

Методот на разгледување на случаи во теореми и проблеми од геометрија

Анета Гацовска-Барандовска¹, Валентина Миовска¹

¹Природно-математички факултет, Скопје, Македонија

Апстракт. Методот на разгледување на случаи (proof by cases), како тип на директен доказ во математиката, во некои математички кругови се смета за неелегантен и предолг. Но, од аспект на наставата по математика, во смисла на развивање на критичкото мислење, согледување на ширината и сеопфатноста на одреден проблем, посебно во одредување на сите потенцијални можности (потслучаи), методот е корисен и можеби и наједноставен за воведување на доказот во наставата по математика, посебно во теоријата на броеви, комбинаториката и геометријата. Во геометријата, голем број на основни теореми се докажани токму на овој начин. Уште во доказите на Архимед, овој метод бил она што денес елегантно се покажува со користење на гранични вредности. Овде, ќе разгледаме примери за примена на методот во содржините од геометрија во основното и средно образование, кои помагаат и во подобра визуелизација на проблемот, но и во воочување на специјалните случаи наспроти доказот во општ случај. Илустрираните примери можат да се користат како во редовната така и во додатната настава по математика.

Клучни зборови: Метод на разгледување на случаи, доказ, геометрија.

ВОВЕД

Методот на разгледување на случаи потекнува од првите обиди на Евклид и Архимед за прецизно испишување на докази во геометрија, во тоа време познат како method of exhaustion – метод на исцрпување на случаи. Примери можат да се најдат во старите дела „Measurement of the circle“ и „Sphere and cylinder“ на Архимед и во Евклидовите „Елементи“ - Book I, Proposition 21. Во доказите на Архимед, овој метод бил важен онолку колку што денес е важна употребата на гранични вредности во изведување и докажување на одредени геометриски својства (пример се идеите за плошина на круг и периметар на кружница преку приближување со правилни многуаголници, како и одредување на плошина и волумен на геометриски тела со разбивање на тела со познати плошини и волумени).

Методот ја надминува елементарната математика и е мошне илустративен за учениците. Иако како директен доказ во математиката, посебно во геометриските докази, често може да биде предолг, од аспект на наставата по математика, нуди огромни можности за развој на критичкото мислење. Одредување на областа (доменот) на која се разгледува проблемот, поделбата на дисјунктни подобласти на кои проблемот има различни пристапи или решенија, но и во согледување на ширината и сеопфатноста на одреден проблем, за учениците нудат можност за стекнување на начини на размислување и техники на работа, различни од понудените шаблони во секојдневното учење математика.

Одредување на сите потенцијални можности (потслучаи) дава ширина на размислувањето, а разбивањето на доменот на класи на еквиваленција ја дава елегантната врска меѓу алгебрата и геометријата и дава потполност и поврзување на

претходните знаења во нови ситуации. Заради своите методолошки принципи на потполност, рационалност, природност и примена, [1, 2], методот е корисен и при воведување на доказот и при конструкција на покомлексни докази, а при решавањето проблеми често пати е вовед во разбирањето на проблемот, пред воопшто да се премине на решавање. Во геометријата, голем број на основни теореми се докажани токму на овој начин. Овде, ќе разгледаме примери за примена на методот во содржините од геометрија во основното и средно образование, кои помагаат и во подобра визуелизација на проблемот, но и во воочување на специјалните случаи наспроти доказот во општ случај. Илустрираните примери можат да се користат како во редовната така и во додатната настава по математика.

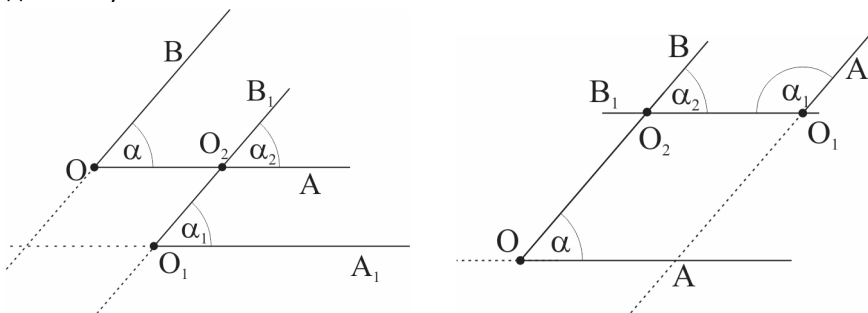
МЕТОДОТ НА РАЗГЛЕДУВАЊЕ НА СЛУЧАИ ВО ГЕОМЕТРИСКИ ДОКАЗИ

Два мошне илустративни примери се доказите за својствата на поединечни видови агли, кои во денешната настава се користат како готови својства. Доказите најчесто во литературата обезбедена за редовната настава воопшто не се разгледуваат.

Теорема 1: *Аглите со заемно паралелни краци се или еднакви или суплементни.*

Поделбата на случаите е направена согласно насоките на краците на аглите кои се разгледуваат. Се разгледуваат два агли за кои двата пара краци се простираат во иста насока (слика 1А), два агли за кои едниот пар краци е во иста, а вториот пар во спротивна насока (слика 1Б) и случај кога и двата пара краци се простираат во спротивни насоки. Овде ќе докажеме само првите два случаи, третиот сосема аналогно на првиот случај лесно се изведува.

Доказ. За аглите на првиот цртеж ќе покажеме дека се еднакви, додека за аглите на вториот дека се суплементни.



СЛИКА 1А. Краците се во иста насока 1Б. Пар краци се во иста, а пар во спротивна насока

На првиот цртеж, $OA \parallel O_1A_1$ и $OB \parallel O_2B_1$. Краците се протегаат во иста насока. Директно, заради еднаквоста на согласните агли при трансверзала важи $\alpha = \alpha_2$ (согласни агли при трансверзала OO_2) и $\alpha_2 = \alpha_1$ (согласни агли при трансверзала O_1O_2). Тогаш $\alpha = \alpha_1$.

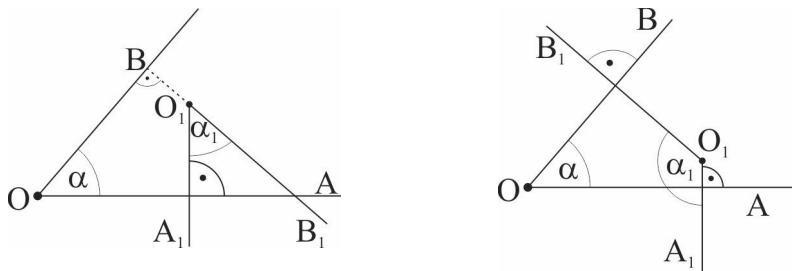
На вториот цртеж, $OA \parallel O_1A_1$ и $OB \parallel O_2B_1$. Еден пар краци се во иста, а вториот пар во спротивна насока. Важи $\alpha = \alpha_2$ (согласни агли при трансверзала OO_2), но $\alpha_2 + \alpha_1 = 180^\circ$ (спротивни агли при трансверзала O_1O_2). Тогаш и $\alpha + \alpha_1 = 180^\circ$, односно ова се два агли со паралелни краци кои се суплементни.

Согласните агли при трансверзала се агли со заемно паралелни краци.

Доколку разгледуваме агли со заемно нормални краци, како на слика 2, повторно имаме повеќе ситуации на поставеност на краците, но важно, краците се по парови нормални еден на друг и важи:

Теорема 2: Агли со заемно нормални краци се или еднакви или суплементни.

Доказ. Потребно е да се разгледаат случаи на два остри, два тапи и случај на еден остар со еден тап агол.



СЛИКА 2. Случаи на два остри агли и еден остар со еден тап агол со заемно нормални краци

На првиот цртеж на слика 2, $OA \perp O_1A_1$ и $OB \perp O_1B_1$. Елементите се означени така да $A \equiv B_1$. Сега, лесно се забележува дека во $\triangle AOB$, за збирот на аглите имаме $\alpha + 90^\circ + \angle A = 180^\circ$. Во исто време, во $\triangle B_1O_1A_1$ важи $\alpha_1 + 90^\circ + \angle A = 180^\circ$. Заради еднаквост на десните страни на двете равенства, еднакви се и левите страни, па од $\alpha + 90^\circ + \angle A = \alpha_1 + 90^\circ + \angle A$ директно следува дека $\alpha = \alpha_1$.

Слично, на вториот цртеж на слика 2, $OA \perp O_1A_1$ и $OB \perp O_1B_1$, но насоката на краците е различна од првиот случај. Доколку кракот B_1O_1 се продолжи преку точката O_1 на другата страна, тогаш за аглите α и напоредниот на α_1 се добива ситуацијата од првиот цртеж, па тие два агли се еднакви. Јасно тогаш α и α_1 се суплементни.

Други карактеристични примери се докажати на синусната и косинусната теорема.

Теорема 3: Во произволен триаголник ABC , со стандардни ознаки за страните и аглите, важи косинусната теорема: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.

Доказ. Ќе разгледаме три случаи:

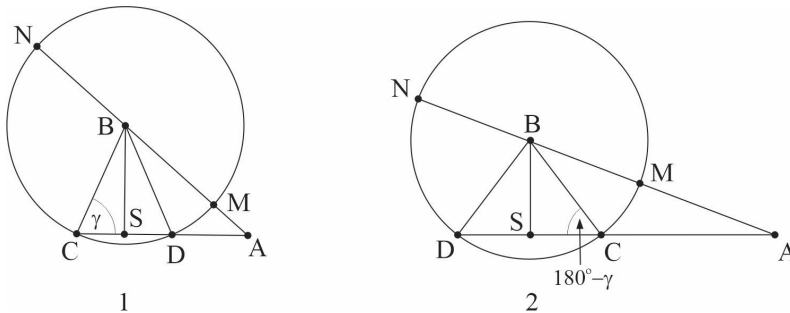
Случај 1. Аголот γ е остар, слика 3, случај 1. Конструираме кружница со центар B и радиус a . Нека пресечните точки на таа кружница со AB се M и N , а D нека е втората пресечна точка на кружницата со AC (првата е C). Од степенот на точката A во однос на кружницата имаме: $\overline{AD} \cdot \overline{AC} = \overline{AM} \cdot \overline{AN}$. Од правоаголниот триаголник BCS имаме $\cos \gamma = \frac{\overline{CS}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CD}}{2\overline{BC}} = \frac{\overline{CD}}{2a}$ и оттука $\overline{CD} = 2a \cos \gamma$. Тогаш, $\overline{AD} = \overline{AC} - \overline{CD} = b - 2a \cos \gamma$.

Заменуваме $\overline{AC} = b$, $\overline{AM} = c - a$, $\overline{AN} = c + a$, $\overline{AD} = b - 2a \cos \gamma$ во $\overline{AD} \cdot \overline{AC} = \overline{AM} \cdot \overline{AN}$ и добиваме $(b - 2a \cos \gamma) \cdot b = (c - a) \cdot (c + a)$ и оттука $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.

Случај 2. Аголот γ е прав. Тогаш важи $c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + b^2 + 0 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 90^\circ$.

Случај 3. Аголот γ е тап, слика 3, случај 2. Слично, како и во случајот 1 ја конструираме кружница со центар B и радиус a и пресечните точки на таа кружница со AB и AC ги означуваме со M и N и со D , соодветно. Од степенот на точката A во однос на кружницата имаме: $\overline{AD} \cdot \overline{AC} = \overline{AM} \cdot \overline{AN}$.

Од правоаголникот триаголник BCS имаме $\cos(180^\circ - \gamma) = -\cos \gamma = \frac{\overline{CS}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CD}}{2\overline{BC}} = \frac{\overline{CD}}{2a}$ и оттука $\overline{CD} = -2a \cos \gamma$. Тогаш, $\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD} = b - 2a \cos \gamma$. Заменуваме $\overline{AC} = b$, $\overline{AM} = c - a$, $\overline{AN} = c + a$, $\overline{AD} = b - 2a \cos \gamma$ во $\overline{AD} \cdot \overline{AC} = \overline{AM} \cdot \overline{AN}$ и добиваме $(b - 2a \cos \gamma) \cdot b = (c - a) \cdot (c + a)$ и оттука $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.



СЛИКА 3. Разгледаните случаи во доказот на косинусна теорема

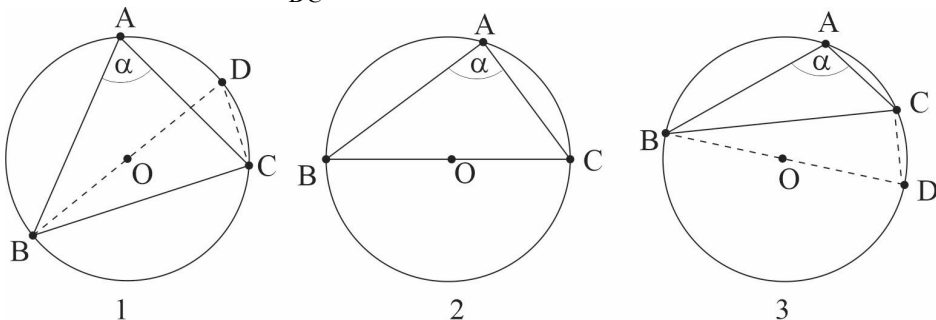
Теорема 4: Во произволен триаголник ABC , со стандардни ознаки за страните и агли, важи синусната теорема: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$.

Доказ. Го разгледуваме триаголникот ABC впишан во кружница со центар O и радиус R . Ќе го докажеме тврдењето $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$, а за $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$ доказот би бил аналоген. Ќе разгледаме три случаи:

Случај 1. Триаголникот ABC е остроаголен (слика 4, случај 1). Тогаш центарот на опишаната кружница O на триаголникот е внатрешна точка за триаголникот. Го повлекуваме дијаметарот BD . Тогаш $\angle CDB = \angle CAB = \alpha$ а триаголникот BCD е правоаголен со прав агол во темето C (аголот BCD е периферен агол над дијаметарот

BD) па затоа $\sin \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{a}{2R}$, односно $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$.

Случај 2. Триаголникот ABC е правоаголен со прав агол во темето A (слика 4, случај 2). Тогаш $\sin \alpha = \sin 90^\circ = 1 = \frac{\overline{BC}}{\overline{BC}} = \frac{a}{2R}$.



СЛИКА 4. Разгледаните случаи во доказот на синусна теорема

Случај 3. Триаголникот ABC е тапоаголен (слика 4, случај 3). Тогаш центарот на опишаната кружница O на триаголникот е надворешна точка за триаголникот. Го

повлекуваме дијаметарот BD . Тогаш $\angle CDB = 180^\circ - \angle CAB = 180^\circ - \alpha$ а триаголникот BCD е правоаголен со прав агол во темето па затоа $\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{a}{2R}$, односно $\sin \alpha = \frac{a}{2R}$ а оттука $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$.

МЕТОДОТ НА РАЗГЛЕДУВАЊЕ НА СЛУЧАИ ВО ГЕОМЕТРИСКИ ЗАДАЧИ

Геометриските проблеми некогаш имаат лесно воочливи поддомени, но често пати дел од задачите покрај првичните случаи, потребно е да бидат разбиени и на потслучаи. Во продолжение се дадени неколку примери, од поедноставни кон посложени.

Задача 1. Еден агол на рамнокрак триаголник е 70° . Одреди ги другите агли во триаголникот.

Решение. Нека аглите во рамнокракиот триаголник ги означиме со α, α и β . Ќе разгледаме два случаи:

Случај 1. Нека $\alpha = 70^\circ$. Тогаш од $2\alpha + \beta = 180^\circ$ следува $\beta = 40^\circ$.

Случај 2. Нека $\beta = 70^\circ$. Тогаш од $2\alpha + \beta = 180^\circ$ следува $\alpha = 55^\circ$.

Задача 2. Квадар е направен од дванаесет еднакви коцки чиј раб е 10 cm. Колку се плоштината и волуменот на квадарот?

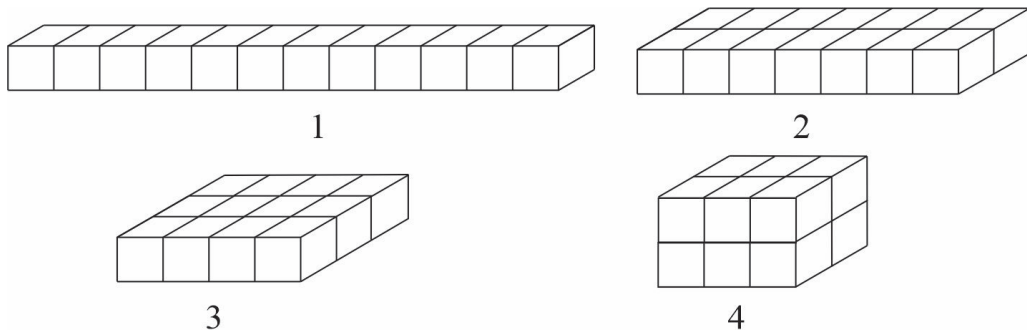
Решение. Можни се 4 случаи, како на сликата 5. Јасно, волуменот на добиениот квадар е збир на волумените на дванаесетте коцки, т.е. $V = 12a^3 = 12 \cdot 10^3 = 12000 \text{ cm}^3$.

Во првиот случај рабовите на квадарот се 120 cm, 10 cm и 10 cm и плоштината е $P = 2(120 \cdot 10 + 10 \cdot 10 + 10 \cdot 120) = 5000 \text{ cm}^2$.

Во вториот случај рабовите се 60 cm, 20 cm и 10 cm и плоштината е $P = 2(60 \cdot 20 + 20 \cdot 10 + 10 \cdot 60) = 4000 \text{ cm}^2$.

Во третиот случај рабовите се 40 cm, 30 cm и 10 cm и плоштината е $P = 2(40 \cdot 30 + 30 \cdot 10 + 10 \cdot 40) = 3800 \text{ cm}^2$.

Во четвртиот случај рабовите се 30 cm, 20 cm и 20 cm и плоштината е $P = 2(30 \cdot 20 + 20 \cdot 20 + 20 \cdot 30) = 3200 \text{ cm}^2$.



СЛИКА 5. Сите можности на подредување на коцкичките

Задача 3. Колку заеднички тангенти можат да имаат две различни кружници?

Решение. Ќе разгледаме 5 случаи:

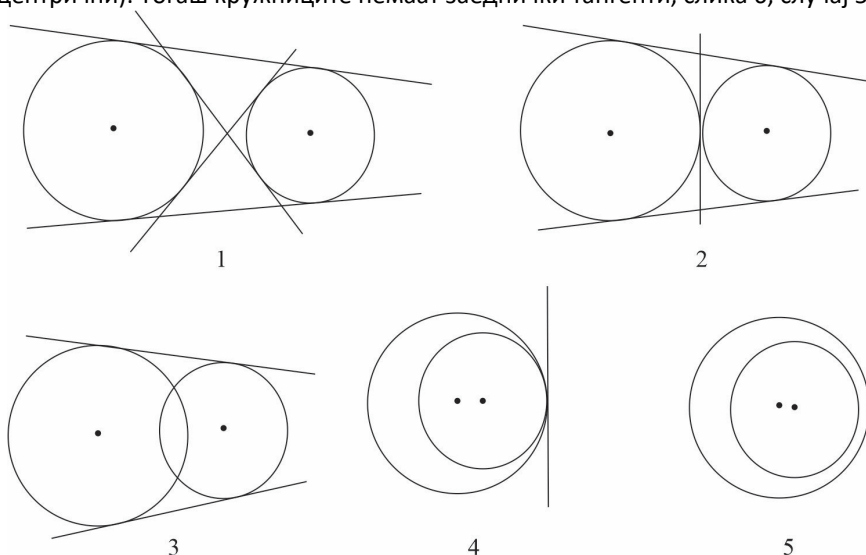
Случај 1. Кружниците не се сечат и лежат надвор една од друга. Тогаш кружниците имаат 4 заеднички тангенти, слика 6, случај 1.

Случај 2. Кружниците се допираат една со друга надворешно. Тогаш имаат 3 заеднички тангенти, слика 6, случај 2.

Случај 3. Кружниците се сечат. Тогаш имаат 2 заеднички тангенти, слика 6, случај 3.

Случај 4. Кружниците се допираат една со друга внатрешно. Тогаш имаат 1 заедничка тангента, слика 6, случај 4.

Случај 5. Кружниците не се сечат и една лежи внатре во другата (овде е и случајот кога се концентрични). Тогаш кружниците немаат заеднички тангенти, слика 6, случај 5.



СЛИКА 6. Заеднички тангенти зависно од положбата на двете кружници

Следниот пример може да се искористи како задача за учениците со повисоко ниво на знаење.

Задача 4. Докажи ја теоремата за периферен и централен агол над иста тетива во кружница која гласи: периферниот агол е два пати помал од централниот агол над иста тетива во една кружница.

Доказ. Нека периферниот агол е CAB , а соодветниот централен COB . Ќе разгледаме три случаи:

Случај 1. Центарот на кружницата O лежи на кракот AC на периферниот агол, т.е. AC е дијаметар на кружницата (слика 7, случај 1). Тогаш триаголникот ABO е рамнокрак, $\angle OAB = \angle OBA$, и затоа $2\angle OAB = \angle COB$ (збирот на два внатрешни агли на триаголникот е еднаков на надворешниот агол кој е соодветен на третиот внатрешен агол). Оттука,

$$\angle CAB = \angle OAB = \frac{1}{2} \angle COB.$$

Случај 2. Центарот на кружницата O е внатрешна точка за аголот CAB (слика 7, случај 2). Го повлекуваме дијаметарот AD . Тогаш аголот DAB е периферен а аголот DOB централен над BD и притоа AD е дијаметар, па од (докажаниот) случај 1 следува

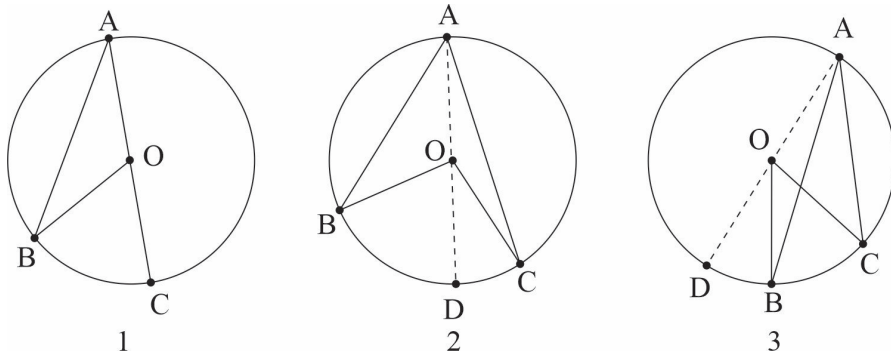
$$\angle DAB = \frac{1}{2} \angle DOB.$$
Аголот CAD е периферен а аголот COD централен над DC и притоа

AD е дијаметар, па од случај 1 следува $\angle CAD = \frac{1}{2} \angle COD$. За аголот CAB добиваме:

$$\angle CAB = \angle CAD + \angle DAB = \frac{1}{2} \angle COD + \frac{1}{2} \angle DOB = \frac{1}{2} (\angle COD + \angle DOB) = \frac{1}{2} \angle COB.$$

Случај 3. Центарот на кружницата O е надворешна точка за аголот CAB (слика 7, случај 3). Го повлекуваме дијаметарот AD . Ги разгледуваме периферните агли CAD и BAD чиј крак AD е дијаметар на кружницата па затоа, според случај 1, $\angle CAD = \frac{1}{2} \angle COD$ и $\angle BAD = \frac{1}{2} \angle BOD$. Тогаш, за аголот CAB добиваме:

$$\angle CAB = \angle CAD - \angle BAD = \frac{1}{2} \angle COD - \frac{1}{2} \angle BOD = \frac{1}{2} (\angle COD - \angle BOD) = \frac{1}{2} \angle COB.$$



СЛИКА 7. Трите разгледани случаи за периферен агол во кружница

Задача 5. Докажи дека ако се повлечат две секанти или секанта и тангента или две тангенти од една точка кон кружница, производите на отсечоците од секантите или тангентите од дадената точка се еднакви. (степен на точка во однос на кружница)

Доказ. Нека дадената точка е P . Во зависност од заемната положба на точката P и кружницата k ќе разгледаме три случаи:

Случај 1. Точката P е внатрешна за кружницата k (слика 8, случај 1). Тогаш од неа можат да се повлечат само секанти на кружницата. Нека една секанта ја сече кружницата во точките A и B , а друга во точките C и D . Тогаш триаголниците PAC и PDB се слични бидејќи $\angle APC = \angle DPB$ (накрсни агли) и $\angle PAC = \angle PDB$ (периферни агли над BC). Затоа, $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$ и оттука следува $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$.

Случај 2. Точката P е на кружницата k . Тогаш можни се два потслучаи:

Случај 2.1. Низ P повлекуваме две секанти од кои едната ја сече кружницата во точки P и B , а втората во P и D (слика 8, случај 2.1). Тогаш, $\overline{PP} \cdot \overline{PB} = 0 = \overline{PP} \cdot \overline{PD}$.

Случај 2.2. Низ P повлекуваме секанта која ја сече кружницата во точки P и B и ја повлекуваме тангентата со допирна точка P (слика 8, случај 2.2).

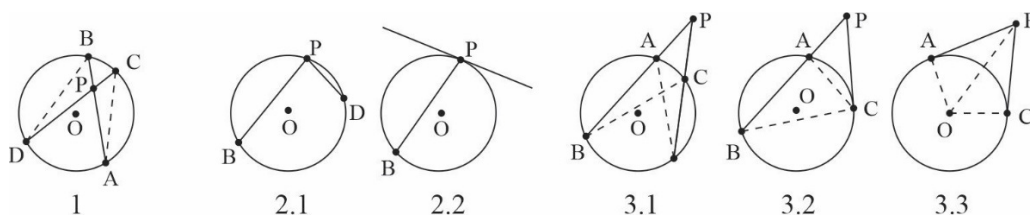
$$\text{Тогаш, } \overline{PP} \cdot \overline{PB} = 0 = \overline{PP} \cdot \overline{PP} = \overline{PP}^2.$$

Случај 3. Точката P надворешна за кружницата k . Тогаш можни се три послучаи:

Случај 3.1. Низ P се повлечени две секанти на кружницата, од кои едната ја сече кружницата во точките A и B , а другата во точките C и D (слика 8, случај 3.1). Тогаш триаголниците PBC и PDA се слични бидејќи $\angle BPC = \angle DPA$ и $\angle PBC = \angle PDA$ (периферни агли над AC). Затоа, $\frac{PB}{PC} = \frac{PD}{PA}$ и оттука следува $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$.

Случај 3.2. Низ P се повлечени една секанти на кружницата и една тангента. Нека секантата ја сече кружницата во точките A и B , а тангентата ја допира во точката C (слика 8, случај 3.2). Тогаш триаголниците PBC и PCA се слични бидејќи $\angle BPC = \angle CPA$ и $\angle PBC = \angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} (180^\circ - 2\angle ACO) = 90^\circ - \angle ACO = \angle PCA$. Затоа, $\frac{PB}{PC} = \frac{PC}{PA}$ и оттука следува $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PC} = \overline{PC}^2$.

Случај 3.3. Низ P се повлечени двете тангенти на кружницата. Нека едната ја допира кружницата во точката A , а другата во точката C (слика 8, случај 3.3). Тогаш правоаголните триаголници PAO и PCO се складни бидејќи катетите AO и CO им се еднакви и имаат заедничка хипотенуза. Затоа, $\overline{PA} = \overline{PC}$ и оттука следува $\overline{PA}^2 = \overline{PC}^2$.



СЛИКА 8. Разгледани случаи со соодветни потслучаи

ЛИТЕРАТУРА

1. Марица Прешић: Доказивање методом разликовањем случајева, часопис „Математика“, број 3, Сарајево 1979.
2. Војислав Андрић: Решавање проблема методом разликовањем случајева, часопис „Математика“, број 3, Загреб 1981.
3. Posamentier A. S., Salkind C. T., Challenging problems in geometry, Dover Publ., New York, 1996.
4. Proofs and Mathematical Reasoning,
<https://www.birmingham.ac.uk/Documents/college-eps/college/stem/Student-Summer-Education-Internships/Proof-and-Reasoning.pdf>

Proofs by cases of theorems and problems of geometry

Aneta Gacovska-Barandovska¹, Valentina Miovskaa¹

¹Faculty of Natural Science and Mathematics, Skopje, Macedonia

Abstract. The method of considering cases (proof by cases), as a type of direct proof in mathematics, is considered in some mathematical circles to be inelegant and too long. But from the aspect of teaching mathematics, in terms of developing a critical opinion, understanding the breadth and comprehensiveness of a certain problem, especially in determining all potential possibilities (subcases), the method is useful and perhaps the simplest for introducing the proof in teaching, especially in number theory, combinatorics and geometry. In geometry, a number of fundamental theorems have been proved exactly in this way. As far back as Archimedes' proofs, this method was what is now elegantly demonstrated by using boundary values. Here, we will consider examples of the application of the method in geometry content in primary and secondary education, which help both in better visualization of the problem, but also in perceiving the special cases against the proof in the general case. The illustrated examples can be used both in the regular and in the additional teaching of mathematics.

Key words: Proof by cases, proof, geometry.