad (3.5)$$

Следната теорема, изложена и докажана во [ДГКС] покажува дека тежинската $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонија претставува нумеричка мерка за рамномерна распределба на низи. Со оваа теорема се дава решение на поставената Задача 3.2.

Теорема 3.1 Низата $\xi = (\vec{x}_n)_{n \geq 0}$ е рамномерно распределена во $[0, 1]^s$ ако и само ако граничното равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F_N(\mathcal{W}(b); \vec{\gamma}; \xi) = 0$$

важи за произволен вектор $\vec{\gamma}$ од нерастечки позитивни тежини.

Согласно со поставената Задача 3.3 во поглавје 3.1, наредното разгледување ќе биде посветено на добивање на формула за пресметувачката сложеност на воведената нова дијафонија во Дефиниција 3.1.

Понатаму, за произволни реални броеви $x, y \in [0, 1)$ се воведуваат следните два услови:

$$(C1) \quad x \oplus_1^b y \text{ не е рационален број во броен систем со основа } b$$

$$(C2) \quad x \text{ и } y \text{ се рационални броеви во броен систем со основа } b.$$

Со $\log_b x$ ќе биде означен логаритам од $x \in [0, 1)$ при основа b . Ако x го има следниот запис во броен систем со основа b :

$$x = \frac{x_g}{b^g} + \frac{x_{g+1}}{b^{g+1}} + \dots,$$

каде што $x_g \neq 0$ и за $i \geq g$, $x_i \in \{0, 1, \dots, b-1\}$, тогаш цел дел од $\log_b x$ се дефинира со $-g$ и се означува со $\lfloor \log_b x \rfloor = -g$.

Следува теорема со која се дава пресметувачката сложеност $\mathcal{O}(N^2)$ на тежинската $(\mathcal{W}(b); \vec{\gamma})$ -дијафонија.

Теорема 3.2 Нека за произволен реален број $\gamma > 0$ конструираме функција

$$\begin{aligned} \omega(b; \gamma; x) &= 1 + \frac{\gamma}{b(b^2 + b + 1)} - \frac{\gamma(b+1)(b^2+1)}{b(b^2 + b + 1)} b^{3\lfloor \log_b x \rfloor} \\ &+ \gamma \sum_{\alpha=2}^{\infty} b^{-2\alpha} \sum_{\beta=1}^{b-1} \sum_{\tau=1}^{\alpha-1} b^{-2\tau} \sum_{\mu=1}^{b-1} \sum_{l=\beta b^{\alpha-1} + \mu b^{\tau-1}}^{\beta b^{\alpha-1} + (\mu+1)b^{\tau-1}-1} {}_b \text{wal}_l(x), \quad x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

За произволен вектор од тежини $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s)$, каде што $\gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_s > 0$, нека е дефинирана функција

$$\Omega(b; \vec{\gamma}; \vec{x}) = -1 + \prod_{h=1}^s \omega(b; \gamma_h; x_h), \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_s) \in [0, 1]^s.$$

За произволен цел број $N \geq 1$ нека $\xi_N = \{\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{N-1}\}$ биде произволна мрежа составена од N точки во $[0, 1]^s$, така што за $0 \leq n \leq N-1$ координатите на точката \vec{x}_n задоволуваат еден од условите (C1) или (C2) (парцијален случај претставува мрежа која се состои од рационални броеви во броен систем со основа b). Тогаш тежинската $(\mathcal{W}(b); \vec{\gamma})$ -дијафонија $F(\mathcal{W}(b); \vec{\gamma}; \xi_N)$ на мрежата ξ_N го задоволува равенството:

$$F_N^2(\mathcal{W}(b); \vec{\gamma}; \xi_N) = \frac{1}{\prod_{h=1}^s \left[1 + \frac{\gamma_h(b+2)}{b(b+1)(b^2+b+1)} \right] - 1} \frac{1}{N^2} \sum_{n,m=0}^{N-1} \Omega(b; \vec{\gamma}; \vec{x}_n \ominus_s^b \vec{x}_m).$$

Со Теорема 3.2 се дава пресметувачката сложеност $\mathcal{O}(N^2)$ на тежинската $(\mathcal{W}(b); \vec{\gamma})$ -дијафонија на произволна мрежа составена од N точки во $[0, 1]^s$, при што константата во симболот $\mathcal{O}(N^2)$ зависи од основата b и димензијата s .

3.2.2 Доказ на Теорема 3.1 и Теорема 3.2

Овде ќе бидат докажани Теорема 3.1 и Теорема 3.2, но претходно ќе биде докажана точноста на една Лема за сума на коефициентите $R(b; \vec{\gamma}; \vec{k})$.

Лема 3.1 *За произволен цел број $b \geq 2$, димензија $s \geq 1$ и вектор од тежини $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s)$, каде што $\gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_s > 0$, важи равенството*

$$\sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s, \vec{k} \neq \vec{0}} R(b; \vec{\gamma}; \vec{k}) = C(b; s; \vec{\gamma})$$

каде што коефициентите $R(b; \vec{\gamma}; \vec{k})$ се дефинирани со равенството (3.3), а константата $C(b; s; \vec{\gamma})$ е дефинирана со (3.5).

Доказ на Лема 3.1.

Очевидно е равенството:

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s, \vec{k} \neq \vec{0}} R(b, \vec{\gamma}, \vec{k}) &= -1 + \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s} R(b, \vec{\gamma}, \vec{k}) = -1 + \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_s=0}^{\infty} R(b, \vec{\gamma}, \vec{k}) \\ &= -1 + \sum_{k_1=0}^{\infty} \rho(b, \gamma_1, k_1) \dots \sum_{k_s=0}^{\infty} \rho(b, \gamma_s, k_s) = -1 + \prod_{h=1}^s \sum_{k_h=0}^{\infty} \rho(b, \gamma_h, k_h). \end{aligned} \quad (3.6)$$

За произволен реален број $\gamma > 0$ ќе го докажеме равенството

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho(b, \gamma, k) = 1 + \frac{\gamma(b+2)}{b(b+1)(b^2+b+1)}. \quad (3.7)$$

Тргувајќи од формулата (3.4), следува дека се точни се следните претставувања:

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{k=0}^{\infty} \rho(b, \gamma, k) = \rho(b, \gamma, 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \rho(b, \gamma, k) \\
 &= 1 + \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \rho(b, \gamma; k_{a-1} b^{a-1}) \\
 &+ \sum_{a=2}^{\infty} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{k=k_{a-1} b^{a-1} + (k_{j-1} + 1) b^{j-1}}^{k_{a-1} b^{a-1} + (k_{j-1} + 1) b^{j-1} - 1} \rho(b, \gamma, k) \\
 &= 1 + \gamma \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} b^{-4a} \\
 &+ \gamma \sum_{a=2}^{\infty} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{k=k_{a-1} b^{a-1} + k_{j-1} b^{j-1}}^{k_{a-1} b^{a-1} + (k_{j-1} + 1) b^{j-1} - 1} (b^{-2(a+j)} + b^{-4a}) \\
 &= 1 + \gamma(S_1 + S_2).
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Сега ќе ги пресметаме посебно двете суми од равенството (3.8).

$$S_1 = \sum_{a=1}^{\infty} b^{-4a} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} 1 = \sum_{a=1}^{\infty} b^{-4a} (b-1) = \frac{b-1}{b^4} \frac{1}{1-b^{-4}} = \frac{b-1}{b^4-1}, \tag{3.9}$$

Следува пресметување на втората сума S_2 :

$$\begin{aligned}
 S_2 &= \sum_{a=2}^{\infty} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{k=k_{a-1} b^{a-1} + k_{j-1} b^{j-1}}^{k_{a-1} b^{a-1} + (k_{j-1} + 1) b^{j-1} - 1} b^{-2(a+j)} \\
 &+ \sum_{a=2}^{\infty} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{k=k_{a-1} b^{a-1} + k_{j-1} b^{j-1}}^{k_{a-1} b^{a-1} + (k_{j-1} + 1) b^{j-1} - 1} b^{-4a} \\
 &= \sum_{a=2}^{\infty} b^{-2a} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} 1 \sum_{j=1}^{a-1} b^{-2j} \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} 1 \sum_{k=k_{a-1} b^{a-1} + k_{j-1} b^{j-1}}^{k_{a-1} b^{a-1} + (k_{j-1} + 1) b^{j-1} - 1} 1
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{a=2}^{\infty} b^{-4a} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{k=k_{a-1}b^{a-1}+(k_{j-1}+1)b^{j-1}-1}^{k_{a-1}b^{a-1}+(k_{j-1}+1)b^{j-1}-1} 1 = S_{21} + S_{22} \quad (3.10)$$

Да ја пресметаме сумата S_{21} :

$$\begin{aligned} S_{21} &= \sum_{a=2}^{\infty} b^{-2a} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} 1 \sum_{j=1}^{a-1} b^{-2j} \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} 1 \sum_{k=k_{a-1}b^{a-1}+(k_{j-1}+1)b^{j-1}-1}^{k_{a-1}b^{a-1}+(k_{j-1}+1)b^{j-1}-1} 1 \\ &= \sum_{a=2}^{\infty} b^{-2a} (b-1)^2 \sum_{j=1}^{a-1} b^{-2j} b^{j-1} = \frac{(b-1)^2}{b} \sum_{a=2}^{\infty} b^{-2a} \sum_{j=1}^{a-1} b^{-j} \\ &= \frac{(b-1)^2}{b} \sum_{a=2}^{\infty} b^{-2a} b^{-1} \frac{b^{-(a-1)} - 1}{b^{-1} - 1} = \frac{(b-1)^2}{b^2(b^{-1} - 1)} \sum_{a=2}^{\infty} (b^{a(-3)} b^1 - b^{-2a}) \\ &= \frac{(b-1)^2}{b(b^3 - 1)(b^2 - 1)}, \end{aligned}$$

т.е. се доби следниот резултат:

$$S_{21} = \frac{1}{b(b+1)(b^2+b+1)}. \quad (3.11)$$

Следува пресметка на сумата S_{22} :

$$\begin{aligned} S_{22} &= \sum_{a=2}^{\infty} b^{-4a} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{k=k_{a-1}b^{a-1}+(k_{j-1}+1)b^{j-1}-1}^{k_{a-1}b^{a-1}+(k_{j-1}+1)b^{j-1}-1} 1 \\ &= \frac{(b-1)^2}{b} \sum_{a=2}^{\infty} b^{-4a} \sum_{j=1}^{a-1} b^j = \frac{(b-1)^2}{b} \sum_{a=2}^{\infty} b^{-4a} b \frac{b^{a-1} - 1}{b - 1}, \end{aligned}$$

т.е. се доби следниот резултат:

$$S_{22} = \frac{(b-1)^2}{(b^4 - b)(b^4 - 1)} = \frac{1}{b(b+1)(b^2+1)(b^2+b+1)}. \quad (3.12)$$

Од (3.10), (3.11) и (3.12) следува

$$S_2 = \frac{b^2 + 2}{b(b+1)(b^2+1)(b^2+b+1)}.$$

Со користење на равенствата (3.8) и (3.9) следува

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{\infty} \rho(b, \alpha, \gamma, k) = 1 + \gamma \left(\frac{b-1}{b^4-1} + \frac{b^2+2}{b(b+1)(b^2+1)(b^2+b+1)} \right) \\ &= 1 + \frac{\gamma(b-1)}{b^4-1} \left(1 + \frac{(b^2+2)(b-1)}{b^4-b} \right) \\ &= 1 + \frac{\gamma(b+2)}{b(b+1)(b^2+b+1)}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Конечно следува дека

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho(b, \alpha, \gamma, k) = 1 + \frac{\gamma(b+2)}{b(b+1)(b^2+b+1)}.$$

со што наполно е докажана точноста на равенството (3.7).

Сега од равенствата (3.6) и (3.7) директно следува точноста на Лема 3.1.

Откако ја докажавме точноста на помошните резултати, сега може да пристапиме кон докажување на точноста на Теорема 3.1.

Доказ на Теорема 3.1

За да ја докажеме оваа теорема, ќе го користиме експоненцијалниот критериум на Вајл, даден во Глава 1, во термините на Волшовите функции, кој гласи:

Низата $\xi = (\vec{x}_n)_{n \geq 0}$ е рамномерно распределена во $[0, 1]^s$, ако и само ако за секој вектор $\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s, \vec{k} \neq \vec{0}$, важи

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} {}_b \text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}_n) = 0. \quad (3.14)$$

Потребен услов:

Нека низата $\xi = (\vec{x}_n)_{n \geq 0}$ е рамномерно распределена во $[0, 1]^s$, тогаш согласно со (3.14) следува дека за секој реален број $\epsilon > 0$ постои индекс $N_\epsilon = N(\epsilon)$, така што $\forall N \geq N_\epsilon$ неравенството

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} {}_b \text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}_n) \right| < \epsilon$$

е исполнето $\forall \vec{k} \in \mathbb{N}_0^s, \vec{k} \neq \vec{0}$. Тогаш од Дефиниција 3.4 се добива дека за оние N за кои важи $N \geq N_\epsilon$ е точно

$$\begin{aligned} F_N^2(\mathcal{W}(b); \vec{\gamma}; \xi) &= C^{-1}(b; s; \vec{\gamma}) \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s, \vec{k} \neq \vec{0}} R(b; \vec{\gamma}; \vec{k}) \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} {}_b \text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}_n) \right|^2 \\ &< \frac{\epsilon^2}{C(b; s; \vec{\gamma})} \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s, \vec{k} \neq \vec{0}} R(b; \vec{\gamma}; \vec{k}). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Согласно со Лема 3.1 за (3.15) се добива дека

$$F_N^2(\mathcal{W}(b); \vec{\gamma}; \xi) < \frac{\epsilon^2}{C(b; s; \vec{\gamma})} C(b; s; \vec{\gamma}) = \epsilon^2,$$

т.е. се добива дека

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} {}_b \text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}_n) = 0.$$

Доволен услов: Нека граничното неравенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} {}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}_n) = 0$$

е исполнето за секој вектор од тежини $\vec{\gamma}$. Тогаш за секој фиксиран вектор $\vec{k}_0 \in \mathbb{N}_0^s, \vec{k}_0 \neq \vec{0}$ важи очевидното неравенство

$$\begin{aligned} & C^{-1}(b; s; \vec{\gamma}) R(b; \vec{\gamma}; \vec{k}_0) \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} {}_b\text{wal}_{\vec{k}_0}(\vec{x}_n) \right|^2 \\ & \leq C^{-1}(b; s; \vec{\gamma}) \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s, \vec{k} \neq \vec{0}} R(b; \vec{\gamma}; \vec{k}) \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} {}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}_n) \right|^2 = F_N^2(\mathcal{W}(b); \vec{\gamma}; \xi), \end{aligned}$$

од каде следува дека

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} {}_b\text{wal}_{\vec{k}_0}(\vec{x}_n) \right|^2 \leq \frac{C(b; s; \vec{\gamma})}{R(b; \vec{\gamma}; \vec{k}_0)} F_N^2(\mathcal{W}(b); \vec{\gamma}; \xi).$$

Од последното неравенство директно се добива дека граничното неравенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} {}_b\text{wal}_{\vec{k}_0}(\vec{x}_n) = 0$$

е исполнето за секој вектор $\vec{k}_0 \in \mathbb{N}_0^s, \vec{k}_0 \neq \vec{0}$ и за секој вектор од тежини $\vec{\gamma}$. Тогаш согласно со (3.14), низата $\xi = (\vec{x}_n)_{n \geq 0}$ е рамномерно распределена во $[0, 1)^s$.

Доказ на Теорема 3.2

За да ја докажеме Теорема 3.2, претходно ќе ја докажеме точноста на следните четири леми.

Лема 3.2 *Редот*

$$R = \sum_{\alpha=2}^{\infty} b^{-2\alpha} \sum_{\beta=1}^{b-1} \sum_{\tau=1}^{\alpha-1} b^{-2\tau} \sum_{\mu=1}^{b-1} \sum_{l=\beta b^{\alpha-1} + \mu b^{\tau-1}}^{\beta b^{\alpha-1} + (\mu+1)b^{\tau-1}-1} {}_b\text{wal}_l(x) \quad (3.16)$$

е рамномерно конвергентен над интервалот $[0, 1)$.

Доказ на Лема 3.2.

За да ја докажеме рамномерната конвергенција на редот (3.16) ќе го користиме критериумот на Ваерштрас за рамномерна конвергенција на функционален ред.

На почеток, да го забележиме фактот дека за секој цел број k важи равенството

$$|{}_b\text{wal}_k(x)| = 1, \forall x \in [0, 1).$$

Потоа, за модулот на редот (3.16) се добива

$$\begin{aligned} |R| &= \left| \sum_{\alpha=2}^{\infty} b^{-2\alpha} \sum_{\beta=1}^{b-1} \sum_{\tau=1}^{\alpha-1} b^{-2\tau} \sum_{\mu=1}^{b-1} \sum_{l=\beta b^{\alpha-1} + \mu b^{\tau-1}}^{\beta b^{\alpha-1} + (\mu+1)b^{\tau-1}-1} {}_b\text{wal}_l(x) \right| \\ &\leq \sum_{\alpha=2}^{\infty} b^{-2\alpha} \sum_{\beta=1}^{b-1} \sum_{\tau=1}^{\alpha-1} b^{-2\tau} \sum_{\mu=1}^{b-1} \sum_{l=\beta b^{\alpha-1} + \mu b^{\tau-1}}^{\beta b^{\alpha-1} + (\mu+1)b^{\tau-1}-1} |{}_b\text{wal}_l(x)| \\ &= \sum_{\alpha=2}^{\infty} b^{-2\alpha} \sum_{\beta=1}^{b-1} \sum_{\tau=1}^{\alpha-1} b^{-2\tau} \sum_{\mu=1}^{b-1} \sum_{l=\beta b^{\alpha-1} + \mu b^{\tau-1}}^{\beta b^{\alpha-1} + (\mu+1)b^{\tau-1}-1} 1 \\ &= (b-1)^2 \sum_{\alpha=2}^{\infty} b^{-2\alpha} \sum_{\tau=1}^{\alpha-1} b^{-2\tau} b^{\tau-1} = \frac{(b-1)^2}{b} \sum_{\alpha=2}^{\infty} b^{-2\alpha} \sum_{\tau=1}^{\alpha-1} b^{-\tau}, \end{aligned}$$

од каде следува дека

$$|R| \leq \frac{(b-1)^2}{b} \sum_{\alpha=0}^{\infty} b^{-2\alpha} \sum_{\tau=0}^{\infty} b^{-\tau}.$$

Доволно е да забележиме дека двата реда

$$\sum_{\alpha=0}^{\infty} b^{-2\alpha} \quad \text{и} \quad \sum_{\tau=0}^{\infty} b^{-\tau}$$

се конвергентни редови како суми на геометриска прогресија со коефициент $q < 1$, па од тука, според Критериумот на Ваерштрас за рамномерна конвергенција на функционални редови следува дека редот (3.16) е рамномерно конвергентен над интервалот $[0, 1)$.

Лема 3.3 *За произволен цел број $b \geq 2$ важи равенството:*

$$\int_0^1 b^{3\lfloor \log_b x \rfloor} dx = \frac{1}{(b+1)(b^2+1)}.$$

Доказ на Лема 3.3.

Основната идеја за доказ на оваа лема е да се искористи следното претставување:

$$\int_0^1 b^{3\lfloor \log_b x \rfloor} dx = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \int_{b^{-(\alpha+1)}}^{b^{-\alpha}} b^{3\lfloor \log_b x \rfloor} dx. \quad (3.17)$$

Откако е направено горното разбивање на интервалот $[0, 1)$ на подинтервали, тогаш за секој цел број $\alpha \geq 0$ и за секој реален број $x \in [b^{-(\alpha+1)}, b^{-\alpha})$ имаме дека $\lfloor \log_b x \rfloor = -(\alpha+1)$. Тогаш од (3.17) се добива

$$\begin{aligned} \int_0^1 b^{3\lfloor \log_b x \rfloor} dx &= \sum_{\alpha=0}^{\infty} b^{-3(\alpha+1)} \int_{b^{-(\alpha+1)}}^{b^{-\alpha}} dx = \sum_{\alpha=0}^{\infty} b^{-3(\alpha+1)} \left(\frac{1}{b^{\alpha}} - \frac{1}{b^{\alpha+1}} \right) \\ &= \sum_{\alpha=0}^{\infty} b^{-3(\alpha+1)} \frac{b-1}{b^{\alpha+1}} = \frac{b-1}{b^4} \sum_{\alpha=0}^{\infty} b^{-4\alpha} = \frac{b-1}{b^4-1} = \frac{1}{(b+1)(b^2+1)}. \end{aligned}$$

Со тоа наполно е докажана точноста на Лема 3.3.

Лема 3.4 Нека $b \geq 2$ е фиксирана база и нека $k \geq 1$ биде произволен цел број. Целиот број $a \geq 0$ се определува од условот $b^{a-1} \leq k < b^a$. Тогаш важи равенството

$$\int_0^1 b^{3[\log_b x]} \overline{bwal_k(x)} dx = \frac{-b(b^2 + b + 1)}{(b + 1)(b^2 + 1)} b^{-4a}.$$

Доказ на Лема 3.4.

Во доказот на оваа лема посебно ќе ги разгледаме двата случаи: кога $a = 1$ и кога $a > 1$. Во случајот кога $a = 1$ може да се докаже равенството

$$\int_0^1 b^{3[\log_b x]} \overline{bwal_k(x)} dx = \frac{-b(b^2 + b + 1)}{(b + 1)(b^2 + 1)} b^{-4}. \quad (3.18)$$

За $a = 1$ имаме дека $k \in \{1, \dots, b-1\}$ и ќе го искористиме претставувањето

$$\int_0^1 b^{3[\log_b x]} \overline{bwal_k(x)} dx = \int_0^{\frac{1}{b}} b^{3[\log_b x]} \overline{bwal_k(x)} dx + \int_{\frac{1}{b}}^1 b^{3[\log_b x]} \overline{bwal_k(x)} dx \quad (3.19)$$

За $x \in [0, \frac{1}{b})$ имаме дека $\overline{bwal_k(x)} = 1$, а за $x \in [\frac{1}{b}, 1)$ имаме дека $[\log_b x] = -1$. На тој начин од (3.19) се добива

$$\int_0^1 b^{3[\log_b x]} \overline{bwal_k(x)} dx = \int_0^{\frac{1}{b}} b^{3[\log_b x]} dx + b^{-3} \int_{\frac{1}{b}}^1 \overline{bwal_k(x)} dx. \quad (3.20)$$

Од својствата на Волшовите функции имаме дека

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{b}}^1 \overline{bwal_k(x)} dx &= \int_0^1 \overline{bwal_k(x)} dx - \int_0^{\frac{1}{b}} \overline{bwal_k(x)} dx \\ &= - \int_0^{\frac{1}{b}} \overline{bwal_k(x)} dx = - \int_0^{\frac{1}{b}} dx = -\frac{1}{b}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Понатаму точно е равенството

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{b}} b^{3[\log_b x]} dx &= \sum_{\alpha=1}^{\infty} \int_{b^{-(\alpha+1)}}^{b^{-\alpha}} b^{3[\log_b x]} dx = \sum_{\alpha=1}^{\infty} b^{-3(\alpha+1)} \int_{b^{-(\alpha+1)}}^{b^{-\alpha}} dx \\ &= \sum_{\alpha=1}^{\infty} b^{-3(\alpha+1)} \frac{b-1}{b^{\alpha+1}} = \frac{b-1}{b^4} \sum_{\alpha=1}^{\infty} b^{-4\alpha} = \frac{b-1}{b^4(b^4-1)} = \frac{1}{b^4(b+1)(b^2+1)}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Од (3.20), (3.21) и (3.22) конечно се добива

$$\int_0^1 b^{3[\log_b x]} \overline{bwal_k(x)} dx = \frac{1}{b^4(b+1)(b^2+1)} - \frac{1}{b^4} = \frac{-b(b^2+b+1)}{(b+1)(b^2+1)} b^{-4},$$

со што равенството (3.18) е докажано.

Нека сега го разгледаме случајот кога $a \geq 2$. Ќе го искористиме следниот запис

$$\begin{aligned} \int_0^1 b^{3[\log_b x]} \overline{bwal_k(x)} dx &= \sum_{\alpha=0}^{a-2} \int_{b^{-(\alpha+1)}}^{b^{-\alpha}} b^{3[\log_b x]} \overline{bwal_k(x)} dx \\ &+ \int_{b^{-a}}^{b^{-(a-1)}} b^{3[\log_b x]} \overline{bwal_k(x)} dx + \sum_{\alpha=a}^{\infty} \int_{b^{-(\alpha+1)}}^{b^{-\alpha}} b^{3[\log_b x]} \overline{bwal_k(x)} dx \end{aligned} \quad (3.23)$$

На почеток да ја разгледаме сумата $\sum_{\alpha=a}^{\infty} \int_{b^{-(\alpha+1)}}^{b^{-\alpha}} b^{3[\log_b x]} \overline{bwal_k(x)} dx$.

За секој $x \in [\frac{1}{b^{\alpha+1}}, \frac{1}{b^\alpha})$ имаме дека $\overline{bwal_k(x)} = 1$ и $[\log_b x] = -(\alpha+1)$. На тој начин се добива дека

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=a}^{\infty} \int_{b^{-(\alpha+1)}}^{b^{-\alpha}} b^{3[\log_b x]} \overline{bwal_k(x)} dx &= \sum_{\alpha=a}^{\infty} \int_{b^{-(\alpha+1)}}^{b^{-\alpha}} b^{-3(\alpha+1)} dx \\ &= \sum_{\alpha=a}^{\infty} b^{-3(\alpha+1)} \int_{b^{-(\alpha+1)}}^{b^{-\alpha}} dx = \sum_{\alpha=a}^{\infty} b^{-3(\alpha+1)} \frac{b-1}{b^{1-\alpha}} = \frac{b-1}{b^4} \sum_{\alpha=a}^{\infty} b^{-4\alpha} = \frac{b^{-4a}}{(b+1)(b^2+1)}, \end{aligned}$$

т.е. се доби резултатот

$$\sum_{\alpha=a}^{\infty} \int_{b^{-(\alpha+1)}}^{b^{-\alpha}} b^{3[\log_b x]} \overline{bwal_k(x)} dx = \frac{b^{-4a}}{(b+1)(b^2+1)}. \quad (3.24)$$

За пресметување на вредноста на интегралот $\int_{b^{-a}}^{b^{-(a-1)}} b^{3[\log_b x]} \overline{bwal_k(x)} dx$ ќе го искористиме фактот дека за секој $x \in [\frac{1}{b^a}, \frac{1}{b^{a-1}})$ имаме дека $[\log_b x] = -a$, од каде следува

$$\begin{aligned} \int_{b^{-a}}^{b^{-(a-1)}} b^{3[\log_b x]} \overline{bwal_k(x)} dx &= b^{-3a} \left(\int_0^{b^{-(a-1)}} \overline{bwal_k(x)} dx - \int_0^{b^{-a}} \overline{bwal_k(x)} dx \right) \\ &= -b^{-3a} \int_0^{b^{-a}} \overline{bwal_k(x)} dx = -b^{-3a} \int_0^{b^{-a}} dx = -b^{-4a}, \end{aligned}$$

односно се доби резултатот:

$$\int_{b^{-a}}^{b^{-(a-1)}} b^{3[\log_b x]} \overline{bwal_k(x)} dx = -b^{-4a}. \quad (3.25)$$

Нареден чекор е да се пресмета сумата

$$\sum_{\alpha=0}^{a-2} \int_{b^{-(\alpha+1)}}^{b^{-\alpha}} b^{3[\log_b x]} \overline{bwal_k(x)} dx.$$

За секој $x \in [\frac{1}{b^{\alpha+1}}, \frac{1}{b^\alpha})$ имаме дека $[\log_b x] = -(\alpha+1)$. Потоа секој интервал од облик $[\frac{1}{b^{\alpha+1}}, \frac{1}{b^\alpha})$ го делиме на $b-1$ подинтервали од видот $[\frac{\beta}{b^{\alpha+1}}, \frac{\beta+1}{b^{\alpha+1}})$, каде што $\beta = 1, 2, \dots, b-1$. На тој начин се добива

$$\sum_{\alpha=0}^{a-2} \int_{b^{-(\alpha+1)}}^{b^{-\alpha}} b^{3[\log_b x]} \overline{bwal_k(x)} dx = \sum_{\alpha=0}^{a-2} b^{-3(\alpha+1)} \int_{b^{-(\alpha+1)}}^{b^{-\alpha}} \overline{bwal_k(x)} dx$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{a-2} b^{-3(\alpha+1)} \sum_{\beta=1}^{b-1} \int_{\frac{\beta}{b^{\alpha+1}}}^{\frac{\beta+1}{b^{\alpha+1}}} \overline{bwal_k(x)} dx. \quad (3.26)$$

Следна идеја е интервалот $[\frac{\beta}{b^{\alpha+1}}, \frac{\beta+1}{b^{\alpha+1}})$ да се раздели на поситни интервали со должина $\frac{1}{b^a}$. Ако го искористиме следниот запис

$$\frac{\beta}{b^{\alpha+1}} = \frac{\beta b^{a-1}}{b^{\alpha+1}} \cdot \frac{1}{b^{a-1}} = \frac{\beta b^{a-2-\alpha}}{b^{a-1}}$$

и

$$\frac{\beta+1}{b^{\alpha+1}} = \frac{(\beta+1)b^{a-1}}{b^{\alpha+1}} \cdot \frac{1}{b^{a-1}} = \frac{\beta b^{a-2-\alpha} + b^{a-1}}{b^{a-1}},$$

следува

$$\begin{aligned} \left[\frac{\beta}{b^{\alpha+1}}, \frac{\beta+1}{b^{\alpha+1}} \right) &= \left[\frac{\beta b^{a-2-\alpha}}{b^{a-1}}, \frac{\beta b^{a-2-\alpha} + b^{a-1}}{b^{a-1}} \right) \\ &= \cup_{h=0}^{b^{a-1}-1} \left[\frac{\beta b^{a-2-\alpha} + h}{b^{a-1}}, \frac{\beta b^{a-2-\alpha} + h + 1}{b^{a-1}} \right) \\ &= \cup_{h=0}^{b^{a-1}-1} \left[\frac{b(\beta b^{a-2-\alpha} + h)}{b^a}, \frac{b(\beta b^{a-2-\alpha} + h) + b}{b^a} \right) \\ &= \cup_{h=0}^{b^{a-1}-1} \cup_{\mu=0}^{b-1} \left[\frac{b(\beta b^{a-2-\alpha} + h)}{b^a} + \frac{\mu}{b^a}, \frac{b(\beta b^{a-2-\alpha} + h)}{b^a} + \frac{\mu+1}{b^a} \right). \end{aligned}$$

На тој начин за (3.26) се добива претставувањето

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha=0}^{a-2} \int_{b^{-(\alpha+1)}}^{b^{-\alpha}} b^{3[\log_b x]} \overline{bwal_k(x)} dx \\ &= \sum_{\alpha=0}^{a-2} b^{-3(\alpha+1)} \sum_{\beta=1}^{b-1} \sum_{h=0}^{b^{a-1}-1} \sum_{\mu=0}^{b-1} \int_{\frac{b(\beta b^{a-2-\alpha} + h)}{b^a} + \frac{\mu}{b^a}}^{\frac{b(\beta b^{a-2-\alpha} + h)}{b^a} + \frac{\mu+1}{b^a}} \overline{bwal_k(x)} dx. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Да забележиме дека

$$\sum_{\mu=0}^{b-1} \int_{\frac{b(\beta b^{a-2-\alpha} + h)}{b^a} + \frac{\mu}{b^a}}^{\frac{b(\beta b^{a-2-\alpha} + h)}{b^a} + \frac{\mu+1}{b^a}} \overline{bwal_k(x)} dx = 0, \quad (3.28)$$

поради својствата на Волшовите функции.

Од (3.27) и (3.28) се добива следниот резултат

$$\sum_{\alpha=0}^{a-2} \int_{b^{-(\alpha+1)}}^{b^{-\alpha}} b^{3\lfloor \log_b x \rfloor} \overline{bwal_k(x)} dx = 0. \quad (3.29)$$

Конечно од (3.23), (3.24), (3.25) и (3.29) за за $a > 1$ имаме

$$\int_0^1 b^{3\lfloor \log_b x \rfloor} \overline{bwal_k(x)} dx = -b^{-4a} + \frac{b^{-4a}}{(b+1)(b^2+1)} = \frac{-b(b^2+b+1)}{(b+1)(b^2+1)} b^{-4a}, \quad (3.30)$$

со што потполно ја докажавме точноста на Лема 3.4.

Лема 3.5 (i) Нека за произволен цел број $b \geq 2$ и за произволен реален број $\gamma > 0$ дефинираме функција $\omega(b; \gamma; x)$ како во Теорема 3.2 со

$$\begin{aligned} \omega(b; \gamma; x) &= 1 + \frac{\gamma}{b(b^2+b+1)} - \frac{\gamma(b+1)(b^2+1)}{b(b^2+b+1)} b^{3\lfloor \log_b x \rfloor} \\ &+ \gamma \sum_{\alpha=2}^{\infty} b^{-2\alpha} \sum_{\beta=1}^{b-1} \sum_{\tau=1}^{\alpha-1} b^{-2\tau} \sum_{\mu=1}^{b-1} \sum_{l=\beta b^{\alpha-1} + (\mu+1)b^{\tau-1}-1}^{b-1} b^{3\lfloor \log_b x \rfloor} \overline{bwal_l(x)}, \quad x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Тогаш Волш-Фуриевиот коефициент на функцијата $\omega(b; \gamma; x)$ го задоволува равенството

$$\widehat{\omega}(b; \gamma; k) = \begin{cases} 1, & \text{ако } k = 0, \\ \gamma b^{-4a}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1}, \quad k_{a-1} \in \{1, \dots, b-1\}, \quad a \geq 1, \\ \gamma b^{-2(a+j)} + \gamma b^{-4a}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1} + k_{j-1} b^{j-1} + k_{j-2} b^{j-2} + \dots + k_0, \\ & k_{a-1}, k_{j-1} \in \{1, \dots, b-1\}, 1 \leq j < a, a \geq 2, \end{cases}$$

т.е. согласно со формулата (3.4) важи равенството

$$\widehat{\omega}(b; \gamma; k) = \rho(b; \gamma; k).$$

(ii) За произволен вектор од тежини $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s)$, каде што $\gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_s > 0$, нека е дефинирана функција $\Omega(b; \vec{\gamma}; \vec{x})$ како во Теорема 3.2 со

$$\Omega(b; \vec{\gamma}; \vec{x}) = -1 + \prod_{h=1}^s \omega(b; \gamma_h; x_h), \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_s) \in [0, 1]^s,$$

тогаш Воли-Фуриевиот коефициент на функцијата $\Omega(b; \vec{\gamma}; \vec{x})$ го задоволува равенството

$$\widehat{\Omega}(b; \vec{\gamma}; \vec{k}) = \begin{cases} 0, & \text{ако } \vec{k} = \vec{0}, \\ R(b, \vec{\gamma}, \vec{k}), & \text{ако } \vec{k} \neq \vec{0}, \end{cases},$$

каде што коефициентите $R(b, \vec{\gamma}, \vec{k})$ се дефинирани со формулата (3.3) во Дефиниција 3.1.

(iii) Функцијата $\Omega(b; \vec{\gamma}; \vec{x})$ има развој во Воли-Фуриев ред од облик:

$$\Omega(b; \vec{\gamma}; \vec{x}) = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s, \vec{k} \neq \vec{0}} R(b; \vec{\gamma}; \vec{k}) {}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in [0, 1]^s.$$

Доказ на Лема 3.5.

(i) За произволен цел број $k \geq 0$ важи равенството

$$\begin{aligned} \widehat{\omega}(b; \gamma; k) &= \int_0^1 \omega(b; \gamma; x) \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} dx \\ &= \int_0^1 \left[1 + \frac{\gamma}{b(b^2 + b + 1)} - \frac{\gamma(b+1)(b^2+1)}{b(b^2 + b + 1)} b^{3[\log_b x]} \right. \\ &\quad \left. + \gamma \sum_{\alpha=2}^{\infty} b^{-2\alpha} \sum_{\beta=1}^{b-1} \sum_{\tau=1}^{\alpha-1} b^{-2\tau} \sum_{\mu=1}^{b-1} \sum_{l=\beta b^{\alpha-1} + \mu b^{\tau-1}}^{b^{\alpha-1} + (\mu+1)b^{\tau-1} - 1} {}_b\text{wal}_l(x) \right] \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} dx. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Нека $k = 0$, од Лема 3.3 и од равенството (3.31) се добива следниот резултат

$$\widehat{\omega}(b; \gamma; 0) = 1 + \frac{\gamma}{b(b^2 + b + 1)} - \frac{\gamma(b+1)(b^2+1)}{b(b^2 + b + 1)} \int_0^1 b^{3[\log_b x]} dx.$$

$$\begin{aligned}
 & +\gamma \sum_{\alpha=2}^{\infty} b^{-2\alpha} \sum_{\beta=1}^{b-1} \sum_{\tau=1}^{\alpha-1} b^{-2\tau} \sum_{\mu=1}^{b-1} \sum_{l=\beta b^{\alpha-1} + \mu b^{\tau-1}}^{\beta b^{\alpha-1} + (\mu+1)b^{\tau-1}-1} \int_0^1 {}_b\text{wal}_l(x) dx \\
 & = 1 + \frac{\gamma}{b(b^2 + b + 1)} - \frac{\gamma(b+1)(b^2+1)}{b(b^2 + b + 1)} \cdot \frac{1}{(b+1)(b^2+1)} \\
 & = 1 + \frac{\gamma}{b(b^2 + b + 1)} - \frac{\gamma}{b(b^2 + b + 1)} = 1,
 \end{aligned}$$

т.е. се доби дека $\widehat{\omega}(b; \gamma; 0) = 1$.

Нека сега $k = k_{a-1}b^{a-1}$, за $a \geq 1, k_{a-1} \in \{1, \dots, b-1\}$. Тогаш од (3.31), од Лема 3.3 и Лема 3.4 се добива

$$\begin{aligned}
 \widehat{\omega}(b; \gamma; k_{a-1}b^{a-1}) & = \left[1 + \frac{\gamma}{b(b^2 + b + 1)} \right] \int_0^1 \overline{{}_b\text{wal}_{k_{a-1}b^{a-1}}(x)} dx \\
 & \quad - \frac{\gamma(b+1)(b^2+1)}{b(b^2 + b + 1)} \int_0^1 b^{3\lfloor \log_b x \rfloor} \overline{{}_b\text{wal}_{k_{a-1}b^{a-1}}(x)} dx \\
 +\gamma \sum_{\alpha=2}^{\infty} b^{-2\alpha} \sum_{\beta=1}^{b-1} \sum_{\tau=1}^{\alpha-1} b^{-2\tau} \sum_{\mu=1}^{b-1} \sum_{l=\beta b^{\alpha-1} + \mu b^{\tau-1}}^{\beta b^{\alpha-1} + (\mu+1)b^{\tau-1}-1} & \int_0^1 {}_b\text{wal}_l(x) \overline{{}_b\text{wal}_{k_{a-1}b^{a-1}}(x)} dx. \quad (3.32)
 \end{aligned}$$

Од Лема 3.4 за (3.32) се добива

$$\begin{aligned}
 \widehat{\omega}(b; \gamma; k_{a-1}b^{a-1}) & = -\frac{\gamma(b+1)(b^2+1)}{b(b^2 + b + 1)} \int_0^1 b^{3\lfloor \log_b x \rfloor} \overline{{}_b\text{wal}_{k_{a-1}b^{a-1}}(x)} dx \\
 +\gamma \sum_{\alpha=2}^{\infty} b^{-2\alpha} \sum_{\beta=1}^{b-1} \sum_{\tau=1}^{\alpha-1} b^{-2\tau} \sum_{\mu=1}^{b-1} \sum_{l=\beta b^{\alpha-1} + \mu b^{\tau-1}}^{\beta b^{\alpha-1} + (\mu+1)b^{\tau-1}-1} & \int_0^1 {}_b\text{wal}_l(x) \overline{{}_b\text{wal}_{k_{a-1}b^{a-1}}(x)} dx \\
 & = -\frac{\gamma(b+1)(b^2+1)}{b(b^2 + b + 1)} \cdot \left(\frac{-b(b^2 + b + 1)}{(b+1)(b^2+1)} \right) b^{-4a} = \gamma b^{-4a},
 \end{aligned}$$

односно се доби следниот резултат:

$$\widehat{\omega}(b; \gamma; k_{a-1}b^{a-1}) = \gamma b^{-4a}.$$

Нека сега $k = k_{a-1}b^{a-1} + k_{j-1}b^{j-1} + k_{j-2}b^{j-2} + \dots + k_0$, каде што $a \geq 2$, $1 \leq j < a$, $k_{a-1}, k_{j-1} \in \{1, \dots, b-1\}$. Тогаш од Лема 3.3 и Лема 3.4 и од својствата на Волшовите функции имаме дека

$$\begin{aligned} \widehat{\omega}(b; \gamma; k) &= \left[1 + \frac{\gamma}{b(b^2 + b + 1)} \right] \int_0^1 \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} dx \\ &\quad - \frac{\gamma(b+1)(b^2+1)}{b(b^2+b+1)} \int_0^1 b^{3\lfloor \log_b x \rfloor} \overline{{}_b\text{wal}_k(x)} dx \\ &\quad + \gamma \sum_{\alpha=2}^{\infty} b^{-2\alpha} \sum_{\beta=1}^{b-1} \sum_{\tau=1}^{\alpha-1} b^{-2\tau} \sum_{\mu=1}^{b-1} \sum_{l=\beta b^{\alpha-1} + \mu b^{\tau-1}}^{\beta b^{\alpha-1} + (\mu+1)b^{\tau-1}-1} \int_0^1 \overline{{}_b\text{wal}_l(x) {}_b\text{wal}_k(x)} dx \\ &= - \frac{\gamma(b+1)(b^2+1)}{b(b^2+b+1)} \cdot \left(\frac{-b(b^2+b+1)}{(b+1)(b^2+1)} \right) b^{-4a} \\ &\quad + \gamma \sum_{\alpha=2}^{\infty} b^{-2\alpha} \sum_{\beta=1}^{b-1} \sum_{\tau=1}^{\alpha-1} b^{-2\tau} \sum_{\mu=1}^{b-1} \sum_{l=\beta b^{\alpha-1} + \mu b^{\tau-1}}^{\beta b^{\alpha-1} + (\mu+1)b^{\tau-1}-1} \int_0^1 \overline{{}_b\text{wal}_l(x) {}_b\text{wal}_k(x)} dx. \end{aligned} \quad (3.33)$$

За интегралот во последниот израз имаме дека

$$I_1 = \int_0^1 \overline{{}_b\text{wal}_l(x) {}_b\text{wal}_k(x)} dx = \begin{cases} 1, & \text{ако } l = k, \\ 0, & \text{ако } l \neq k, \end{cases},$$

од каде што следува дека $\int_0^1 \overline{{}_b\text{wal}_l(x) {}_b\text{wal}_k(x)} dx = 1 \iff l = k$, што повлекува дека $I_1 = 1 \iff \alpha = a, \tau = j, \beta = k_{a-1}$ и $\mu = k_{j-1}$.

Тоа значи дека сите собирок кои го содржат интегралот I_1 во (3.33) ќе бидат нули освен еден собирок кој одговара на индексите $\alpha = a, \tau = j, \beta = k_{a-1}$ и $\mu = k_{j-1}$ и тој собирок има вредност $b^{-2a} \cdot b^{-2j}$. Од горната анализа и од (3.33) се добива дека во случајот кога $k = k_{a-1}b^{a-1} + k_{j-1}b^{j-1} + k_{j-2}b^{j-2} + \dots + k_0$, каде што $a \geq 2$, $1 \leq j < a$, $k_{a-1}, k_{j-1} \in \{1, \dots, b-1\}$. (т.е. случајот кога k има барем две ненулти цифри во својот запис во броен

систем со основа b) важи равенството:

$$\widehat{\omega}(b; \gamma; k) = \gamma b^{-4a} + \gamma b^{-2(a+j)}.$$

Со тоа наплно е докажана точноста на дел (i) на Лема 3.5.

(ii) За секој вектор $\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s$ важи равенството

$$\begin{aligned} \widehat{\Omega}(b; \vec{\gamma}; \vec{k}) &= \int_{[0,1]^s} \Omega(b; \vec{\gamma}; \vec{x}) \overline{wal_{\vec{k}}(\vec{x})} d\vec{x} \\ &= \int_{[0,1]^s} \left[-1 + \prod_{h=1}^s \omega(b; \gamma_h; x_h) \right] \overline{wal_{\vec{k}}(\vec{x})} d\vec{x}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Овде одделно ќе ги разгледаме двата случаи: кога $\vec{k} = \vec{0}$ и кога $\vec{k} \neq \vec{0}$ и ќе го користиме обликот на еднодимензионалните Волш-Фуриеви коефициенти добиени во (i) на оваа лема.

Нека $\vec{k} = \vec{0}$, тогаш од (3.34) имаме дека

$$\begin{aligned} \widehat{\Omega}(b; \vec{\gamma}; \vec{0}) &= - \int_{[0,1]^s} \overline{wal_{\vec{0}}(\vec{x})} d\vec{x} + \prod_{h=1}^s \int_0^1 \omega(b; \gamma_h; x_h) \overline{wal_0(x_h)} dx_h \\ &= -1 + \prod_{h=1}^s \int_0^1 \omega(b; \gamma_h; x_h) \overline{wal_0(x_h)} dx_h = -1 + \prod_{h=1}^s 1 = -1 + 1 = 0, \end{aligned}$$

односно се доби следниот резултат:

$$\widehat{\Omega}(b; \vec{\gamma}; \vec{0}) = 0.$$

Нека сега $\vec{k} \neq \vec{0}$, $\vec{k} = (k_1, \dots, k_s)$, тогаш се добива дека

$$\widehat{\Omega}(b; \vec{\gamma}; \vec{k}) = - \int_{[0,1]^s} \overline{wal_{\vec{k}}(\vec{x})} d\vec{x} + \prod_{h=1}^s \int_0^1 \omega(b; \gamma_h; x_h) \overline{wal_{k_h}(x_h)} dx_h$$

$$= \prod_{h=1}^s \widehat{\omega}(b; \gamma_h; k_h) = \prod_{h=1}^s \rho(b; \gamma_h; k_h) = R(b, \vec{\gamma}, \vec{k}).$$

Конечно, се доби следниот резултат:

$$\widehat{\Omega}(b; \vec{\gamma}; \vec{k}) = \begin{cases} 0, & \text{ако } \vec{k} = \vec{0}, \\ R(b, \vec{\gamma}, \vec{k}), & \text{ако } \vec{k} \neq \vec{0}, \end{cases},$$

, со што е докажана точноста на делот (ii) на Лема 3.5.

(iii) Доказот на делот (iii) следува директно од докажаните равенства во дел (i) и дел (ii) на оваа лема. Со тоа потполно е докажана точноста на Лема 3.5.

Откако ги докажавме сите неопходни тврдења и резултати, сега може да пристапиме кон доказот на Теорема 3.2.

Нека $\xi_N = \{\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{N-1}\}$ биде произволна мрежа составена од N точки во $[0, 1]^s$. Треба да се пресмета сумата

$$\frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \Omega(b; \gamma; \vec{x}_n \ominus_s^b \vec{x}_m).$$

За таа цел ќе ја користиме точноста на формулата:

$${}_b \text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x} \ominus_s^b \vec{y}) = {}_b \text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}) \overline{{}_b \text{wal}_{\vec{k}}(\vec{y})}, \quad \forall \vec{k} \in \mathbb{N}_0^s, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in [0, 1]^s, \quad (3.35)$$

која беше изложена во Глава 1, во поглавје 1.1. Да го забележиме и фактот дека функциите $\omega(b; \gamma; x)$ се рамномерно конвергентни над интервалот $[0, 1)$, а функциите $\Omega(b; \vec{\gamma}; \vec{x})$ се рамномерно конвергентни над $[0, 1]^s$, што следува од точноста на Лема 3.2. Во следните пресметувања, функцијата $\Omega(b; \vec{\gamma}; \vec{x})$ ќе биде заменета со нејзиниот Волш-Фуриев ред, што смее да се направи бидејќи таа е непрекината по делови, како производ од зборови од функции кои се по делови непрекинати.

Од формулата (3.35), од Дефиниција 3.1 и од Лема 3.5 (iii) се добива

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \Omega(b; \gamma; \vec{x}_n \ominus_s^b \vec{x}_m) &= \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{\substack{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s, \\ \vec{k} \neq \vec{0}}} R(b; \vec{\gamma}; \vec{k}) {}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}_n \ominus_s^b \vec{x}_m) \\
 &= \sum_{\substack{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s, \\ \vec{k} \neq \vec{0}}} R(b; \vec{\gamma}; \vec{k}) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} {}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}_n) \right] \left[\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} {}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}_m) \right] \\
 &= \sum_{\substack{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s, \\ \vec{k} \neq \vec{0}}} R(b; \vec{\gamma}; \vec{k}) \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} {}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}_n) \right|^2 \\
 &= \left(\prod_{h=1}^s \left[1 + \frac{\gamma_h(b+2)}{b(b+1)(b^2+b+1)} \right] - 1 \right) F_N^2(\mathcal{W}(b); \vec{\gamma}; \xi_N).
 \end{aligned}$$

Конечно се доби точноста на равенството

$$F_N^2(\mathcal{W}(b); \vec{\gamma}; \xi_N) = \frac{1}{\prod_{h=1}^s \left[1 + \frac{\gamma_h(b+2)}{b(b+1)(b^2+b+1)} \right] - 1} \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \Omega(b; \gamma; \vec{x}_n \ominus_s^b \vec{x}_m),$$

со што точноста на Теоремата 3.2 е наполно докажана.

3.3 Тежинска $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонија на Обоштената низа на Ван дер Корпут

Од Дефиницијата 3.1 (за тежинска $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонија) е јасно дека оцените од горе и од долу на $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонија на Обоштената низа на Ван дер Корпут ќе се базираат на соодветните оценки од горе и долу на тригонометриската сума на Волшовите функции во однос на општиот член на Обоштената низа на Ван дер Корпут. Оценката од горе на тригонометриската сума на Волшовите функции во однос на општиот

член на Обоштената низа на Ван дер Корпут е добиена од Грозданов и Стоило-ва [ГрСт2]. Во текот на разработките во оваа теза ние ќе го користиме овој резултат, па затоа сега подетално ќе го изложиме. Значи согласно со тврдењата во [ГрСт2] точен е следниот резултат: За произволни цели броеви $\alpha \geq 0$ и $\nu > 0$, нека е дефинирана функција $\delta_\alpha(\nu)$ со

$$\delta_\alpha(\nu) = \begin{cases} 1, & \text{ако } \alpha \geq \nu \\ 0, & \text{ако } \alpha < \nu. \end{cases} \quad (3.36)$$

Нека целиот број N го има следниот запис во броен систем со основа b :

$$N = a_1 b^{\nu_1} + a_2 b^{\nu_2} + \dots + a_t b^{\nu_t},$$

каде што $\nu_1 > \nu_2 > \dots > \nu_t \geq 0$ и за $1 \leq \tau \leq t$ $a_\tau \in \{1, 2, \dots, b-1\}$. Нека $k \geq 1$ е произволен цел број со следниот запис во броен систем со основа b :

$$k = k_1 b^{\alpha_1} + k_2 b^{\alpha_2} + \dots + k_g b^{\alpha_g}, \quad (3.37)$$

каде што $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_g \geq 0$ и за $1 \leq \tau \leq g$ $k_\tau \in \{1, 2, \dots, b-1\}$. Тогаш е точно следното неравенство

$$\left| \sum_{n=0}^{N-1} {}_b \text{wal}_k(S_b^\Sigma(n)) \right| \leq \sum_{p=1}^t a_p b^{\nu_p} \delta_{\alpha_g}(\nu_p). \quad (3.38)$$

За понатамошните истажувања и пресметувања во оваа теза ќе ни биде неопходен следниот резултат кој ќе го изнесеме во облик на лема:

Лема 3.6 *Нека целиот број N го има следниот запис во броен систем со основа b :*

$$N = a_1 b^{\nu_1} + a_2 b^{\nu_2} + \dots + a_t b^{\nu_t}, \quad (3.39)$$

каде што $\nu_1 > \nu_2 > \dots > \nu_t \geq 0$ и за $1 \leq \tau \leq t$ $a_\tau \in \{1, 2, \dots, b-1\}$. Тогаш важи

следното неравенство

$$\sum_{p=1}^t \frac{1}{b^{2\nu_p}} \leq \frac{b^2}{b^2 - 1} \left(1 - \frac{1}{b^{2N^2}} \right)$$

Доказ на Лема 3.6.

Од условот (3.39) на лемата имаме дека за експонентите $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_t$ се точни следните неравенства $\nu_1 > \nu_2 > \dots > \nu_{t-2} > \nu_{t-1} > \nu_t \geq 0$, од каде поединечно за секој експонент $\nu_j, 1 \leq j \leq t$ се добива

$$\begin{aligned} \nu_t &\geq 0, \\ \nu_{t-1} > \nu_t \geq 0 &\Rightarrow \nu_{t-1} \geq 1 \\ \nu_{t-2} > \nu_{t-1} > \nu_t \geq 0 &\Rightarrow \nu_{t-2} \geq 2 \\ &\vdots \\ \nu_1 = \nu_{t-(t-1)} &\geq t - 1. \end{aligned}$$

Од претходната дискусија следува точноста на формулата

$$\nu_p \geq t - p, \quad \forall p \in \{1, \dots, t\}. \quad (3.40)$$

Сега имаме дека

$$\sum_{p=1}^t \frac{1}{b^{2\nu_p}} \leq \sum_{p=1}^t \frac{1}{b^{2(t-p)}} = \frac{b^2}{b^2 - 1} \left(1 - \frac{1}{b^{2t}} \right). \quad (3.41)$$

Од друга страна, од записот (3.39) следува дека $N \geq b^{\nu_1} + b^{\nu_2} + \dots + b^{\nu_t}$, па од формулата (3.40) се добива дека

$$N \geq b^{\nu_{t-1}} + b^{\nu_{t-2}} + \dots + b + b^0 \geq \frac{b^t}{b-1}. \quad (3.42)$$

Од добиеното неравенство $N \geq \frac{b^t}{b-1}$, следува дека $b^t \leq (b-1)N + 1 =$

$bN - N + 1 \leq bN$, односно се доби формулата:

$$b^t \leq bN. \quad (3.43)$$

Од последното неравенство имаме дека

$$b^t \leq bN \Rightarrow \frac{1}{b^t} \geq \frac{1}{bN} \Rightarrow \frac{1}{b^{2t}} \geq \frac{1}{(bN)^2} \Rightarrow -\frac{1}{b^{2t}} \leq -\frac{1}{(bN)^2}. \quad (3.44)$$

Од (3.41) и од (3.44) се добива точноста на формулата:

$$\sum_{p=1}^t \frac{1}{b^{2\nu_p}} \leq \frac{b^2}{b^2 - 1} \left(1 - \frac{1}{b^{2t}}\right) \leq \frac{b^2}{b^2 - 1} \left(1 - \frac{1}{b^{2N^2}}\right),$$

со што е докажана точноста на Лема 3.6.

3.4 Основни резултати

Откако докажавме некои помошни резултати, сега може да преминеме кон формулација на Теорема 3.3 во која е изложена оценка од горе на тежинската $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонија на Обошттената низа на Ван дер Корпут.

Теорема 3.3 *Нека $S_b^\Sigma = (S_b^\Sigma(n))_{n \geq 0}$ е произволна Обоштена низа на Ван дер Корпут.*

(i) *Постои позитивна константа $C(b)$, која зависи само од базата b , така што $\forall N \geq 1, N \in \mathbb{Z}$ тежинската $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонија $F_N(\mathcal{W}(b); \gamma; S_b^\Sigma)$ на низата S_b^Σ го задоволува неравенството*

$$(NF_N(\mathcal{W}(b); \gamma; S_b^\Sigma))^2 \leq C(b) \left(1 - \frac{1}{b^{2N^2}}\right).$$

(ii) *(асимптотско однесување) За $\forall N \geq 1, N \in \mathbb{Z}$ за тежинската*

$(\mathcal{W}(b); \gamma)$ - дијафонија $F_N(\mathcal{W}(b); \gamma; S_b^\Sigma)$ на низата S_b^Σ е точно

$$F_N(\mathcal{W}(b); \gamma; S_b^\Sigma) \in \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right).$$

Горната граница на тежинската $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонија $F_N(\mathcal{W}(b); \gamma; S_b^\Sigma)$ на низата S_b^Σ дадена во Теорема 3.3 е дополнета со долна граница и тој резултат е претставен во следната теорема.

Теорема 3.4 Нека $S_b^\Sigma = (S_b^\Sigma(n))_{n \geq 0}$ е произволна Обоштена низа на Ван дер Корпут. Тогаш неравенството

$$F_N(\mathcal{W}(b); \gamma; S_b^\Sigma) \geq \sqrt{\frac{(b^2 - 1)(b^2 + b + 1)}{b^3(b + 2)}} \frac{1}{N}$$

важи за бесконечно многу вредности на N од облик $N = b^\nu + 1$, каде што $\nu > 1$ е произволен цел број.

Со Теорема 3.4 се дава точниот ред на големина на тежинската $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ - дијафонија на произволна Обоштена низа на Ван дер Корпут, т.е. тежинската $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ - дијафонија на произволна Обоштена низа на Ван дер Корпут има точен ред на големина $\mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$.

Во [ГрСт1] и [ГрСт2] авторите имаат докажано дека дијафонијата од ред b на произволна Обоштена низа на Ван дер Корпут има точен ред на големина од $\mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\log N}}{N}\right)$.

Споредбата на добиените точни редови на големина на овие два типа на дијафонии - дијафонијата од ред b и тежинската $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ - дијафонија на произволна Обоштена низа на Ван дер Корпут, заклучуваме дека тежинската $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ - дијафонија има помал ред на големина отколку дијафонијата од ред b на истата низа.

Овде ќе ја искажеме следната **хипотеза**:

Обопштената низа на Ван дер Корпут е еден класичен пример на едноразмерна низа со одлично рамномерно распределени членови. Дијафонијата од ред b на оваа низа има точен ред на големина $\mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\log N}}{N}\right)$, а тежинската $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонија има точен ред на големина $\mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$. Нашата хипотеза е дека тој ред на големина $\mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$ е најдобриот можен ред на големина и сметаме дека не е можно да се конструира нова нумеричка мерка од типот на дијафониите, која ќе има ред на големина на тежнење кон 0 подобар од $\mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$. Во таа смисла тежинската $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонија е веројатно една од најоптималните нумерички карактеристики во смисла на погоре изложените наши расудувања.

Засега ова е само хипотеза и ние немаме доказ на тој силен факт. Основите за оваа претпоставка се базираат врз исклучително прецизниот карактер на оценката од десно на тригонометриската сума на Волшовите функции во однос на Обопштената низа на Ван дер Корпут. Според направените пресметувања за наоѓање на редот на големина $\mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$, сметаме дека нема да можат да се постигнат подобри резултати (со евентуални дефиниции на нови типови дијафони, за пресметување на редот на големина на Обопштената низа на Ван дер Корпут).

3.4.1 Доказ на Теорема 3.3 и Теорема 3.4

Доказ на Теорема 3.3.

Нека $N \geq 1$ е произволен цел број и нека $\gamma > 0$ е произволен реален број. Согласно со Дефиниција 3.4, во едноразмерниот случај го

имаме следното равенство

$$\frac{\gamma(b+2)}{b(b+1)(b^2+b+1)} (NF_N(\mathcal{W}(b); \gamma; S_b^\Sigma)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \rho(b; \gamma; k) \left| \sum_{n=0}^{N-1} {}_b\text{wal}_k(S_b^\Sigma(n)) \right|^2.$$

Точно е следното равенство

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \rho(b; \gamma; k) &= \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \rho(b; \gamma; k_{a-1}b^{a-1}) \\ &+ \sum_{a=2}^{\infty} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{k=k_{a-1}b^{a-1}+k_{j-1}b^{j-1}}^{k_{a-1}b^{a-1}+(k_{j-1}+1)b^{j-1}-1} \rho(b; \gamma; k). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Оваа шема ја воведуваме од причина што коефициентите $\rho(b; \gamma; k)$ се дефинирани зависно од бројот на ненулти цифри на k во записот во броен систем со основа b . Па, првиот собирок во (3.45) одговара на оние броеви k кои имаат само една ненулта цифра во записот во броен систем со основа b , а вториот собирок одговара на вредностите на k за кои во нивниот запис во броен систем со основа b има најмалку 2 ненулти цифри. Сега од (3.45) се добива

$$\begin{aligned} &\frac{\gamma(b+2)}{b(b+1)(b^2+b+1)} (NF_N(\mathcal{W}(b); \gamma; S_b^\Sigma)^2 = \\ &= \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \gamma b^{-4a} \left| \sum_{n=0}^{N-1} {}_b\text{wal}_{k_{a-1}b^{a-1}}(S_b^\Sigma(n)) \right|^2 \\ &+ \sum_{a=2}^{\infty} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{k=k_{a-1}b^{a-1}+k_{j-1}b^{j-1}}^{k_{a-1}b^{a-1}+(k_{j-1}+1)b^{j-1}-1} (\gamma b^{-2a-2j} + \gamma b^{-4a}) \left| \sum_{n=0}^{N-1} {}_b\text{wal}_k(S_b^\Sigma(n)) \right|^2 \\ &= \gamma \sum_{a=1}^{\infty} b^{-4a} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \left| \sum_{n=0}^{N-1} {}_b\text{wal}_{k_{a-1}b^{a-1}}(S_b^\Sigma(n)) \right|^2 \\ &+ \gamma \sum_{a=2}^{\infty} b^{-2a} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} b^{-2j} \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{k=k_{a-1}b^{a-1}+k_{j-1}b^{j-1}}^{k_{a-1}b^{a-1}+(k_{j-1}+1)b^{j-1}-1} \left| \sum_{n=0}^{N-1} {}_b\text{wal}_k(S_b^\Sigma(n)) \right|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\gamma \sum_{a=2}^{\infty} b^{-4a} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{k=k_{a-1}b^{a-1}+(k_{j-1}+1)b^{j-1}-1}^{k_{a-1}b^{a-1}+(k_{j-1}+1)b^{j-1}-1} \left| \sum_{n=0}^{N-1} {}_b\text{wal}_k(S_b^{\Sigma}(n)) \right|^2 \\
 & = \gamma(\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3),
 \end{aligned}$$

односно се добива равенството

$$\frac{\gamma(b+2)}{b(b+1)(b^2+b+1)} (N \cdot F_N(\mathcal{W}(b); \gamma; S_b^{\Sigma})^2 = \gamma(\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3). \quad (3.46)$$

Ќе ја користиме следната шема за собирање на елементи на симетрична матрица $[a_{pq}]_{p,q=1}^n$

$$\sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n a_{pq} = 2 \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^p a_{pq} - \sum_{p=1}^n a_{pp}. \quad (3.47)$$

На почеток да ја оцениме сумата Σ_1 . Во пресметките за Σ_1 е точно дека α_g од (3.37) е индексот на најдесната ненулта цифра на k и $\alpha_g = a-1$, па од (3.38) следува дека

$$\begin{aligned}
 \Sigma_1 & = \sum_{a=1}^{\infty} b^{-4a} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \left| \sum_{n=0}^{N-1} {}_b\text{wal}_{k_{a-1}b^{a-1}}(S_b^{\Sigma}(n)) \right|^2 \\
 & \leq (b-1) \sum_{a=1}^{\infty} b^{-4a} \sum_{p=1}^t a_p b^{\nu_p} \delta_{a-1}(\nu_p) \sum_{q=1}^t a_q b^{\nu_q} \delta_{a-1}(\nu_q). \quad (3.48)
 \end{aligned}$$

Од (3.47) и (3.48) следува

$$\Sigma_1 \leq (b-1) \sum_{a=1}^{\infty} b^{-4a} \left[2 \sum_{p=1}^t \sum_{q=1}^p a_p a_q b^{\nu_p + \nu_q} \delta_{b^{a-1}}(\nu_p) \delta_{b^{a-1}}(\nu_q) - \sum_{p=1}^t a_p^2 b^{2\nu_p} \delta_{b^{a-1}}(\nu_p) \right].$$

Ако во последниот израз за вредностите на a_p и a_q се искористат нера-

венствата $1 \leq a_p, a_q \leq b-1$, $\forall p, q \in \{1, \dots, t\}$, тогаш следува

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &\leq 2(b-1)^3 \sum_{p=1}^t b^{\nu_p} \sum_{q=1}^p b^{\nu_q} \sum_{a=1}^{\infty} b^{-4a} \delta_{a-1}(\nu_p) \delta_{a-1}(\nu_q) \\ &\quad - (b-1) \sum_{p=1}^t b^{2\nu_p} \sum_{a=1}^{\infty} b^{-4a} \delta_{a-1}(\nu_p) \end{aligned} \quad (3.49)$$

Согласно со дефиницијата (3.36) на функцијата $\delta(\cdot)$ имаме дека $\delta_{a-1}(\nu_p) = 1 \iff a-1 \geq \nu_p \iff a \geq \nu_p+1 \Rightarrow a \geq \nu_q+1$, бидејќи $q \leq p \Rightarrow \nu_q \leq \nu_p$. Тој факт ќе го искористиме за да вредностите на сумирачкиот индекс a во (3.49) примаат вредности $a \geq \nu_q+1$ и ќе ги изоставиме вредностите $1 \leq a \leq \nu_q$ за кои соодветните собироци ќе добијат вредност 0. Од претходната дискусија следува

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &\leq 2(b-1)^3 \sum_{p=1}^t b^{\nu_p} \sum_{q=1}^p b^{\nu_q} \sum_{a=\nu_q+1}^{\infty} b^{-4a} - (b-1) \sum_{p=1}^t b^{2\nu_p} \sum_{a=\nu_p+1}^{\infty} b^{-4a} \\ &= \frac{2(b-1)^2}{(b+1)(b^2+1)} \sum_{p=1}^t b^{\nu_p} \sum_{q=1}^p b^{-3\nu_q} - \frac{1}{(b+1)(b^2+1)} \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

За сумата $\sum_{q=1}^p b^{-3\nu_q}$ не е тешко да се докаже дека важи следното неравенство

$$\sum_{q=1}^p b^{-3\nu_q} \leq \frac{b^3}{b^3-1} b^{-3\nu_p}. \quad (3.51)$$

Од (3.50) и (3.51) за Σ_1 следува

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &\leq \frac{2(b-1)^2 b^3}{(b+1)(b^2+1)(b^3-1)} \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p} - \frac{1}{(b+1)(b^2+1)} \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p} \\ &= \frac{2b^4 - 2b^3 - b^2 - b - 1}{(b+1)(b^2+1)(b^2+b+1)} \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p}, \end{aligned}$$

односно се добива резултатот

$$\Sigma_1 \leq C_1(b) \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p}, \quad (3.52)$$

каде што $C_1(b) = \frac{2b^4 - 2b^3 - b^2 - b - 1}{(b+1)(b^2+1)(b^2+b+1)}$.

На сличен начин ќе направиме оценка на Σ_2 , но претходно ќе ја изложиме идејата за сумирањето по индексот k во Σ_2 . Поточно, во Σ_2 индексот k е таков што $k = k_{a-1}b^{a-1} + k_{j-1}b^{j-1} + \dots + k_0$ т.е. записот во броен систем со основа b на k содржи барем 2 ненулни цифри k_{a-1} и k_{j-1} за некои a и j такви што $0 \leq j-1 < a-1$ т.е. за некои a и j така што $1 \leq j < a$.

Во понатамошните испитувања, важна улога ќе има фактот дали бројот k има точно 2 ненулни цифри k_{a-1} и k_{j-1} (и тогаш согласно со записот (3.36) на k ќе важи дека $\alpha_g = j+1$), или покрај овие 2 ненулни цифри во записот на k во броен систем со основа b има барем уште една ненулта цифра. Заради тоа ќе дефинираме множества $B(j; \alpha)$ на следниот начин: За произволен цел број $j \geq 2$ и за $\alpha = 0, 1, \dots, j-2$ нека дефинираме множество

$$B(j; \alpha) = \{l : l = l_{j-2}b^{j-2} + \dots + l_\alpha b^\alpha, \alpha \leq \tau \leq j-2 \quad l_\tau \in \{0, 1, \dots, b-1\}, l_\alpha \neq 0\}. \quad (3.53)$$

Јасно е дека за кардиналноста на $B(j; \alpha)$ важи $|B(j; \alpha)| = (b-1)b^{j-2-\alpha}$. Имено, множеството $B(j; \alpha)$ се состои од сите оние природни броеви со најмногу $j-1$ цифри, кои на својот десен крај имаат блок од точно α нули. Оваа конструкција на $B(j; \alpha)$ е неопходна и заради тоа што треба точно да ја знаеме α_g , позицијата на најдесната ненулта цифра на k . Овде е точна следната формула ($\forall k \in B(j; \alpha)$): $\alpha_g = \alpha$.

Пример за множества $B(j; \alpha)$, за $b = 3$ и $j = 4$:

$\alpha = 0$:

$B(4; 0) = \{1, 2, 11, 12, 21, 22, 101, 102, 111, 112, 121, 122, 201, 202, 211, 212, 221, 222\}$

$\alpha = 1$: $B(4; 1) = \{10, 20, 110, 120, 210, 220\}$

$\alpha = 2$: $B(4; 2) = \{100, 200\}$.

Откако ги воведовме множествата $B(j; \alpha)$, ќе ја искористиме следната шема за сумирање:

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= \sum_{a=2}^{\infty} b^{-2a} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} b^{-2j} \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{k=k_{a-1}b^{a-1}+(k_{j-1}+1)b^{j-1}-1}^{k_{a-1}b^{a-1}+(k_{j-1}+1)b^{j-1}-1} \left| \sum_{n=0}^{N-1} {}_b\text{wal}_k(S_b^\Sigma(n)) \right|^2 \\ &= \sum_{a=2}^{\infty} b^{-2a} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} b^{-2j} \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} \left[\left| \sum_{n=0}^{N-1} {}_b\text{wal}_{k_{a-1}b^{a-1}+k_{j-1}b^{j-1}}(S_b^\Sigma(n)) \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\alpha=0}^{j-2} \sum_{l \in B(j; \alpha)} \left| \sum_{n=0}^{N-1} {}_b\text{wal}_{k_{a-1}b^{a-1}+k_{j-1}b^{j-1}+l}(S_b^\Sigma(n)) \right|^2 \right]. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Понатаму за следната сума имаме дека:

$$\sum_{\alpha=0}^{j-2} \sum_{l \in B(j; \alpha)} 1 = \sum_{\alpha=0}^{j-2} (b-1)b^{j-2-\alpha} = (b-1) \sum_{h=0}^{j-2} b^h = b^{j-1} - 1. \tag{3.55}$$

Од формулата (3.38) следува неравенството за Σ_2 од облик

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &\leq \sum_{a=2}^{\infty} b^{-2a} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} b^{-2j} \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} \left[\sum_{p=1}^t \sum_{q=1}^t a_p a_q b^{\nu_p + \nu_q} \delta_{j-1}(\nu_p) \delta_{j-1}(\nu_q) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\alpha=0}^{j-2} \sum_{l \in B(j; \alpha)} \sum_{p=1}^t \sum_{q=1}^t a_p a_q b^{\nu_p + \nu_q} \delta_\alpha(\nu_p) \delta_\alpha(\nu_q) \right] \\ &= \sum_{a=2}^{\infty} b^{-2a} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} b^{-2j} \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{p=1}^t \sum_{q=1}^t a_p a_q b^{\nu_p + \nu_q} \delta_{j-1}(\nu_p) \delta_{j-1}(\nu_q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{a=2}^{\infty} b^{-2a} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} b^{-2j} \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{\alpha=0}^{j-2} \sum_{l \in B(j;\alpha)} \sum_{p=1}^t \sum_{q=1}^t a_p a_q b^{\nu_p + \nu_q} \delta_{\alpha}(\nu_p) \delta_{\alpha}(\nu_q) \\
 & = \Sigma_{21} + \Sigma_{22},
 \end{aligned}$$

т.е. се добива формулата

$$\Sigma_2 \leq \Sigma_{21} + \Sigma_{22}. \tag{3.56}$$

Да ги оцениме посебно овие две суми. За оценка на Σ_{21} , тргнувајќи од шемата за симетричната матрица (3.47) и од неравенствата: $1 \leq a_p, a_q \leq b-1$, $\forall p, q \in \{1, \dots, t\}$, имаме дека:

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{21} & = \sum_{a=2}^{\infty} b^{-2a} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} b^{-2j} \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{p=1}^t \sum_{q=1}^t a_p a_q b^{\nu_p + \nu_q} \delta_{j-1}(\nu_p) \delta_{j-1}(\nu_q) \\
 & = (b-1)^2 \sum_{a=2}^{\infty} b^{-2a} \sum_{j=1}^{a-1} b^{-2j} \left[2 \sum_{p=1}^t \sum_{q=1}^p a_p a_q b^{\nu_p + \nu_q} \delta_{j-1}(\nu_p) \delta_{j-1}(\nu_q) - \sum_{p=1}^t a_p^2 b^{2\nu_p} \delta_{j-1}(\nu_p) \right] \\
 & \leq 2(b-1)^4 \sum_{a=2}^{\infty} b^{-2a} \sum_{j=1}^{a-1} b^{-2j} \sum_{p=1}^t b^{\nu_p} \sum_{q=1}^p b^{\nu_q} \delta_{j-1}(\nu_p) \delta_{j-1}(\nu_q) \\
 & \quad - (b-1)^2 \sum_{a=2}^{\infty} b^{-2a} \sum_{j=1}^{a-1} b^{-2j} \sum_{p=1}^t b^{2\nu_p} \delta_{j-1}(\nu_p) \\
 & = 2(b-1)^4 \sum_{p=1}^t b^{\nu_p} \sum_{q=1}^p b^{\nu_q} \sum_{a=2}^{\infty} b^{-2a} \sum_{j=1}^{a-1} b^{-2j} \delta_{j-1}(\nu_p) \delta_{j-1}(\nu_q) \\
 & \quad - (b-1)^2 \sum_{p=1}^t b^{2\nu_p} \sum_{a=2}^{\infty} b^{-2a} \sum_{j=1}^{a-1} b^{-2j} \delta_{j-1}(\nu_p).
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

Слично на дискусијата за Σ_1 , собираците во последниот израз кои одговараат на сумирачкиот индекс a ќе имаат вредност 0, ако $j-1 < \nu_p$ или $j-1 < \nu_q$ поради тоа што $\delta_{j-1}(\nu_p) = 0$ или $\delta_{j-1}(\nu_q) = 0$. Нас не интересираат вредности на индексот a за кои $\delta_{j-1}(\nu_p) \neq 0$ и $\delta_{j-1}(\nu_q) \neq 0$, а тоа ќе важи ако $j-1 \geq \nu_p$ и $j-1 \geq \nu_q$, од каде следува $a-1 \geq j \Rightarrow (a-2 \geq$

$j - 1 \geq \nu_p$, $a - 2 \geq j - 1 \geq \nu_q$), односно

$$q \leq p \Rightarrow \nu_p \leq \nu_q \Rightarrow a \geq \nu_q + 2 \geq \nu_p + 2. \quad (3.58)$$

Согласно со претходната дискусија имаме:

$$\begin{aligned} \Sigma_{21} &\leq 2(b-1)^4 \sum_{p=1}^t b^{\nu_p} \sum_{q=1}^p b^{\nu_q} \sum_{a=\nu_q+2}^{\infty} b^{-2a} \sum_{j=\nu_q+1}^{a-1} b^{-2j} \\ &\quad - (b-1)^2 \sum_{p=1}^t b^{2\nu_p} \sum_{a=\nu_p+2}^{\infty} b^{-2a} \sum_{j=\nu_p+1}^{a-1} b^{-2j}. \end{aligned}$$

Да ја пресметаме сумата $\sum_{j=\nu_p+1}^{a-1} b^{-2j}$, која е сума на геометричка прогресија:

$$\sum_{j=\nu_p+1}^{a-1} b^{-2j} = \frac{1 - b^{-2(a-\nu_p-1)}}{b^{2\nu_p}(b^2 - 1)} \quad (3.59)$$

Сега од (3.59) за Σ_{21} имаме

$$\begin{aligned} \Sigma_{21} &\leq 2(b-1)^4 \sum_{p=1}^t b^{\nu_p} \sum_{q=1}^p b^{\nu_q} \sum_{a=\nu_q+2}^{\infty} b^{-2a} \sum_{j=\nu_q+1}^{a-1} b^{-2j} \\ &\quad - (b-1)^2 \sum_{p=1}^t b^{2\nu_p} \sum_{a=\nu_p+2}^{\infty} b^{-2a} \frac{1 - b^{-2(a-\nu_p-1)}}{b^{2\nu_p}(b^2 - 1)} \\ &= 2 \frac{(b-1)^4}{b^2 - 1} \sum_{p=1}^t b^{\nu_p} \sum_{q=1}^p b^{\nu_q - 2\nu_q} \sum_{a=\nu_q+2}^{\infty} b^{-2a} \\ &\quad + \frac{(b-1)^2 b^2}{b^2 - 1} \sum_{p=1}^t b^{2\nu_p} \sum_{a=\nu_p+2}^{\infty} b^{-4a} - \frac{(b-1)^2}{b^2 - 1} \sum_{p=1}^t b^{2\nu_p - 2\nu_p} \sum_{a=\nu_p+2}^{\infty} b^{-2a}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Од друга страна за следните геометрички редови имаме

$$\sum_{a=\nu_q+2}^{\infty} b^{-2a} = \frac{b^{-2\nu_q}}{b^2(b^2 - 1)} \quad \text{и} \quad \sum_{a=\nu_p+2}^{\infty} b^{-4a} = \frac{b^{-4\nu_p}}{b^4(b^4 - 1)}, \quad (3.61)$$

па од (3.60) и (3.61) за Σ_{21} имаме

$$\begin{aligned} \Sigma_{21} &\leq 2 \frac{(b-1)^2}{b^2(b+1)^2} \sum_{p=1}^t b^{\nu_p} \sum_{q=1}^p b^{-3\nu_q} \\ &+ \frac{1}{(b+1)^2 b^2 (b^2+1)} \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p} - \frac{1}{(b+1)^2 b^2} \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p} \\ &= 2 \frac{(b-1)^2}{b^2(b+1)^2} \sum_{p=1}^t b^{\nu_p} \sum_{q=1}^p b^{-3\nu_q} - \frac{1}{(b^2+1)(b+1)^2} \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

За да ја оцениме сумата $\sum_{q=1}^p b^{-3\nu_q}$ ќе ги користиме следните неравенства

$$\nu_1 > \nu_2 \dots > \nu_p \Rightarrow b^{3\nu_1} > b^{3\nu_2} \dots > b^{3\nu_p} \Rightarrow b^{-3\nu_1} < b^{-3\nu_2} \dots < b^{-3\nu_p},$$

што повлекува дека

$$\sum_{q=1}^p b^{-3\nu_q} \leq b^{-3\nu_p} + b^{-3(\nu_p+1)} + b^{-3(\nu_p+2)} + \dots + b^{-3\nu_1} < \sum_{q=p}^{\infty} b^{-3\nu_q} = \frac{b^{-3\nu_p} b^3}{b^3 - 1} \quad (3.63)$$

Од (3.62) и (3.63) за Σ_{21} имаме

$$\Sigma_{21} \leq \frac{2b^4 - 2b^3 + b^2 - 3b - 1}{(b^2 + 1)(b + 1)^2(b^2 + b + 1)} \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p}. \quad (3.64)$$

Откако направивме оценка од десно за Σ_{21} , сега ќе пристапиме кон оценување на сумата Σ_{22} , на начин и техника слични на оние кои ги применивме за оценување на Σ_{21} . Тргувајќи од шемата за симетричната матрица, од неравенството (3.38) и од дефиницијата на множествата $B(j; \alpha)$, за Σ_{22}

имаме

$$\begin{aligned}
\Sigma_{22} &= \sum_{a=2}^{\infty} b^{-2a} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} b^{-2j} \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{\alpha=0}^{j-2} \sum_{l \in B(j; \alpha)} \sum_{p=1}^t \sum_{q=1}^t a_p a_q b^{\nu_p + \nu_q} \delta_{\alpha}(\nu_p) \delta_{\alpha}(\nu_q) \\
&= (b-1)^2 \sum_{a=2}^{\infty} b^{-2a} \sum_{j=1}^{a-1} b^{-2j} \sum_{\alpha=0}^{j-2} (b-1) b^{j-2-\alpha} \times \\
&\quad \left[2 \sum_{p=1}^t \sum_{q=1}^p a_p a_q b^{\nu_p + \nu_q} \delta_{\alpha}(\nu_p) \delta_{\alpha}(\nu_q) - \sum_{p=1}^t a_p^2 b^{2\nu_p} \delta_{\alpha}(\nu_p) \right] \\
&= 2 \frac{(b-1)^3}{b^2} \sum_{a=2}^{\infty} b^{-2a} \sum_{j=1}^{a-1} b^{-j} \sum_{\alpha=0}^{j-2} b^{-\alpha} \sum_{p=1}^t \sum_{q=1}^p a_p a_q b^{\nu_p + \nu_q} \delta_{\alpha}(\nu_p) \delta_{\alpha}(\nu_q) \\
&\quad - \frac{(b-1)^3}{b^2} \sum_{a=2}^{\infty} b^{-2a} \sum_{j=1}^{a-1} b^{-j} \sum_{\alpha=0}^{j-2} b^{-\alpha} \sum_{p=1}^t a_p^2 b^{2\nu_p} \delta_{\alpha}(\nu_p).
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Користејќи ги неравенствата $1 \leq a_p, a_q \leq b-1$, $\forall p, q \in \{1, \dots, t\}$, за Σ_{22} следува

$$\begin{aligned}
\Sigma_{22} &\leq 2 \frac{(b-1)^5}{b^2} \sum_{a=2}^{\infty} b^{-2a} \sum_{j=1}^{a-1} b^{-j} \sum_{\alpha=0}^{j-2} b^{-\alpha} \sum_{p=1}^t b^{\nu_p} \sum_{q=1}^p b^{\nu_q} \delta_{\alpha}(\nu_p) \delta_{\alpha}(\nu_q) \\
&\quad - \frac{(b-1)^3}{b^2} \sum_{a=2}^{\infty} b^{-2a} \sum_{j=1}^{a-1} b^{-j} \sum_{\alpha=0}^{j-2} b^{-\alpha} \sum_{p=1}^t b^{2\nu_p} \delta_{\alpha}(\nu_p).
\end{aligned}$$

Според дефиницијата на функцијата $\delta_{\alpha}(\cdot)$ во понатамошните пресметки ќе ги земеме само собираците во Σ_{22} за кои соодветниот множител $\delta_{\alpha}(\cdot)$ има вредност 1, а тоа значи:

$$\{\delta_{\alpha}(\nu_p) = 1 \iff \alpha \geq \nu_p, \delta_{\alpha}(\nu_q) = 1 \iff \alpha \geq \nu_q, (q \leq p \iff \nu_q \geq \nu_p) \Rightarrow$$

$$(\delta_{\alpha}(\nu_q) = 1 \Rightarrow \delta_{\alpha}(\nu_p) = 1) \Rightarrow \{a-1 \geq j \geq \nu_q + 2 \Rightarrow a \geq \nu_q + 3\}.$$

Од претходната дискусија следува:

$$\begin{aligned} \Sigma_{22} \leq & \frac{2(b-1)^5}{b^2} \sum_{p=1}^t b^{\nu_p} \sum_{q=1}^p b^{\nu_q} \sum_{a=\nu_q+3}^{\infty} b^{-2a} \sum_{j=\nu_q+2}^{a-1} b^{-j} \sum_{\alpha=\nu_q}^{j-2} b^{-\alpha} \\ & - \frac{(b-1)^3}{b^2} \sum_{p=1}^t b^{2\nu_p} \sum_{a=\nu_p+3}^{\infty} b^{-2a} \sum_{j=\nu_p+2}^{a-1} b^{-j} \sum_{\alpha=\nu_p}^{j-2} b^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Од следните формули

$$\sum_{\alpha=\nu_p}^{j-2} b^{-\alpha} = \frac{b}{b-1} (b^{-\nu_p} - b^{1-j}) \quad \text{и} \quad \sum_{\alpha=\nu_q}^{j-2} b^{-\alpha} < \sum_{\alpha=\nu_q}^{\infty} b^{-\alpha} = \frac{b^{1-\nu_q}}{b-1}$$

следува

$$\begin{aligned} \Sigma_{22} \leq & \frac{2(b-1)^4}{b} \sum_{p=1}^t b^{\nu_p} \sum_{q=1}^p \sum_{a=\nu_q+3}^{\infty} b^{-2a} \sum_{j=\nu_q+2}^{a-1} b^{-j} \\ & + (b-1)^2 \sum_{p=1}^t b^{2\nu_p} \sum_{a=\nu_p+3}^{\infty} b^{-2a} \sum_{j=\nu_p+2}^{a-1} b^{-2j} - \frac{(b-1)^2}{b} \sum_{p=1}^t b^{\nu_p} \sum_{a=\nu_p+3}^{\infty} b^{-2a} \sum_{j=\nu_p+2}^{a-1} b^{-j} \end{aligned} \quad (3.66)$$

Сега одделно ќе ги пресметаме или оцениме од десно сумите кои се јавуваат за Σ_{22} во последниот израз:

$$\sum_{j=\nu_q+2}^{a-1} b^{-j} < \sum_{j=\nu_q+2}^{\infty} b^{-j} = \frac{b^{-\nu_q}}{b(b-1)}; \quad (3.67)$$

$$\sum_{j=\nu_p+2}^{a-1} b^{-2j} < \sum_{j=\nu_p+2}^{\infty} b^{-2j} = \frac{b^{-2\nu_p}}{b^2(b^2-1)}; \quad (3.68)$$

$$\sum_{j=\nu_p+2}^{a-1} b^{-j} = \frac{b^{-\nu_p}}{b(b-1)} - \frac{b^{1-a}}{b-1}. \quad (3.69)$$

Сега за (3.66) од (3.67), (3.68) и (3.69) следува

$$\begin{aligned} \Sigma_{22} &\leq \frac{2(b-1)^3}{b^2} \sum_{p=1}^t b^{\nu_p} \sum_{q=1}^p b^{-\nu_q} \sum_{a=\nu_q+3}^{\infty} b^{-2a} + \frac{b-1}{b^2(b+1)} \sum_{p=1}^t \sum_{a=\nu_p+3}^{\infty} b^{-2a} \\ &+ (b-1) \sum_{p=1}^t b^{\nu_p} \sum_{a=\nu_p+3}^{\infty} b^{-3a} - \frac{b-1}{b^2} \sum_{p=1}^t b^{\nu_p-\nu_p} \sum_{a=\nu_p+3}^{\infty} b^{-2a}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Ќе ги пресметаме одделните суми во (3.70):

$$\sum_{a=\nu_p+3}^{\infty} b^{-2a} = \frac{1}{b^4(b^2-1)} b^{-2\nu_p},$$

$$\sum_{a=\nu_q+3}^{\infty} b^{-2a} = \frac{1}{b^4(b^2-1)} b^{-2\nu_q},$$

$$\sum_{a=\nu_p+3}^{\infty} b^{-3a} = \frac{1}{b^6(b^3-1)} b^{-3\nu_p},$$

од каде за (3.70) се добива

$$\begin{aligned} \Sigma_{22} &< \frac{2(b-1)^3}{b^2} \sum_{p=1}^t b^{-\nu_p} \sum_{q=1}^p b^{\nu_q} \frac{b^{-2\nu_q}}{b^4(b^2-1)} + \frac{b-1}{b^2(b+1)} \frac{1}{b^4(b^2-1)} \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p} \\ &+ \frac{b-1}{b^6(b^3-1)} \sum_{p=1}^t b^{\nu_p-3\nu_p} - \frac{b-1}{b^2} \sum_{p=1}^t \frac{b^{-2\nu_p}}{b^4(b^2-1)} \\ &= \frac{2(b-1)^2}{b^6(b+1)} \sum_{p=1}^t b^{\nu_p} \sum_{q=1}^p b^{-3\nu_q} + \frac{1}{b^6(b+1)^2} \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p} + \frac{1}{b^6(b^2+b+1)} \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p} \\ &- \frac{1}{b^6(b+1)} \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p} \\ &= \frac{2(b-1)^2}{b^6(b+1)} \sum_{p=1}^t b^{\nu_p} \sum_{q=1}^p b^{-3\nu_q} + \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p} \frac{1}{b^6} \left(\frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{b^2+b+1} - \frac{1}{b+1} \right) \\ &= \frac{2(b-1)^2}{b^6(b+1)} \sum_{p=1}^t b^{\nu_p} \sum_{q=1}^p b^{-3\nu_q} + \frac{-b^3+b+1}{b^6(b+1)^2(b^2+b+1)} \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p} \end{aligned} \quad (3.71)$$

Да ја оцениме сумата $\sum_{q=1}^p b^{-3\nu_q}$ во (3.71). Ќе ја искористиме формулата (3.63) од каде следува дека

$$\sum_{q=1}^p b^{-3\nu_q} < \frac{b^3}{b^3 - 1} b^{-3\nu_p},$$

па за (3.71) имаме

$$\begin{aligned} \Sigma_{22} &< \frac{2(b-1)^2}{b^6(b+1)} \sum_{p=1}^t b^{\nu_p} \frac{b^3}{b^3-1} b^{-3\nu_p} + \frac{-b^3+b+1}{b^6(b+1)^2(b^2+b+1)} \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p} \\ &= \frac{2(b-1)}{b^3(b^2+b+1)(b+1)} \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p} + \frac{-b^3+b+1}{b^6(b+1)^2(b^2+b+1)} \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p} \\ &= \frac{2b^5 - 3b^3 + b + 1}{b^6(b+1)^2(b^2+b+1)} \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p}, \end{aligned}$$

т.е. се доби резултатот

$$\Sigma_{22} < \frac{2b^5 - 3b^3 + b + 1}{b^6(b+1)^2(b^2+b+1)} \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p}. \quad (3.72)$$

За Σ_2 од (3.56), (3.64) и (3.72) имаме

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &< \left(\frac{2b^4 - 2b^3 + b^2 - 3b - 1}{(b+1)^2(b^2+b+1)(b^2+1)} + \frac{2b^5 - 3b^3 + b + 1}{b^6(b+1)^2(b^2+b+1)} \right) \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p} \\ &= \frac{2b^{10} - 2b^9 + b^8 - b^7 - b^6 - b^5 - 2b^3 + b^2 + b + 1}{b^6(b+1)^2(b^2+1)(b^2+b+1)} \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p} \end{aligned}$$

или

$$\Sigma_2 < C_2(b) \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p}, \quad (3.73)$$

каде што

$$C_2(b) = \frac{2b^{10} - 2b^9 + b^8 - b^7 - b^6 - b^5 - 2b^3 + b^2 + b + 1}{b^6(b+1)^2(b^2+1)(b^2+b+1)}.$$

Останува да се направи оценка од десно за Σ_3 . Сосема на сличен начин како и при разработките за Σ_2 , овде ќе ги користиме множествата $B(j; \alpha)$, за $\alpha = 0, 1, \dots, j-2$, дефинирани со (3.53) како и шемата (3.54) за сумирање по индексот k , па следува дека

$$\begin{aligned} \Sigma_3 &= \sum_{a=2}^{\infty} b^{-4a} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{k=k_{a-1}b^{a-1}+(k_{j-1}+1)b^{j-1}-1}^{k_{a-1}b^{a-1}+(k_{j-1}+1)b^{j-1}-1} \left| \sum_{n=0}^{N-1} {}_b\text{wal}_k(S_b^\Sigma(n)) \right|^2 \\ &= \sum_{a=2}^{\infty} b^{-4a} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} \left\{ \left| \sum_{n=0}^{N-1} {}_b\text{wal}_{k_{a-1}b^{a-1}+k_{j-1}b^{j-1}}(S_b^\Sigma(n)) \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\alpha=0}^{j-2} \sum_{e \in B(j; \alpha)} \left| \sum_{n=0}^{N-1} {}_b\text{wal}_{k_{a-1}b^{a-1}+k_{j-1}b^{j-1}+l}(S_b^\Sigma(n)) \right|^2 \right\} \\ &= \sum_{a=2}^{\infty} b^{-4a} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} \left| \sum_{n=0}^{N-1} {}_b\text{wal}_{k_{a-1}b^{a-1}+k_{j-1}b^{j-1}}(S_b^\Sigma(n)) \right|^2 \\ &\quad + \sum_{a=2}^{\infty} b^{-4a} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{\alpha=0}^{j-2} \sum_{e \in B(j; \alpha)} \left| \sum_{n=0}^{N-1} {}_b\text{wal}_{k_{a-1}b^{a-1}+k_{j-1}b^{j-1}+l}(S_b^\Sigma(n)) \right|^2. \end{aligned} \tag{3.74}$$

Од формулите (3.74) и (3.38), каде што е претставена оценка на тригонометриската сума, за Σ_3 се добива

$$\begin{aligned} \Sigma_3 &\leq \sum_{a=2}^{\infty} b^{-4a} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{p=1}^t \sum_{q=1}^t a_p a_q b^{\nu_p + \nu_q} \delta_{j-1}(\nu_p) \delta_{j-1}(\nu_q) \\ &\quad + \sum_{a=2}^{\infty} b^{-4a} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{\alpha=0}^{j-2} \sum_{e \in B(j; \alpha)} \sum_{p=1}^t \sum_{q=1}^t a_p a_q b^{\nu_p + \nu_q} \delta_\alpha(\nu_p) \delta_\alpha(\nu_q) \\ &= \Sigma_{31} + \Sigma_{32}, \end{aligned}$$

односно се доби формулата

$$\Sigma_3 \leq \Sigma_{31} + \Sigma_{32}. \quad (3.75)$$

Посебно ќе направиме оценка од десно за Σ_{31} и Σ_{32} , при што на почеток ќе ја користиме шемата за симетричната матрица изложена во (3.47).

$$\begin{aligned} \Sigma_{31} &= \sum_{a=2}^{\infty} b^{-4a} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{p=1}^t \sum_{q=1}^t a_p a_q b^{\nu_p + \nu_q} \delta_{j-1}(\nu_p) \delta_{j-1}(\nu_q) \\ &= (b-1)^2 \sum_{a=2}^{\infty} b^{-4a} \sum_{j=1}^{a-1} \left(2 \sum_{p=1}^t \sum_{q=1}^t a_p a_q b^{\nu_p + \nu_q} \delta_{j-1}(\nu_p) \delta_{j-1}(\nu_q) - \sum_{p=1}^t a_p^2 b^{2\nu_p} \delta_{j-1}(\nu_p) \right). \end{aligned}$$

Од неравенствата $1 \leq a_p, a_q \leq b-1, \forall p, q \in \{1, \dots, t\}$ следува

$$\begin{aligned} \Sigma_{31} &\leq 2(b-1)^4 \sum_{a=2}^{\infty} b^{-4a} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{p=1}^t \sum_{q=1}^p b^{\nu_p + \nu_q} \delta_{j-1}(\nu_p) \delta_{j-1}(\nu_q) \\ &\quad - (b-1)^2 \sum_{a=2}^{\infty} b^{-4a} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{p=1}^t b^{2\nu_p} \delta_{j-1}(\nu_p). \end{aligned}$$

Да направиме анализа на вредностите на функцијата $\delta_{j-1}(\cdot)$.

$$\delta_{j-1}(\nu_p) = 1 \iff j-1 \geq \nu_p \iff j \geq \nu_p + 1 \Rightarrow a > j \geq \nu_p + 1 \Rightarrow a \geq \nu_p + 2,$$

$$\delta_{j-1}(\nu_q) = 1 \iff j-1 \geq \nu_q \iff j \geq \nu_q + 1 \geq \nu_p + 1 \Rightarrow j \geq \nu_p + 1 \iff \delta_{j-1}(\nu_p) = 1.$$

Од горната анализа за Σ_{31} се добива

$$\begin{aligned} \Sigma_{31} &\leq 2(b-1)^4 \sum_{p=1}^q b^{\nu_p} \sum_{q=1}^p b^{\nu_q} \sum_{a=\nu_q+2}^{\infty} b^{-4a} \sum_{j=\nu_q+1}^{a-1} 1 \\ &\quad - (b-1)^2 \sum_{p=1}^t b^{2\nu_p} \sum_{a=\nu_p+2}^{\infty} b^{-4a} \sum_{j=\nu_p+1}^{a-1} 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2(b-1)^4 \sum_{p=1}^t b^{\nu_p} \sum_{q=1}^p b^{\nu_q} \sum_{a=\nu_q+2}^{\infty} b^{-4a}(a-\nu_q-1) \\
&\quad - (b-1)^2 \sum_{p=1}^t b^{2\nu_p} \sum_{a=\nu_p+2}^{\infty} b^{-4a}(a-\nu_p-1).
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Треба да се пресмета сумата $\sum_{a=\nu_p+2}^{\infty} b^{-4a}(a-\nu_p-1)$. Ако ставиме нова променлива $h = a - \nu_p - 1$, тогаш $a = h + \nu_p + 1$ и

$$a = \nu_p + 2 \Rightarrow h = 1 \quad \text{и} \quad a \rightarrow +\infty \Rightarrow h \rightarrow +\infty \quad \text{и} \quad b^{-4a} = b^{-4(\nu_p+1)} b^{-4h} = \frac{b^{-4\nu_p}}{b^4} b^{-4h},$$

па следува

$$\sum_{a=\nu_p+2}^{\infty} (a - \nu_p - 1) b^{-4a} = \frac{b^{-4\nu_p}}{b^4} \sum_{h=1}^{\infty} h b^{-4h}. \tag{3.77}$$

Следна задача е да се пресмета сумата

$$\sum_{h=1}^{\infty} h b^{-4h}.$$

Нека за $x < -1$ ја разгледаме функцијата

$$f(x) = \sum_{a=1}^{\infty} b^{ax}. \tag{3.78}$$

Според условот $x < -1$ имаме дека горниот ред е конвергентен и неговата сума е

$$f(x) = \frac{b^x}{1 - b^x}.$$

Имено, за $x < -1$, општиот член b^{ax} на редот (3.78) е ограничен од десна страна со $\frac{1}{b^a}$, па од тоа што геометрискиот ред $\sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{b^a}$ е конвергентен

броен ред, тогаш согласно со Критериумот на Ваерштрас, редот $\sum_{a=1}^{\infty} b^{ax}$ е рамномерно конвергентен за $x < -1$ и тој може да се диференцира член по член. Тој резултат ќе го искористиме во продолжение, па следува

$$f'(x) = \left(\frac{b^x}{1-b^x}\right)' = \frac{b^x \ln b}{(1-b^x)^2}. \quad (3.79)$$

Од друга страна, ако член по член го диференцираме редот $\sum_{a=1}^{\infty} b^{ax}$, за $f'(x)$ имаме

$$f'(x) = \sum_{a=1}^{\infty} (b^{ax})' = \ln b \sum_{a=1}^{\infty} a b^{ax},$$

од каде со користење на (3.79) следува дека

$$\sum_{a=1}^{\infty} a b^{ax} = \frac{b^x}{(1-b^x)^2},$$

па ако ставиме $x = -4$ следува дека

$$\sum_{a=1}^{\infty} a b^{-4a} = \frac{b^4}{(b^4-1)^2}. \quad (3.80)$$

Од (3.77) и (3.80) следува дека

$$\sum_{a=\nu_p+2}^{\infty} (a - \nu_p - 1) b^{-4a} = \frac{b^{-4\nu_p}}{b^4} \frac{b^4}{(b^4-1)^2} = \frac{b^{-4\nu_p}}{(b^4-1)^2}. \quad (3.81)$$

Од (3.76) и (3.81) имаме

$$\begin{aligned} \Sigma_{31} &\leq 2(b-1)^4 \sum_{p=1}^t b^{\nu_p} \sum_{q=1}^p b^{\nu_q} \frac{b^{-4\nu_q}}{(b^4-1)^2} - (b-1)^2 \sum_{p=1}^t b^{2\nu_p} \frac{b^{-4\nu_p}}{(b^4-1)^2} \\ &= \frac{2(b-1)^2}{(b+1)^2(b^2+1)^2} \sum_{p=1}^t b^{\nu_p} \sum_{q=1}^p b^{-3\nu_q} - \frac{1}{(b+1)^2(b^2+1)^2} \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p}. \end{aligned}$$

Од (3.63) имаме

$$\sum_{q=1}^p b^{-3\nu_q} < \frac{b^3}{b^3-1} b^{-3\nu_p},$$

па следува

$$\begin{aligned} \Sigma_{31} &< \frac{2(b-1)^2}{(b+1)^2(b^2+1)^2} \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p} \frac{b^3}{b^3-1} - \frac{1}{(b+1)^2(b^2+1)^2} \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p} \\ &= \left(\frac{2(b-1)b^3}{(b+1)^2(b^2+1)^2(b^2+b+1)} - \frac{1}{(b+1)^2(b^2+1)^2} \right) \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p} \\ &= \frac{2b^4 - 2b^3 - b^2 - b - 1}{(b+1)^2(b^2+1)^2(b^2+b+1)} \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p}, \end{aligned}$$

т.е. го добивме следниот резултат:

$$\Sigma_{31} < \frac{2b^4 - 2b^3 - b^2 - b - 1}{(b+1)^2(b^2+1)^2(b^2+b+1)} \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p} \tag{3.82}$$

Следува оценка од десно за сумата Σ_{32} , според слични анализи кои беа направени за сумите Σ_{31} и Σ_2 :

$$\begin{aligned} \Sigma_{32} &= \sum_{a=2}^{\infty} b^{-4a} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{\alpha=0}^{j-2} \sum_{e \in B(j; \alpha)} \sum_{p=1}^t \sum_{q=1}^t a_p a_q b^{\nu_p + \nu_q} \delta_{\alpha}(\nu_p) \delta_{\alpha}(\nu_q) \\ &= (b-1)^2 \sum_{a=2}^{\infty} b^{-4a} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{\alpha=0}^{j-2} \sum_{e \in B(j; \alpha)} \left(2 \sum_{p=1}^t \sum_{q=1}^p a_p a_q b^{\nu_p + \nu_q} \delta_{\alpha}(\nu_p) \delta_{\alpha}(\nu_q) - \sum_{p=1}^t a_p^2 b^{2\nu_p} \delta_{\alpha}(\nu_p) \right) \\ &= 2(b-1)^2 \sum_{a=2}^{\infty} b^{-4a} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{\alpha=0}^{j-2} \sum_{e \in B(j; \alpha)} \sum_{p=1}^t \sum_{q=1}^p a_p a_q b^{\nu_p + \nu_q} \delta_{\alpha}(\nu_p) \delta_{\alpha}(\nu_q) \\ &\quad - (b-1)^2 \sum_{a=2}^{\infty} b^{-4a} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{\alpha=0}^{j-2} \sum_{e \in B(j; \alpha)} \sum_{p=1}^t a_p^2 b^{2\nu_p} \delta_{\alpha}(\nu_p) \\ &\leq 2(b-1)^4 \sum_{p=1}^t b^{\nu_p} \sum_{q=1}^p b^{\nu_q} \sum_{a=2}^{\infty} b^{-4a} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{\alpha=0}^{j-2} \sum_{e \in B(j; \alpha)} \delta_{\alpha}(\nu_p) \delta_{\alpha}(\nu_q) \\ &\quad - (b-1)^2 \sum_{p=1}^t b^{2\nu_p} \sum_{a=2}^{\infty} b^{-4a} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{\alpha=0}^{j-2} \sum_{e \in B(j; \alpha)} \delta_{\alpha}(\nu_p). \end{aligned}$$

Според дефиницијата на функцијата $\delta_\alpha(\cdot)$ имаме

$$\delta_\alpha(\nu_p) = 1 \iff \nu_p \leq \alpha \leq j - 2 \Rightarrow \nu_p \leq j - 2 \leq a - 3 \Rightarrow a \geq \nu_p + 3, j \geq \nu_p + 2,$$

и

$$q \leq p \Rightarrow \nu_q \geq \nu_p \Rightarrow (\delta_\alpha(\nu_q) = 1 \Rightarrow \delta_\alpha(\nu_p) = 1),$$

од каде следува

$$\begin{aligned} \Sigma_{32} &< 2(b-1)^4 \sum_{p=1}^t b^{\nu_p} \sum_{q=1}^p b^{\nu_q} \sum_{a=\nu_q+3}^{\infty} b^{-4a} \sum_{j=\nu_q+2}^{a-1} \sum_{\alpha=\nu_q}^{j-2} (b-1)b^{j-2-\alpha} \\ &- (b-1)^2 \sum_{p=1}^t b^{2\nu_p} \sum_{a=\nu_p+3}^{\infty} b^{-4a} \sum_{j=\nu_p+2}^{a-1} \sum_{\alpha=\nu_p}^{j-2} (b-1)b^{j-2-\alpha} \\ &= \frac{2(b-1)^5}{b^2} \sum_{p=1}^t b^{\nu_p} \sum_{q=1}^p b^{\nu_q} \sum_{a=\nu_p+3}^{\infty} b^{-4a} \sum_{j=\nu_q+2}^{a-1} b^j \sum_{\alpha=\nu_q}^{j-2} b^{-\alpha} \\ &- \frac{(b-1)^3}{b^2} \sum_{p=1}^t b^{2\nu_p} \sum_{a=\nu_p+3}^{\infty} b^{-4a} \sum_{j=\nu_p+2}^{a-1} b^j \sum_{\alpha=\nu_p}^{j-2} b^{-\alpha} \end{aligned}$$

Од

$$\sum_{\alpha=\nu_p}^{j-2} b^{-\alpha} = \frac{b}{b-1} b^{-\nu_p} - \frac{b^2}{b-1} b^{-j} < \frac{b}{b-1} b^{-\nu_p}$$

следува дека

$$\begin{aligned} \Sigma_{32} &< \frac{2(b-1)^5}{b^2(b-1)} b \sum_{p=1}^t b^{\nu_p} \sum_{q=1}^p b^{\nu_q-\nu_p} \sum_{a=\nu_q+3}^{\infty} b^{-4a} \sum_{j=\nu_q+2}^{a-1} b^j \\ &- \frac{(b-1)^3}{b^2} \frac{b}{b-1} \sum_{p=1}^t b^{2\nu_p} \sum_{a=\nu_p+3}^{\infty} b^{-4a} \sum_{j=\nu_p+2}^{a-1} b^j (b^{-\nu_p} - bb^{-j}) \\ &= \frac{2(b-1)^4}{b} \sum_{p=1}^t b^{\nu_p} \sum_{q=1}^p \sum_{a=\nu_q+3}^{\infty} b^{-4a} \sum_{j=\nu_q+2}^{a-1} b^j \\ &+ \frac{(b-1)^2}{b} b \sum_{p=1}^t b^{2\nu_p} \sum_{a=\nu_p+3}^{\infty} b^{-4a} \sum_{j=\nu_p+2}^{a-1} 1 - \frac{(b-1)^2}{b} \sum_{p=1}^t b^{2\nu_p-\nu_p} \sum_{a=\nu_p+3}^{\infty} b^{-4a} \sum_{j=\nu_p+2}^{a-1} b^j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2(b-1)^4}{b} \sum_{p=1}^t b^{\nu_p} \sum_{q=1}^p \sum_{a=\nu_q+3}^{\infty} b^{-4a} \left(\frac{b^a}{b-1} - \frac{b^2}{b-1} b^{\nu_q} \right) \\
&+ (b-1)^2 \sum_{p=1}^t b^{2\nu_p} \sum_{a=\nu_p+3}^{\infty} b^{-4a} (a - \nu_p - 2) - \frac{(b-1)^2}{b} \sum_{p=1}^t b^{\nu_p} \sum_{a=\nu_p+3}^{\infty} b^{-4a} \left(\frac{b^a}{b-1} - \frac{b^2}{b-1} b^{\nu_p} \right) \\
&= \frac{2(b-1)^3}{b} \sum_{p=1}^t b^{\nu_p} \sum_{q=1}^p \sum_{a=\nu_q+3}^{\infty} b^{-3a} - \frac{2(b-1)^3}{1} b \sum_{p=1}^t b^{\nu_p} \sum_{q=1}^p b^{\nu_q} \sum_{a=\nu_p+3}^{\infty} b^{-4a} \\
&+ (b-1)^2 \sum_{p=1}^t b^{\nu_p} \sum_{a=\nu_p+3}^{\infty} b^{-4a} (a - \nu_p - 2) - \frac{(b-1)}{b} \sum_{p=1}^t b^{\nu_p} \sum_{a=\nu_p+3}^{\infty} b^{-3a} \\
&+ b(b-1) \sum_{p=1}^t b^{2\nu_p} \sum_{a=\nu_p+3}^{\infty} b^{-4a}
\end{aligned} \tag{3.83}$$

За да ја пресметаме сумата $\sum_{a=\nu_p+3}^{\infty} (a - \nu_p - 2)b^{-4a}$ ќе ја користиме формулата

(3.81):

$$\sum_{a=\nu_p+2}^{\infty} (a - \nu_p - 1)b^{-4a} = \frac{b^{-4\nu_p}}{(b^4 - 1)^2},$$

од каде следува

$$\begin{aligned}
&\sum_{a=\nu_p+3}^{\infty} (a - \nu_p - 2)b^{-4a} + (\nu_p + 2 - \nu_p - 2)b^{-4(\nu_p+2)} = \sum_{a=\nu_p+2}^{\infty} (a - \nu_p - 2)b^{-4a} \\
&= \sum_{a=\nu_p+2}^{\infty} (a - \nu_p - 1)b^{-4a} - \sum_{a=\nu_p+2}^{\infty} b^{-4a} = \frac{b^{-4\nu_p}}{(b^4 - 1)^2} - \frac{b^{4\nu_p}}{b^4(b^4 - 1)} = \frac{b^{-4\nu_p}}{(b^4 - 1)^2 b^4},
\end{aligned}$$

т.е. се доби формулата

$$\sum_{a=\nu_p+3}^{\infty} (a - \nu_p - 2)b^{-4a} = \frac{b^{-4\nu_p}}{(b^4 - 1)^2 b^4}. \tag{3.84}$$

Понатаму ги пресметуваме следните геометриски суми:

$$\sum_{a=\nu_p+3}^{\infty} b^{-3a} = \frac{b^{-3\nu_p}}{b^6(b^3 - 1)} \quad \text{и} \quad \sum_{a=\nu_p+3}^{\infty} b^{-4a} = \frac{b^{-4\nu_p}}{b^8(b^4 - 1)} \tag{3.85}$$

па од (3.83), (3.84) и (3.85) следува:

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{32} &< 2 \frac{(b-1)^3}{b} \sum_{p=1}^t b^{\nu_p} \sum_{q=1}^p \frac{b^{-3\nu_q}}{b^6(b^3-1)} - 2 \frac{(b-1)^3 b}{b^8(b^4-1)} \sum_{p=1}^t b^{\nu_p} \sum_{q=1}^p b^{\nu_q-4\nu_p} \\
 &+ \frac{(b-1)^2}{(b^4-1)^2 b^4} \sum_{p=1}^t b^{2\nu_p-4\nu_p} - \frac{(b-1)}{b^7(b^3-1)} \sum_{p=1}^t b^{\nu_p-3\nu_p} + \frac{b(b-1)}{b^8(b^4-1)} \sum_{p=1}^t b^{2\nu_p-4\nu_p} \\
 &= \frac{2(b-1)^2}{b^7(b^2+b+1)} \sum_{p=1}^t b^{\nu_p} \sum_{q=1}^p b^{-3\nu_q} - \frac{2(b-1)^2}{b^7(b+1)(b^2+1)} \sum_{p=1}^t b^{\nu_p} \sum_{q=1}^p b^{-3\nu_q} \\
 &+ \frac{1}{(b+1)^2(b^2+1)^2 b^4} \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p} - \frac{1}{b^7(b^2+b+1)} \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p} \\
 &+ \frac{1}{b^7(b+1)(b^2+1)} \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p} \\
 &= \left(\frac{2(b-1)^2}{b^7(b^2+b+1)} - \frac{2(b-1)^2}{b^7(b+1)(b^2+1)} \right) \sum_{p=1}^t b^{\nu_p} \sum_{q=1}^p b^{-3\nu_q} \\
 &+ \left(\frac{1}{(b+1)^2(b^2+1)^2 b^4} - \frac{1}{b^7(b^2+b+1)} + \frac{1}{b^7(b+1)(b^2+1)} \right) \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p} \\
 &= \frac{2(b-1)^2 b^3}{b^7(b^2+b+1)(b+1)(b^2+1)} \sum_{p=1}^t b^{\nu_p} \sum_{q=1}^p b^{-3\nu_q} \\
 &- \frac{1}{b(b+1)^2(b^2+1)^2(b^2+b+1)} \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p} \\
 &= \frac{2(b-1)^2}{(b^2+b+1)b^4(b+1)(b^2+1)} \sum_{p=1}^t b^{\nu_p} \sum_{q=1}^p b^{-3\nu_q} \\
 &- \frac{1}{b(b+1)^2(b^2+1)^2(b^2+b+1)} \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p}.
 \end{aligned}$$

Сега од (3.63) имаме

$$\sum_{q=1}^p b^{-3\nu_q} < \frac{b^3 b^{-3\nu_p}}{b^3-1},$$

па

$$\Sigma_{32} < \frac{2(b-1)^2}{(b^2+b+1)b^4(b+1)(b^2+1)} \frac{b^3}{b^3-1} \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p} \\ - \frac{1}{b(b+1)^2(b^2+1)^2(b^2+b+1)} \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p},$$

т.е. се доби следната оцена за Σ_{32} :

$$\Sigma_{32} < \frac{2b^4 - b^2 - b - 3}{b(b+1)^2(b^2+1)^2(b^2+b+1)^2} \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p}. \quad (3.86)$$

Од (3.75), (3.82) и (3.86) за Σ_3 се добива

$$\Sigma_3 < \left(\frac{2b^4 - 2b^3 - b^2 - b - 1}{(b+1)^2(b^2+1)^2(b^2+b+1)} + \frac{2b^4 - b^2 - b - 3}{b(b+1)^2(b^2+1)^2(b^2+b+1)^2} \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p} \right),$$

т.е.

$$\Sigma_3 < \frac{2b^7 - b^5 - 2b^4 - 3b^3 - 3b^2 - 2b - 3}{b(b+1)^2(b^2+1)^2(b^2+b+1)^2} \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p} = C_3(b) \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p}, \quad (3.87)$$

каде што

$$C_3(b) = \frac{2b^7 - b^5 - 2b^4 - 3b^3 - 3b^2 - 2b - 3}{b(b+1)^2(b^2+1)^2(b^2+b+1)^2}.$$

Конечно од (3.46), (3.52), (3.73) и (3.87) имаме

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 < [C_1(b) + C_2(b) + C_3(b)] \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p},$$

од каде според Лема 3.6 следува резултатот:

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 < C_0(b) \sum_{p=1}^t b^{-2\nu_p} \leq C_0(b) \frac{b^2}{b^2-1} \left(1 - \frac{1}{b^2 N^2} \right),$$

каде што

$$C_0(b) = \frac{2b^{15} + 4b^{14} + b^{13} + 2b^{12} - 10b^{11} - 11b^{10} - 17b^9 - 12b^8 - 12b^7 - 6b^6 - 6b^5}{b^6(b+1)^2(b^2+1)^2(b^2+b+1)^2} + \frac{2b^4 + 2b^3 + 4b^2 + 2b + 1}{b^6(b+1)^2(b^2+1)^2(b^2+b+1)^2} \quad (3.88)$$

Конечно од (3.45), (3.46) и (3.88) имаме

$$\frac{\gamma(b+2)}{b(b+1)(b^2+b+1)} (NF_N(\mathcal{W}(b); \gamma; S_b^\Sigma))^2 < C_0(b) \frac{\gamma b^2}{b^2-1} \left(1 - \frac{1}{b^2 N^2}\right),$$

а од тука следува

$$(NF_N(\mathcal{W}(b); \gamma; S_b^\Sigma))^2 < C_0(b) \frac{b^3(b^2+b+1)}{(b-1)(b+2)} \left(1 - \frac{1}{b^2 N^2}\right),$$

односно

$$(NF_N(\mathcal{W}(b); \gamma; S_b^\Sigma))^2 < C(b) \left(1 - \frac{1}{b^2 N^2}\right),$$

каде што

$$C(b) = C_0(b) \frac{b^3(b^2+b+1)}{(b-1)(b+2)},$$

со што е докажан делот (i) од Теорема 3.3. (ii) За да го докажеме тврдењето дека за $\forall N \geq 1, N \in \mathbb{Z}$ важи

$$F_N(\mathcal{W}(b); \gamma; S_b^\Sigma) \in \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right),$$

ќе тргнеме од резултатот добиен во (i) на оваа теорема, па имаме

$$(NF_N(\mathcal{W}(b); \gamma; S_b^\Sigma))^2 < C(b) \left(1 - \frac{1}{b^2 N^2}\right) < C(b),$$

од каде следува дека

$$NF_N(\mathcal{W}(b); \gamma; S_b^\Sigma) < \sqrt{C(b)},$$

односно

$$F_N(\mathcal{W}(b); \gamma; S_b^\Sigma) < \sqrt{C(b)} \frac{1}{N},$$

т.е. конечно добивме дека за $\forall N \geq 1, N \in \mathbb{Z}$ е точно $F_N(\mathcal{W}(b); \gamma; S_b^\Sigma) \in \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$. Со тоа комплетно го завршивме доказот за Теорема 3.3.

Доказ на Теорема 3.4.

Ако тргнеме од дефиницијата на тежинската $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонија и ако за N земеме произволен цел број од обликот $N = b^\nu + 1$, каде што $\nu > 1$ е произволен цел број, тогаш следува

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(b+2)}{b(b+1)(b^2+b+1)} (NF_N(\mathcal{W}(b); \gamma; S_b^\Sigma))^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \rho(b; \gamma; k) \left| \sum_{n=0}^{N-1} {}_b\text{wal}_k(S_b^\Sigma(n)) \right|^2 \\ &\geq \sum_{k=1}^{b-1} \rho(b; \gamma; k) \left| \sum_{n=0}^{b^\nu} {}_b\text{wal}_k(S_b^\Sigma(n)) \right|^2 = \sum_{k=1}^{b-1} \gamma b^{-4} \left| \sum_{n=0}^{b^\nu} {}_b\text{wal}_k(S_b^\Sigma(n)) \right|^2, \end{aligned}$$

при што е искористено дека за $1 \leq k \leq b-1$ важи

$$\rho(b; \gamma; k) = \gamma b^{-4}. \tag{3.89}$$

Нека $\nu \geq 2$ и $1 \leq k \leq b-1$ бидат произволни цели броеви. За сумата $\sum_{n=0}^{b^\nu} {}_b\text{wal}_k(S_b^\Sigma(n))$ ќе го искористиме претставувањето

$$\sum_{n=0}^{b^\nu} {}_b\text{wal}_k(S_b^\Sigma(n)) = \sum_{n=0}^{b^\nu-1} {}_b\text{wal}_k(S_b^\Sigma(n)) + {}_b\text{wal}_k(S_b^\Sigma(b^\nu)). \tag{3.90}$$

Според формулата (3.38) за $1 \leq k \leq b-1$ имаме дека $t = 1$ и $\alpha_g = 0$, па следува дека

$$0 \leq \left| \sum_{n=0}^{b^\nu-1} {}_b\text{wal}_k(S_b^\Sigma(n)) \right| \leq \delta_{\alpha_g}(\nu) = 0,$$

односно се доби резултатот

$$\left| \sum_{n=0}^{b^{\nu}-1} {}_b\text{wal}_k(S_b^{\Sigma}(n)) \right| = 0. \quad (3.91)$$

Понатаму имаме дека $|{}_b\text{wal}_k(S_b^{\Sigma}(b^{\nu}))| = 1$, па од (3.89) и (3.91) се добива дека

$$\left| \sum_{n=0}^{b^{\nu}} {}_b\text{wal}_k(S_b^{\Sigma}(n)) \right| = 1. \quad (3.92)$$

Сега согласно со (3.89) и (3.92) следува дека

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(b+2)}{b(b+1)(b^2+b+1)} (NF_N(\mathcal{W}(b); \gamma; S_b^{\Sigma}))^2 &\geq \sum_{k=1}^{b-1} \gamma b^{-4} \left| \sum_{n=0}^{b^{\nu}} {}_b\text{wal}_k(S_b^{\Sigma}(n)) \right|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{b-1} \gamma b^{-4} = \frac{\gamma(b-1)}{b^4}. \end{aligned}$$

Конечно се доби дека

$$(NF_N(\mathcal{W}(b); \gamma; S_b^{\Sigma}))^2 \geq \frac{(b^2-1)(b^2+b+1)}{b^3(b+2)}$$

од каде следува дека неравенството

$$F_N(\mathcal{W}(b); \gamma; S_b^{\Sigma}) \geq \sqrt{\frac{(b^2-1)(b^2+b+1)}{b^3(b+2)}} \frac{1}{N}$$

е точно за бесконечно многу вредности на N од облик $N = b^{\nu} + 1$, каде што $\nu > 1$ е произволен цел број, со што Теорема 3.4 е докажана целосно.

3.5 Софтверска верификација на основните резултати

Нека разгледаме дадена еднодимензионална низа ξ од точки во $[0, 1)$. За да се пресмета вредноста на тежинската $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонија на дадената низа од точки, треба да се пресмета сума чиј сумирачки индекс k , според Дефиниција 3.1 прима вредности $k = 0, 1, 2, \dots$. Од интерес за нас е дали таа бесконечна сума може да се апроксимира со конечна сума од M собироци, но при тоа направената грешка да тежи кон 0, кога $M \rightarrow \infty$. За таа цел ќе бидат неопходни претходни теоретски пресметки и анализи.

Целите на разработката во ова поглавје се:

- да се добие горна граница на тежинската $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонија на произволна еднодимензионална низа изразена преку конечна сума и терм кој претставува аналог на класичното неравенство на Ердош-Туран-Коксма;

- да се направи компјутерска симулација за пресметување на приближни вредности со голема точност на тежинската $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонија на Обоштената низа на Ван дер Корпут;

- да се провери дали добиените приближни вредности на $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонијата на Обоштената низа на Ван дер Корпут ги задоволуваат горната и долната оценка добиени во Теорема 3.3 и Теорема 3.4.

3.5.1 Теоретска основа за валидност на нумеричките апроксимации

Во следната теорема ќе изложиме горна граница на $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонијата, која претставува аналог на неравенството на Ердош-Туран-Коксма.

Теорема 3.5 Нека $\xi = (x_n)_{n \geq 0}$ е дадена произволна едnodимензионална низа. Тогаш постои константа $C_2(b)$ која зависи само од базата b , така што за секој цел број $M > 0$ важи неравенството:

$$(F_N(\mathcal{W}(b); \gamma; \xi))^2 \leq C^{-1}(b; 1; \gamma) \sum_{k=1}^{M-1} \rho(b; \gamma; k) \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} {}_b\text{wal}_k(x_n) \right|^2 + C_2(b) \cdot \frac{1}{M^2},$$

при што константата $C(b; 1; \gamma)$ е дефинирана со формулата (3.5), а константата $C_2(b)$ има вредност $C_2(b) = \frac{b^2(b^2 + b + 1)}{b + 2}$.

Доказ на Теорема 3.5.

Нека $M > 0$ е даден произволен цел број. Ќе го користиме претставувањето:

$$\begin{aligned} C(b; 1; \gamma) \cdot (F_N(\mathcal{W}(b); \gamma; \xi))^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \rho(b; \gamma; k) \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} {}_b\text{wal}_k(x_n) \right|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{M-1} \rho(b; \gamma; k) \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} {}_b\text{wal}_k(x_n) \right|^2 + \sum_{k=M}^{\infty} \rho(b; \gamma; k) \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} {}_b\text{wal}_k(x_n) \right|^2. \end{aligned} \quad (3.93)$$

За секој цел број $k \geq M$ ќе ја користиме тривијалната оценка, па имаме $\left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} {}_b\text{wal}_k(S_b^\Sigma(n)) \right| \leq 1$, од каде според (3.93) се добива неравенството

$$\begin{aligned} &C(b; 1; \gamma) \cdot (F_N(\mathcal{W}(b); \gamma; \xi))^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^{M-1} \rho(b; \gamma; k) \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} {}_b\text{wal}_k(x_n) \right|^2 + \sum_{k=M}^{\infty} \rho(b; \gamma; k). \end{aligned} \quad (3.94)$$

За фиксиран цел број $M > 0$ постои цел број $p > 0$ така што $b^p \leq M < b^{p+1}$. Ке ги направиме следните пресметки:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=M}^{\infty} \rho(b; \gamma; k) &\leq \sum_{k=b^p}^{\infty} \rho(b; \gamma; k) = \sum_{a=p+1}^{\infty} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \rho(b; \gamma; k_{a-1}b^{a-1}) \\
 &+ \sum_{a=p+1}^{\infty} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{k=k_{a-1}b^{a-1}+(k_{j-1}+1)b^{j-1}-1}^{k_{a-1}b^{a-1}+(k_{j-1}+1)b^{j-1}} \rho(b; \gamma; k) \\
 &= \gamma(b-1) \sum_{a=p+1}^{\infty} b^{-4a} + \sum_{a=p+1}^{\infty} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{k=k_{a-1}b^{a-1}+(k_{j-1}+1)b^{j-1}-1}^{k_{a-1}b^{a-1}+(k_{j-1}+1)b^{j-1}} (\gamma b^{-2(a+j)} + \gamma b^{-4a}) \\
 &= \gamma(b-1) \sum_{a=p+1}^{\infty} b^{-4a} + \gamma \sum_{a=p+1}^{\infty} b^{-2a} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} b^{-2j} \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{k=k_{a-1}b^{a-1}+(k_{j-1}+1)b^{j-1}-1}^{k_{a-1}b^{a-1}+(k_{j-1}+1)b^{j-1}} 1 \\
 &+ \gamma \sum_{a=p+1}^{\infty} b^{-4a} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{k=k_{a-1}b^{a-1}+(k_{j-1}+1)b^{j-1}-1}^{k_{a-1}b^{a-1}+(k_{j-1}+1)b^{j-1}} 1 \\
 &= \gamma(b-1) \sum_{a=p+1}^{\infty} b^{-4a} + \frac{\gamma(b-1)^2}{b} \left[\sum_{a=p+1}^{\infty} b^{-2a} \sum_{j=1}^{a-1} b^{-j} + \sum_{a=p+1}^{\infty} b^{-4a} \sum_{j=1}^{a-1} b^j \right] \\
 &= \gamma(b-1) \left[\sum_{a=p+1}^{\infty} b^{-4a} + \frac{1}{b} \sum_{a=p+1}^{\infty} b^{-2a} \left(1 - \frac{b}{b^a} \right) + \sum_{a=p+1}^{\infty} b^{-4a} \left(\frac{b^a}{b} - 1 \right) \right] \\
 &= \gamma(b-1) \left[\frac{1}{b} \sum_{a=p+1}^{\infty} b^{-2a} - \frac{b-1}{b} \sum_{a=p+1}^{\infty} b^{-3a} + \sum_{a=p+1}^{\infty} b^{-4a} - \sum_{a=p+1}^{\infty} b^{-4a} \right] \\
 &< \frac{\gamma(b-1)}{b} \sum_{a=p+1}^{\infty} b^{-2a} = \frac{\gamma b}{b+1} \cdot \frac{1}{b^{2(p+1)}} < \frac{\gamma b}{b+1} \cdot \frac{1}{M^2}.
 \end{aligned}$$

(3.95)

Од (3.94) и (3.95) го добиваме следното неравенство:

$$\begin{aligned}
 &C(b; 1; \gamma) \cdot (F_N(\mathcal{W}(b); \gamma; \xi))^2 \\
 &\leq \sum_{k=1}^{M-1} \rho(b; \gamma; k) \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} b \text{wal}_k(x_n) \right|^2 + \frac{\gamma b}{b+1} \cdot \frac{1}{M^2}.
 \end{aligned}$$

Тргнувајќи од фактот дека $C(b; 1; \gamma) = \frac{\gamma(b+2)}{b(b+1)(b^2+b+1)}$ и од претходното неравенство конечно се добива дека:

$$\begin{aligned} & (F_N(\mathcal{W}(b); \gamma; \xi))^2 \\ & \leq C^{-1}(b; 1; \gamma) \sum_{k=1}^{M-1} \rho(b; \gamma; k) \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \text{wal}_k(x_n) \right|^2 + \frac{b^2(b^2+b+1)}{b+2} \cdot \frac{1}{M^2}, \end{aligned}$$

со што е докажана точноста на Теорема 3.5.

Теорема 3.5 гарантира дека грешката која се прави при апроксимација на бесконечната сума по индекс k во пресметувањето на $F_N(\mathcal{W}(b); \gamma; \xi)$ со конечна сума по индекс k ($1 \leq k \leq M$) има ред на големина $\mathcal{O}\left(\frac{1}{M^2}\right)$.

3.5.2 Графички приказ на нумерички резултати

Во продолжение следува графички приказ на нумеричките резултати за пресметување на вредности на $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонијата на произволна Обоштената низа на Ван дер Корпут, добиени за различни вредности на базата b и за различни вредности на низата Σ од пермутации на множеството $\{0, 1, \dots, b-1\}$. Низата од пермутации Σ беше избрана на случаен начин во различните пресметки, а параметарот γ беше избран да има вредност 1. Пресметките во сите симулации беа правени со точност од 30 децимали.

Во согласност со Теорема 3.5, ако земеме бројот на собироци $M = N^2$, тогаш грешката која се прави кога ја апроксимираме бесконечната сума по k (од дефиницијата на $F_N(\mathcal{W}(b); \gamma; \xi)$) со конечна сума по k ($1 \leq k \leq M$) има ред на големина $\mathcal{O}\left(\frac{1}{M}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right)$.

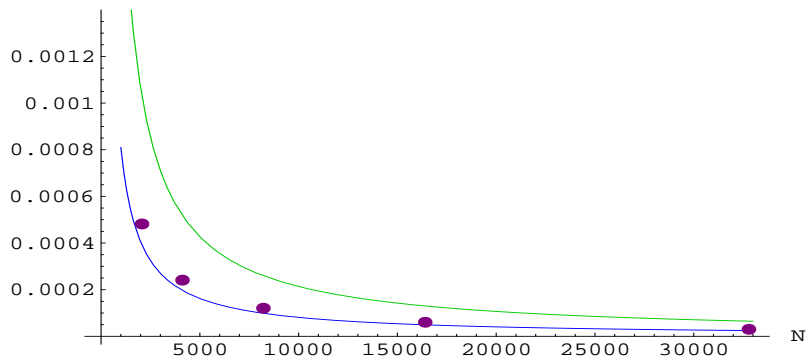
Бројот M на собироци во направените софтверски симулации во пакетот *Mathematica* се движеше во интервалот $10^3 \leq M \leq 10^8$.

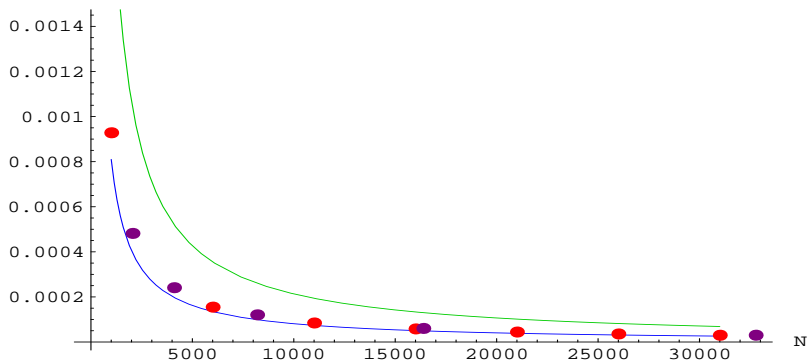
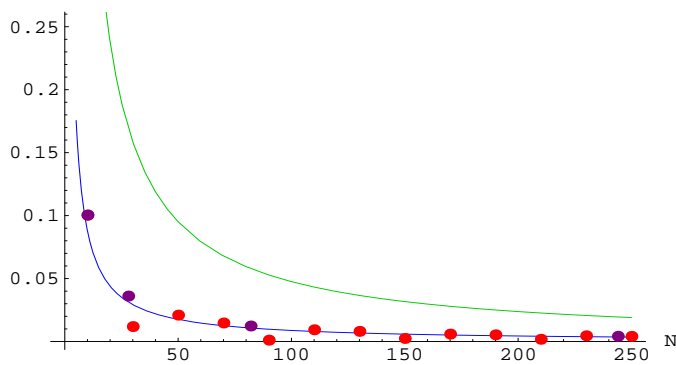
Сите нумерички симулации ги верифицираа со голема прецизност теоретски добиените горна и долна оценка презентирани во Теорема 3.3 и Теорема 3.4, т.е. добиените апроксимирани вредности на тежинската $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонија на произволна Обопштената низа на Ван дер Корпут S_b^Σ се наоѓаат под горната граница и некои од нив се наоѓаат под долната граница. Горната граница во графичките резултати е прикажана со зелена линија, долната граница е со сина линија, вредностите на тежинската $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонија $F_N(\mathcal{W}(b); 1; S_b^\Sigma)$ кои се добиени за произволна вредност на N се прикажани со црвени точки, а вредностите на тежинската $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонија $F_N(\mathcal{W}(b); 1; S_b^\Sigma)$ кои се добиени за специјалните вредности на N од облик $N = b^\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}, \nu > 1$ се означени со виолетови точки.

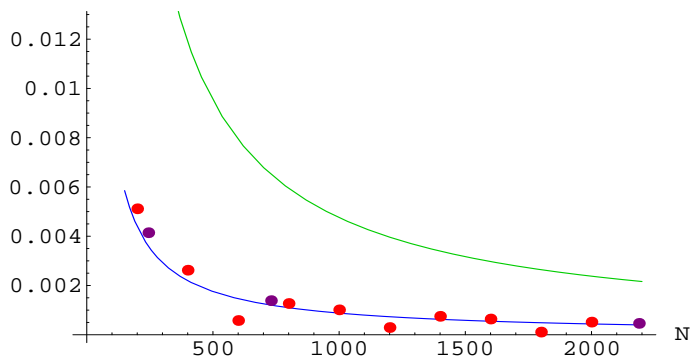
Во сите реализирани симулации горната граница е задоволена за произволен број N (види Слика 3.2, Слика 3.7, Слика 3.8 и Слика 3.10), но долната граница е задоволена за сите оние вредности на N кои се од облик $N = b^\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}, \nu > 1$ (види Слика 3.1, Слика 3.3 и Слика 3.9), но и за некои цели броеви N кои не се од овој облик (види Слика 3.4, Слика 3.5 и Слика 3.6). Во Табела 3.1 се прикажани примери на низи Σ од случајно избрани пермутации, кои беа користени во компјутерските симулации. Со презентираниите графички резултати од направените симулации е решена поставената Задача 3.5.

Во ова поглавје компјутерските симулации беа искористени за да се верифицираат добиените теоретски оценки во еднодимензионален случај. Понатамошните чекори во оваа насока би биле со цел да се добие s -димензионална верзија на неравенството на Ердош-Туран-Коксма на тежинската $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонија на произволна низа и потоа да се направат софтверски симулации за пресметување на вредноста на $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонијата на некои класи на s -димензионални низи, како на пример (t, s) -мрежи. Ова ќе биде доволна мотивација за да се напра-

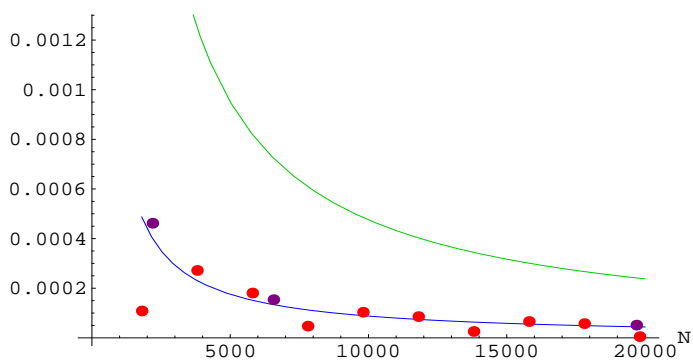
ват истражувања во овој правец со цел да се докаже аналогна теорема во s -димензионален случај. Овие резултати би нашле примена во Квази-Монте Карло методите за нумеричка интеграција. Овде ќе го потенцираме фактот дека техниките и методите кои беа користени за да се пресмета редот на големина на $(W(b); \gamma)$ -дијафонијата на произволна Обопштената низа на Ван дер Корнут се познати како техники кои имаат примена за конструција на некои класи од псевдо-случајни броеви со користење на процедури за конструција на низи и мрежи со ниска дискрепанса, како на пример линеарни, квадратни и поопшто полиномијални рекурзивни процедури.

Слика 3.1: $b = 2, N = b^v + 1$

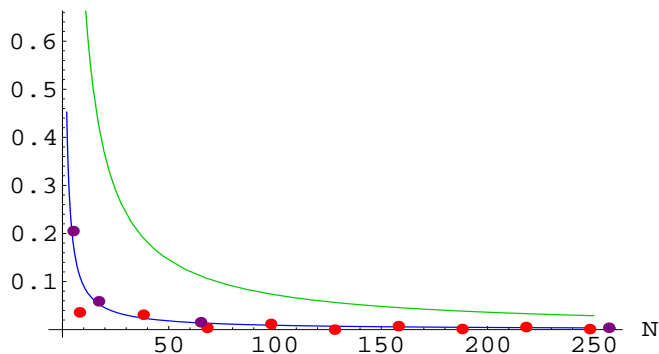
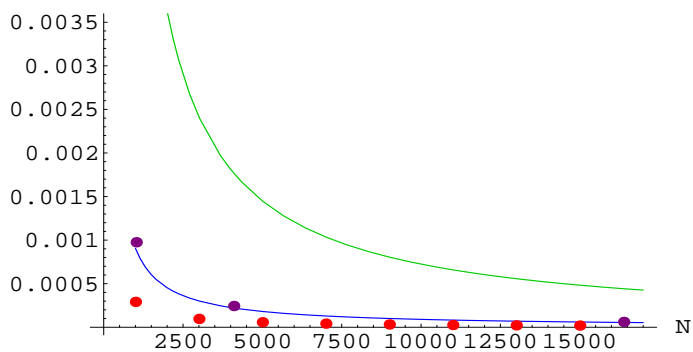
Слика 3.2: $b = 2$ Слика 3.3: $b = 3$

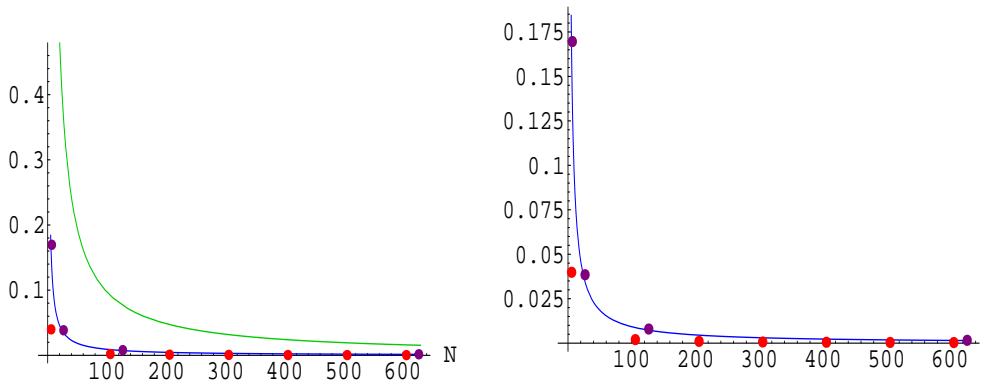


Слика 3.4: $b = 3$

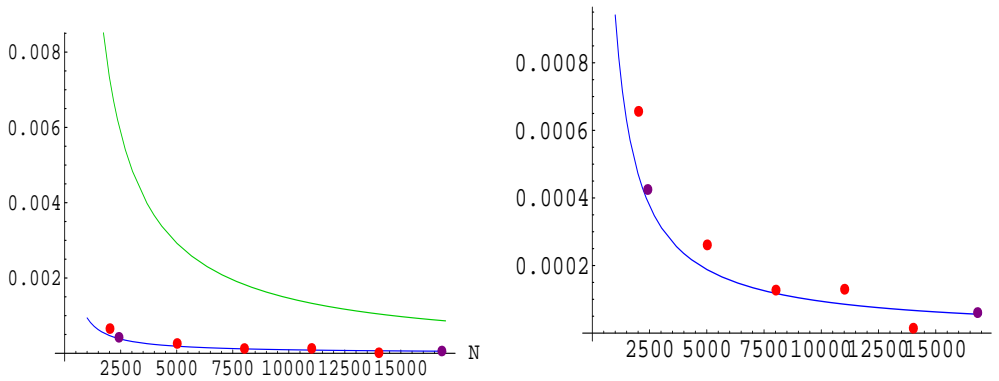


Слика 3.5: $b = 3$

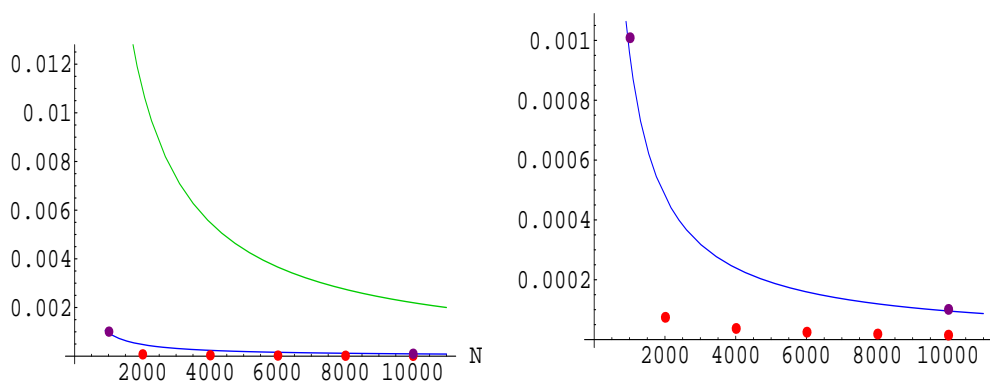
Слика 3.6: $b = 4$ Слика 3.7: $b = 4$



Слика 3.8: $b = 5$



Слика 3.9: $b = 7$

Слика 3.10: $b = 10$

4	3	2	0	1
0	3	4	1	2
4	0	2	3	1
2	0	3	4	1
3	0	2	1	4
1	2	4	3	0
3	2	0	4	1
3	0	2	1	4
0	4	2	1	3
3	4	0	1	2
3	2	0	4	1
0	3	1	4	2
0	4	2	3	1
4	1	3	2	0
4	2	1	0	3

 $b = 5$

1	8	0	5	3	4	7	2	9	6
2	3	4	7	9	5	6	1	0	8
2	1	4	0	6	7	9	8	5	3
3	5	8	6	4	9	0	2	1	7
7	1	3	0	5	9	8	6	2	4
5	2	3	8	1	6	7	4	9	0
8	1	2	0	6	3	4	5	9	7
0	3	5	9	7	6	2	4	1	8
1	4	2	7	3	9	0	5	8	6
6	8	7	5	3	4	1	0	9	2
5	7	9	2	0	8	3	4	1	6
2	7	9	8	6	3	4	1	0	5
8	0	2	7	1	9	4	5	3	6
2	4	1	6	5	9	3	8	0	7
2	8	3	9	1	0	7	6	4	5

 $b = 10$ Табела 3.1: Почетни 15 елементи на низата Σ

Глава 4

За грешката на Квази-Монте Карло

интегрирањето во тежински Хилбертов

простор $H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\vec{\gamma}}$

4.1 Дефинирање на Хилбертов простор $H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\vec{\gamma}}$ и формулација на задачите

Целта на разработките во оваа глава е да се истражи грешката-во-најлош-случај на Квази-Монте Карло интегрирањето во тежински Хилбертов простор $H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\vec{\gamma}}$: да се дадат колку е можно поточни и поедноставни формули за нејзино пресметување и доколку е можно да се предложи конкретна мрежа или класа од мрежи за кои редот на големина на пресметувањето на грешката во просторот $H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\vec{\gamma}}$ ќе биде подобар од досега познатите редови на големина - за конкретни мрежи или во општ случај. На почетокот на оваа глава да го одбележиме

фактот дека насекаде во рамките на во оваа глава од интерес за нас ќе биде испитувањето на *грешката-во-најлош-случај на интегрирањето*, но често пати наместо овој термин, ќе го користиме и терминот *грешка на интегрирањето* заради поедноставување на текстот.

Со овој проблем на пресметување и одредување на редот на големина на грешката на Квази-Монте Карло интегрирањето во тежински простори се занимавале повеќе автори. Дик и Пилишамер [ДиПи 1] разгледуваат тежински Хилбертов простор $H_{Wal,s,\vec{\gamma}}$ и наоѓаат ред на големина на грешката на интегрирањето во тој простор преку користење на (t, m, s) -мрежи над \mathbb{Z}_b . Во кратки црти ќе ги претставиме основните резултати на таа статија. За параметар $\alpha > 1$, тежина $\gamma > 0$ и природен број $k = k_a b^a + k_{a-1} b^{a-1} + \dots + k_1 b + k_0$, тие дефинираат коефициенти

$$r_b(\alpha, \gamma, k) = \begin{cases} 1, & \text{ако } k = 0 \\ \gamma b^{-\alpha a}, & \text{ако } k \neq 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Потоа, со користење на овие коефициенти се дефинирани сите компоненти на Хилбертов простор $H_{Wal,\gamma}$.

За произволен вектор од тежини $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_s)$, каде што $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \gamma_s > 0$ тие дефинираат повеќедимензионален Хилбертов простор $H_{Wal,s,\vec{\gamma}} = H_{Wal,\gamma_1} \otimes \dots \otimes H_{Wal,\gamma_s}$ како тензорски производ на соодветните еднодимензионални простори $H_{Wal,\gamma_1}, \dots, H_{Wal,\gamma_s}$. Во Теорема 3 од тој труд е покажано дека постои дигитална (t, m, s) -мрежа над \mathbb{Z}_b , за која грешката на интегрирањето во просторот $H_{Wal,s,\vec{\gamma}}$, има ред на големина $\mathcal{O}(b^{-\frac{\alpha m}{2}})$. Овој ред на големина $\mathcal{O}(b^{-\frac{\alpha m}{2}})$ зависи од коефициентите $r_b(\alpha, \gamma, k)$ дефинирани во равенството (4.1).

Грозданов ([Гр1]) воведува нов тип на тежинска дијафонија од ред b , врз база на конкретна функционална класа $\mathcal{F}(b)$, а потоа дава врска помеѓу грешката на интегрирањето во тежински Хилбертов простор и

тежинската дијафонија.

Во Дефиниција 3.1, за тежинската $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ - дијафонија учествуваа коефициентите $\rho(b, \gamma, k)$ дефинирани во равенството (3.4). Редовите на големина на коефициентите $\rho(b, \gamma, k)$ го определуваат редот на големина на тежинската $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ - дијафонија.

За да се добие подобар ред на големина од $\mathcal{O}(b^{-\frac{\alpha m}{2}})$ на грешката на Квази-Монте Карло интегрирањето во просторот $H_{Wal,s,\bar{\gamma}}$, сметаме дека е неопходно да се дефинираат нови коефициенти со помали редови на големина од тие на коефициентите $r_b(\alpha, \gamma, k)$ и кои ќе се искористат за дефинирање на нова функционална класа. За таа цел ќе ја користиме конструкцијата и редовите на големина на коефициентите $\rho(b, \gamma, k)$ дефинирани со равенството (3.4). Тие коефициенти ќе бидат дефинирани со равенството (4.2), каде што е воведен дополнителен параметар $\alpha > \frac{1}{2}$. Врз базата на тие коефициенти (4.2) ќе биде конструиран Хилбертов простор $H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\bar{\gamma}}$.

Општата принципна можност грешката на интегрирањето во некои Хилбертови простори да биде претставена во термините на дијафонијата ни дава дополнителна мотивација за да се разгледува тој простор $H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\bar{\gamma}}$ и да се истражи можноста грешката на интегрирањето во него да се претстави во термините на $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ - дијафонијата.

Од интерес за нас ќе биде и самиот ред на големина на грешката на интегрирањето во просторот $H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\bar{\gamma}}$.

Во продолжение следуваат деталите на разработките на Глава 4.

Нека $\alpha > \frac{1}{2}$ и $\gamma > 0$ се фиксирани реални броеви и нека за произ-

волен цел број $k \geq 0$ коефициентот $\rho(b, \alpha, \gamma, k)$ го дефинираме со

$$\rho(b, \alpha, \gamma, k) = \begin{cases} 1, & \text{ако } k = 0, \\ \gamma b^{-2\alpha a}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1}, a \geq 1, \\ \gamma b^{-\alpha(a+j)} + \gamma b^{-2\alpha a}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1} + k_{j-1} b^{j-1} + \dots + \\ & + k_1 b + k_0, \quad a > 1, 1 \leq j < a, \\ & k_{a-1}, k_{j-1} \in \{1, \dots, b\}. \end{cases} \quad (4.2)$$

За произволни две функции $f(x)$ и $g(x)$, $x \in [0, 1)$ користејќи го функцио-
налниот систем на Волш $\mathcal{W}(b)$ ќе дефинираме скаларен производ со:

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{W}(b), \alpha, \gamma} = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-1}(b, \alpha, \gamma, k) \widehat{f}_{\mathcal{W}(b)}(k) \overline{\widehat{g}_{\mathcal{W}(b)}(k)}.$$

при што со $\widehat{f}_{\mathcal{W}(b)}(k)$ е означен k -тиот Волш-Фуриев коефициент на функцијата f .

Потоа воведуваме норма со:

$$\|f\|_{\mathcal{W}(b), \alpha, \gamma} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{\mathcal{W}(b), \alpha, \gamma}}.$$

Дефинираме $H_{\mathcal{W}(b), \alpha, \gamma}$ да биде множеството од сите функции над $[0, 1)$ за кои нормата е конечен број, т.е.

$$H_{\mathcal{W}(b), \alpha, \gamma} = \{f(x) : x \in [0, 1), \|f\|_{\mathcal{W}(b), \alpha, \gamma} < \infty\}.$$

Ќе покажеме дека вака дефинираниот простор од функции $H_{\mathcal{W}(b), \alpha, \gamma}$ претставува Хилбертов простор. На почеток да забележиме дека множеството $H_{\mathcal{W}(b), \alpha, \gamma}$ заедно со операциите собирање на две функции и множење на функција со скалар од \mathbb{C} претставува векторски простор над \mathbb{C} . Следно што треба да се провери е дали важат аксиомите за скаларен производ.

Нека $f, g, h \in H_{\mathcal{W}(b),\alpha,\gamma}$ се произволни функции и нека μ е произволен скалар. Точни се следните формули:

A1.

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_{\mathcal{W}(b),\alpha,\gamma} &= \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-1}(b, \alpha, \gamma, k) \widehat{f}_{\mathcal{W}(b)}(k) \overline{\widehat{g}_{\mathcal{W}(b)}(k)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-1}(b, \alpha, \gamma, k) \overline{\widehat{g}_{\mathcal{W}(b)}(k)} \widehat{f}_{\mathcal{W}(b)}(k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-1}(b, \alpha, \gamma, k) \widehat{g}_{\mathcal{W}(b)}(k) \overline{\widehat{f}_{\mathcal{W}(b)}(k)} = \overline{\langle g, f \rangle_{\mathcal{W}(b),\alpha,\gamma}}; \end{aligned}$$

A2.

$$\begin{aligned} \langle f + g, h \rangle_{\mathcal{W}(b),\alpha,\gamma} &= \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-1}(b, \alpha, \gamma, k) \widehat{f + g}_{\mathcal{W}(b)}(k) \overline{\widehat{h}_{\mathcal{W}(b)}(k)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-1}(b, \alpha, \gamma, k) (\widehat{f}_{\mathcal{W}(b)}(k) + \widehat{g}_{\mathcal{W}(b)}(k)) \overline{\widehat{h}_{\mathcal{W}(b)}(k)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-1}(b, \alpha, \gamma, k) \widehat{f}_{\mathcal{W}(b)}(k) \overline{\widehat{h}_{\mathcal{W}(b)}(k)} + \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-1}(b, \alpha, \gamma, k) \widehat{g}_{\mathcal{W}(b)}(k) \overline{\widehat{h}_{\mathcal{W}(b)}(k)} \\ &= \langle f, h \rangle_{\mathcal{W}(b),\alpha,\gamma} + \langle g, h \rangle_{\mathcal{W}(b),\alpha,\gamma}; \end{aligned}$$

A3.

$$\begin{aligned} \langle \mu f, g \rangle_{\mathcal{W}(b),\alpha,\gamma} &= \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-1}(b, \alpha, \gamma, k) \mu \widehat{f}_{\mathcal{W}(b)}(k) \overline{\widehat{g}_{\mathcal{W}(b)}(k)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-1}(b, \alpha, \gamma, k) \mu \widehat{f}_{\mathcal{W}(b)}(k) \overline{\widehat{g}_{\mathcal{W}(b)}(k)} \\ &= \mu \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-1}(b, \alpha, \gamma, k) \widehat{f}_{\mathcal{W}(b)}(k) \overline{\widehat{g}_{\mathcal{W}(b)}(k)} = \mu \langle f, g \rangle_{\mathcal{W}(b),\alpha,\gamma}; \end{aligned}$$

A4.

$$\begin{aligned} \langle f, f \rangle_{\mathcal{W}(b), \alpha, \gamma} &= \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-1}(b, \alpha, \gamma, k) \widehat{f}_{\mathcal{W}(b)}(k) \overline{\widehat{f}_{\mathcal{W}(b)}(k)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-1}(b, \alpha, \gamma, k) \left| \widehat{f}_{\mathcal{W}(b)}(k) \right|^2 \geq 0, \\ \langle f, f \rangle_{\mathcal{W}(b), \alpha, \gamma} = 0 &\iff \forall k \geq 0, \widehat{f}_{\mathcal{W}(b)}(k) = 0 \iff f = 0, \forall x \in [0, 1) \end{aligned}$$

Значи со директна проверка покажавме дека со така дефинираните коефициенти $\rho(b, \alpha, \gamma, k)$ важат аксиомите за да векторскиот простор $H_{\mathcal{W}(b), \alpha, \gamma}$ биде унитарен простор. Условот за да унитарниот простор $H_{\mathcal{W}(b), \alpha, \gamma}$ биде Хилбертов простор е исто така задоволен, и неговата проверка е на сосема аналоген начин, како и проверката на претходните услови.

Користејќи го функционалниот систем на Волш $\mathcal{W}(b)$ и дефинираните коефициенти $\rho(b, \alpha, \gamma, k)$ за $x, y \in [0, 1)$ ќе дефинираме функција

$$K_{\mathcal{W}(b), \alpha, \gamma}(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho(b, \alpha, \gamma, k) \widehat{wal}_k(x) \overline{\widehat{wal}_k(y)}. \quad (4.3)$$

Ќе докажеме дека функцијата $K_{\mathcal{W}(b), \alpha, \gamma}(x, y)$ претставува репродуцирачко јадро за тежински Хилбертов простор, користејќи ја Дефиниција 1.15 од Глава 1.

На почеток да го забележиме фактот дека $\forall k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ важи:

$$\widehat{K}_{\mathcal{W}(b), \alpha, \gamma}(k, y) = \rho(b, \alpha, \gamma, k) \overline{\widehat{wal}_k(y)}, \forall y \in [0, 1). \quad (4.4)$$

Навистина од (4.3) и од дефиницијата на Волш-Фуриев коефи-

циент на функција имаме:

$$\widehat{K}_{\mathcal{W}(b),\alpha,\gamma}(k, y) = \int_0^1 K_{\mathcal{W}(b),\alpha,\gamma}(x, y) \overline{{}_bwal_k(x)} dx,$$

од кое следува дека

$$\begin{aligned} \widehat{K}_{\mathcal{W}(b),\alpha,\gamma}(k, y) &= \int_0^1 \left[\sum_{l=0}^{\infty} \rho(b, \alpha, \gamma, l) {}_bwal_l(x) \overline{{}_bwal_l(y)} \right] \overline{{}_bwal_k(x)} dx \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \rho(b, \alpha, \gamma, l) \overline{{}_bwal_l(y)} \int_0^1 {}_bwal_l(x) \overline{{}_bwal_k(x)} dx = \rho(b, \alpha, \gamma, k) \overline{{}_bwal_k(y)}. \end{aligned}$$

Во претходното сумирање е користен Ваерштрасовиот критериум за конвергенција на функционални редови и некои елементарни својства на Волшовите функции. Од (4.4) следува дека за фиксиран параметар $y \in [0, 1)$ важи:

$$\begin{aligned} \|K_{\mathcal{W}(b),\alpha,\gamma}(x, y)\|_{\mathcal{W}(b),\alpha,\gamma}^2 &= \langle K_{\mathcal{W}(b),\alpha,\gamma}(x, y), K_{\mathcal{W}(b),\alpha,\gamma}(x, y) \rangle_{\mathcal{W}(b),\alpha,\gamma,x} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-1}(b, \alpha, \gamma, k) \widehat{K}_{\mathcal{W}(b),\alpha,\gamma}(k, y) \overline{\widehat{K}_{\mathcal{W}(b),\alpha,\gamma}(k, y)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-1}(b, \alpha, \gamma, k) \rho(b, \alpha, \gamma, k) \overline{{}_bwal_k(y)} \rho(b, \alpha, \gamma, k) {}_bwal_k(y) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \rho(b, \alpha, \gamma, k) |{}_bwal_k(y)|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \rho(b, \alpha, \gamma, k). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Во следната лема е дадена формула за сумата $\sum_{k=0}^{\infty} \rho(b, \alpha, \gamma, k)$.

Лема 4.1 Нека $\alpha > \frac{1}{2}$ и $\gamma > 0$ се произволни реални броеви, тогаш

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho(b, \alpha, \gamma, k) = 1 + \gamma \frac{(b-1)(b^\alpha + b - 2)}{(b^\alpha - 1)(b^{2\alpha} - b)}$$

Доказ на Лема 4.1.

Кога ќе се искористи равенството (4.2) следува

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{\infty} \rho(b, \alpha, \gamma, k) &= \rho(b, \alpha, \gamma, 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \rho(b, \alpha, \gamma, k) \\
 &= 1 + \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \gamma b^{-2\alpha a} \\
 &\quad + \sum_{a=2}^{\infty} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{k=k_{a-1}b^{a-1}+(k_{j-1}+1)b^{j-1}-1}^{k_{a-1}b^{a-1}+(k_{j-1}+1)b^{j-1}-1} (\gamma b^{-\alpha(a+j)} + \gamma b^{-2\alpha a}) \\
 &= 1 + \gamma \sum_{a=1}^{\infty} b^{-2\alpha a} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} 1 \\
 &\quad + \gamma \sum_{a=2}^{\infty} b^{-\alpha a} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} 1 \sum_{j=1}^{a-1} b^{-\alpha j} \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} 1 \sum_{k=k_{a-1}b^{a-1}+(k_{j-1}+1)b^{j-1}-1}^{k_{a-1}b^{a-1}+(k_{j-1}+1)b^{j-1}-1} 1 \\
 &\quad + \gamma \sum_{a=2}^{\infty} b^{-2\alpha a} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{k=k_{a-1}b^{a-1}+(k_{j-1}+1)b^{j-1}-1}^{k_{a-1}b^{a-1}+(k_{j-1}+1)b^{j-1}-1} 1 \\
 &= 1 + \gamma(SS_1 + SS_2 + SS_3).
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

На почеток да ја пресметаме сумата SS_1 :

$$SS_1 = \sum_{a=1}^{\infty} b^{-2\alpha a} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} 1 = \frac{b-1}{b^{2\alpha}} \frac{1}{1-b^{-2\alpha}} = \frac{b-1}{b^{2\alpha}-1}, \tag{4.7}$$

при услов $b^{-2\alpha} < 1 \iff b^{2\alpha} > 1 = b^0 \iff 2\alpha > 0 \iff \alpha > 0$; а кој услов е исполнет бидејќи во условот на лемата е дадено дека $\alpha > \frac{1}{2}$.

Следува пресметување на втората сума SS_2 :

$$\begin{aligned}
 SS_2 &= \sum_{a=2}^{\infty} b^{-\alpha a} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} 1 \sum_{j=1}^{a-1} b^{-\alpha j} \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} 1 \sum_{k=k_{a-1}b^{\alpha-1}+(k_{j-1}+1)b^{j-1}-1}^{k_{a-1}b^{\alpha-1}+(k_{j-1}+1)b^{j-1}-1} 1 \\
 &= \sum_{a=2}^{\infty} b^{-\alpha a} (b-1)^2 \sum_{j=1}^{a-1} b^{-\alpha j} b^{j-1} = \frac{(b-1)^2}{b} \sum_{a=2}^{\infty} b^{-\alpha a} \sum_{j=1}^{a-1} b^{j(1-\alpha)} \\
 &= \frac{(b-1)^2}{b} \sum_{a=2}^{\infty} b^{-\alpha a} b^{1-\alpha} \frac{b^{(1-\alpha)(a-1)} - 1}{b^{1-\alpha} - 1} = \frac{(b-1)^2}{b^\alpha (b^{1-\alpha} - 1)} \sum_{a=2}^{\infty} (b^{a(1-2\alpha)} b^{-1+\alpha} - b^{-\alpha a}) \\
 &= \frac{(b-1)^2}{b-b^\alpha} \left[\frac{b^{\alpha-1+2(1-2\alpha)}}{1-b^{1-2\alpha}} - \frac{1}{b^{2\alpha}} \frac{1}{1-b^{-\alpha}} \right], \tag{4.8}
 \end{aligned}$$

при услов $b^{1-2\alpha} < 1 \iff b^{2\alpha-1} > 1 = b^0 \iff 2\alpha - 1 > 0 \iff \alpha > \frac{1}{2}$; кој е исполнет поради поставените услови во Лема 4.1. Од (4.8) следува

$$SS_2 = \frac{(b-1)^2}{(b^{2\alpha} - b)(b^\alpha - 1)}. \tag{4.9}$$

Следува пресметка на третата сума SS_3 :

$$\begin{aligned}
 SS_3 &= \sum_{a=2}^{\infty} b^{-2\alpha a} \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{k=k_{a-1}b^{\alpha-1}+(k_{j-1}+1)b^{j-1}-1}^{k_{a-1}b^{\alpha-1}+(k_{j-1}+1)b^{j-1}-1} 1 \\
 &= \frac{(b-1)^2}{b} \sum_{a=2}^{\infty} b^{-2\alpha a} \sum_{j=1}^{a-1} b^j = \frac{(b-1)^2}{b} \sum_{a=2}^{\infty} b^{-2\alpha a} b \frac{b^{a-1} - 1}{b-1}.
 \end{aligned}$$

Поради поставениот услов за $\alpha > \frac{1}{2}$ во Лема 4.1, од (4.8) следува

$$SS_3 = \frac{(b-1)^2}{(b^{2\alpha} - b)(b^{2\alpha} - 1)}. \tag{4.10}$$

Од (4.6), (4.7), (4.9) и (4.10) следува

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \rho(b, \alpha, \gamma, k) &= 1 + \gamma(SS_1 + SS_2 + SS_3) \\ &= 1 + \gamma(b-1) \left[\frac{1}{b^{2\alpha}-1} + \frac{b-1}{(b^{2\alpha}-b)(b^\alpha-1)} + \frac{b-1}{(b^{2\alpha}-b)(b^{2\alpha}-1)} \right] \\ &= 1 + \gamma \frac{(b-1)(b^\alpha+b-2)(b^{2\alpha}-1)}{(b^{2\alpha}-1)(b^\alpha-1)(b^{2\alpha}-b)}. \end{aligned}$$

Конечно следува дека

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho(b, \alpha, \gamma, k) = 1 + \gamma \frac{(b-1)(b^\alpha+b-2)}{(b^\alpha-1)(b^{2\alpha}-b)}$$

со што е докажана точноста на Лема 4.1.

Од (4.5) и Лема 4.1 следува дека важи првиот услов К1 за да функцијата $K_{\mathcal{W}(b), \alpha, \gamma}$ биде репродуцирачко јадро на тежинскиот Хилбертов простор $H_{\mathcal{W}(b), \alpha, \gamma}$. За да покажеме дека важи вториот услов К2 нека земеме произволна функција $f \in H_{\mathcal{W}(b), s, \alpha, \gamma}$ и произволен реален број $x \in [0, 1)$, тогаш имаме

$$\begin{aligned} &\langle f(x), K_{\mathcal{W}(b), \alpha, \gamma}(x, y) \rangle_{\mathcal{W}(b), \alpha, \gamma, x} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-1}(b, \alpha, \gamma, k) \widehat{f}_{\mathcal{W}(b)}(k) \overline{\widehat{K}_{\mathcal{W}(b), \alpha, \gamma}(k, y)} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-1}(b, \alpha, \gamma, k) \widehat{f}_{\mathcal{W}(b)}(k) \overline{\rho(b, \alpha, \gamma, k) \widehat{wal}_k(y)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_{\mathcal{W}(b)}(k) \widehat{wal}_k(y) = f(y), \end{aligned}$$

според дефиницијата за развој на функција во Волш-Фуриев ред.

Сега ќе го разгледаме повеќедимензионалниот случај, т.е. s -димензионалниот случај.

Нека $\alpha > \frac{1}{2}$ е произволен реален број и нека векторот $\vec{\gamma} =$

$(\gamma_1, \dots, \gamma_s)$, каде што $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_s > 0$ е произволен вектор од тежини. Нека $H_{\mathcal{W}(b),\alpha,\gamma_1}, H_{\mathcal{W}(b),\alpha,\gamma_2}, \dots, H_{\mathcal{W}(b),\alpha,\gamma_s}$ се соодветни тежински Хилбертови простори. Ќе дефинираме тежински Хилбертов простор $H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\vec{\gamma}}$ како тензорски производ на соодветните координатни простори т.е.

$$H_{\mathcal{W}(b),\alpha,\vec{\gamma}} = H_{\mathcal{W}(b),\alpha,\gamma_1} \otimes \dots \otimes H_{\mathcal{W}(b),\alpha,\gamma_s}.$$

Ќе дефинираме скаларен производ на две функции $f, g \in H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\vec{\gamma}}$ со:

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\vec{\gamma}} = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s} R(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k}) \widehat{f}_{\mathcal{W}(b)}(\vec{k}) \overline{\widehat{g}_{\mathcal{W}(b)}(\vec{k})},$$

при што коефициентот $R(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k})$ се дефинира со

$$R(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k}) = \prod_{j=1}^s \rho(b, \alpha, \gamma_j, k_j). \quad (4.11)$$

Дефинираме s -димензионална норма $\|f\|_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\vec{\gamma}}$ со

$$\|f\|_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\vec{\gamma}} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\vec{\gamma}}}.$$

Просторот $H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\vec{\gamma}}$ е генериран од репродуцирачко јадро

$$K_{\mathcal{W}(b),\alpha,\vec{\gamma}}(\vec{x}, \vec{y}) = \prod_{j=1}^s K_{\mathcal{W}(b),\alpha,\gamma_j}(x_j, y_j),$$

каде што $\vec{x} = (x_1, \dots, x_s) \in [0, 1]^s$ и $\vec{y} = (y_1, \dots, y_s) \in [0, 1]^s$.

Очевидно е дека важи

$$K_{\mathcal{W}(b),\alpha,\vec{\gamma}}(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s} R(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k}) \text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}) \overline{\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{y})}, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in [0, 1]^s$$

Навистина, од дефиницијата на $K_{\mathcal{W}(b),\alpha,\vec{\gamma}}$ следува дека за произволни

$\vec{x}, \vec{y} \in [0, 1]^s$ е точно:

$$\begin{aligned}
 K_{\mathcal{W}(b), \alpha, \vec{\gamma}}(\vec{x}, \vec{y}) &= \prod_{j=1}^s K_{\mathcal{W}(b), \alpha, \gamma_j}(x_j, y_j) = \prod_{j=1}^s \sum_{k_j=0}^{\infty} \rho(b, \alpha, \gamma_j, k_j) {}_b\text{wal}_{k_j}(x_j) \overline{{}_b\text{wal}_{k_j}(y_j)} \\
 &= \sum_{k_1=0}^{\infty} \rho(b, \alpha, \gamma_1, k_1) {}_b\text{wal}_{k_1}(x_1) \overline{{}_b\text{wal}_{k_1}(y_1)} \dots \sum_{k_s=0}^{\infty} \rho(b, \alpha, \gamma_s, k_s) {}_b\text{wal}_{k_s}(x_s) \overline{{}_b\text{wal}_{k_s}(y_s)} \\
 &= \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_s=0}^{\infty} \rho(b, \alpha, \gamma_1, k_1) \dots \rho(b, \alpha, \gamma_s, k_s) \\
 &\qquad \qquad \qquad \times {}_b\text{wal}_{k_1}(x_1) \dots {}_b\text{wal}_{k_s}(x_s) \overline{{}_b\text{wal}_{k_1}(y_1)} \dots \overline{{}_b\text{wal}_{k_s}(y_s)} \\
 &= \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s} R(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k}) {}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}) \overline{{}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{y})}.
 \end{aligned}$$

Ќе покажеме дека тежинскиот Хилбертов простор $H_{\mathcal{W}(b), s, \alpha, \vec{\gamma}}$ е генериран со репродуцирачко јадро $K_{\mathcal{W}(b), \alpha, \vec{\gamma}}$.

На почеток да забележиме дека е точен фактот

$$\widehat{K}_{\mathcal{W}(b), \alpha, \vec{\gamma}}(\vec{k}, \vec{y}) = R(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k}) \overline{{}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{y})}. \tag{4.12}$$

Навистина, да земеме $\vec{y} \in [0, 1]^s$ да биде произволен вектор, кој ќе игра улога на параметар, тогаш следува

$$\begin{aligned}
 \widehat{K}_{\mathcal{W}(b), \alpha, \vec{\gamma}}(\vec{k}, \vec{y}) &= \int_{[0, 1]^s} K_{\mathcal{W}(b), \alpha, \vec{\gamma}}(\vec{x}, \vec{y}) \overline{{}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x})} d\vec{x} \\
 &= \int_{[0, 1]^s} \left[\sum_{\vec{l} \in \mathbb{N}_0^s} R(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{l}) {}_b\text{wal}_{\vec{l}}(\vec{x}) \overline{{}_b\text{wal}_{\vec{l}}(\vec{y})} \right] \overline{{}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x})} d\vec{x} \\
 &= \sum_{\vec{l} \in \mathbb{N}_0^s} R(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{l}) \overline{{}_b\text{wal}_{\vec{l}}(\vec{y})} \int_{[0, 1]^s} {}_b\text{wal}_{\vec{l}}(\vec{x}) \overline{{}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x})} d\vec{x} = R(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k}) \overline{{}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{y})},
 \end{aligned}$$

при што го користевме Ваерштрасовиот критериум и својствата на Волшовите функции.

За да ја пресметаме сумата $\sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s} R(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k})$ според Лема 4.1 и

(4.11) имаме дека за $\alpha > \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s} R(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k}) &= \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_s=0}^{\infty} R(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k}) \\ &= \sum_{k_1=0}^{\infty} \rho(b, \alpha, \gamma_1, k_1) \dots \sum_{k_s=0}^{\infty} \rho(b, \alpha, \gamma_s, k_s), \end{aligned}$$

односно се доби резултатот

$$\sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s} R(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k}) = \prod_{j=1}^s \left(1 + \gamma_j \frac{(b-1)(b^\alpha + b - 2)}{(b^\alpha - 1)(b^{2\alpha} - b)} \right). \quad (4.13)$$

Сега од (4.12) и (4.13) следува дека за произволен вектор $\vec{y} \in [0, 1]^s$ е точно:

$$\begin{aligned} & \|K_{\mathcal{W}(b),\alpha,\vec{\gamma}}(\vec{x}, \vec{y})\|_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\vec{\gamma}}^2 = \langle K_{\mathcal{W}(b),\alpha,\vec{\gamma}}(\vec{x}, \vec{y}), K_{\mathcal{W}(b),\alpha,\vec{\gamma}}(\vec{x}, \vec{y}) \rangle_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\vec{\gamma},\vec{x}} \\ &= \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s} R^{-1}(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k}) \widehat{K}_{\mathcal{W}(b),\alpha,\vec{\gamma}}(\vec{k}, \vec{y}) \overline{\widehat{K}_{\mathcal{W}(b),\alpha,\vec{\gamma}}(\vec{k}, \vec{y})}} \\ &= \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s} R^{-1}(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k}) R(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k}) \overline{b \text{wal}_{\vec{k}}(\vec{y})} R(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k}) \overline{b \text{wal}_{\vec{k}}(\vec{y})} \\ &= \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s} R(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k}) \overline{b \text{wal}_{\vec{k}}(\vec{y})} \overline{b \text{wal}_{\vec{k}}(\vec{y})} = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s} R(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k}) |b \text{wal}_{\vec{k}}(\vec{y})|^2 \\ &= \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s} R(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k}) = \prod_{j=1}^s \left(1 + \gamma_j \frac{(b-1)(b^\alpha + b - 2)}{(b^\alpha - 1)(b^{2\alpha} - b)} \right) < \infty. \end{aligned}$$

Со тоа покажавме дека важи првиот услов K1 за да функцијата $K_{\mathcal{W}(b),\alpha,\vec{\gamma}}$ биде репродуцирачко јадро за тежинскиот Хилбертов простор $H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\vec{\gamma}}$. За да покажеме дека важи вториот услов K2, нека земеме дека $\vec{y} \in [0, 1]^s$ е произволен вектор и $f \in H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\vec{\gamma}}$ е произволна функција,

тогаш следи

$$\begin{aligned}
 & \langle f(\vec{x}), K_{\mathcal{W}(b), \alpha, \vec{\gamma}}(\vec{x}, \vec{y}) \rangle_{\mathcal{W}(b), s, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{x}} \\
 &= \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s} R^{-1}(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k}) \widehat{f}_{\mathcal{W}(b)}(\vec{k}) \overline{\widehat{K}_{\mathcal{W}(b), \alpha, \vec{\gamma}}(\vec{k}, \vec{y})}} = \\
 &= \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s} R^{-1}(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k}) \widehat{f}_{\mathcal{W}(b)}(\vec{k}) \overline{R(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k}) \widehat{wal}_{\vec{k}}(\vec{y})}} \\
 &= \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s} \widehat{f}_{\mathcal{W}(b)}(\vec{k}) \widehat{wal}_{\vec{k}}(\vec{y}) = f(\vec{y}),
 \end{aligned}$$

според дефиницијата за развој на функција во Волш-Фуриев ред.

Со тоа покажавме дека и вториот услов K2 е исполнет, односно покажавме дека просторот $H_{\mathcal{W}(b), s, \alpha, \vec{\gamma}}$ е генериран од репродуцирачкото јадро $K_{\mathcal{W}(b), \alpha, \vec{\gamma}}$.

Во Глава 4 од оваа дисертација ќе ги поставиме за решавање следните задачи:

Задача 4.1.

Да се најде точна формула за грешката на интегрирањето во Хилбертов простор $H_{\mathcal{W}(b), s, \alpha, \vec{\gamma}}$.

Задача 4.2.

Да се изрази грешката на интегрирањето во тежински Хилбертов простор $H_{\mathcal{W}(b), s, \alpha, \vec{\gamma}}$ преку термините на $(\mathcal{W}(b), \gamma)$ -дијафонијата.

Задача 4.3.

Да се најде редот на големина на грешката на интегрирањето во Хил-бертов простор $H_{\mathcal{W}(b), s, \alpha, \vec{\gamma}}$.

Во следните поглавја на оваа глава последователно ќе бидат решавани поставените задачи.

4.2 Точна формула за грешката-во-најлош-случај на интегрирањето во просторот $H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\vec{\gamma}}$

Со следната теорема ќе биде дадена точна формула за грешката-во-најлош-случај на интегрирањето во тежински Хилбертов простор $H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\vec{\gamma}}$ и со тоа ќе биде решена поставената Задача 4.1.

Теорема 4.1 *Грешката-во-најлош-случај на интегрирањето во просторот $H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\vec{\gamma}}$ со користење на произволна s -димензионална мрежа*

$$P_N = \{\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{N-1}\}$$

го задоволува равенството

$$e^2(H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\vec{\gamma}}; P_N) = -1 + \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{h=0}^{N-1} \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s} R(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k}) {}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}_n) \overline{{}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}_h)}.$$

Доказ на Теорема 4.1.

Во доказот на оваа теорема ќе го искористиме резултатот на Слоан и Вожниаковски [СлВо1], кој беше изложен во Глава 1 и се однесува на грешката-во-најлош-случај $e(H_s(K); P_N)$ на интегрирањето во произволен тежински Хилбертов простор генериран со јадро K , со користење на произволна мрежа $P_N = \{\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{N-1}\}$. Кога формулата (1.8) ќе се примени на јадро $K_{\mathcal{W}(b),\alpha,\vec{\gamma}}$, за првиот собирок се добива:

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^{2s}} K_{\mathcal{W}(b),\alpha,\vec{\gamma}}(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x} d\vec{y} &= \int_{[0,1]^{2s}} \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s} \left[R(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k}) {}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}) \overline{{}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{y})} \right] d\vec{x} d\vec{y} \\ &= \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s} R(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k}) \int_{[0,1]^s} {}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}) d\vec{x} \int_{[0,1]^s} \overline{{}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{y})} d\vec{y} = R(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{0}) = 1. \end{aligned} \quad (4.14)$$

За вториот собирок на (1.8) имаме: Нека $0 \leq n \leq N-1$ е фиксиран индекс и нека \vec{x}_n е соодветниот елемент од мрежата P_N . Тогаш важи:

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^s} K_{\mathcal{W}(b),\alpha,\vec{\gamma}}(\vec{x}_n, \vec{y}) d\vec{y} &= \int_{[0,1]^s} \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s} \left[R(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k}) {}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}_n) \overline{{}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{y})} \right] d\vec{y} \\ &= \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s} R(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k}) {}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}_n) \int_{[0,1]^s} \overline{{}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{y})} d\vec{y} = R(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{0}) {}_b\text{wal}_{\vec{0}}(\vec{x}_n) = 1. \end{aligned}$$

Понатаму следува дека

$$\frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{[0,1]^s} K_{\mathcal{W}(b),\alpha,\vec{\gamma}}(\vec{x}_n, \vec{y}) d\vec{y} = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} 1 = 2. \quad (4.15)$$

Конечно од (1.8), (4.14) и (4.15) следува

$$\begin{aligned} e^2(H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\vec{\gamma}}; P_N) &= 1 - 2 + \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{h=0}^{N-1} K_{\mathcal{W}(b),\alpha,\vec{\gamma}}(\vec{x}_n, \vec{x}_h) \\ &= -1 + \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{h=0}^{N-1} \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s} R(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k}) {}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}_n) \overline{{}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}_h)}, \end{aligned}$$

со што е докажана точноста на Теорема 4.1.

Имајќи ги предвид дефинициите на коефициентите $R(b, 2, \vec{\gamma}, \vec{k})$ и $R(b, \vec{\gamma}, \vec{k})$ дадени соодветно со равенствата (4.11) и (3.3) јасно е дека за секој вектор $\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s$ и секој вектор од тежини $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_s)$ е во сила равенството:

$$R(b, 2, \vec{\gamma}, \vec{k}) = R(b, \vec{\gamma}, \vec{k}).$$

Од претходното равенство и од точноста на Теорема 4.1 непосредно следува точноста на Последица 4.1:

Последица 4.1 *Грешката-во-најлош-случај на интегрирањето во прос-*

торот $H_{\mathcal{W}(b),s,2,\vec{\gamma}}$ со користење на произволна s -димензионална мрежа

$$P_N = \{\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{N-1}\}$$

го задоволува равенството

$$e^2(H_{\mathcal{W}(b),s,2,\vec{\gamma}}; P_N) = -1 + \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{h=0}^{N-1} \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s} R(b, \vec{\gamma}, \vec{k})_{b \text{ wal}_{\vec{k}}(\vec{x}_n) \overline{\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}_h)}}.$$

4.3 Изразување на грешката на интегрирање во тежински Хилбертов простор $H_{\mathcal{W}(b),s,2,\vec{\gamma}}$ во термини на тежинска $(\mathcal{W}(b), \gamma)$ -дијафонија

Во ова поглавје е изложена теорема со која се покажува дека при конкретен избор на параметарот $\alpha = 2$, се дава врската меѓу грешката $e(H_{\mathcal{W}(b),s,2,\vec{\gamma}}; P_N)$ и тежинската $(\mathcal{W}(b), \gamma)$ -дијафонија. За таа цел го разгледуваме просторот $H_{\mathcal{W}(b),s,2,\vec{\gamma}}$ кој се добива како специјален случај на просторот $H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\vec{\gamma}}$ при конкретен избор на параметарот $\alpha = 2$, од што следува врската со тежинската $(\mathcal{W}(b), \gamma)$ -дијафонија, и која е изложена во следната теорема.

Теорема 4.2 Нека $H_{\mathcal{W}(b),s,2,\vec{\gamma}}$ биде тежински Хилбертов простор кој соодветствува на изборот на параметарот $\alpha = 2$ и нека

$$P_N = \{\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{N-1}\}$$

биде произволна мрежа составена од N точки во $[0, 1]^s$. Грешката-во-најлош-случај на интегрирањето $e(H_{\mathcal{W}(b),s,2,\vec{\gamma}}; P_N)$ во тежински Хилбертов простор $H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\vec{\gamma}}$ со користење на мрежата P_N и тежинската

$(\mathcal{W}(b), \gamma)$ -дијафонија на мрежата P_N се поврзани со равенството

$$e(H_{\mathcal{W}(b),s,2,\vec{\gamma}}; P_N) = \sqrt{C(b, s, \vec{\gamma})} F(\mathcal{W}(b); \vec{\gamma}; P_N),$$

каде што константата $C(b, s, \vec{\gamma})$ се дефинира со равенството (3.5).

Доказ на Теорема 4.2.

Според Последица 4.1 и Дефиницијата 3.1 на $(\mathcal{W}(b), \gamma)$ -дијафонијата на мрежата P_N следува дека

$$\begin{aligned} e^2(H_{\mathcal{W}(b),s,2,\vec{\gamma}}; P_N) &= -1 + \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{h=0}^{N-1} R(b, \vec{\gamma}, \vec{0}) {}_b\text{wal}_{\vec{0}}(\vec{x}_n) \overline{{}_b\text{wal}_{\vec{0}}(\vec{x}_h)} \\ &+ \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{h=0}^{N-1} \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s \setminus \{\vec{0}\}} R(b, \vec{\gamma}, \vec{k}) {}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}_n) \overline{{}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}_h)} \\ &= \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s \setminus \{\vec{0}\}} R(b, \vec{\gamma}, \vec{k}) \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} {}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}_n) \right|^2 \\ &= \left[\prod_{j=1}^s \left(1 + \gamma_j \frac{(b-1)(b^\alpha + b - 2)}{(b^\alpha - 1)(b^{2\alpha} - b)} \right) - 1 \right] F^2(\mathcal{W}(b); \vec{\gamma}; P_N), \end{aligned}$$

со што доказот на Теорема 4.2 е комплетно завршен.

Од резултатите на Теорема 3.2 и Теорема 4.2 директно се добива точноста на следното тврдење:

Последица 4.2 *Грешката-во-најлош-случај* $e(H_{\mathcal{W}(b),s,2,\vec{\gamma}}; P_N)$ на интегрирање-то во тежински Хилбертов простор $H_{\mathcal{W}(b),s,2,\vec{\gamma}}$ со користење на мрежата P_N го задоволува равенството

$$e^2(H_{\mathcal{W}(b),s,2,\vec{\gamma}}; P_N) = \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{h=0}^{N-1} \Omega(b; \vec{\gamma}; \vec{x}_n \ominus_s^b \vec{x}_h),$$

каде што функцијата $\Omega(b; \vec{\gamma}; \vec{x})$ е дефинирана во условот на Теорема 3.2.

Во Теорема 4.2 грешката на интегрирањето $e(H_{\mathcal{W}(b),s,2,\bar{\gamma}}; P_N)$ се разгледува во вид на бесконечен ред, а во Последица 4.2 таа грешка се претставува во вид на конечна двојна сума. Непосредно следува дека пресметувачката сложеност на грешката $e(H_{\mathcal{W}(b),s,2,\bar{\gamma}}; P_N)$ е $\mathcal{O}(N^2)$, што всушност претставува форма за пресметување која е погодна за имплементација со софтверски продукти.

4.4 Оценка на грешката на интегрирање во Хилбертов простор $H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\bar{\gamma}}$ преку користење на дигитална (t, m, s) -мрежа

Во ова поглавје на тезата, резултатот кој е добиен во Теорема 4.1 ќе биде применет врз произволна дигитална (t, m, s) -мрежа. Тоа ќе ни дозволи да докажеме дека постои (t, m, s) -мрежа \mathcal{P}'_{b^m} за која грешката на интегрирањето $e(H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\bar{\gamma}}; \mathcal{P}'_{b^m})$ во просторот $H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\bar{\gamma}}$ ги има следните редови на големина:

ако $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$, тогаш $e(H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\bar{\gamma}}; \mathcal{P}'_{b^m}) \in \mathcal{O}(b^{-\frac{m}{2}})$;

ако $\alpha > 1$, тогаш $e(H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\bar{\gamma}}; \mathcal{P}'_{b^m}) \in \mathcal{O}(b^{-\alpha m})$.

4.4.1 Формула за грешка-во-најлош-случај во Хилбертов простор $H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\bar{\gamma}}$ со користење на (t, m, s) -мрежа

Во ова подпоглавје ќе биде дадена формула за грешката-во-најлош-случај во тежински Хилбертов простор $H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\bar{\gamma}}$ преку користење на (t, m, s) -мрежа.

Теорема 4.3 Нека $\mathcal{P}_{b^m} = \{\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{b^m-1}\}$ биде произволна дигитална (t, m, s) -мрежа над \mathbb{Z}_b , составена од b^m точки во $[0, 1)^s$ и генерирана од

матриците C_1, \dots, C_s . Нека дефинираме множество

$$\chi = \{\vec{k} = (k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{N}_0^s : C_1^T \text{tr}_m(\vec{k}_1) + \dots + C_s^T \text{tr}_m(\vec{k}_s) = \vec{0}\}.$$

Тогаш за грешката-во-најлош-случај на интегрирањето во тежински Хилбертов простор $H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\vec{\gamma}}$ со користење на мрежата \mathcal{P}_{b^m} важи равенството

$$e^2(H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\vec{\gamma}}; \mathcal{P}_{b^m}) = \sum_{\vec{k} \in \chi \setminus \{\vec{0}\}} R(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k}).$$

Доказ на Теорема 4.3.

Согласно со Теорема 4.1 каде што беше добиена формула во експлицитен вид за грешката на интегрирањето во просторот $H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\vec{\gamma}}$ и оценката на тригонометриската сума (1.7) од Глава 1, последователно се добива следното:

$$\begin{aligned} e^2(H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\vec{\gamma}}; \mathcal{P}_{b^m}) &= -1 + \frac{1}{N^2} \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s} R(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k}) \sum_{n=0}^{N-1} {}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}_n) \overline{\sum_{h=0}^{N-1} {}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}_h)} \\ &= -1 + \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s} R(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k}) \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} {}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}_n) \right|^2 \\ &= -1 + R(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{0}) + \sum_{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^s \setminus \{\vec{0}\}} R(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k}) \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} {}_b\text{wal}_{\vec{k}}(\vec{x}_n) \right|^2 \\ &= \sum_{\vec{k} \in \chi \setminus \{\vec{0}\}} R(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k}), \end{aligned}$$

со што е завршен доказот на Теорема 4.3.

4.4.2 Основни резултати

Во продолжение ќе ја изложиме и докажеме следната теорема:

Теорема 4.4 (i) (оценка од десно) Нека $\frac{1}{2\alpha} < \lambda \leq 1$ е произволен реален број, тогаш постои дигитална (t, m, s) -мрежа \mathcal{P}_{b^m} над \mathbb{Z}_b , така што грешката-во-најлош-случај на интегрирањето во просторот $H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\bar{\gamma}}$ со користење на мрежата \mathcal{P}_{b^m} го задоволува неравенството:

$$e^{2\lambda}(H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\bar{\gamma}}; \mathcal{P}_{b^m}) \leq -1 + \prod_{j=1}^s \left[1 + c_1(b, \alpha, \lambda, \gamma_j) \frac{1}{b^{2\alpha\lambda m}} \right] + \frac{1}{b^m} \prod_{j=1}^s \left[1 + c_2(b, \alpha, \lambda, \gamma_j) \frac{1}{b^{2\alpha\lambda m}} + c_3(b, \alpha, \lambda, \gamma_j) \right],$$

при што константите $c_\mu(b, \alpha, \lambda, \gamma_j)$, за $1 \leq \mu \leq 3$ и $1 \leq j \leq s$ се дефинирани со равенствата:

$$\begin{aligned} c_1(b, \alpha, \lambda, \gamma_j) &= \gamma_j^\lambda \frac{(b-1)(b^{\alpha\lambda} + b^2 - 2b)}{(b^{\alpha\lambda} - b)(b^{2\alpha\lambda} - b)} \\ c_2(b, \alpha, \lambda, \gamma_j) &= \gamma_j^\lambda \frac{(b-1)^3 b^{\alpha\lambda}}{(b^{\alpha\lambda} - b)(b^{2\alpha\lambda} - b)(b^{\alpha\lambda} - 1)} \\ c_3(b, \alpha, \lambda, \gamma_j) &= \gamma_j^\lambda \frac{(b-1)(b^{\alpha\lambda} + b - 2)}{(b^{\alpha\lambda} - 1)(b^{2\alpha\lambda} - b)}. \end{aligned}$$

(ii) (асимптотско однесување)

За грешката-во-најлош-случај на интегрирањето во просторот $H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\bar{\gamma}}$ со користење на мрежата \mathcal{P}_{b^m} е точно

$$\text{ако } \frac{1}{2} < \alpha \leq 1, \text{ тогаш } e(H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\bar{\gamma}}; \mathcal{P}_{b^m}) \in \mathcal{O}(b^{-\frac{m}{2}});$$

$$\text{ако } \alpha > 1, \text{ тогаш } e(H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\bar{\gamma}}; \mathcal{P}_{b^m}) \in \mathcal{O}(b^{-\alpha m}).$$

Ќе направиме куса компарација на резултатите добиени во статијата на Дик и Пилишхамер [ДиПи 1] и нашите резултати предложени во Теорема 4.4, а кои се однесуваат на асимптотското поведење кога $m \rightarrow \infty$ на грешката-во-најлош-случај на интегрирањето во тежински Хилбертов простор $H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\bar{\gamma}}$. Резултатот добиен во [ДиПи 1] применет на тежински Хилбертов простор $H_{Wal,s,\alpha,\bar{\gamma}}$ тврди дека грешката-во-најлош-случај има

ред на големина $\mathcal{O}(b^{-\frac{\alpha m}{2}})$. Нашиот резултат изложен во Теорема 4.4 (ii) во случајот кога $\alpha > 1$ е дека $e(H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\bar{\gamma}}; \mathcal{P}_{b^m}) \in \mathcal{O}(b^{-\alpha m})$, што покажува дека грешката-во-најлош-случај на интегрирањето во тежински Хилбертов простор $H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\bar{\gamma}}$ е подобра (помала) од соодветната грешка во тежински Хилбертов простор $H_{Wal,s,\alpha,\bar{\gamma}}$ изложена во [ДиПи 1].

4.4.3 Некои помошни резултати

За да ја докажеме Теорема 4.4 неопходни ни се некои претходни резултати, кои ќе ги формулираме во следната Лема. За $b \geq 2, m \geq 2, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}$ дефинираме множества

$$C_{b,m,s} = \{(C_1, \dots, C_s) : C_j \in M_{b,m}, j = 1, \dots, s\},$$

каде што $M_{b,m}$ е множество од сите $m \times m$ матрици со елементи од $\{0, 1, \dots, b - 1\} = \mathbb{Z}_b$.

За грешката на интегрирањето $e(H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\bar{\gamma}}; \mathcal{P}_{b^m})$, каде што \mathcal{P}_{b^m} е дигитална мрежа генерирана од матриците C_1, \dots, C_s да воведеме ознака $e((C_1, \dots, C_s))$, т.е. важи равенството

$$e((C_1, \dots, C_s)) = e(H_{\mathcal{W}(b),s,\alpha,\bar{\gamma}}; \mathcal{P}_{b^m}). \tag{4.16}$$

Лема 4.2 *За произволен реален број $\lambda, 0 < \lambda \leq 1$ да дефинираме $A_{b^m,s,\alpha,\bar{\gamma}}(\lambda)$ да биде просечна вредност на величините $e^{2\lambda}(C_1, \dots, C_s)$ над множеството $C_{b,m,s}$ т.е.*

$$A_{b^m,s,\alpha,\bar{\gamma}}(\lambda) = \frac{1}{b^{m^2 s}} \sum_{(C_1, \dots, C_s) \in C_{b,m,s}} e^{2\lambda}(C_1, \dots, C_s).$$

тогаш важи следното неравенство:

$$A_{b^m, s, \alpha, \vec{\gamma}}(\lambda) \leq -1 + \left(1 - \frac{1}{b^m}\right) \prod_{j=1}^s \sum_{l_j=0}^{\infty} \rho^\lambda(b, \alpha, \gamma_j; b^m l_j) + \frac{1}{b^m} \prod_{j=1}^s \sum_{l_j=0}^{\infty} \sum_{k_j=0}^{b^m-1} \rho^\lambda(b, \alpha, \gamma_j; b^m l_j + k_j),$$

каде што коефициентите $\rho(b, \alpha, \gamma_j; \cdot)$ се дефинирани со формулата (4.2).

Доказ на Лема 4.2

Согласно со Теорема 4.3 следува дека

$$e^2((C_1, \dots, C_s)) = \sum_{\vec{k} \in \chi \setminus \{\vec{0}\}} R(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k}). \tag{4.17}$$

Ќе го искористиме неравенството на Јенсен: Ако $0 < \lambda \leq 1$ и $a_i \geq 0, i \geq 1$ се произволни реални броеви, тогаш важи неравенството:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i\right)^\lambda \leq \sum_{i=1}^{\infty} a_i^\lambda. \tag{4.18}$$

Од условот на лемата и (4.18) се добива дека

$$\begin{aligned} A_{b^m, s, \alpha, \vec{\gamma}}(\lambda) &= \frac{1}{b^{m^2 s}} \sum_{(C_1, \dots, C_s) \in C_{b, m, s}} \left[\sum_{\vec{k} \in \chi \setminus \{\vec{0}\}} R(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k}) \right]^\lambda \\ &\leq \frac{1}{b^{m^2 s}} \sum_{(C_1, \dots, C_s) \in C_{b, m, s}} \sum_{\vec{k} \in \chi \setminus \{\vec{0}\}} R^\lambda(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k}) \\ &= \frac{1}{b^{m^2 s}} \sum_{\vec{k} \in \chi \setminus \{\vec{0}\}} R^\lambda(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k}) \sum_{\substack{(C_1, \dots, C_s) \in C_{b, m, s} \\ C_1^T \text{tr}_m(\vec{k}_1) + \dots + C_s^T \text{tr}_m(\vec{k}_s) = \vec{0}}} 1 \\ &= -1 + \frac{1}{b^{m^2 s}} \sum_{\vec{k} \in \chi} R^\lambda(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k}) \sum_{\substack{(C_1, \dots, C_s) \in C_{b, m, s} \\ C_1^T \text{tr}_m(\vec{k}_1) + \dots + C_s^T \text{tr}_m(\vec{k}_s) = \vec{0}}} 1, \end{aligned} \tag{4.19}$$

при што во последниот израз е додаден и одземен собирок кој одговара на векторот $\vec{k} = \vec{0}$.

Пресметувањето на изразот во формулата (4.19) ќе го спроведеме преку разгледување на видот на векторот \vec{k} , кој може да биде претставен само преку еден од следните два облици:

$$\vec{k} = b^m \vec{l}, \vec{l} \in \mathbb{N}_0^s,$$

или

$$\vec{k} = b^m \vec{l} + \vec{k}^*, \text{ каде што } \vec{l} \in \mathbb{N}_0^s, \vec{k}^* \neq \vec{0}, \|\vec{k}^*\|_\infty < b^m.$$

Ознаката $\|\vec{k}^*\|_\infty < b^m$ е скратена ознака еквивалентна со $\vec{k}^* = (k_1^*, \dots, k_s^*)$ и $0 \leq k_j^* < b^m$ за $1 \leq j \leq s$.

Според претходната дискусија следува дека

$$\begin{aligned}
 A_{b^m, s, \alpha, \vec{\gamma}}(\lambda) &\leq -1 + \frac{1}{b^{m^2 s}} \sum_{\vec{l} \in \mathbb{N}_0^s} R^\lambda(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k} = b^m \vec{l}) \sum_{\substack{(C_1, \dots, C_s) \in C_{b, m, s} \\ C_1^T tr_m(\vec{k}_1) + \dots + C_s^T tr_m(\vec{k}_s) = \vec{0}}} 1 \\
 &+ \frac{1}{b^{m^2 s}} \sum_{\vec{l} \in \mathbb{N}_0^s} \sum_{\substack{\vec{k}^* \in \mathbb{N}_0^s \setminus \{\vec{0}\} \\ \|\vec{k}^*\|_\infty < b^m}} R^\lambda(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k} = b^m \vec{l} + \vec{k}^*) \sum_{\substack{(C_1, \dots, C_s) \in C_{b, m, s} \\ C_1^T tr_m(\vec{k}_1) + \dots + C_s^T tr_m(\vec{k}_s) = \vec{0}}} 1.
 \end{aligned}
 \tag{4.20}$$

Да воведеме ознаки Σ_{A1} и Σ_{A2} заради скратен запис на претходната формула, т.е.

$$A_{b^m, s, \alpha, \vec{\gamma}}(\lambda) \leq -1 + \Sigma_{A1} + \Sigma_{A2}. \tag{4.21}$$

Во сумата Σ_{A1} векторот \vec{k} е од првиот облик $\vec{k} = b^m \vec{l}$, па тогаш $tr_m(\vec{k}_j) = tr_m(b^m \vec{l}_j) = \vec{0}, \forall j \in \{1, \dots, s\}$, од каде што следува дека условот $C_1^T tr_m(\vec{k}_1) + \dots + C_s^T tr_m(\vec{k}_s) = \vec{0}$ е задоволен за секој избор на матрици $(C_1, \dots, C_s) \in C_{b, m, s}$

т.е.

$$\begin{aligned} \Sigma_{A1} &= \frac{1}{b^{m^2s}} \sum_{\vec{l} \in \mathbb{N}_0^s} R^\lambda(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k} = b^m \vec{l}) \sum_{\substack{(C_1, \dots, C_s) \in C_{b,m,s} \\ C_1^T \text{tr}_m(\vec{k}_1) + \dots + C_s^T \text{tr}_m(\vec{k}_s) = \vec{0}}} 1 \\ &= \frac{1}{b^{m^2s}} \sum_{\vec{l} \in \mathbb{N}_0^s} R^\lambda(b, \alpha, \vec{\gamma}, b^m \vec{l}) \sum_{(C_1, \dots, C_s) \in C_{b,m,s}} 1 = \frac{1}{b^{m^2s}} \sum_{\vec{l} \in \mathbb{N}_0^s} R^\lambda(b, \alpha, \vec{\gamma}, b^m \vec{l}) \cdot b^{m^2s}, \end{aligned}$$

односно се доби равенството

$$\Sigma_{A1} = \sum_{\vec{l} \in \mathbb{N}_0^s} R^\lambda(b, \alpha, \vec{\gamma}, b^m \vec{l}). \quad (4.22)$$

Во сумата Σ_{A2} векторот \vec{k} се јавува во вториот облик, па внатрешната сума во Σ_{A2} има вредност

$$\sum_{\substack{(C_1, \dots, C_s) \in C_{b,m,s} \\ C_1^T \text{tr}_m(\vec{k}_1) + \dots + C_s^T \text{tr}_m(\vec{k}_s) = \vec{0}}} 1 = b^{m^2s-m},$$

од каде следува дека

$$\Sigma_{A2} = \frac{1}{b^{m^2s}} \sum_{\vec{l} \in \mathbb{N}_0^s} \sum_{\substack{\vec{k}^* \in \mathbb{N}_0^s \setminus \{\vec{0}\} \\ \|\vec{k}^*\|_\infty < b^m}} R^\lambda(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k} = b^m \vec{l} + \vec{k}^*) b^{m^2s-m},$$

од каде се добива дека

$$\Sigma_{A2} = \frac{1}{b^m} \sum_{\vec{l} \in \mathbb{N}_0^s} \sum_{\substack{\vec{k}^* \in \mathbb{N}_0^s \setminus \{\vec{0}\} \\ \|\vec{k}^*\|_\infty < b^m}} R^\lambda(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k} = b^m \vec{l} + \vec{k}^*). \quad (4.23)$$

Во внатрешната сума на (4.23) ќе додадеме и одземеме собирок кој одго-

вара на векторот $\vec{k}^* = \vec{0}$, па следува дека

$$\begin{aligned} \Sigma_{A2} &= \frac{1}{b^m} \sum_{\vec{l} \in \mathbb{N}_0^s} \left[\sum_{\substack{\vec{k}^* \in \mathbb{N}_0^s \\ \|\vec{k}^*\|_\infty < b^m}} R^\lambda(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k} = b^m \vec{l} + \vec{k}^*) - R^\lambda(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k} = b^m \vec{l}) \right] \\ &= \frac{1}{b^m} \sum_{\vec{l} \in \mathbb{N}_0^s} \sum_{\substack{\vec{k}^* \in \mathbb{N}_0^s \\ \|\vec{k}^*\|_\infty < b^m}} R^\lambda(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k} = b^m \vec{l} + \vec{k}^*) - \frac{1}{b^m} \sum_{\vec{l} \in \mathbb{N}_0^s} R^\lambda(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k} = b^m \vec{l}). \end{aligned} \tag{4.24}$$

Од (4.21), (4.22) и (4.24) следува

$$\begin{aligned} A_{b^m, s, \alpha, \vec{\gamma}}(\lambda) &\leq -1 + \sum_{\vec{l} \in \mathbb{N}_0^s} R^\lambda(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k} = b^m \vec{l}) \\ &+ \frac{1}{b^m} \sum_{\vec{l} \in \mathbb{N}_0^s} \sum_{\substack{\vec{k}^* \in \mathbb{N}_0^s \\ \|\vec{k}^*\|_\infty < b^m}} R^\lambda(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k} = b^m \vec{l} + \vec{k}^*) - \frac{1}{b^m} \sum_{\vec{l} \in \mathbb{N}_0^s} R^\lambda(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k} = b^m \vec{l}) \\ &= -1 + \left(1 - \frac{1}{b^m}\right) \sum_{\vec{l} \in \mathbb{N}_0^s} R^\lambda(b, \alpha, \vec{\gamma}, b^m \vec{l}) + \frac{1}{b^m} \sum_{\vec{l} \in \mathbb{N}_0^s} \sum_{\substack{\vec{k}^* \in \mathbb{N}_0^s \\ \|\vec{k}^*\|_\infty < b^m}} R^\lambda(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k} = b^m \vec{l} + \vec{k}^*). \end{aligned} \tag{4.25}$$

Според дефиницијата на коефициентите $R(\cdot)$ во (4.11) следува

$$R^\lambda(b, \alpha, \vec{\gamma}, b^m \vec{l}) = \rho^\lambda(b, \alpha, \gamma_1, b^m l_1) \dots \rho^\lambda(b, \alpha, \gamma_s, b^m l_s);$$

а од претставувањето на следната сума имаме

$$\sum_{\vec{l} \in \mathbb{N}_0^s} \cdot = \sum_{l_1=0}^{\infty} \dots \sum_{l_s=0}^{\infty} \cdot,$$

па понатаму се добива дека

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{l} \in \mathbb{N}_0^s} R^\lambda(b, \alpha, \vec{\gamma}, b^m \vec{l}) &= \sum_{l_1=0}^{\infty} \rho^\lambda(b, \alpha, \gamma_1, b^m l_1) \dots \sum_{l_s=0}^{\infty} \rho^\lambda(b, \alpha, \gamma_s, b^m l_s) \\ &= \prod_{j=1}^s \sum_{l_j=0}^{\infty} \rho^\lambda(b, \alpha, \gamma_j, b^m l_j), \end{aligned} \quad (4.26)$$

и дека

$$\begin{aligned} &\sum_{\vec{l} \in \mathbb{N}_0^s} \sum_{\substack{\vec{k}^* \in \mathbb{N}_0^s \\ \|\vec{k}^*\|_\infty < b^m}} R^\lambda(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k} = b^m \vec{l} + \vec{k}^*) \\ &= \sum_{l_1=0}^{\infty} \dots \sum_{l_s=0}^{\infty} \sum_{k_1^*=0}^{b^m-1} \dots \sum_{k_s^*=0}^{b^m-1} R^\lambda(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k} = b^m \vec{l} + \vec{k}^*), \\ &= \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{k_1^*=0}^{b^m-1} \rho^\lambda(b, \alpha, \gamma_1, b^m l_1 + k_1^*) \dots \sum_{l_s=0}^{\infty} \sum_{k_s^*=0}^{b^m-1} \rho^\lambda(b, \alpha, \gamma_s, b^m l_s + k_s^*), \\ &= \prod_{j=1}^s \sum_{l_j=0}^{\infty} \sum_{k_j^*=0}^{b^m-1} \rho^\lambda(b, \alpha, \gamma_j, b^m l_j + k_j^*). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Конечно од (4.25), (4.26) и (4.27) следува

$$\begin{aligned} A_{b^m, s, \alpha, \vec{\gamma}}(\lambda) &\leq -1 + \left(1 - \frac{1}{b^m}\right) \prod_{j=1}^s \sum_{l_j=0}^{\infty} \rho^\lambda(b, \alpha, \gamma_j; b^m l_j) \\ &\quad + \frac{1}{b^m} \prod_{j=1}^s \sum_{l_j=0}^{\infty} \sum_{k_j=0}^{b^m-1} \rho^\lambda(b, \alpha, \gamma_j; b^m l_j + k_j), \end{aligned}$$

со што е докажана точноста на Лема 4.2.

4.4.4 Доказ на Теорема 4.4

Во ова подпоглавје ќе ја докажеме точноста на делот (i) на Теорема 4.4.

Ако \bar{s} е аритметичка средина на реални броеви од дадено множество $\{a_j, 1 \leq j \leq s\}$, тогаш постои индекс j_0 така што $1 \leq j_0 \leq s$ и $a_{j_0} \leq \bar{s}$. Кога претходниот резултат ќе се примени врз множеството

$$\{e((C_1, \dots, C_s)) : (C_1, \dots, C_s) \in C_{b,m,s}\},$$

при што $e((C_1, \dots, C_s))$ се дефинира со (4.16), следува дека постои конкретен избор на матрици $(C'_1, \dots, C'_s) \in C_{b,m,s}$ така што

$$e^{2\lambda}(C'_1, \dots, C'_s) \leq \frac{1}{b^{m^2s}} \sum_{(C_1, \dots, C_s) \in C_{b,m,s}} e^{2\lambda}(C_1, \dots, C_s) = A_{b^m, s, \alpha, \vec{\gamma}}(\lambda).$$

Според Теорема 4.3 имаме дека

$$e^2((C_1, \dots, C_s)) = \sum_{\vec{k} \in \chi \setminus \{\vec{0}\}} R(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k}),$$

од каде што следува дека:

$$e^{2\lambda}(C'_1, \dots, C'_s) \leq \frac{1}{b^{m^2s}} \sum_{(C_1, \dots, C_s) \in C_{b,m,s}} \left[\sum_{\vec{k} \in \chi \setminus \{\vec{0}\}} R(b, \alpha, \vec{\gamma}, \vec{k}) \right]^\lambda.$$

Сега со примена на Лема 4.2 се добива дека

$$\begin{aligned} e^{2\lambda}(C'_1, \dots, C'_s) &\leq -1 + \left(1 - \frac{1}{b^m}\right) \prod_{j=1}^s \sum_{l_j=0}^{\infty} \rho^\lambda(b, \alpha, \gamma_j; b^m l_j) \\ &+ \frac{1}{b^m} \prod_{j=1}^s \sum_{l_j=0}^{\infty} \sum_{k_j=0}^{b^m-1} \rho^\lambda(b, \alpha, \gamma_j; b^m l_j + k_j). \end{aligned} \tag{4.28}$$

Следна задача е да се пресметаат или оценат сумите кои се јавуваат во

(4.28), па за таа цел ќе бидат воведени следните ознаки:

$$\Sigma_A = \sum_{l=0}^{\infty} \rho^\lambda(b, \alpha, \gamma; b^m l)$$

и

$$\Sigma_B = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{b^m-1} \rho^\lambda(b, \alpha, \gamma; b^m l + k).$$

Тргувајќи од дефиницијата на коефициентите $\rho(\cdot)$ во формулата (4.2) и според неравенството на Јенсен, имаме дека

$$\rho(b, \alpha, \gamma, k)^\lambda \leq \begin{cases} 1, & \text{ако } k = 0, \\ \gamma^\lambda b^{-2\alpha a \lambda}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1}, a \geq 1, \\ \gamma^\lambda b^{-\alpha(a+j)\lambda} + \gamma^\lambda b^{-2\alpha a \lambda}, & \text{ако } k = k_{a-1} b^{a-1} + k_{j-1} b^{j-1} + \dots + \\ & k_1 b + k_0, \quad k_{a-1}, k_{j-1} \in \{1, \dots, b\}. \end{cases} \quad (4.29)$$

Сумирањето во Σ_A и Σ_B ќе го разгледуваме во однос на бројот на ненулти цифри на аргументот k од $\rho(b, \alpha, \gamma, k)$ во неговиот запис во броен систем со основа b . Според таа дискусија постојат три различни случаи:

1. $k = 0$;
2. k има точно една ненулта цифра;
3. k има барем 2 ненулти цифри во неговото претставување во броен систем со основа b .

Од гледна точка на претходната дискусија точно е дека

$$\sum_{l=1}^{\infty} \cdot = \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{l_{a-1}=1}^{b-1} \cdot + \sum_{a=2}^{\infty} \sum_{l_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{l_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{l=l_{a-1}b^{a-1}+l_{j-1}b^{j-1}}^{l_{a-1}b^{a-1}+(l_{j-1}+1)b^{j-1}-1} \cdot. \quad (4.30)$$

Улогата на аргументот k во $\rho(b, \alpha, \gamma, k)$ во Σ_A ја има бројот $b^m l$, па следува дека бројот на ненулта цифри на $b^m l$ е еднаков со бројот на ненулти

цифри на l во нивните записи во броен систем со основа b .

Од извршените анализи следува дека

$$\begin{aligned} \Sigma_A &= \sum_{l=0}^{\infty} \rho^\lambda(b, \alpha, \gamma; b^m l) = \rho^\lambda(b, \alpha, \gamma; 0) + \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{l_{a-1}=1}^{b-1} \rho^\lambda(b, \alpha, \gamma; b^m l_{a-1} b^{a-1}) \\ &+ \sum_{a=2}^{\infty} \sum_{l_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{l_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{l=l_{a-1} b^{a-1} + (l_{j-1} + 1) b^{j-1} - 1}^{l_{a-1} b^{a-1} + (l_{j-1} + 1) b^{j-1} - 1} \rho^\lambda(b, \alpha, \gamma; b^m l). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Да ги воведеме следните ознаки:

$$S_1 = \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{l_{a-1}=1}^{b-1} \rho^\lambda(b, \alpha, \gamma; b^m l_{a-1} b^{a-1}) \quad (4.32)$$

и

$$S_2 = \sum_{a=2}^{\infty} \sum_{l_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{l_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{l=l_{a-1} b^{a-1} + (l_{j-1} + 1) b^{j-1} - 1}^{l_{a-1} b^{a-1} + (l_{j-1} + 1) b^{j-1} - 1} \rho^\lambda(b, \alpha, \gamma; b^m l). \quad (4.33)$$

Да ја пресметаме или оцениме сумата S_1 :

$$S_1 \leq \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{l_{a-1}=1}^{b-1} \gamma^\lambda b^{-2\alpha(m+a)\lambda} = \gamma^\lambda b^{-2\alpha m \lambda} \sum_{a=1}^{\infty} b^{-2\alpha a \lambda} \sum_{l_{a-1}=1}^{b-1} 1,$$

односно се добива формулата

$$S_1 \leq \gamma^\lambda b^{-2\alpha m \lambda} (b-1) \sum_{a=1}^{\infty} b^{-2\alpha a \lambda} \quad (4.34)$$

За вредности на $\alpha > \frac{1}{2}$ и $0 < \lambda \leq 1$ геометрискиот ред $\sum_{a=1}^{\infty} b^{-2\alpha a \lambda}$ е конвергентен и има вредност $\frac{1}{b^{2\alpha\lambda} - 1}$, па тогаш од (4.34) се добива дека

$$S_1 \leq \frac{\gamma^\lambda (b-1)}{b^{2\alpha\lambda} - 1} b^{-2\alpha m \lambda}. \quad (4.35)$$

За сумата S_2 според (4.29) имаме:

$$\begin{aligned}
 S_2 &\leq \sum_{a=2}^{\infty} \sum_{l_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{l_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{l=l_{a-1}b^{a-1}+(l_{j-1}+1)b^{j-1}-1}^{l_{a-1}b^{a-1}+(l_{j-1}+1)b^{j-1}-1} (\gamma^\lambda b^{-\alpha(2m+a+j)\lambda} + \gamma^\lambda b^{-2\alpha(m+a)\lambda}) \\
 &= \gamma^\lambda (Z_1 + Z_2).
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

Да го трансформираме изразот Z_1 во поедноставна форма:

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= \sum_{a=2}^{\infty} \sum_{l_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{l_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{l=l_{a-1}b^{a-1}+(l_{j-1}+1)b^{j-1}-1}^{l_{a-1}b^{a-1}+(l_{j-1}+1)b^{j-1}-1} \gamma^\lambda b^{-\alpha(2m+a+j)\lambda} \\
 &= b^{-2\alpha m\lambda} \sum_{a=2}^{\infty} b^{-\alpha a\lambda} \sum_{l_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} b^{-\alpha j\lambda} \sum_{l_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{l=l_{a-1}b^{a-1}+(l_{j-1}+1)b^{j-1}-1}^{l_{a-1}b^{a-1}+(l_{j-1}+1)b^{j-1}-1} 1 \\
 &= b^{-2\alpha m\lambda} (b-1)^2 \sum_{a=2}^{\infty} b^{-\alpha a\lambda} \sum_{j=1}^{a-1} b^{-\alpha j\lambda} b^{j-1} \\
 &= b^{-2\alpha m\lambda} (b-1)^2 \sum_{a=2}^{\infty} b^{-\alpha a\lambda} \frac{b^{1-\alpha\lambda}(b^{(1-\alpha\lambda)(a-1)} - 1)}{b^{1-\alpha\lambda} - 1} \\
 &= b^{-2\alpha m\lambda} (b-1)^2 \frac{b^{1-\alpha\lambda}}{b^{1-\alpha\lambda} - 1} \sum_{a=2}^{\infty} (b^{a(1-2\alpha\lambda)+\alpha\lambda-1} - b^{-\alpha\lambda a}) \\
 &= b^{-2\alpha m\lambda} (b-1)^2 \frac{b^{1-\alpha\lambda}}{b^{1-\alpha\lambda} - 1} (M_1 - M_2).
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

Бесконечниот геометриски ред

$$M_1 = \sum_{a=2}^{\infty} b^{a(1-2\alpha\lambda)+\alpha\lambda-1} = b^{\alpha\lambda-1} \sum_{a=2}^{\infty} b^{a(1-2\alpha\lambda)}$$

е конвергентен за $b^{1-2\alpha\lambda} < 1$, т.е. тој ред е конвергентен ако и само ако е исполнет условот

$$\alpha\lambda > \frac{1}{2}, \tag{4.38}$$

и тогаш неговата вредност е

$$M_1 = \frac{1}{b^{\alpha\lambda-1}(b^{2\alpha\lambda} - b)}. \quad (4.39)$$

Редот $M_2 = \sum_{a=2}^{\infty} b^{-\alpha\lambda a}$ конвергира за вредности на $(\alpha > \frac{1}{2})$ и $(0 < \lambda \leq 1)$ и има вредност

$$M_2 = \frac{1}{b^{\alpha\lambda}(b^{\alpha\lambda} - 1)}. \quad (4.40)$$

Од (4.37), (4.39) и (4.40) следува

$$Z_1 = \frac{(b-1)^2 b}{(b^{\alpha\lambda} - b)(b^{2\alpha\lambda} - b)} b^{-2\alpha m \lambda}. \quad (4.41)$$

Сега да го пресметаме изразот Z_2 :

$$\begin{aligned} Z_2 &= b^{-2\alpha m \lambda} (b-1)^2 \sum_{a=2}^{\infty} b^{-2\alpha a \lambda} \sum_{j=1}^{a-1} b^{j-1} = b^{-2\alpha m \lambda} (b-1)^2 \sum_{a=2}^{\infty} b^{-2\alpha a \lambda} \frac{b^{a-1} - 1}{b-1} \\ &= b^{-2\alpha m \lambda} (b-1) \sum_{a=2}^{\infty} (b^{-2\alpha a \lambda + a - 1} - b^{-2\alpha a \lambda}) = b^{-2\alpha m \lambda} (b-1) (P_1 - P_2). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Редот

$$P_1 = b^{-1} \sum_{a=2}^{\infty} b^{a(1-2\alpha\lambda)},$$

(како и редот M_1) е конвергентен за оние вредности на α и λ за кои е исполнет условот (4.38), т.е. $\alpha\lambda > \frac{1}{2}$, и има вредност

$$P_1 = \frac{b^{1-2\alpha\lambda}}{b^{2\alpha\lambda} - b}. \quad (4.43)$$

Редот $P_2 = \sum_{a=2}^{\infty} b^{-2\alpha\lambda a}$ е конвергентен за произволен избор на вредности за

$\alpha > \frac{1}{2}$ и $0 < \lambda \leq 1$ и во тој случај има вредност

$$P_2 = \frac{b^{-2\alpha\lambda}}{b^{2\alpha\lambda} - 1}. \quad (4.44)$$

Од (4.42), (4.43) и (4.44) за Z_2 се добива

$$Z_2 = \frac{(b-1)^2}{(b^{2\alpha\lambda} - 1)(b^{2\alpha\lambda} - b)} b^{-2\alpha m\lambda}. \quad (4.45)$$

Сега од (4.36), (4.41) и (4.45) следува

$$S_2 \leq \frac{\gamma^\lambda (b-1)^2 b^{-2\alpha m\lambda} (b^{2\alpha\lambda+1} - b + b^{\alpha\lambda} - b)}{(b^{2\alpha\lambda} - 1)(b^{2\alpha\lambda} - b)(b^{\alpha\lambda} - b)},$$

односно

$$S_2 \leq \frac{\gamma^\lambda (b-1)^2 (b^{2\alpha\lambda+1} + b^{\alpha\lambda} - 2b)}{(b^{2\alpha\lambda} - 1)(b^{2\alpha\lambda} - b)(b^{\alpha\lambda} - b)} b^{-2\alpha m\lambda}. \quad (4.46)$$

Од (4.31), (4.32), (4.33), (4.35) и (4.46) следува

$$\begin{aligned} \Sigma_A &= 1 + S_1 + S_2 \\ &\leq 1 + \gamma^\lambda \frac{(b-1)(b^{3\alpha\lambda} - b^{2\alpha\lambda+1} - b^{\alpha\lambda+1} + b^2 + b - 1)}{(b^{2\alpha\lambda} - 1)(b^{2\alpha\lambda} - b)(b^{\alpha\lambda} - b)} b^{-2\alpha m\lambda}, \end{aligned}$$

при важење на условот (4.38). Конечно од условот $\alpha\lambda > \frac{1}{2}$ се добива оценката

$$\Sigma_A \leq 1 + \gamma^\lambda \frac{(b-1)(b^{\alpha\lambda} + b^2 - 2b)}{(b^{2\alpha\lambda} - b)(b^{\alpha\lambda} - b)} b^{-2\alpha m\lambda}. \quad (4.47)$$

За пресметување или оценување на сумата Σ_B , го разгледуваме бројот на ненулти цифри во записот на бројот $b^m l + k$ во броен систем со основа b . Можен е само еден од следниве три случаи: нема ненулти цифри; има само една ненулта цифра; има најмалку две ненулти цифри. Со-

гласно со претходната дискусија за Σ_B ќе го користиме претставувањето

$$\begin{aligned}\Sigma_B &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{b^m-1} \rho^\lambda(b, \alpha, \gamma; b^m l + k) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \rho^\lambda(b, \alpha, \gamma; b^m l) + \sum_{k=1}^{b^m-1} \rho^\lambda(b, \alpha, \gamma; k) + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{b^m-1} \rho^\lambda(b, \alpha, \gamma; b^m l + k) \\ &= \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3.\end{aligned}\quad (4.48)$$

Очевидно е дека важи равенството $\Sigma_1 = \sum_{l=0}^{\infty} \rho^\lambda(b, \alpha, \gamma; b^m l) = \Sigma_A$, од каде следува

$$\Sigma_1 \leq 1 + \gamma^\lambda \frac{(b-1)(b^{\alpha\lambda} + b^2 - 2b)}{(b^{2\alpha\lambda} - b)(b^{\alpha\lambda} - b)} b^{-2\alpha m\lambda}, \quad (4.49)$$

при што за добивање на (4.49) е користено неравенството (4.47), а при претпоставка дека важи условот (4.38), т.е. важи условот $\alpha\lambda > \frac{1}{2}$.

За сумата $\Sigma_2 = \sum_{k=1}^{b^m-1} \rho^\lambda(b, \alpha, \gamma; k)$ е точно претставувањето

$$\begin{aligned}\Sigma_2 &= \sum_{a=1}^m \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \rho^\lambda(b, \alpha, \gamma; k_{a-1} b^{a-1}) \\ &+ \sum_{a=2}^m \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{k=k_{a-1} b^{a-1} + (k_{j-1} + 1) b^{j-1} - 1}^{k_{a-1} b^{a-1} + (k_{j-1} + 1) b^{j-1} - 1} \rho^\lambda(b, \alpha, \gamma; k) \\ &= \Sigma'_2 + \Sigma''_2\end{aligned}\quad (4.50)$$

Да ја пресметаме сумата Σ'_2 .

$$\begin{aligned}\Sigma'_2 &= \sum_{a=1}^m \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \rho^\lambda(b, \alpha, \gamma; k_{a-1} b^{a-1}) \\ &= \gamma^\lambda \sum_{a=1}^m \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} b^{-2\alpha\lambda a} = \gamma^\lambda \frac{b-1}{b^{2\alpha\lambda} - 1} - \gamma^\lambda \frac{b-1}{b^{2\alpha\lambda} - 1} b^{-2\alpha m\lambda}.\end{aligned}\quad (4.51)$$

Од неравенството на Јенсен (4.18) за Σ_2'' се добива

$$\begin{aligned} \Sigma_2'' &= \sum_{a=2}^m \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{k=k_{a-1}b^{a-1}+(k_{j-1}+1)b^{j-1}-1}^{k_{a-1}b^{a-1}+(k_{j-1}+1)b^{j-1}-1} \rho^\lambda(b, \alpha, \gamma; k) \\ &\leq \sum_{a=2}^m \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{k=k_{a-1}b^{a-1}+(k_{j-1}+1)b^{j-1}-1}^{k_{a-1}b^{a-1}+(k_{j-1}+1)b^{j-1}-1} (\gamma^\lambda b^{-\alpha(a+j)\lambda} + \gamma^\lambda b^{-2\alpha a\lambda}) \\ &= \gamma^\lambda (\Sigma_2''^{(1)} + \Sigma_2''^{(2)}) \end{aligned} \quad (4.52)$$

За сумата $\Sigma_2''^{(1)}$ се добива

$$\begin{aligned} \Sigma_2''^{(1)} &= (b-1)^2 \sum_{a=2}^m b^{-\alpha a\lambda} \sum_{j=1}^{a-1} b^{-\alpha j\lambda} b^{j-1} \\ &= \frac{(b-1)^2}{b(b^{1-\alpha\lambda}-1)} \sum_{a=2}^m b^{-\alpha a\lambda} b^{1-\alpha\lambda} (b^{(1-\alpha\lambda)(a-1)} - 1) \\ &= \frac{(b-1)^2}{b-b^{\alpha\lambda}} \sum_{a=2}^m (b^{\alpha\lambda-1} b^{a(1-2\alpha\lambda)} - b^{-\alpha\lambda a}) \\ &= \frac{(b-1)^2}{b-b^{\alpha\lambda}} \left[\frac{b^{\alpha\lambda+1} (b^{m(1-2\alpha\lambda)} b^{2\alpha\lambda-1} - 1)}{b^{2\alpha\lambda} (b - b^{2\alpha\lambda})} - \frac{b^{\alpha\lambda} (b^{-m\alpha\lambda} b^{\alpha\lambda} - 1)}{b^{2\alpha\lambda} (1 - b^{\alpha\lambda})} \right] \\ &= \frac{(b-1)^2 (1 - b^{\alpha\lambda})^{-1}}{b^{\alpha\lambda} (b - b^{\alpha\lambda}) (b - b^{2\alpha\lambda})} \\ &\quad \times \left[b^{2\alpha\lambda} b^{m(1-2\alpha\lambda)} (1 - b^{\alpha\lambda}) + b^{\alpha\lambda+1} - b^{-m\alpha\lambda} b^{\alpha\lambda} (b - b^{2\alpha\lambda}) - b^{2\alpha\lambda} \right], \end{aligned}$$

односно добиен е следниот резултат

$$\begin{aligned} \Sigma_2''^{(1)} &= \frac{(b-1)^2 b^{\alpha\lambda}}{(b-b^{\alpha\lambda})(b-b^{2\alpha\lambda})} b^{m(1-2\alpha\lambda)} - \frac{(b-1)^2}{(b-b^{\alpha\lambda})(1-b^{\alpha\lambda})} b^{-m\alpha\lambda} + \frac{(b-1)^2}{(b^{\alpha\lambda}-1)(b^{2\alpha\lambda}-b)} \end{aligned} \quad (4.53)$$

За сумата $\Sigma_2''^{(2)}$ имаме:

$$\begin{aligned}
 \Sigma_2''^{(2)} &= \sum_{a=2}^m \sum_{k_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{k_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{k=k_{a-1}b^{a-1}+k_{j-1}b^{j-1}}^{k_{a-1}b^{a-1}+(k_{j-1}+1)b^{j-1}-1} b^{-2\alpha a\lambda} \\
 &= (b-1)^2 \sum_{a=2}^m b^{-2\alpha a\lambda} \sum_{j=1}^{a-1} b^{j-1} = (b-1)^2 \sum_{a=2}^m b^{-2\alpha a\lambda} \frac{b^{a-1}-1}{b-1} \\
 &= (b-1) \sum_{a=2}^m (b^{a(1-2\alpha\lambda)-1} - b^{-2\alpha\lambda a}) \\
 &= (b-1) \left[b^{1-2\alpha\lambda} \frac{(b^{m(1-2\alpha\lambda)+2\alpha\lambda-1}-1)}{b-b^{2\alpha\lambda}} - b^{-2\alpha\lambda} \frac{(b^{-2\alpha\lambda m+2\alpha\lambda}-1)}{1-b^{2\alpha\lambda}} \right] \\
 &= \frac{(b-1)}{b-b^{2\alpha\lambda}} b^{m(1-2\alpha\lambda)} - \frac{(b-1)}{1-b^{2\alpha\lambda}} b^{-2\alpha\lambda m} + \frac{(b-1)^2}{(1-b^{2\alpha\lambda})(b-b^{2\alpha\lambda})}.
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

Од (4.52), (4.53) и (4.54) се добива

$$\begin{aligned}
 \Sigma_2'' &\leq \gamma^\lambda \frac{(b-1)(b^{\alpha\lambda+1}-2b^{\alpha\lambda}+b)}{(b-b^{2\alpha\lambda})(b-b^{\alpha\lambda})} b^{m(1-2\alpha\lambda)} - \gamma^\lambda \frac{(b-1)}{1-b^{2\alpha\lambda}} b^{-2\alpha\lambda m} \\
 &\quad - \gamma^\lambda \frac{(b-1)^2}{(b-b^{\alpha\lambda})(1-b^{\alpha\lambda})} b^{-\alpha\lambda m} + \gamma^\lambda \frac{(b-1)^2(b^{\alpha\lambda}+2)}{(1-b^{2\alpha\lambda})(b-b^{2\alpha\lambda})}.
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

Сега за Σ_2 од (4.50), (4.51) и (4.55) следува

$$\begin{aligned}
 \Sigma_2 &\leq \gamma^\lambda \frac{(b-1)(b+(b-2)b^{\alpha\lambda})}{(b-b^{2\alpha\lambda})(b-b^{\alpha\lambda})} b^{-m(2\alpha\lambda-1)} \\
 &\quad + \gamma^\lambda \frac{(b-1)^2}{(b-b^{\alpha\lambda})(b^{\alpha\lambda}-1)} b^{-\alpha\lambda m} + \gamma^\lambda \frac{(b-1)(b^{\alpha\lambda}+b-2)}{(1-b^{\alpha\lambda})(b-b^{2\alpha\lambda})}.
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

Сега следува пресметување на сумата

$$\Sigma_3 = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{b^m-1} \rho^\lambda(b, \alpha, \gamma; b^m l + k).$$

За да ја пресметаме или оцениме сумата Σ_3 од клучен интерес се двете цифри со највисока важност на бројот $b^m l + k$, па од таа причина горната сума Σ_3 најпрво ќе ја разгледаме во однос на бројот

на ненулта цифри на сумирачкиот индекс l . Можен е само еден од следниве два случаи: бројот l во броен систем со основа b има точно една ненулта цифра; или бројот l во броен систем со основа b има барем две ненулта цифри. Поради претходната дискусија, ќе го користиме претставувањето

$$\begin{aligned} \Sigma_3 &= \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{l_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{k=1}^{b^m-1} \rho^\lambda(b, \alpha, \gamma; l_{a-1}b^{m+a-1} + k) \\ &+ \sum_{a=2}^{\infty} \sum_{l_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{l_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{l=l_{a-1}b^{a-1}+(l_{j-1}+1)b^{j-1}}^{l_{a-1}b^{a-1}+(l_{j-1}+1)b^{j-1}-1} \sum_{k=1}^{b^m-1} \rho^\lambda(b, \alpha, \gamma; b^m l + k) \\ &= \Sigma'_3 + \Sigma''_3 \end{aligned} \quad (4.57)$$

За сумата Σ'_3 го имаме следното претставување

$$\begin{aligned} \Sigma'_3 &= \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{l_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{k=1}^{b^m-1} \rho^\lambda(b, \alpha, \gamma; l_{a-1}b^{m+a-1} + k) \\ &= \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{l_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{\mu=1}^m \sum_{k_{\mu-1}=1}^{b-1} \sum_{k=k_{\mu-1}b^{\mu-1}}^{(k_{\mu-1}+1)b^{\mu-1}-1} \rho^\lambda(b, \alpha, \gamma; l_{a-1}b^{m+a-1} + k_{\mu-1}b^{\mu-1} + \dots) \\ &\leq \gamma^\lambda (b-1)^2 \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^m \sum_{k=k_{\mu-1}b^{\mu-1}}^{(k_{\mu-1}+1)b^{\mu-1}-1} (b^{-\alpha(m+a+\mu)\lambda} + b^{-2\alpha(m+a)\lambda}), \end{aligned}$$

односно добиена е формулата

$$\Sigma'_3 \leq \gamma^\lambda (b-1)^2 (\Sigma_3^{(1)} + \Sigma_3^{(2)}). \quad (4.58)$$

За пресметување на сумата $\Sigma_3^{(1)}$ имаме:

$$\begin{aligned} \Sigma_3^{(1)} &= \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^m \sum_{k=k_{\mu-1}b^{\mu-1}}^{(k_{\mu-1}+1)b^{\mu-1}-1} b^{-\alpha(m+a+\mu)\lambda} = \sum_{a=1}^{\infty} b^{-\alpha a \lambda} \sum_{\mu=1}^m b^{-\alpha \mu \lambda} \sum_{k=k_{\mu-1}b^{\mu-1}}^{(k_{\mu-1}+1)b^{\mu-1}-1} b^{-\alpha m \lambda} \\ &= b^{-\alpha m \lambda} \sum_{a=1}^{\infty} b^{-\alpha a \lambda} \sum_{\mu=1}^m b^{-\alpha \mu \lambda} b^{\mu-1} = \frac{b^{-\alpha m \lambda}}{b} \sum_{a=1}^{\infty} b^{-\alpha a \lambda} \sum_{\mu=1}^m b^{\mu(1-\alpha\lambda)}, \end{aligned}$$

т.е. се доби формулата

$$\Sigma_3^{(1)} = \frac{b^{-\alpha m \lambda}}{b} b^{1-\alpha \lambda} \frac{b^{(1-\alpha \lambda)m} - 1}{b^{1-\alpha \lambda} - 1} \sum_{a=1}^{\infty} b^{-\alpha a \lambda} \quad (4.59)$$

Бесконечниот геометриски ред $\sum_{a=1}^{\infty} b^{-\alpha a \lambda}$ кој се јавува во (4.59) е конвергентен за секој избор на $\alpha > \frac{1}{2}$ и $0 < \lambda \leq 1$ и има вредност $\frac{1}{b^{\alpha \lambda} - 1}$, па оттука следува дека

$$\Sigma_3^{(1)} = \frac{b^{-\alpha m \lambda} - b^{(1-2\alpha \lambda)m}}{(b^{\alpha \lambda} - 1)(b^{\alpha \lambda} - b)} \quad (4.60)$$

Сега да ја пресметаме сумата $\Sigma_3^{(2)}$.

$$\Sigma_3^{(2)} = \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^m \sum_{k=k_{\mu-1} b^{\mu-1}}^{(k_{\mu-1}+1)b^{\mu-1}-1} b^{-2\alpha(m+a)\lambda} = b^{-2\alpha \lambda m} \frac{b^m - 1}{b - 1} \sum_{a=1}^{\infty} b^{-2\alpha \lambda a} \quad (4.61)$$

Бесконечниот геометриски ред $\sum_{a=1}^{\infty} b^{-2\alpha \lambda a}$ кој се јавува во (4.61) е конвергентен за секој избор на $\alpha > \frac{1}{2}$ и $0 < \lambda \leq 1$ и има вредност $\frac{1}{b^{2\alpha \lambda} - 1}$, од каде што следува

$$\Sigma_3^{(2)} = \frac{b^{(1-2\alpha \lambda)m} - b^{-2\alpha m \lambda}}{(b - 1)(b^{2\alpha \lambda} - 1)} \quad (4.62)$$

Од (4.58), (4.60) и (4.62) за Σ_3' се добива

$$\begin{aligned} \Sigma_3' &\leq \gamma^\lambda (b - 1)^2 \\ &\times \left[\frac{b^{-\alpha \lambda m}}{(b^{\alpha \lambda} - 1)(b^{\alpha \lambda} - b)} - \frac{b^{-2\alpha m \lambda}}{(b - 1)(b^{2\alpha \lambda} - 1)} + \frac{(b^{\alpha \lambda}(2 - b) - 2b + 1)b^{(1-2\alpha \lambda)m}}{(b - 1)(b^{\alpha \lambda} - b)(b^{2\alpha \lambda} - 1)} \right]. \end{aligned} \quad (4.63)$$

За сумата Σ_3'' го имаме следното претставување:

$$\begin{aligned} \Sigma_3'' &= \sum_{a=2}^{\infty} \sum_{l_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{l_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{l=l_{a-1}b^{a-1}+(l_{j-1}+1)b^{j-1}-1}^{l_{a-1}b^{a-1}+(l_{j-1}+1)b^{j-1}-1} \sum_{k=1}^{b^m-1} \rho^\lambda(b, \alpha, \gamma; b^m l + k) \\ &\leq \gamma^\lambda \sum_{a=2}^{\infty} \sum_{l_{a-1}=1}^{b-1} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{l_{j-1}=1}^{b-1} \sum_{l=l_{a-1}b^{a-1}+(l_{j-1}+1)b^{j-1}-1}^{l_{a-1}b^{a-1}+(l_{j-1}+1)b^{j-1}-1} \sum_{k=1}^{b^m-1} (b^{-\alpha(m+a+m+j)\lambda} + b^{-2\alpha(m+a)\lambda}) \\ &= \gamma^\lambda (b-1)^2 (b^m-1) \sum_{a=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{l=l_{a-1}b^{a-1}+(l_{j-1}+1)b^{j-1}-1}^{l_{a-1}b^{a-1}+(l_{j-1}+1)b^{j-1}-1} (b^{-\alpha(2m+a+j)\lambda} + b^{-2\alpha(m+a)\lambda}) \\ &= \gamma^\lambda (b-1)^2 (b^m-1) \sum_{a=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{a-1} b^{j-1} (b^{-\alpha(2m+a+j)\lambda} + b^{-2\alpha(m+a)\lambda}), \end{aligned}$$

односно се добива неравенството

$$\Sigma_3'' \leq \gamma^\lambda (b-1)^2 (b^m-1) (\Sigma_3''^{(1)} + \Sigma_3''^{(2)}). \quad (4.64)$$

За пресметување на сумата $\Sigma_3''^{(1)}$ имаме

$$\begin{aligned} \Sigma_3''^{(1)} &= \sum_{a=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{l=l_{a-1}b^{a-1}+(l_{j-1}+1)b^{j-1}-1}^{l_{a-1}b^{a-1}+(l_{j-1}+1)b^{j-1}-1} b^{-\alpha(2m+a+j)\lambda} = b^{-\alpha 2m\lambda-1} \sum_{a=2}^{\infty} b^{-\alpha a\lambda} \sum_{j=1}^{a-1} b^{j(1-\alpha\lambda)} \\ &= b^{-\alpha 2m\lambda-1} \sum_{a=2}^{\infty} b^{-\alpha a\lambda} b^{1-\alpha\lambda} \frac{b^{(1-\alpha\lambda)(a-1)} - 1}{b^{1-\alpha\lambda} - 1} = \frac{b^{-\alpha 2m\lambda-\alpha\lambda}}{b^{1-\alpha\lambda} - 1} \sum_{a=2}^{\infty} (b^{a(1-2\alpha\lambda)+\alpha\lambda-1} - b^{\alpha\lambda a}), \end{aligned}$$

Односно

$$\Sigma_3''^{(1)} = \frac{b^{-\alpha 2m\lambda}}{b - b^{\alpha\lambda}} \left(b^{\alpha\lambda-1} \sum_{a=2}^{\infty} b^{a(1-2\alpha\lambda)} - \sum_{a=2}^{\infty} b^{-\alpha\lambda a} \right). \quad (4.65)$$

Геометрискиот ред $\sum_{a=2}^{\infty} b^{-\alpha a\lambda}$, кој се јавува за $\Sigma_3''^{(1)}$ во (4.65) е конвергентен за секој избор на $\alpha > \frac{1}{2}$ и $0 < \lambda \leq 1$ и има вредност $\frac{b^{-\alpha\lambda}}{b^{\alpha\lambda} - 1}$; а бескрајниот геометриски ред $\sum_{a=2}^{\infty} b^{a(1-2\alpha\lambda)}$ кој се јавува во (4.65) е конвергентен за вредности на α и λ за кои важи условот $\alpha\lambda > \frac{1}{2}$, и има вредност $\frac{b^{2-2\alpha\lambda}}{b^{2\alpha\lambda} - b}$,

па од тука за $\Sigma_3''^{(1)}$ се добива

$$\Sigma_3''^{(1)} = \frac{b^{-\alpha 2m\lambda}}{b - b^{\alpha\lambda}} \left(b^{\alpha\lambda-1} \frac{b^{2-2\alpha\lambda}}{b^{2\alpha\lambda} - b} - \frac{b^{-\alpha\lambda}}{b^{\alpha\lambda} - 1} \right) = \frac{b^{-\alpha 2m\lambda}}{b - b^{\alpha\lambda}} \left(\frac{b^{1-\alpha\lambda}}{b^{2\alpha\lambda} - b} - \frac{b^{-\alpha\lambda}}{b^{\alpha\lambda} - 1} \right),$$

од каде за $\Sigma_3''^{(1)}$ се добива

$$\Sigma_3''^{(1)} = \frac{1}{(b^{2\alpha\lambda} - b)(b^{\alpha\lambda} - 1)} b^{-2\alpha\lambda m}. \quad (4.66)$$

Сега да ја пресметаме сумата $\Sigma_3''^{(2)}$.

$$\begin{aligned} \Sigma_3''^{(2)} &= \sum_{a=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{a-1} b^{j-1} b^{-2\alpha(m+a)\lambda} = b^{-2\alpha m\lambda} \sum_{a=2}^{\infty} b^{-2\alpha a\lambda} \sum_{j=1}^{a-1} b^{j-1} = \\ &= b^{-2\alpha m\lambda} \sum_{a=2}^{\infty} b^{-2\alpha a\lambda} \frac{b^{a-1} - 1}{b - 1} = \frac{b^{-2\alpha m\lambda}}{b - 1} \sum_{a=2}^{\infty} (b^{a(1-2\alpha\lambda)-1} - b^{-2\alpha a\lambda}). \end{aligned}$$

Бескрајниот геометриски ред $\sum_{a=2}^{\infty} b^{a(1-2\alpha\lambda)-1}$ е конвергентен при важење на условот $\alpha\lambda > \frac{1}{2}$, а редот $\sum_{a=2}^{\infty} b^{-2\alpha a\lambda}$ е конвергентен за секој избор на парамет-рите $\alpha > \frac{1}{2}$ и $0 < \lambda \leq 1$, од каде следи

$$\Sigma_3''^{(2)} = \frac{1}{(b^{2\alpha\lambda} - b)(b^{2\alpha\lambda} - 1)} b^{-2\alpha\lambda m}. \quad (4.67)$$

Од добиените резултати во (4.66) и (4.67) следи

$$\Sigma_3'' \leq \frac{\gamma^\lambda (b - 1)^2 (b^{\alpha\lambda} + 2)}{(b^{2\alpha\lambda} - 1)(b^{2\alpha\lambda} - b)} (b^{-m(2\alpha\lambda-1)} - b^{-2\alpha\lambda m}). \quad (4.68)$$

Конечно за сумата Σ_3 , според добиените резултати во (4.57), (4.63) и

(4.68) се добива следното неравенство:

$$\begin{aligned} \Sigma_3 \leq & \gamma^\lambda (b-1) \\ & \times \left[\frac{(b-1)b^{-\alpha\lambda m}}{(b^{\alpha\lambda}-1)(b^{\alpha\lambda}-b)} - \frac{(b^{\alpha\lambda}-2+b)b^{-2\alpha m\lambda}}{(b^{\alpha\lambda}-1)(b^{2\alpha\lambda}-b)} + \frac{(b^{\alpha\lambda}(2-b)-b)b^{(1-2\alpha\lambda)m}}{(b^{\alpha\lambda}-b)(b^{2\alpha\lambda}-b)} \right]. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Од (4.48), (4.49), (4.56) и (4.69) за Σ_B се добива

$$\Sigma_B \leq 1 + \frac{\gamma^\lambda (b-1)^3 b^{\alpha\lambda}}{(b^{2\alpha\lambda}-b)(b^{\alpha\lambda}-b)(b^{\alpha\lambda}-1)} b^{-2\alpha\lambda m} + \frac{\gamma^\lambda (b-1)(b^{\alpha\lambda}+b-2)}{(b^{\alpha\lambda}-1)(b^{2\alpha\lambda}-b)}. \quad (4.70)$$

Од (4.47) и (4.70) за (4.28) се добива

$$\begin{aligned} e^{2\lambda}(C'_1, \dots, C'_s) \leq & -1 + \left(1 - \frac{1}{b^m}\right) \prod_{j=1}^s \left[1 + \gamma_j^\lambda \frac{(b-1)(b^{\alpha\lambda}+b^2-2b)}{(b^{2\alpha\lambda}-b)(b^{\alpha\lambda}-b)} b^{-2\alpha m\lambda} \right] \\ & + \frac{1}{b^m} \prod_{j=1}^s \left[1 + \frac{\gamma_j^\lambda (b-1)^3 b^{\alpha\lambda}}{(b^{2\alpha\lambda}-b)(b^{\alpha\lambda}-b)(b^{\alpha\lambda}-1)} b^{-2\alpha\lambda m} + \frac{\gamma_j^\lambda (b-1)(b^{\alpha\lambda}+b-2)}{(b^{\alpha\lambda}-1)(b^{2\alpha\lambda}-b)} \right], \end{aligned}$$

со што е докажана точноста на Теорема 4.4 (i).

Доказот на точноста на тврдењето во Теорема 4.4 (ii) следува непосредно од изложените и докажани резултати во Теорема 4.4 (i).

Отворени проблеми, сврзани со дисертацијата

Во вој дел на дисертацијата накратко ќе изложиме неколку отворени проблеми, тесно сврзани со резултатите добиени во тезата.

- 1. Да се добие општа оценка од лево на $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонијата на произволна s -димензионална низа.
- 2. Да се добие општа оценка од лево на $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонијата на произволна s -димензионална мрежа.

На тој начин ќе се добијат најдобрите можни редови на големина на $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонијата на произволна s -димензионална низа и произволна s -димензионална мрежа. Нашите очекувања се дека конкретно во еднодимензионалниот случај, добиениот ред на големина $\mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$ во Глава 3 на оваа теза за $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонијата на произволна Обоштена низа на Ван дер Корпут, ќе се совпадне со таа општа оценка од лево, која би била валидна за димензија $s = 1$.

Добиениот резултат во Теорема 4.2 во оваа теза, важи за специјален избор на параметарот $\alpha = 2$. Во врска со тој факт ја поставуваме за решавање следната задача:

- 3. Да се испита дали е можно во дефиницијата на коефи-

коэффициентите $\rho(b; \gamma; k)$ со формулата (3.4) да се реализира поопшт пристап со воведување на дополнителен параметар α , така што би се добила нова дефиниција на коефициентите $\rho(\cdot)$ и соодветно $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -дијафонијата. Со тоа би се добил аналог на Теорема 4.2, кој би бил точен за секоја вредност на параметарот $\alpha > 1$, а не само за $\alpha = 2$.

Уште повеќе, во дефиницијата на коефициентите $\rho(b; \gamma; k)$ во формулата (3.4) учествуваа само највисоките (првите) два значајни разреди (на ненултните цифри) во развојот на k во броен систем со основа b . Во врска со тоа, ја поставуваме за решавање и следната задача:

- 4. Да се воведат нов параметар β кој ќе го покажува бројот на значајните разреди во развојот на k во броен систем со основа b .

Практично, во формулата 3.4 параметарот β би имал вредност $\beta = 2$. Со така добиената ”дијафонија од најопшт вид”, која би зависела од уште од два нови параметри, би следувало решавање на следните две задачи:

- 5. Да се добие општа оценка од лево на новата ”дијафонија од најопшт вид” на произволна s -димензионална низа.

Со решавање на оваа задача би се одговорило на поставената хипотеза во параграф 3.4.

- 6. Да се докаже точноста на хипотезата од параграф 3.4: дека редот на големина $\mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$ се достигнува за новата ”дијафонија од најопшт вид”.

Во Дефиниција 3.1 е искористен функционалниот систем на Волш. Тој систем има свои природни обопштувања, како што е Волш-функци-

оналниот систем над конечни групи и Волш- функционалниот систем над конечни полиња. Во таа смисла е интересна и следната задача:

- 7. Да се конструира општ пристап во дефинирање на дијафонија, кој би зависел од веќе предложените два параметри, но кој би бил базиран врз користењето на Волш- функционалниот систем над конечни групи и Волш- функционалниот систем над конечни полиња.

Во Глава 4 на оваа дисертација беа изложени неколку идеи, кои би можело да се користат во решавањето на следната задача:

- 8. Да се разгледаат Коробови простори од функции и да се испита добивањето на точни формули за грешката-во-најлош-случај на Квази-Монте Карло интегрирањето во тие простори. Да се истражи врската помеѓу грешката-во-најлош-случај на интегрирањето и новата ”дијафонија од најопшт вид”.

Во оваа листа би можеле да наброиме уште доста отворени задачи, но сепак тука ќе го завршиме набројувањето со следната задача:

- 9. Да се изготват колку е можно повеќе компјутерски симулации за овие доста сложени математички модели, изложени во дисертацијата.

Литература

- [Аро] N. Aronszajn, Theory of reproducing kernels, *Trans. Amer. Math. Soc.* **68** (1950), 337-404.
- [БДЛНП] J. Baldeaux, J. Dick, G. Leobacher, D. Nuyens, F. Pillichshammer, Efficient calculation of the worst-case error and (fast) component-by-component construction of higher order polynomial lattice rules, *Numer Algor.* **59** (2012), 403-431, doi 10.0107/s11075-011-9497-y.
- [Бер] V. Bergstrom, Einige Bemerkungen zur Theorie der diophantischen Approximationen, *Fusiiogr. Sölsk. Lund. Fort.* **6** No 13 (1936), 1-19.
- [Бол] P. Bohl, Über ein in der Theorie der sakularen Störungen vorkommendes. *J. reine angew. Math.* **135** (1909), 189-193.
- [Бај 1] H. Weyl, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins., *Math. Ann.* **77** (1916), 313-352.
- [Бај 2] H. Weyl, Über die Gibbssche Erscheinung und verwandte Konvergenzphänomene., *Rend. Circ. Math. Palermo* **30** (1910), 377-407.
- [ВдК] J. G. Van der Corput, Verteilungsfunktionen, *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch.*, **38**, (1935), 813-821.
- [Вол] J. L. Walsh, A closed of normal orthogonal functions, *Amer. J. Math.* **45**, (1923), 5-24.

- [Гр1] V. S. Grozdanov, The weighted b -adic diaphony, *Comp. Rendus Akad. Bulgare Sci.* **58** No 5 (2005), 493-498.
- [Гр2] V. Grozdanov, The weighted b -adic diaphony, *Journal of Complexity*, **22**, (2006), 490-513.
- [ГрНиСт] V. Grozdanov, E. Nikolova, S. Stoilova, Generalized b -adic diaphony, *C. R. Akad. Bulgare Sci.*, **56**, No 4, (2003), 23-30.
- [ГрСт1] V. S. Grozdanov, S. S. Stoilova, On the theory of b -adic diaphony, *C. R. Akad. Bulgare Sci.*, **54**, No 3 (2001), 31-34.
- [ГрСт2] V. S. Grozdanov, S. S. Stoilova, The b -adic diaphony, *Rendiconti di Matematica, Serie VII*, Volume **22**, (2002), 203-221.
- [ГрСт3] V. S. Grozdanov and S. S. Stoilova, The general diaphony, *Comp. Rendus Akad. Bulgare Sci.* **57** No 1 (2004), 13-18.
- [ДГ] V. Dimitrievska Ristovska, V. Grozdanov, Numerical Verifications of Theoretical Results about the Weighted $(\mathcal{W}(b); \gamma)$ -Diaphony of the Generalized Van der Corput Sequence, *Proceedings of the ICT, Ohrid*, (2012), 101-110.
- [ДГБСС] V. Dimitrievska Ristovska, V. Grozdanov, V. Balazh, O. Strauch, S. Stoilova, An upper bound of the mean square worst-case error of the integration in the weighted Sobolev space by using "tent transformation", *Proceedings of the 8th International CIIT, Bitola, Macedonia*, (2011), 80-82.
- [ДГКС] V. Dimitrievska Ristovska, V. Grozdanov, V. Kusakatov, S. Stoilova, Computing Complexity of a new type of the diaphony, *Proceedings of the 9th International Conference CIIT, Bitola*, (2012), 206-208.
- [ДиПи 1] J. Dick and F. Pillichshammer, Diaphony, discrepancy, spectral test and worst-case error, *Math. Comput. Simulation* (2005).

- [ДиПи2] J. Dick and F. Pillichshammer, Multivariate integration in weighted Hilbert spaces based on Walsh functions and weighted Sobolev spaces, *J. Complexity* **21** (2005), 149-195.
- [КДЛП] L. Cristea, J. Dick, G. Leobacher, F. Pillichshammer, The tent transformation can improve the convergence rate of quasi-Monte Carlo algorithms using digital nets, *Numer. Math.* **105** (2007), 413-455, doi:10.1007/s00211-006-0046-x.
- [КюНи] L. Kuipers, H. Niederreiter, Uniform Distribution of Sequences, Wiley, NY, 1974.
- [Кок] J. F. Koksma, Diophantische Approximationen, *Erg. Math. Grenzgeb.* **Bd. 4** H. 4, Berlin Springer (1936).
- [Кре] H. E. Chrestenson, A class of generalized Walsh functions, *Pacific J. Math.*, **5** (1955), 17-31.
- [ЛаНиШм] G. Larcher, H. Niederreiter, W. Ch. Schmid, Digital nets and sequences constructed over finite rings and their application to quasi-Monte Carlo integration, *Monatsh. Math.*, **121**, (1996), 231-253.
- [ЛаПи] G. Larcher, G. Pirsic, Base change problems for generalized Walsh series and multivariate numerical integration, *Pacific J. Math.*, **189**, (1999), 75-105.
- [Нид] H. Niederreiter, Point Sets and Sequences with Small Discrepancy, *Monatsh. Math.* **104** (1987), 237-337.
- [Ост] A. Ostrowsky, Bemerkungen zur Theorie der Diophantischen Approximationen I, II, III, *Abh. Math. Eem. Hamburg* **30** (1922), 77-98, 250-251.
- [ПаКс] G. Pages, Y. J. Xiao, Sequences with low discrepancy and pseudo random number: Theoretical remarks and numerical tests, *J. Statist. Comput. Simul.* **56** (1997), 163-188.
- [ПрГр1] P. D. Proinov, V. S. Grozdanov, Symmetrization of the Van der Corput Halton sequence, *Comp. Rendus Akad. Bulgare Sci.* **40** No 8 (1987), 5-8.

- [ПрГр2] P. D. Proinov, V. S. Grozdanov, On the diaphony of the Van der Corput Halton sequence, *J. of Theory Sci.* **30** No 1 (1988), 94-104.
- [Рис] V. Ristovska, Irregularity of the distribution of the generalized Van der Corput sequence, *Comp. Rendus Akad. Bulgare Sci.* **58** No 5 (2005), 487-492.
- [РМаг] В. Ристовска, Квантитативни мерки за рамномерна распределба на низи, *магистерски труд, Унив. Кирил и Методиј, Скопје* (2007).
- [РиГр] V. Ristovska, V. Grozdanov, The weighted diaphony, *Comptes rendus de l'Academie Bulgare des Sciences*, **59** No 2, (2006), 137-142.
- [РиГр2] V. Ristovska, V. Grozdanov, A numerical test about the Generalized b-adic diaphony of the sequence of Halton, *Proceedings of the 6th Conference for Informatics and Information Tehnology CIIT, Bitola*, (2008), 2-6.
- [РиГр3] V. Ristovska, V. Grozdanov, Visualization of theoretical results obtained for a weighted diaphony over certain sequences, *Proceedings of the 7th Conference for Informatics and Information Tehnology CIIT, Bitola*, (2010), 169-172.
- [Рот] K. Roth, On irregularities on distribution, *Mathematika* **1** No 5 (1954), 73-79.
- [Сиј 1] W. Sierpinski, Sur la valeur asymptotique d' une certaine somme., *Bull. Inst. Acad. Polon Sci. (Cracove)* **A** (1910), 9-11.
- [Сиј 2] W. Sierpinski, On the asymptotic value of a certain sum.(Polish)., *Rozprawy Wydz. Mat. Przyr. Acad. Um.* **50** (1910), 1-10.
- [СлВо1] I. H. Sloan, H. Wozniakowski, When are quasi-Monte Carlo algorithms efficient for high dimensional integrals? *J. Complexity*, **14**, (1998), 1-33.
- [СлВо2] I. H. Sloan, H. Wozniakowski, Tractability of multivariate integration for weighted Korobov classes, *J. Complexity*, **17**, (2001), 697-721.
- [СоБ1] I. M. Sobol', On the calculations of multi-dimensional integrals, *DAN SSSR* **139** (1961), no 4, 821-823.

- [Фор] H. Faure, Discrépances de suites associées a un système de numération (an dimation un), *Bull. Soc. Math. France*, **109**, (1981), 143-182.
- [Хе] P. Hellekalek, A notion of diaphony based on a p-adic arithmetic , *Acta Arithmetica*, (2012).
- [ХеЛи] P. Hellekalek, H. Leeb, Dyadic diaphony, *Acta Arithmetica* **LXXX**, **2**, (1997), 187-196.
- [Хик] F. J. Hickernell Obtaining $\mathcal{O}(N^{-2+\epsilon})$ Convergence for Lattice Quadrature Rules, In: Fang, K. T., Hickernell, F. J., Niederreiter, H. (eds.) *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods (2000)*, pp. 274-289. Springer, Berlin Heidelberg New York (2002).
- [Хол] J. H. Halton, On the efficiency of certain quasi-random sequences of points in evaluating multi-dimensional integrals, *Numer. Math.*, **2**, (1960), 84-90.
- [Цин] P. Zinterhof, Über einige Abschätzungen bei der Approximation von Funktionen mit Gleichverteilungsmethoden, *S. B. Akad. Wiss., math.-naturw. Klasse, Abt. II*, **185**, (1976), 121-132.
- [ШМ] W. Schmidt, On irregularities of distribution, VII, *Acta Arith.* **21** (1972), 45-50.