

ЗБОРНИК НА ТРУДОВИ
PROCEEDINGS

ГРАДЕЖНО КОНСТРУКТОРСТВО – БЕЗ ОГРАНИЧУВАЊА
STRUCTURAL ENGINEERING – LIMITLESS



ДГКМ
ДРУШТВО НА
ГРАДЕЖНИ
КОНСТРУКТОРИ НА
МАКЕДОНИЈА

MASE
MACEDONIAN
ASSOCIATION OF
STRUCTURAL
ENGINEERS

21 МЕЃУНАРОДЕН СИМПОЗИУМ
INTERNATIONAL SYMPOSIUM

ОХРИД, С. МАКЕДОНИЈА
OHRID, N. MACEDONIA
24 - 27 септември 2025
September 24th - 27th 2025

MASE ДГКМ
Macedonian Association of Structural Engineers
Друштво на градежните конструктори на Македонија

Proceedings
Зборник на трудови

21 **st** **International**
Symposium
ви **Меѓународен**
симпозиум

Ohrid, North Macedonia, 24 – 27 September 2025
Охрид, Северна Македонија, 24 – 27 септември 2025

**PROCEEDINGS
OF THE 21st INTERNATIONAL SYMPOSIUM OF MASE**

**ЗБОРНИК НА ТРУДОВИ
21^{ВИ} МЕЃУНАРОДЕН СИМПОЗИУМ НА ДГКМ**

Publisher:

**MASE - Macedonian Association of Structural Engineers
Faculty of Civil Engineering, Blvd. Partizanski odredi No. 24 P.Box. 560,
1000 Skopje, Republic of North Macedonia
e-mail: mase@gf.ukim.edu.mk; website: www.mase.gf.ukim.edu.mk**

Издавач:

**ДГКМ - Друштво на Градежни Конструктори на Македонија
Градежен Факултет, бул. Партизански одреди бр. 24 П.Ф. 560,
1000 Скопје, Република Северна Македонија
e-mail: mase@gf.ukim.edu.mk; website: www.mase.gf.ukim.edu.mk**

Editor: **Darko Nakov, President of MASE**

За издавачот: **Дарко Наков, Претседател на ДГКМ**

Executive Committee of MASE and
Organizing Committee of the 21st International Symposium of MASE:

**Darko Nakov, Marta Stojmanovska, Ana Trombeva Gavriloska, Simona Bogoevska,
Andrea Serafimovski, Daniel Cekov, Gjorgji Goshev, Goce Lazareski, Koce Todorov,
Denis Popovski, Vladimir Vitanov, Mile Partikov, Riste Volchev, Nikola Postolov,
Marija Docevska Jovanova, Kristina Milkova, Milica Jovanoska Mitrevska, Evgenija
Stojkoska**

Претседателство на ДГКМ и

Организационен одбор на 21^{виот} Меѓународен симпозиум на ДГКМ:

**Дарко Наков, Марта Стојмановска, Ана Тромбева Гаврилоска, Симона Богоевска,
Андреа Серафимовски, Даниел Цеков, Горѓи Гошев, Гоце Лазарески, Коце
Тодоров, Денис Поповски, Владимир Витанов, Миле Партиков, Ристе Волчев,
Никола Постолов, Марија Доцевска Јованова, Кристина Милкова, Милица
Јованоска Митревска, Евгенија Стојкоска**

Technical staff of the Symposium:

**Petar Janev, Antonio Tomeski, Miladin Krstanoski, Marija Arangjelovska, Lara
Denkovik, Ivana Koceva, Ilijan Blazhevski, Emilija Stojanova, Andrijana Arsovska,
Nikola Nisev, Ditar Memedi**

Техничка служба на Симпозиумот:

**Петар Јанев, Антонио Томески, Милadin Крстаноски, Марија Аранѓеловска, Лара
Денковиќ, Ивана Коцева, Илијан Блажевски, Емилија Стојанова, Андријана
Арсовска, Никола Нисев, Дитар Мемеди**

Grafical design of cover page and Symposium poster:

**Mitko Hadzi Pulja, Darko Draganovski
Faculty of Architecture, UKIM, Skopje**

Графички дизајн на корицата и плакатот на Симпозиумот:

**Митко Хаџи Пуља, Дарко Драгановски
Архитектонски факултет, УКИМ, Скопје**

e-book:

електронско издание: **ISBN 978-608-4510-67-3**

**21st INTERNATIONAL SYMPOSIUM OF MASE
OHRID, 24 – 27 SEPTEMBER 2025**

**21^{eu} МЕЃУНАРОДЕН СИМПОЗИУМ НА ДГКМ
ОХРИД, 24 – 27 СЕПТЕМВРИ 2025**

**SCIENTIFIC COMMITTEE
НАУЧЕН ОДБОР**

(in alphabetic order)

(по азбучен редослед)

1. **Grozde ALEKSOVSKI**, Faculty of Civil Engineering,
University "Ss. Cyril and Methodius", Skopje, North Macedonia
Грозде АЛЕКСОВСКИ, Градежен факултет,
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје, Северна Македонија
2. **Sande ATANASOVSKI**, Faculty of Civil Engineering,
University "Ss. Cyril and Methodius", Skopje, North Macedonia
Санде АТАНАСОВСКИ, Градежен факултет,
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје, Северна Македонија
3. **Ana BARICEVIC**, Faculty of Civil Engineering,
University of Zagreb, Croatia
Ана Баричевиќ, Градежен факултет,
Универзитет во Загреб, Хрватска
4. **Golubka N. CVETANOVSKA**, Institute of Earthquake Engineering and Engineering
Seismology-IZIIS, University "Ss. Cyril and Methodius", Skopje, North Macedonia
Голубка Н. ЦВЕТАНОВСКА, Институт за земјотресно инженерство и инженерска
сеизмологија-ИЗИИС, Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје, Северна Македонија
5. **Petar CVETANOVSKI**, Faculty of Civil Engineering,
University "Ss. Cyril and Methodius", Skopje, North Macedonia
Петар ЦВЕТАНОВСКИ, Градежен факултет,
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје, Северна Македонија
6. **Liljana DENKOVSKA**, Faculty of Civil Engineering,
University "Ss. Cyril and Methodius", Skopje, North Macedonia
Лилјана ДЕНКОВСКА, Градежен факултет,
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје, Северна Македонија
7. **Igor DJOLEV**, Faculty of Technical Sciences,
University of Novi Sad, Novi Sad, Serbia
Игор Џолев, Факултет за технички науки,
Универзитет во Нови Сад, Србија
8. **Michael FABER**, Department of Civil Engineering, Aalborg University, Denmark
Мајкл ФАБЕР, Оддел за градежништво, Универзитет во Аалборг, Данска
9. **Vladimir GOCEVSKI**, Hydro-Quebec Equipment, Montreal, PQ, Canada
Владимир ГОЦЕВСКИ, Хидро-Квебек, Монтреал, Канада

- 10. Rade HAJDIN**, Infrastructure Management Consultants GmbH, Zurich, Switzerland,
Faculty of Civil Engineering, University of Belgrade, Serbia
Раде ХАЈДИН, Инфраструктура Менаџмент Консалтинг GmbH, Цирих, Швајцарија,
Градежен факултет, Универзитет во Белград, Србија
- 11. Rüdiger HÖFFER**, Ruhr-University, Bochum, Germany
Рудигер ХОФЕР, Рур Универзитет во Бохум, Германија
- 12. Elena DUMOVA JOVANOSKA**, Faculty of Civil Engineering,
University "Ss. Cyril and Methodius", Skopje, North Macedonia
Елена ДУМОВА ЈОВАНОСКА, Градежен факултет,
Универзитет „Св. Кирил и Методиј”, Скопје, Северна Македонија
- 13. Josif JOSIFOVSKI**, Faculty of Civil Engineering,
University "Ss. Cyril and Methodius", Skopje, North Macedonia
Јосиф ЈОСИФОВСКИ, Градежен факултет,
Универзитет „Св. Кирил и Методиј”, Скопје, Северна Македонија
- 14. Mirjana LABAN**, Faculty of Technical Sciences,
University of Novi Sad, Novi Sad, Serbia
Мирјана ЛАБАН, Факултет за технички науки,
Универзитет во Нови Сад, Србија
- 15. Djordje LADJINOVIC**, Faculty of Technical Sciences,
University Novi Sad, Novi Sad, Serbia
Ѓорѓе ЛАЃИНОВИЌ, Факултет за технички науки,
Универзитет во Нови Сад, Србија
- 16. Ljupco LAZAROV**, Faculty of Civil Engineering,
University "Ss. Cyril and Methodius", Skopje, North Macedonia
Љупчо ЛАЗАРОВ, Градежен факултет,
Универзитет „Св. Кирил и Методиј”, Скопје, Северна Македонија
- 17. Dusko LUCIC**, Faculty of Civil Engineering,
University of Montenegro, Podgorica, Montenegro
Душко ЛУЧИЌ, Градежен факултет,
Универзитет во Црна Гора, Подгорица, Црна Гора
- 18. Mirjana MALESEV**, Faculty of Technical Sciences, University Novi Sad, Novi Sad, Serbia
Мирјана МАЛЕШЕВ, Факултет за технички науки, University of Novi Sad, Serbia
- 19. Peter MARK**, Ruhr-University, Bochum, Germany
Питер МАРК, Рур Универзитет во Бохум, Германија
- 20. Viktor MARKELJ**, PONTING d.o.o., Maribor, Slovenia
Виктор МАРКЕЉ, ПОНТИНГ д.о.о., Марибор, Словенија
- 21. Zlatko MARKOVIC**, Faculty of Civil Engineering, University of Belgrade, Serbia
Златко МАРКОВИЌ, Градежен факултет, Универзитет во Белград, Србија
- 22. Goran MARKOVSKI**, Faculty of Civil Engineering,
University "Ss. Cyril and Methodius", Skopje, North Macedonia
Горан МАРКОВСКИ, Градежен факултет,
Универзитет „Св. Кирил и Методиј”, Скопје, Северна Македонија

23. **Miroslav NASTEV**, *Natural Resources Canada – Geological Survey of Canada, Quebec City, Canada*
Мирослав НАСТЕВ, *Национални ресурси на Канада - Центар за геолошки истражувања на Канада, Квебек, Канада*
24. **Tihomir NIKOLOVSKI**, *Faculty of Civil Engineering, University "Ss. Cyril and Methodius", Skopje, North Macedonia*
Тихомир НИКОЛОВСКИ, *Градежен факултет, Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје, Северна Македонија*
25. **Svetlana PETKOVSKA ONCEVSKA**, *Faculty of Civil Engineering, University "Ss. Cyril and Methodius", Skopje, North Macedonia*
Светлана ПЕТКОВСКА ОНЧЕВСКА, *Градежен факултет, Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје, Северна Македонија*
26. **Doncho PARTOV**, *University of Structural Engineering and Architecture, VSU “L. Karavelov”, Sofia, Bulgaria*
Дончо ПАРТОВ, *Универзитет за градежништво и архитектура, ВСУ “Љубен Каравелов“, Софија, Бугарија*
27. **Ivana BANJAD PEČUR**, *Faculty of Civil Engineering, University of Zagreb, Croatia*
Ивана БАЊАД ПЕЧУР, *Градежен факултет, Универзитет во Загреб, Хрватска*
28. **Predrag POPOVIC**, *Vice President & Senior Principal, Wiss Janney, Elstner Associates, Chicago, USA*
Предраг ПОПОВИЌ, *Потпретседател и Директор, Елстнер соработници, Чикаго, САД*
29. **Vlastimir RADONJANIN**, *Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad, Serbia*
Властомир РАДОЊАНИН, *Факултет за технички науки, Универзитет во Нови Сад, Србија*
30. **Bosko STEVANOVIC**, *Faculty of Civil Engineering, University of Belgrade, Serbia*
Бошко СТЕВАНОВИЌ, *Градежен факултет, Универзитет во Белград, Србија*
31. **Veronika SHENDOVA**, *Institute of Earthquake Engineering and Engineering Seismology-IZIIS, University "Ss. Cyril and Methodius", Skopje, North Macedonia*
Вероника ШЕНДОВА, *Институт за земјотресно инженерство и инженерска сеизмологија-ИЗИИС, Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје, Северна Македонија*
32. **Vlatko SHESHOV**, *Institute of Earthquake Engineering and Engineering Seismology-IZIIS, University "Ss. Cyril and Methodius", Skopje, North Macedonia*
Влатко ШЕШОВ, *Институт за земјотресно инженерство и инженерска сеизмологија-ИЗИИС, Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје, Северна Македонија*
33. **Mladen ULICEVIC**, *Faculty of Civil Engineering, University of Montenegro, Podgorica, Montenegro*
Младен УЛИЧЕВИЌ, *Градежен факултет, Универзитет во Црна Гора, Подгорица, Црна Гора*

34. *Ales ZNIDARIC, Slovenian National Building and Civil Engineering Institute,
Ljubljana, Slovenia*
*Алеш ЗНИДАРИК, Институт за градежништво на Словенија,
Љубљана, Словенија*

<u>TEA-32</u>	Antonio TOMESKI, Denis POPOVSKI, Mile PARTIKOV, Ditar MEMEDI, Nikola NISEV EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF A TENSION ANGLE CONNECTED WITH BOLTS ON ONE LEG	479
<u>TEA-33</u>	Goce VELESKI ANALYSIS OF A STEEL THREE – SPAN HALL WITH A TRUSS STRUCTURE AS AN EFFICIENT STRUCTURAL SOLUTION Гоце ВЕЛЕСКИ АНАЛИЗА НА ЧЕЛИЧНА ТРИБРОДНА ХАЛА СО РЕШЕТКАСТА КОНСТРУКЦИЈА КАКО ЕФИКАСНО КОНСТРУКТИВНО РЕШЕНИЕ	487
<u>TEA-34</u>	Valon VESELI, Sergey CHURILOV COMPARISON OF EXPERIMENTAL RESULTS AND NUMERICAL SIMULATIONS OF AAC-INFILLED RC FRAMES	493
<u>TEA-35</u>	Milica VIDOVIĆ, Ivan MILIĆEVIĆ, Jelena CAREVIĆ DEMOUNTABLE CONNECTORS WITH PARALLEL THREADED COUPLER (PTC) AND REBAR ANCHOR LOADED IN TENSION	505
<u>TEA-36</u>	Trajche ZAFIROV, Viktor HRISTOVSKI, Ana NANEVSKA, Daniel TOMIK DERIVATION OF FRAGILITY CURVES AND BEHAVIOR FACTOR OF VERTICAL EXTENSIONS ON RC STRUCTURES Трајче ЗАФИРОВ, Виктор ХРИСТОВСКИ, Ана НАНЕВСКА, Даниел ТОМИК РАЗВИВАЊЕ НА КРИВИ НА ПОВРЕДЛИВОСТ И ФАКТОР НА ОДНЕСУВАЊЕ НА НАДГРАДБИ НА АБ КОНСТРУКЦИИ	515
<u>CM</u>*	<i>CONTEMPORARY METHODS FOR STRUCTURAL DESIGN AND CONSTRUCTION</i> <i>СОВРЕМЕНИ МЕТОДИ ЗА ПРОЕКТИРАЊЕ И ИЗВЕДБА НА КОНСТРУКЦИИ</i>	
<u>CM-1</u>	Toni ARANGJELOVSKI, Sonja CHEREPNALKOVSKA, Katerina VELJANOVSKA, Goce PRANGOVSKI CHALLENGES IN THE STANDARDIZATION OF CONSTRUCTION PRODUCTS AND PROCESSES IN THE CONSTRUCTION INDUSTRY Тони АРАНЃЕЛОВСКИ, Соња ЧЕРЕПНАЛКОВСКА, Катерина ВЕЛЈАНОВСКА, Гоце ПРАНГОВСКИ ПРЕДИЗВИЦИ ВО СТАНДАРДИЗАЦИЈАТА НА ГРАДЕЖНИТЕ ПРОИЗВОДИ И ПРОЦЕСИТЕ ВО ГРАДЕЖНИШТВОТО	525
<u>CM-2</u>	Jelena BLEIZIFFER, Predrag PRESEČKI, Dunja BOŽIĆ ANALYSIS OF TWO VARIANTS FOR THE FLOOR SLABS ON EXAMPLE OF THE SKYLINE SKYSCRAPER IN BELGRADE	535

* in alphabetic order of the first author's surname

<u>CM-3</u>	Ivan BOSKOSKI, Sergej CHURILOV, Sead ABAZI ANALYSIS OF SOIL-STRUCTURE INTERACTION ACCORDING TO EUROCODES 7 AND 8 USING DIFFERENT MODELING METHODS Иван БОШКОСКИ, Сергеј ЧУРИЛОВ, Сеад АБАЗИ АНАЛИЗА НА ИНТЕРАКЦИЈАТА ПОЧВА-КОНСТРУКЦИЈА СПОРЕД ЕВРОКОДОВИ 7 И 8 СО ПРИМЕНА НА РАЗЛИЧНИ МЕТОДИ НА МОДЕЛИРАЊЕ	545
<u>CM-4</u>	Vladimir GOCEVSKI MONTREAL OLYMPIC STADIUM REPLACEMENT OF THE FLEXIBLE MEMBRANE ROOF	554
<u>CM-5</u>	Aleksandar JOVANOVSКИ, Andreja GJURESKI, Naum PETROVSKI, Ana ZDRAVKOVСКА, Hristina DAVITKOVСКА DESIGN AND CONSTRUCTION OF MEMBRANE STRUCTURES Александар ЈОВАНОВСКИ, Андреја ЃУРЕСКИ, Наум ПЕТРОВСКИ, Ана ЗДРАВКОВСКА, Христина ДАВИТКОВСКА ДИЗАЈН, ПРОЕКТИРАЊЕ И ИЗВЕДБА НА МЕМБРАНСКИ КОНСТРУКЦИИ	562
<u>CM-6</u>	Aleksandar JOVANOVSКИ, Andreja GJURESKI, Ana ZDRAVKOVСКА MEMBRANE PAVILLION "PHOENIX"	575
<u>CM-7</u>	Milorad JOVANOVSКИ, Igor PESHEVSKI, Jovan Br. PAPIĆ, Sead ABAZI INTEGRATED METHODOLOGY FOR DESIGN OF GEOTECHNICAL STRUCTURES	587
<u>CM-8</u>	Biljana LOVČEVIĆ-KURELJUŠIĆ, Đorđe JOVANOVIĆ, Rastislav KRAGIĆ, Anka STARČEV-ĆURČIN ANALYSIS OF THE IMPACT OF STORM WINDS ON THE SUPPORTING STRUCTURES OF SOLAR POWER PLANTS AND PROPOSALS FOR STRUCTURAL ELEMENTS' STRENGTHENING	597
<u>CM-9</u>	Marko MARINKOVIĆ, Christoph BUTENWEG ENHANCED SEISMIC SAFETY OF MASONRY INFILLED RC FRAME STRUCTURES: INODIS CONNECTION	610
<u>CM-10</u>	Teodora MIHAJLOVСКА, Ana TROMBEVA-GAVRILOСКА FORM-FINDING OF ARCHES UNDER HORIZONTAL LOADING BASED ON THRUST LINE ANALYSIS Теодора МИХАЈЛОВСКА, Ана ТРОМБЕВА - ГАВРИЛОСКА ДЕФИНИРАЊЕ НА ФОРМА НА ЛАК ПРИ ДЕЈСТВО НА ХОРИЗОНТАЛЕН ТОВАР ПРЕКУ АНАЛИЗА НА ПОТИСНА ЛИНИЈА	621
<u>CM-11</u>	Lena MIHOVA, Doncho PARTOV FE MODELING OF THE DEVIL'S STONE BRIDGE IN BULGARIA	631
<u>CM-12</u>	Goran MILUTINOVIC, Rade HAJDIN TYPICAL BRIDGE REHABILITATION ISSUES IN THE U.S.A.	639



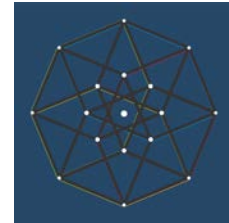
ДГКМ
ДРУШТВО НА
ГРАДЕЖНИТЕ
КОНСТРУКТОРИ НА
МАКЕДОНИЈА

Партизански одреди 24,
П. Фах 560, 1000 Скопје
Северна Македонија

MASE
MACEDONIAN
ASSOCIATION OF
STRUCTURAL
ENGINEERS

Partizanski odredi 24,
P. Box 560, 1000 Skopje
North Macedonia

CM-10



mase@gf.ukim.edu.mk
<http://mase.gf.ukim.edu.mk>

ДЕФИНИРАЊЕ НА ФОРМА НА ЛАК ПРИ ДЕЈСТВО НА ХОРИЗОНТАЛЕН ТОВАР ПРЕКУ АНАЛИЗА НА ПОТИСНА ЛИНИЈА

Теодора МИХАЈЛОВСКА¹, Ана ТРОМБЕВА - ГАВРИЛОСКА¹

АПСТРАКТ

Во овој труд е презентираан метод за дефинирање на формата на лак при дејство на сопствена тежина и хоризонтален товар кој дејствува во рамнината на лакот. Постапката за дефинирање форма е базирана на анализа на потисната линија на лакот, метод на рамнотежа кој графички ја дефинира минималната дебелина на лакот при гравитација и хоризонтално натоварување. Потисната линија на лакот е определена преку методолошка примена на графичка статика односно дводимензионални дијаграми на сила, кои дефинираат форми кои можат да се спротивстават на предвидениот хоризонтален товар и сопствената тежина обезбедувајќи пренос на силите на притисок.

Целта на истражувањето е да се идентификуваат геометрии кои обезбедуваат стабилна форма на лак и рационална распределба на материјалот. Наместо класична оптимизација, применет е геометриски пристап базиран на формата на потисната линија, анализирана за неизменичен хоризонтален товар во две насоки. Како резултат се добиваат две потисни линии, чијашто анvelope, односно површина што тие ја зафаќаат, ја дефинира формата на лакот и се разгледува како индиректен индикатор за стабилност и ефикасност.

Во трудот се презентирани резултати од анализата за влијанието на иницијалната форма на лак, при дејство на хоризонтален товар со различен интензитет што овозможува евалуација на предложениот пристап и неговата примена во контекст на дефинирање на форма.

Клучни зборови: графичка статика; потисна линија; дефинирање на форма; хоризонтален товар; лак

¹ Архитектонски факултет, Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје, Република Северна Македонија

Автор за контакт: Теодора МИХАЈЛОВСКА, e-mail: mihajlovska.teodora@arh.ukim.edu.mk

1. ВОВЕД

Дефинирањето на формата на лаци претставува предмет на опширни истражувања, од кои најголем дел се фокусирани на анализа на постоечки конструкции, занемарувајќи го обликувањето на различните форми на лаци, соодветно за специфични услови на товарење. Конкретно, дефинирањето на формата на лаци најчесто подразбира дефинирање на форма при дејство на вертикален товар, односно сопствена тежина на конструкцијата, додека прашањето за дефинирање на соодветна форма на лаци при дејство на хоризонтални товари се третира ограничено.

Истражувањето на формата на лаци има значајна улога во развојот на методите за дефинирање на форма, започнувајќи од публикациите на Хооке, каде е наведено дека „вистинската математичка и механичка форма на лаци е пресликаната форма на висечки синџир“ [1]. Анализата на потисната линија е метод на рамнотежа по аналогијата на висечкиот синџир на Хооке, во кој формата на висечкиот синџир дефинира катенарна крива (катенарија), односно ја илустрира потисната линија на лакот која претставува теоретска линија на пренос на силите на притисок.

Хооке не ја дефинирал математичката равенка на катенарната крива, сметајќи ја кубната парабола за еквивалентна, и ја применил во прелиминарните дизајни на лаци и куполи [2]. Формата на катенаријата математички прв ја опишал Gregory во труд објавен во 1697 година [3], имплементирајќи ја насоката на Хооке за решавање на проблемот на идеалната статичка форма на лакот, со своето истражување Gregory ја дефинирал основата на теоријата на потисната линија: лак чијашто оска на закривување не е формирана според потисната линија е стабилен кога потисната линија од предвидениот товарен случај лежи целосно во рамки на формата на лакот.

Формата на бескрајно тенок теоретски лак на катенаријата била дефинирана од страна на Bernoulli [4], додека определувањето на линијата на потисок за даден товарен случај било презентирano од Emerson [5] и Hutton [6], [7]. Анализата на потисната линија била ригорозно формулирана од Moseley [8], со прецизни математички дефиниции понудени од Milankovitch [9], за кој концепт е развиено аналитичко решение попрецизно дефинирано како локус на точките на притисок од страна на Ochsendorf [10].

Еден од пристапите за определување на потисната линија на лак е примена на графичка статика, односно конструкција на дводимензионални дијаграми на сили. Преку дефинирање на реципрочен дијаграм, односно дијаграм на форма и дијаграм на сили, може да се добие апроксимација на потисната линија и да се анализира рамнотежата на лакот за даден систем на надворешни сили. Вака дефинираната потисна линија претставува не само метод за анализа на постоечки лаци, туку и средство за дефинирање на форма според зададен товарен случај, вклучително и хоризонтален товар од наизменичен карактер.

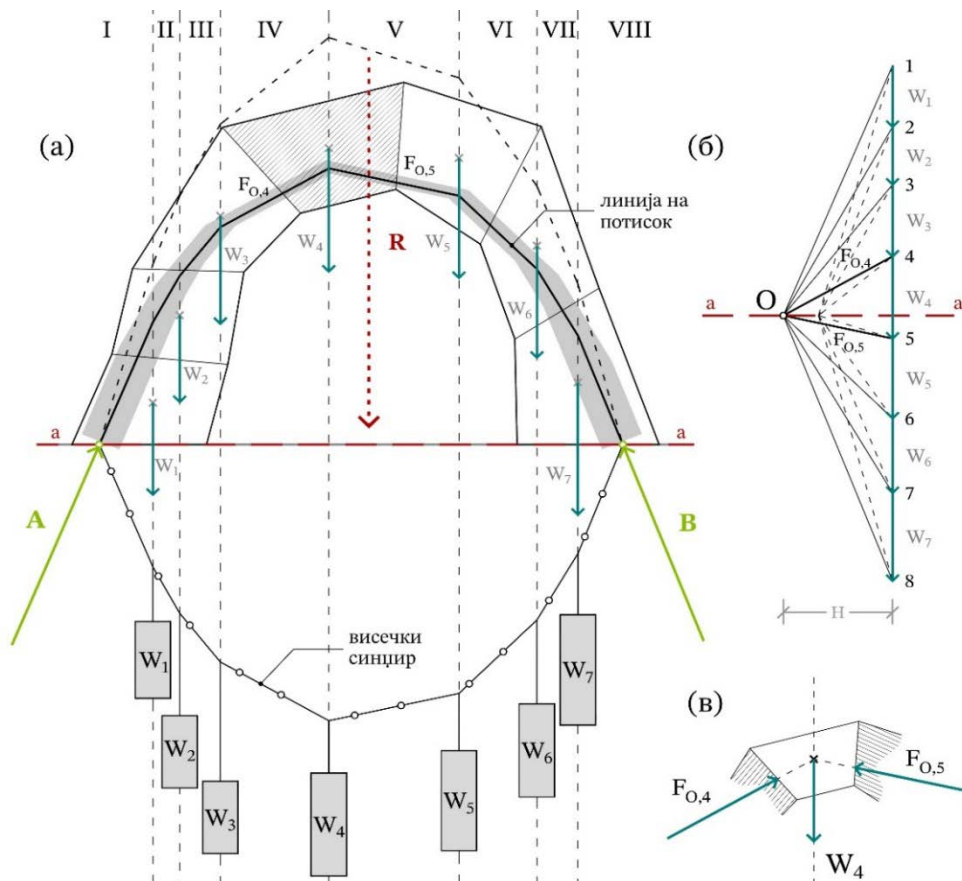
2. ДЕФИНИРАЊЕ НА ПОТИСНА ЛИНИЈА НА ЛАК ПРИ ДЕЈСТВО НА ВЕРТИКАЛЕН ТОВАР

Потисната линија на лак може да биде определена со примена на нумерички методи [11], [12], [13], [14], експериментални резултати од моделот на висечки синџир [1], [13], [15], [16], како и со примена на графички методи.

Еден од методите за дефинирање на потисната линија е примена на графичка статика, односно конструкција на дводимензионални дијаграми на сили. За лак со неправилна форма, дефинирајќи го реципрочниот дијаграм на сили може да биде конструиран верижен полигон, кој претставува апроксимација на потисната линија илустрирајќи ја статичката рамнотежа и преносот на сили. За целите на графичка анализа потребно е лакот да биде поделен на дискретни делови кои веродостојно треба да ја претставуваат неговата реална структура. Различните сегменти, пропорционални на нивната соодветна тежина, се третираат како концентрирани сили кои дејствуваат по нападните линии во тежиштето на секој поодделен сегмент.

Големината и насоката на резултантата се определува конструирајќи верижен полигон на сили преку исцртување на план на концентрираните сили пропорционални на тежината на поодделните сегменти, W_i . Правецот се определува со исцртување на полови зраци кои започнуваат од избраниот пол, произволна точка O , а завршуваат до почетната, односно крајната точка на секој вектор. Започнувајќи од точка A , која лежи на потпората на лакот во полето I, се конструира правец паралелен на половиот зрак „ $O1$ “ сè до пресечната точка со нападната линија на првиот сегмент на лакот, со што се конструира првата страна на верижниот полигон од точката A до пресечната точка. Од дефинираната пресечна точка се повлекува правец паралелен на наредниот полов зрак определувајќи пресечна точка со нападната линија на следниот сегмент, а повторувајќи ја постапка за сите полови зраци се определува иницијалната линија на потисок.

Следејќи ја оригиналната аналогија на Нооке, потисната линија на висечки синџир може да биде дефинирана со прикачување на тежини еквивалентни на соодветните сегменти на лакот вдолж синџирот, Сл.1(а). Потисната линија која целосно лежи во рамки на формата на лакот и претставува валидна состојба на рамнотежа може да биде дефинирана преку итеративно поместување на положбата на полот O вдолж правецот $a - a$, каде што хоризонталното растојание H од полот до нападната линија на резултатната на товарите ја определува хоризонталната потисна сила во системот, со која лакот врши потисок нанадвор Сл.1(б). Исто така анализирајќи го обликот на дијаграмот на сили може да бидат изолирани различните затворени векторски триаголници кои ја прикажуваат рамнотежата на секој блок во лакот, Сл.1(в).

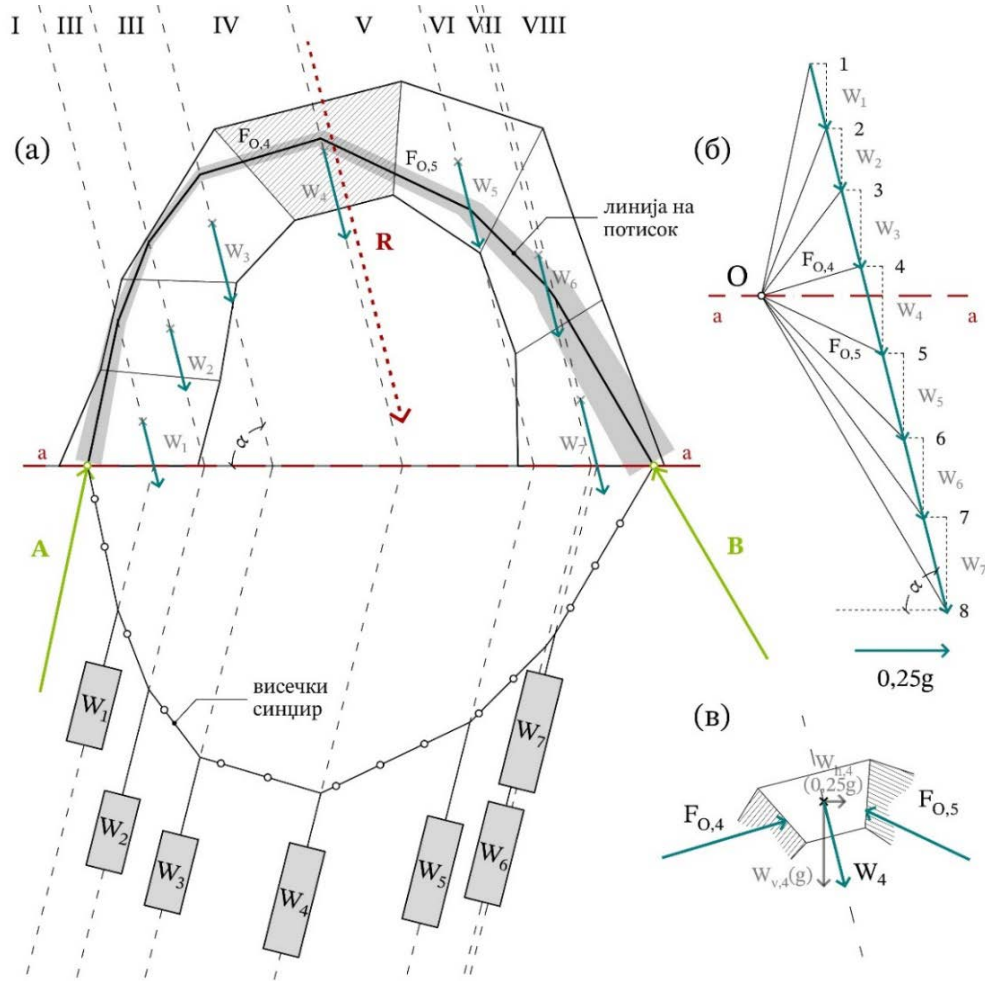


Сл. 1. Анализа на рамнотежа на лак: (а) можна потисна линија и еквивалентната ланчаница; (б) дијаграм на сили; (в) рамнотежата на сегмент од лакот

3. ДЕФИНИРАЊЕ НА ПОТИСНА ЛИНИЈА НА ЛАК ПРИ ДЕЈСТВО НА КОМБИНАЦИЈА ОД ХОРИЗОНТАЛЕН И ВЕРТИКАЛЕН ТОВАР

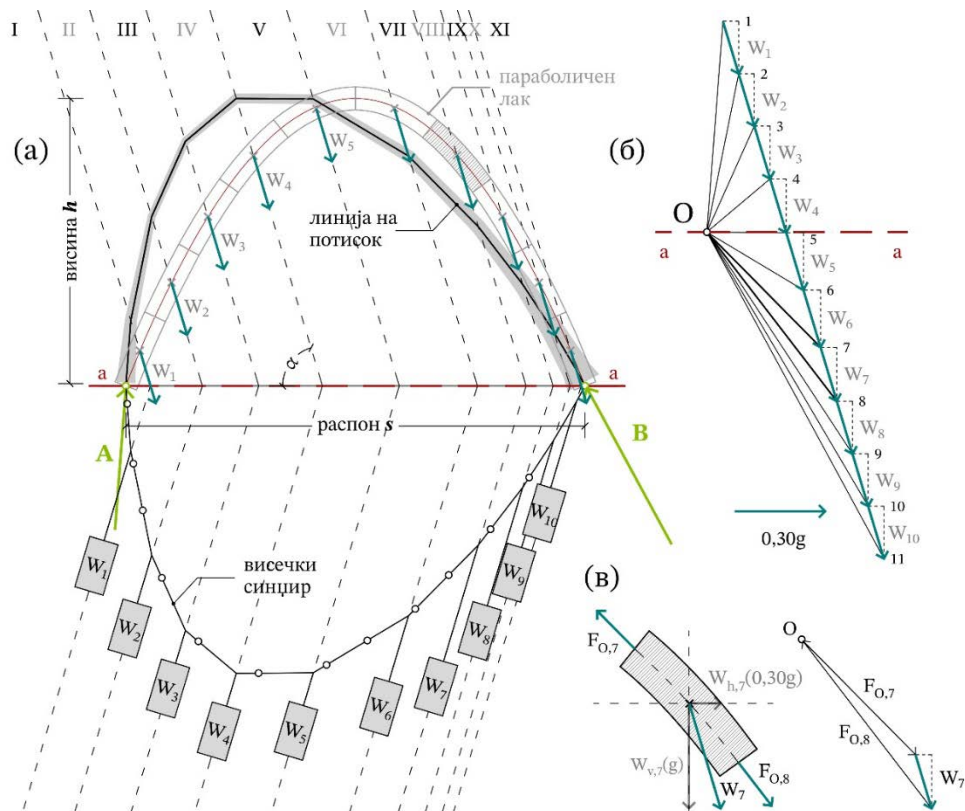
Методот за дефинирање на потисна линија на лак со примена на графичка статика опишан претходно, може да биде модифициран со дополнително влијание на хоризонтални товари. Во тој случај на секој сегмент дејствува резултантна сила, односно пар од вертикална и хоризонтална

сила, каде хоризонталната сила е пропорционална на влијанието на земјиното забрзување g врз вертикалната компонента, која ја претставува сопствената тежина на сегментот, Сл. 2.



Сл.2. Дефинирање форма на лак под дејство на вертикален и хоризонтален товар: (а) можна потисна линија и еквивалентната ланчаница; (б) дијаграм на сили; (в) рамнотежата на сегмент од лакот

Методот за дефинирање на форма, презентирани во ова истражување, базира на анализа на потисната линија при дејство на комбиниран товарен случај од вертикални и хоризонтални товари во рамнината на лакот. Процесот на дефинирање на форма започнува со избор на произволен лак со распон s и висина h , предвидени во процесот на проектирање, кој се дели на n дискретни сегменти, при што секој сегмент претставувајќи еден блок. Бројот на сегменти зависи од материјалот предвиден за изведба на лакот, при што за симулација на сидан лак се користат помал број сегменти, додека за симулација на лацци изведени од монолитни материјали како бетон се предвидуваат поголем број на сегменти. Линијата на потисок која ја прикажува рамнотежата на силите во лакот се дефинира преку дијаграм на сили конструирање користејќи го методот на графичка статика, Сл. 3. Потисната линија се конструира согласно постапката дефинирана во точка 2., при што за дефинираната линија на потисок земена е предвид само една насока на хоризонталниот товар. Доколку првично дефинираниот лак не ја опфаќа соодветната линија на потисок, односно истиот не е стабилен за предвидените товари, местоположбата на полот итеративно се прилагодува со цел да биде постигната бараната висина на лакот и да биде дефинирана нова соодветна форма на лак. За да се земе во предвид алтернативната насока на хоризонталниот товар, може да се направи пресликување на потисната линија во однос на оската на симетрија на лакот.



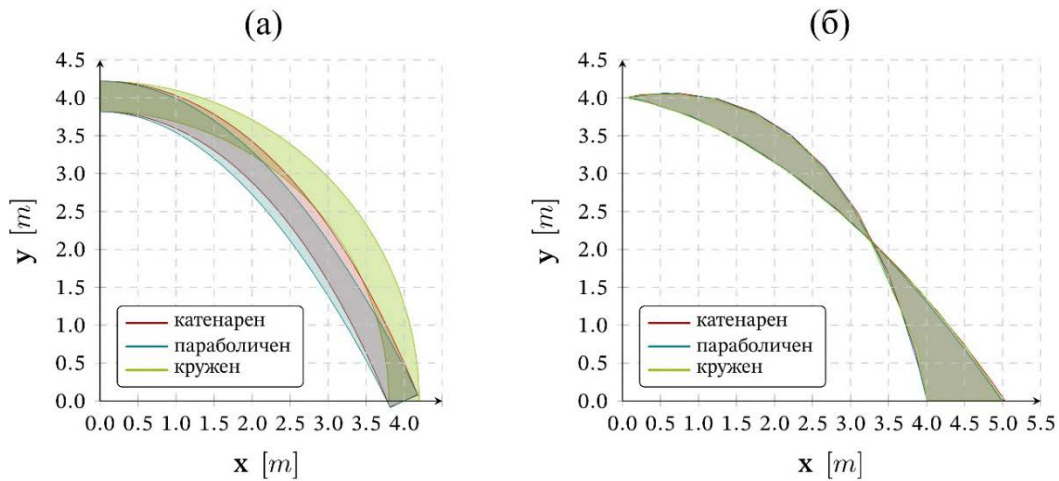
Сл. 3. За иницијален параболичен лак, (а) потисната линија и еквивалентниот висечки синџир ; (б) статичка рамнотежа прикажана преку дијаграм на сили; (в) рамнотежа на еден сегмент на лакот

4. ВЛИЈАНИЕ НА ИНИЦИЈАЛНАТА ГЕОМЕТРИЈА НА ЛАКОТ ВРЗ ПОТИСНАТА ЛИНИЈА

Имајќи предвид дека алгоритмот за дефинирање на форма базира на линија на потисок на произволен лак со стандардна геометрија, лаци кои имаат различна иницијална геометрија ќе дефинираат различен облик на линијата на потисок. Исто така, дијаграмот на сили е сразмерен и независен од материјалот предвиден за изведба на лакот, бидејќи дефинираната форма на лакот е заснована исклучиво на рамнотежата на силите и не зависи од конкретните механички својства на материјалот, сè додека истиот може да ги пренесува внатрешните статички големини.

Анализата на влијанието кое иницијалната геометрија на лакот го има врз дефиницијата на потисната линија е спроведена на **кружен, параболичен и катенарен облик на лак**. Реалните димензии на лакот немаат влијание на формата на потисната линија, меѓутоа влијаат на нејзината големина, при што параметарот сооднос висина / распон, (c) влијае на дефинираната форма. Методот за дефинирање на форма може да биде применет кај лаци со различен сооднос помеѓу висината и распонот, при тоа имајќи предвид дека поголемиот сооднос помеѓу висината и распонот резултира со лак кој е поранлив на хоризонталните товари.

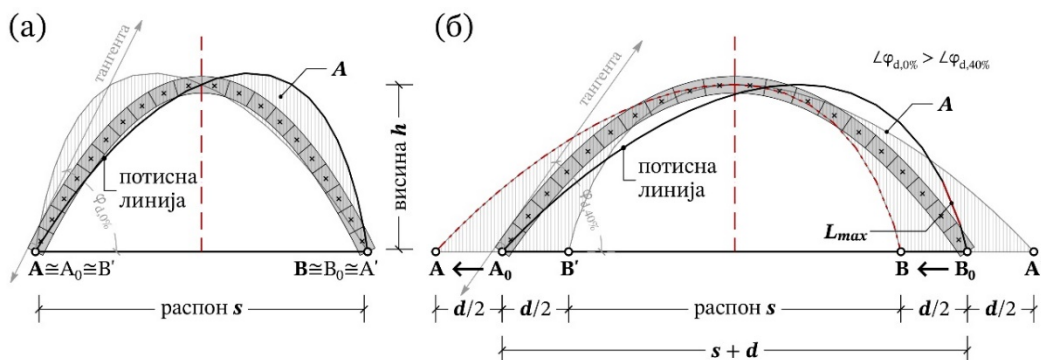
Анализата е спроведена за трите форми на лак со висина $h = 4 \text{ m}$ и распон $s = 8 \text{ m}$, кај кои соодносот помеѓу висината и распонот е дефинирана како параметар $c = 1/2$, Сл. 4 (а). Анализата е спроведена за дејство на вертикален товар од сопствена тежина и константен хоризонтален товар, кој дејствува наизменично во двете насоки. Дефинираните лаци претставуваат основа за конструирање на дводимензионалниот дијаграм на сили преку кој се дефинира потисната линија на лакот. Влијанието на наизменичниот константен хоризонтален товар резултира со дефиниција на две потисни линии за секој лак, при што зафатената површина помеѓу двете дефинирани линии на потисок ја претставува дефинираната форма на лакот, Сл. 4 (б).



Сл. 4. Дефинирање на форма на лак (а) Иницијална геометрија (б) Дефинирана форма со минимална зафатена површина од линиите на потисок

Во анализата разгледувани се различните релативни поместувања на двете потисни линии d , односно определено е хоризонталното поместување на линијата од нејзината почетна положба од првично дефинираните лежишта на иницијалниот лак. Целта е оптимизација на целокупната форма на лакот преку намалување на површината зафатена од линиите на потисок A , односно дефинирање на форма кај која најголем дел од волуменот е сконцентриран во зоната кај потпорите, пропратено со намалување на напречниот пресек по висината на лакот. Максималната вредност на d е дефинирана како поместување при кое највисоките точки на двете потисни линии приближно се преклопуваат, зависно од интензитетот на хоризонталниот товар.

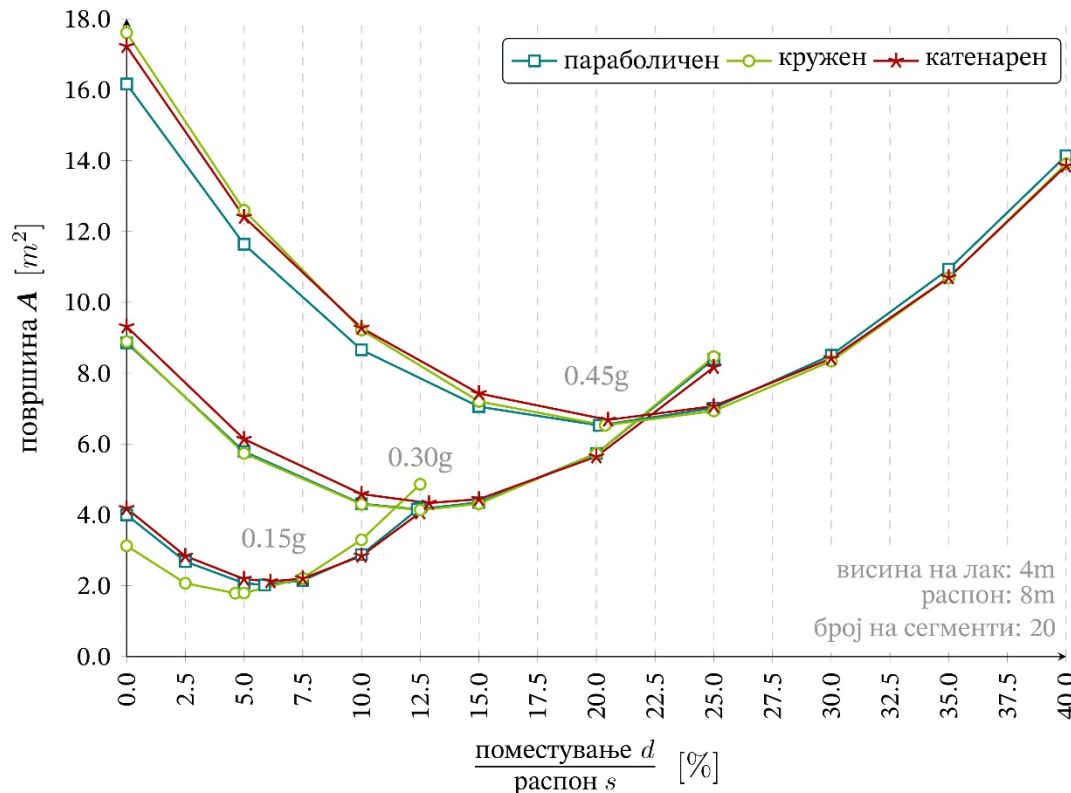
Со цел да биде задржан корисниот распон на лакот при поместување на потисната линија, за дефинирање на распонот на иницијалниот лак е земен збир на предвидениот распон и предвиденото поместување, Сл. 5. Во случај кога релативното поместување $d=0$, иницијалниот лак, независно од неговата форма, има распон s и висина h , каде што крајните точки на потисните линии се совпаѓаат со лежиштата $A \cong A_0 \cong B'$ и $B \cong B_0 \cong A'$, Сл.5 (а). Во случај кога релативното поместување $d \neq 0$, односно потисната линија е поместена кон десно за определено растојание d , за да се задржи истиот корисен распон меѓу точките B' и B , иницијалниот лак е проширен на двете страни за половина од должината на поместувањето d , така што вкупниот распон станува $s+d$. При оваа промена се зголемува должината на иницијалниот лак, додека крајните точки на потисната линија не се поклопуваат со положба на лежиштата, $A \not\cong A_0 \not\cong B'$ и $B \not\cong B_0 \not\cong A'$, Сл. 5 (б). Вклучувањето на должината на релативното поместување при дефинирањето на иницијалниот распон овозможува прецизна контрола на позицијата на потисната линија и задржување на корисниот распон на дефинираната форма на лакот, меѓутоа ги зголемува иницијалните вредности на товарите.



Сл. 5. Промени во иницијалната геометрија на лак при поместување на пресликаната потисна линија

5. РЕЗУЛТАТИ И АНАЛИЗА

Со цел да се дефинира иницијалната геометрија на лак, која е основа за понатамошното дефинирање на формата, како и да се утврди степенот на влијание на иницијалната геометрија на лакот врз дефинираната потисна линија, анализирана, материјална ефикасност на добиените лаци. Во референтната рамка преку која е спроведена споредбата на нумерички определените резултати, материјалната ефикасност е дефинирана како вкупна површина зафатена од линиите на потисок A , разгледувана за трите карактеристични форми на лаци, при различен интензитет на хоризонтален товар од 0,15g, 0,30g, 0,45g, во однос на релативното поместување на потисните линии d во однос на распонот s изразено во проценти, Сл. 6.



Сл. 6 Споредба на вкупната зафатена површина од линиите на потисок A при различно релативно поместување d кај катенарен, параболичен и кружен лак при хоризонтално забрзување од 0,15g; 0,30g и 0,45g

Од анализата на нумеричките резултати може да се заклучи дека кривите за трите форми на лаци имаат ист облик, односно површината е најголема при нулто поместување, по што доаѓа до намалување, достигнувајќи минимум по кој кривата почнува повторно да расте сè до вредност приближно еднаква на почетната.

Од Сл. 6 може да се заклучи дека при зголемување на хоризонталниот товар од 0,15g на 0,30g па се до 0,45g доаѓа до зголемување на сите вредности на површината, што укажува на влијанието на интензитетот на хоризонталниот товар врз целокупната геометрија на лакот. Имено, при зголемување на интензитетот на хоризонталниот товар доаѓа до поголеми поместувања на јазлите на потисната линија во правец на дејство на товарот, а со тоа и до зголемување на максималното можно релативно поместување.

При дејство на хоризонтален товар со интензитет од 0,15 g пресметаната стандардна девијација помеѓу катенарен и параболичен облик на лак изнесува 0,0794 единици, со коефициент на варијација 2,9861%. Кај кружен облик на лак стандардната пресметана девијација во однос на другите два облици на лаци изнесува 0,2617 единици, со коефициент на варијација од 9,3254%.

При дејство на хоризонтален товар со интензитет од 0,30 g разликата помеѓу трите облици на лаци се намалува и пресметаната стандардна девијација изнесува 0,1376 единици, со коефициент на варијација 2,4785%, додека при дејство на хоризонтален товар со интензитет од 0,45 g, пресметаната стандардна девијација изнесува 0,2270 единици, со коефициент на варијација 2,1226%.

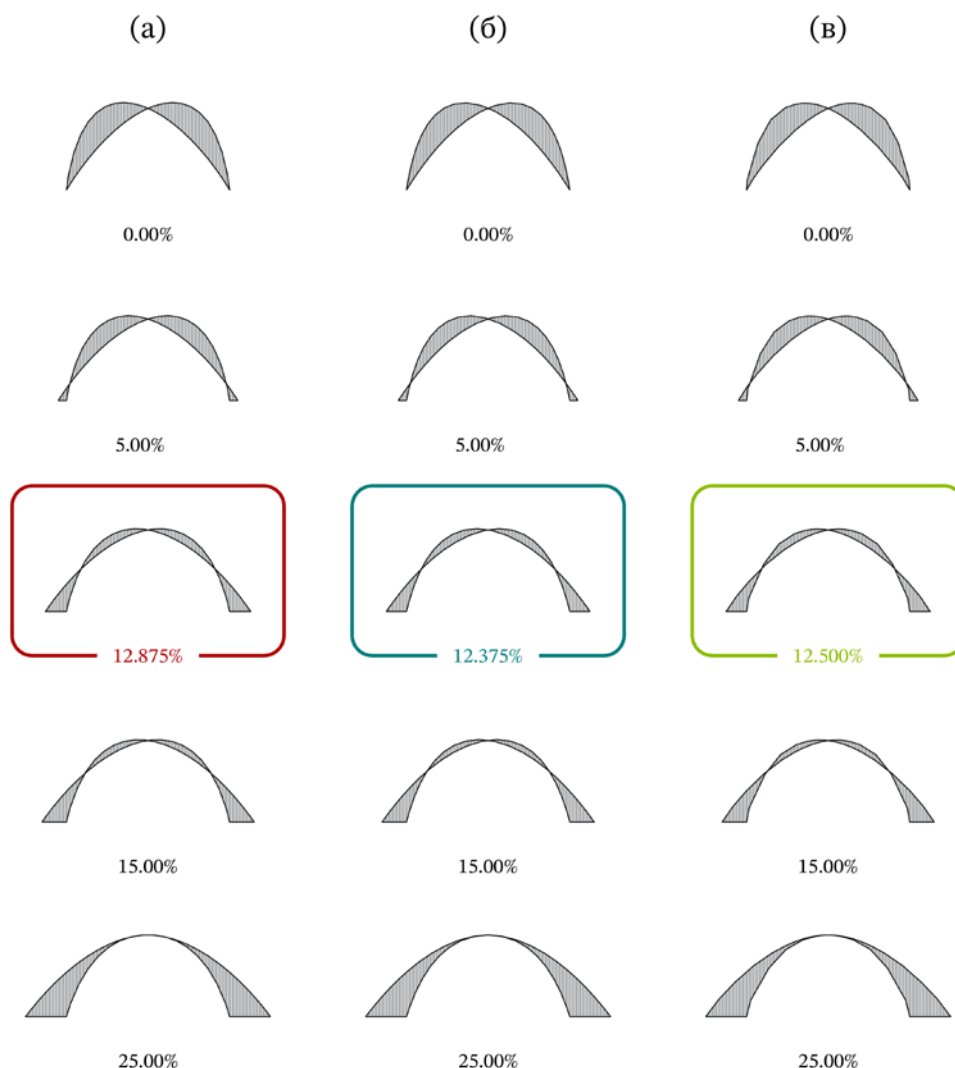
Без разлика на интензитетот на хоризонталниот товар пресметаните вредности кај параболичниот и катенарниот лак имаат стабилен однос; при помали вредности на релативното поместување d , параболичниот лак дефинира најмала зафатена површина A , како што се зголемува поместувањето, површината кај параболичниот лак расте побрзо отколку кај катенарниот, кој станува поконкурентен за повисоки вредности на d . Важно е да се нагласи дека разликите во површините помеѓу параболичниот и катенарниот лак се минимални, меѓутоа, параболичниот лак има најниска апсолутна минимална вредност на површината при сите разгледувани интензитети на хоризонтален товар. Од друга страна, кружниот лак покажува значително понепредвидливо однесување, при што во некои интервали генерира површини слични на другите два лаци, меѓутоа неговите вредности се генерално повисоки и подложни на поголеми варијации.

Визуелна споредба на пресметаните резултати, линии на потисок и површина која ја зафаќаат, за катенарен, параболичен и кружен облик на лак при дејство на хоризонтален товар од 0,30g се прикажани на Сл. 7. Линијата на потисок во суштина претставува континуирана крива што ја дефинира патеката на пренос на силите на притисок низ лакот, меѓутоа со примената на дводимензионалниот дијаграм на сили кој се состои од прави линии, истата е апроксимирана со полилинија составена од конечен број прави сегменти. Точноста на оваа апроксимација во голема мера зависи од бројот и распределбата на сегментите, при што во одредени делови, особено во критичните зони како што се лежиштата, доколку сегментите се предолги или неадекватно распределени, линијата на потисок визуелно се доближува до форма на полигон со праволиниски делови, што не соодветствува со реалната крива.

Може да се заклучи дека пресметаните вредности за зафатена површина A за трите различни облици на лаци постигнуваат најмала вредност, за сличен сооднос d/s од околу 12%, при што кај катенарен облик на лак минималната вредност е достигната при поместувања од 12,875% ($d = 103\text{cm}$), кај параболичен облик на лак при поместувања од 12,375% ($d = 99\text{cm}$), додека кај кружен облик на лак при поместувања од 12,500% ($d = 100\text{cm}$). Разликата помеѓу трите облици на лаци е минимална и пресметаната стандардна девијација изнесува 2,08 единици, со коефициент на варијација 2.07%.

Со оглед на малите разлики помеѓу катенарниот и параболичниот лак и попрецизната дефиниција на потисната линија. Со зголемување на интензитетот на хоризонталниот товар се зголемуваат хоризонталните поместувања на јазлите на потисните линии со што се зголемува целокупната зафатена површина дефинирана од нив. Следствено се забележува пораст на вредноста на релативното поместување кое резултира со минимална зафатена површина: $d=5,875\%$ за хоризонтален товар од 0,15g, $d=12,375\%$ за хоризонтален товар од 0,30g и $d=20,125\%$ за хоризонтален товар од 0,45g.

Од Сл.7 може да се заклучи дека најнеповолните форми се добиваат при $d=0\%$; зафатената површина е најголема, а нејзината распределба е нерационална и концентрирана во горната зона на лакот. Со постепено зголемување на вредноста на d , зафатената површина се намалува, а нејзината распределба станува поповолна, со поголема површина концентрирана во зона на потпорите. При оптималните вредности на d , површината е најмала, во најголем дел концентрирана во зоната на лежиштата намалувајќи се по висина на лакот. За повисоки вредности на d , зафатената површина се зголемува, меѓутоа целокупната форма е поволна, со најголем дел од површината на лакот сконцентрирана во зоната на потпорите и мал напречен пресек на највисоките сегменти на лакот.



Сл. 7. Споредба на вкупната зафатена површина од линиите на потисок A за различно релативно поместување d [%] при хоризонтално забрзување 0,30 g: (а) катенарен; (б) параболичен; (в) кружен лак

6. ЗАКЛУЧОК

Процесот на дефинирање на соодветна форма на лак во услови на комбиниран товар од вертикални и хоризонтални сили претставува клучен аспект за оптимизација на статичката рамнотежа и материјалната ефикасност на лаците. Презентирираниот метод базиран на графичка статика и конструкција на дводимензионални дијаграми на сили овозможува прецизна апроксимација на потисната линија и дефинирање на оптимална форма на лакот, која обезбедува стабилност и материјална ефикасност.

Анализата на влијанието на иницијалната геометрија јасно покажува дека различните типови лаци дефинираат релативно слични облици на потисната линија со минимални разлики во зафатената површина. Параболичниот лак остварува најниска апсолутна вредност на зафатената површина во текот на разгледуваните интензитети на хоризонталниот товар, додека кружниот лак се карактеризира со поизразени варијации, што го прави помалку погоден за процесот на дефинирање на оптимална форма. Конзистентноста на формата на потисната линија при различни иницијални геометрии ја потврдуваат применливоста на предложениот метод, овозможувајќи негов понатамошен развој и употреба во изработка на лаци при сложени услови на товарење.

Дополнително, резултатите ја потврдуваат зависноста на оптималната конфигурација на лакот од интензитетот на хоризонталниот товар, каде што зголемувањето на товарот доведува до зголемување на релативното поместување на потисната линија и пораст на максималната зафатена

површина. Оптималните вредности на релативното поместување за хоризонтален товар од 0,30g изнесуваат приближно 12% од распонот на лакот, при што се постигнува рационална распределба на материјалот концентрирана во зоната на лежиштата и намалување на напречниот пресек по висината на лакот.

Презентируваниот пристап модификација на почетната геометрија и дефинирање на стабилна и ефективна форма на лакот, со земање предвид на дејството на хоризонтални товари за разлика од класичните методи кои се ограничени пред сè на вертикални товари, овозможувајќи практична примена при проектирање лаца под реални услови на товарење и придонесувајќи кон развој на поефикасни и поекономични носиви конструкции.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] R. Hooke, A description of helioscopes, and some other instruments. London: printed by T.R. for John Martyn, 1676. doi: 10.3931/e-rara-2171.
- [2] J. Heyman, “Hooke’s cubico-parabola conoid,” Notes Rec. R. Soc. Lond., vol. 52, no. 1, pp. 39–50, 1998.
- [3] D. Gregory, “Catenaria,” Philos. Trans. R. Soc. Lond., vol. 19, no. 231, pp. 637–652, Aug. 1697, doi: 10.1098/rstl.1695.0114.
- [4] P. R. Grave, “Le de curvatura fornicis de Jacob Bernoulli ou l’introduction des infiniment petits dans le calcul des voûtes,” in *Entre Mécanique et Architecture / Between Mechanics and Architecture*, P. R. Grave and E. Benvenuto, Eds., Basel: Birkhäuser Basel, 1995, pp. 141–164. doi: 10.1007/978-3-0348-9072-4_9.
- [5] W. Emerson, *The Principles of Mechanics*. W. Innys and J. Richardson, 1754.
- [6] C. Hutton, *The Principles of Bridges: Containing the Mathematical Demonstrations of the Properties of the Arches, the Thickness of the Piers, the Force of the Water against Them, etc.*, 1st ed. Cambridge University Press, 1772. doi: 10.1017/CBO9781107280632.
- [7] C. Hutton, *Tracts on mathematical and philosophical subjects; comprising among numerous important articles, the theory of bridges, with several plans of recent improvement; also the results of numerous experiments on the force of gunpowder, with applications to the modern practice of artillery ...* London: F. C. and J. Rivington, 1812.
- [8] H. Moseley, “On a new principle in statics, called the Principle of least Pressure,” *Lond. Edinb. Dublin Philos. Mag. J. Sci.*, vol. 3, no. 16, pp. 285–288, Oct. 1833, doi: 10.1080/14786443308648178.
- [9] M. Milankovitch, *Theorie der druckkurven*, vol. 55. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 1907.
- [10] J. A. Ochsendorf, “Collapse of masonry structures,” phd, Apollo - University of Cambridge Repository, 2002. doi: 10.17863/CAM.14048.
- [11] H.-J. Schek, “The force density method for form finding and computation of general networks,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 3, no. 1, pp. 115–134, Jan. 1974, doi: 10.1016/0045-7825(74)90045-0.
- [12] H. M. Irvine, *Cable structures*. Cambridge, MA: MIT Press, 1981.
- [13] F. Otto and B. Rasch, *Finding form: towards an architecture of the minimal*. Stuttgart: Axel Menges, 1995.
- [14] P. Block, “Thrust Network Analysis : exploring three-dimensional equilibrium,” Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2009.
- [15] G. Poleni, *Memorie storiche della gran cupola del tempio vaticano, e de’ danni di essa, e de’ ristoramenti loro, divise in libri cinque ...* Stamperia del Seminario, 1748. doi: 10.3931/E-RARA-13403.
- [16] S. Adriaenssens, P. Block, D. Veenendaal, and C. Williams, Eds., *Shell structures for architecture: form finding and optimization*. London ; New York: Routledge/ Taylor & Francis Group, 2014.