

Конструкција на множествата на цели и позитивни рационални броеви во наставата по математика

Дончо Димовски¹, Анета Гацовска - Барандовска²

¹Македонска Академија на науките и уметностите, Скопје, Македонија

²Природно-математички факултет – Скопје, Македонија

Апстракт. Природните броеви во наставата по математика, уште на најмала возраст, се воведуваат целосно интуитивно. На различна возраст, целите и позитивните рационални броеви се воведуваат различно. Така, целите броеви се воведуваат преку дискусија, како на пример, за негативни воздушни температури, а позитивните рационални броеви со дискусии за дропки и децимални броеви. За целосно разбирање на множествата на целите и позитивните рационални броеви од страна на учениците, неопходна е и одредена математичка прецизност и воведување на причините за конструкција на овие множества. Во наставните програми, повеќе ниту во средното образование, не се среќава проширувањето на природните броеви од аспект на конструкција на одредени алгебарски структури, ниту пак од аспект на добивање на решенија на одредени равенки. Во овој труд е дадена целосна конструкција на множествата на целите и позитивните рационални броеви, преку проширување на комутативна полугрупа со кретење до комутативна група.

Клучни зборови: природни броеви, цели броеви, позитивни рационални броеви, алгебарска структура, групоид, полугрупа, група, групоид со кретење, решлива равенка

ВОВЕД

Поимот број, исто како и поимот множество се основни поими во математиката. Поимот број се користи за означување на количествен однос во реалниот свет, а поимот множество за фамилија на објекти кои најчесто имаат заеднички својства. Првата средба на децата со поимот број се случува многу рано. Уште во предучилишна возраст, во градинките, се изучува вовед во математика, најчесто сликовито, а генерално се изучуваат природните броеви до 20, форми кои се пребројуваат, а илустративно се воведуваат дури и операциите собирање и множење. Низ образованието, поимот број се надоградува, па основните бројни множества се дефинираат низ предметната настава во основните училишта со постепено проширување на природните броеви, преку целите и рационалните броеви, сè до реалните броеви.

Имено, во текот на основното образование се разгледуваат структурите $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$, $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, $(\mathbb{N}, <)$, $(\mathbb{N}, +, \cdot, <)$ и $(\mathbb{N}, +, \cdot, |)$, понатаму множеството цели броеви $\mathbb{Z}$ со истите операции и релации со мало проширување, па структурите на множеството рационални броеви $\mathbb{Q}$. Во средно училиште, изучувањето на бројните структури е со цел да се изучат реалните броеви, релациите и операциите на $\mathbb{R}$. Но за да се стигне до таму, изучувањето оди преку алгебарско - релациските структури од броевите кои дотогаш се веќе разработувани, иако не во прецизна структурна смисла.

Конструкциите на бројните множества завршуваат во прва година средно образование со структурата $(\mathbb{R}, +, \cdot, -, :)$ и во втора година се финализира со изучување на множеството комплексни броеви со своите операции $(\mathbb{C}, +, \cdot, -, :)$.

За наставниот кадар кој треба да го објасни начинот на проширување на едно множество до друго, неопходно е да се види и како множествата прецизно се конструирани. Само така учениците ќе можат да ги увидат правилата според кои својства се пренесуваат од едно во друго множество, но и својствата кои неопходно мора да се прошират или додефинираат за да подеднакво природно се усвои новото бројно множество.

Да напоменеме дека едно бројно множество M се смета за конструирано доколку:

(а) се познати елементите на M (се знае M како множество),

(б) во него е зададена релација на еднаквост на броевите (точно се знае кога два броја се еднакви, на пример во $\mathbb{Q}$, $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$, но $\frac{4}{5} \neq \frac{9}{15}$), а потоа да се дефинира и подредување на елементите.

(в) дефинирани се операциите за собирање и множење.

Наједноставен начин на конструкција е проширување на веќе дефинирано бројно множество, како на пример проширување на природните до целите броеви, проширување кое сосема природно се појавува, но притоа мора да знаеме дека:

За бројното множество B велиме дека е проширување на бројно множество A ако и само ако важи:

1) $A \subset B$.

2) Сите правила, закони и операции од A да важат и во B ,
(пример за $a, b \in A$, $a + b = c$ во A да се пренесе и во B , односно $a + b = c$ и во B).

3) Постои операција во B која не била дефинирана во A ,
во смисла, ако $*$ била делумна операција во A или воопшто не била операција во A , да биде операција во B .

4) B да е минимално надмножество за A за кое важат 1) - 3).

Во оваа прилика сметаме дека ги имаме потребните предзнаења од алгебарски структури, пресликувања и релации, нивни видови и својства. Основните поими кои нè водат низ конструкциите на бројните множества се следните:

1) **Бинарна операција** (целосна) е пресликување $\circ: G \times G \rightarrow G$.

Такви се операциите собирање и множење во $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$. ($\mathbb{N}_0$ е унија од $\mathbb{N}$ и $\{0\}$.)

2) **Делумна бинарна операција** е пресликување $\circ: A \rightarrow G$, за $A \subset G \times G$.

Примери за делумни операции се одземање и делење во $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}_0$ кои не се дефинирани за сите парови броеви во $G \times G$.

3) **Комутативност:** $\forall a, b \in G, a \circ b = b \circ a$.

Први комутативни операции со кои се сретнуваат учениците се собирање и множење во $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}_0$.

4) **Асоцијативност:** $\forall a, b, c \in G, (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

Пример се операциите собирање и множење во $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}_0$.

5) **Лева дистрибутивност на операција $*$ во однос на операција $\circ$:**

$$\forall a, b, c \in G, a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c)$$

Пример е дистрибутивноста на множењето во однос на собирањето во $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}_0$.

Слично се дефинира и **десна дистрибутивност на операција $*$ во однос на операција $\circ$** , односно:

$$\forall a, b, c \in G, (a \circ b) * c = (a * c) \circ (b * c).$$

6) **Дистрибутивност:** Доколку истовремено важи и левата и десната дистрибутивност.

7) **Групоид $(G, \circ)$:** Дополнително $(G, \circ)$ е **комутативен** ако операцијата $\circ$ е комутативна.

8) **Полугрупа** е групоид со асоцијативна операција.

9) **Неутрален елемент во групоид $(G, \circ)$:** неутрален елемент $e \in G$ е еднозначно определен елемент e за кој $e \circ x = x = x \circ e$, за секој $x \in G$.

10) **Моноид** е полугрупа со неутрален елемент.

11) **Комутативен моноид со кретење:** ако $a \circ b = a \circ c \implies b = c$.

Примери се структурите $(\mathbb{N}, \cdot)$ и $(\mathbb{N}_0, +)$.

12) **Комутативна група:** комутативен моноид $(G, \circ)$ со кретење во кој

секоја равенка $x \circ a = b$ има решение во G .

Една од првите причини да се започне со проширување на множеството природни броеви е фактот што:

- Не секоја равенка $x + m = n$ има решение во $\mathbb{N}_0$ (пример: $x + 11 = 4$)
- Не секоја равенка $x \cdot m = n$ има решение во $\mathbb{N}$ (пример: $x \cdot 11 = 4$)

Сакаме да го прошириме множеството $\mathbb{N}$ до множества во кои горните равенки би имале решение.

За таа цел дефинираме ново множество

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n | n \in \mathbb{N}\}.$$

Еднаквоста на два елемента во множеството $\mathbb{Z}$ е интуитивно јасна, заради дискретноста на истото. Следен чекор е дефинирање на операција „+“ (собирање) во $\mathbb{Z}$.

Тоа го правиме преку следните чекори:

- (i) $(\forall x \in \mathbb{Z}) x + 0 = 0 + x = x$,
- (ii) $(\forall m, n \in \mathbb{N}) m + n$ е збир дефиниран како за природни броеви,
- (iii) $(\forall n \in \mathbb{N}) n + (-n) = (-n) + n = 0$,
- (iv) $(\forall n, k \in \mathbb{N}) n + (-(n + k)) = -(n + k) + n = -k$,
- (v) $(\forall n, k \in \mathbb{N}) (n + k) + (-n) = (-n) + (n + k) = k$,
- (vi) $(\forall m, n \in \mathbb{N}) (-n) + (-m) = (-m) + (-n) = -(n + m)$.

Со ова целосно е дефинирана операцијата собирање во множеството цели броеви и уште повеќе $(\mathbb{Z}, +)$ е комутативна група и е проширување на $(\mathbb{N}_0, +)$.

Ја дефинираме и операцијата „ $\cdot$ “ (множење) во $\mathbb{Z}$ преку следните правила:

- (i) $(\forall x \in \mathbb{Z}) x \cdot 0 = 0 \cdot x = x$,
- (ii) $(\forall m, n \in \mathbb{N}) m \cdot n$ е производ како кај природните броеви,
- (iii) $(\forall n, k \in \mathbb{N}) n \cdot (-k) = (-k) \cdot n = -(n \cdot k)$,

$$(iv) (\forall m, n \in \mathbb{N})(-n) \cdot (-m) = (-m) \cdot (-n) = n \cdot m.$$

Сега $(\mathbb{Z}, \cdot)$ е комутативен моноид, но не е со кретење. Така на пример $0 \cdot 5 = 0 \cdot 6$, но $5 \neq 6$, додека пак $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ е комутативен моноид со кретење. Исто така множењето е дистрибутивно во однос на собирањето.

Во новото множество $\mathbb{Z}$, секоја равенка $x + a = b$ има решение, што сеуште не е точно за равенката $x \cdot a = b$, дури и за $a \neq 0$.

Докажете и проверките на својствата бараат поголем простор и детали, па нема да се вклучени во текстот.

Се поставува прашањето, зошто и како е постапката вака направена?

Постои и конструкција на $\mathbb{Z}$ преку подредени парови, но истата за учениците не е соодветна бидејќи се потребни и дополнителни поими.

Слично, може да се изврши проширување на множеството цели броеви до множеството на рационални броеви, директно работејќи на решливоста на равенката $x \cdot a = b$, за $\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0$.

Во овој текст ќе ја илустрираме директната алгебарска конструкција на природните броеви до позитивни рационални броеви. Поглавјето кое следи е резултат на праксата во наставата дробките и децималните броеви да се воведуваат на помала возраст без формално да се дефинираат операциите во општ случај. Да напоменеме дека учениците учат за еквивалентни дробки, но тешко можат да поврзат еден рационален број со цело множество еквивалентни дробки. Апстрактниот приод во конструкцијата која следи е наменет за подобро разбирање на наставниците. Се очекува наставникот да има пошироки и подобри познавања за да може успешно да ја поедностави постапката на воведување на рационалните броеви.

АЛГЕБАРСКА КОНСТРУКЦИЈА

За наставниот кадар, иако прилично апстрактна, конструкцијата која следи дава целосен увид во сложеноста на множеството рационални броеви. На почеток се добива претстава дека постои голема разлика меѓу множествата $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$, но до крајот на трудот, лесно се забележува дека дефинираната алгебарска конструкција подеднакво се користи и за двете множества. Секако се следат чекорите неопходни во дефиницијата за конструкција на едно бројно множество – елементи, еднаквост, операции $+$ и $\cdot$, како и подредување.

Нека $(G, \circ)$ е комутативен моноид со кретење и неутрален елемент e , што не е комутативна група.

Значи постојат парови $(a, b) \in G \times G$ такви што равенката $a = x \circ b$ нема решение во G . Целта е да најдеме комутативна група $(H, *)$, таква што $G \subset H$ и за $(a, b) \in G \times G$, $a * b = a \circ b$.

Користејќи ги својствата на $(G, \circ)$ ќе ги разгледаме равенките во кои ќе ја вклучиме новата операција „ $*$ “, имајќи на ум дека и таа самата е проширување на операцијата „ $\circ$ “.

Ако $a = x * b$, тогаш за секој $c \in G$,

$$a \circ c = a * c = (x * b) * c = x * (b * c) = x * (b \circ c).$$

Ако $a = x * b$ и за $(c, d) \in G \times G$ важи $a \circ d = c \circ b$ тогаш од

$$c \circ a = a * c = (x * b) * c = x * (b \circ c) = x * (d \circ a) = (x * d) \circ a$$

следува дека $c = x * d$.

Значи може да запишеме:

$$\text{Ако } a = x * b \text{ и } c = x * d, \text{ тогаш } a \circ d = (x * b) \circ d = (x * d) \circ b = c \circ b = b \circ c.$$

Следен чекор е воведување на релација за еднаквост на елементите, „ $\equiv$ “ на $G \times G$ на следниот начин:

$$(a, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow a \circ d = b \circ c.$$

Лесно се проверува дека релацијата $\equiv$ е релација за еквиваленција.

$$1) a \circ b = b \circ a \Leftrightarrow (a, b) \equiv (a, b) \text{ (рефлексивност),}$$

$$2) (a, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow a \circ d = b \circ c \Leftrightarrow c \circ b = d \circ a$$

$$\Leftrightarrow (c, d) \equiv (a, b) \text{ (симетричност),}$$

$$3) (a, b) \equiv (c, d), (c, d) \equiv (u, v)$$

$$\Leftrightarrow a \circ d = b \circ c, c \circ v = d \circ u \Rightarrow a \circ v \circ c = a \circ u \circ d = b \circ u \circ c$$

$$\Rightarrow a \circ v = b \circ u \Leftrightarrow (a, b) \equiv (u, v) \text{ (транзитивност).}$$

Класата на еквиваленција $(a, b)^\equiv$ ќе ја означиме со $(a|b)$.

Нека $H = G \cup \{(a|b) \mid \text{равенката } a = x \circ b \text{ нема решение во } G\}$.

Дефинираме операција $*$ на H со:

$$a * b = a \circ b, \text{ за } a, b \in G$$

$$a * (b|c) = (a \circ b|c) = (b|c) * a$$

$$(a|b) * (c|d) = (a \circ c|b \circ d)$$

Ќе покажеме дека класата не зависи од изборот на претставници, навистина:

$$(b|c) = (u|v) \Rightarrow b \circ v = c \circ u \Rightarrow a \circ b \circ v = a \circ u \circ c$$

$$\Rightarrow (a \circ b|c) = (a \circ u|v)$$

$$(a|b) = (u|v) \Rightarrow a \circ v = b \circ u \Rightarrow a \circ v \circ c \circ d = b \circ u \circ c \circ d$$

$$\Rightarrow (a \circ c|b \circ d) = (u \circ c|v \circ d)$$

Ако елементите b од G ги изедначиме со $(b|e)$ во H , тогаш операцијата во $(H, *)$ е зададена со

$$(a|b) * (c|d) = (a \circ c|b \circ d).$$

Следуваат својствата за $(H, *)$:

- Комутативноста и асоцијативноста следуваат директно од дефиницијата.
 - $(a|b) * (e|e) = (a|b)$ – неутрален елемент.
 - Во однос на решливоста на равенката, решение на равенката $(a|b) = x * (c|d)$ е
- $$x = (a \circ d|c \circ b).$$

- Поседува својство на кратење.

Навистина,

Од $(a \circ c|b \circ d) = (a|b) * (c|d) = (a|b) * (u|v) = (a \circ u|b \circ v)$, следува дека

$$a \circ c \circ b \circ v = b \circ d \circ a \circ u \Rightarrow c \circ v = d \circ u \Rightarrow (c|d) = (u, v).$$

Според тоа, $(H, *)$ е комутативна група и $(G, \circ)$ е подмоноид од неа. Уште повеќе, ако $(G, \circ)$ е подмоноид од комутативна група $(K, \otimes)$, тогаш $(H, *)$ е група изоморфна со подгрупа од неа.

ПОЗИТИВНИ РАЦИОНАЛНИ БРОЕВИ

Специјално, ако структурата $(G, \circ)$ е $(\mathbb{N}, \cdot)$, добиената комутативна група ќе ја означиме со $(\mathbb{Q}^+, \odot)$, при што $e = 1$.

Важи:

$$a \cdot b = (a \cdot b|1) = (a|1) \odot (b|1) = a \odot b.$$

Според тоа, $(\mathbb{N}, \cdot)$ е подмоноид од групата $(\mathbb{Q}^+, \odot)$. Според алгебарската конструкција позитивен рационален број е класа на еквиваленција $(m, n)^{\equiv}$, означена со $(m|n)$, за природните броеви m, n . Ако $m|n$ го наречеме “дропка”, а релацијата $\equiv$ ја наречеме “еднаквост на дропки”, тогаш позитивен рационален број е класа на еднакви дропки.

Следно, сакаме да ја прошириме операцијата „+“ во $\mathbb{N}$ до комутативна операција $\oplus$ во $\mathbb{Q}^+$, така што

$$\odot \text{ да биде дистрибутивна во однос на } \oplus \text{ и важи } (a|1) \oplus (b|1) = (a + b|1).$$

Нека $(a|b)$, $(c|d)$ се во $\mathbb{Q}^+$. Тогаш, од

$$(a \cdot d|b \cdot d) = (a, b), (a \cdot d|b \cdot d) \odot (b \cdot d|1) = (a \cdot d|1)$$

$$(c \cdot b|b \cdot d) = (c, d), (c \cdot b|b \cdot d) \odot (b \cdot d|1) = (c \cdot b|1)$$

$$((a|b) \oplus (c|d)) \odot (b \cdot d|1) = (a \cdot d|1) \oplus (c \cdot b|1) = a \cdot d + c \cdot b$$

$$(a \cdot d + c \cdot b|b \cdot d) \odot (b \cdot d|1) = (a \cdot d + c \cdot b|1)$$

следува

$$(a|b) \oplus (c|d) = (a \cdot d + c \cdot b|b \cdot d).$$

Ќе воведеме подредување со проширување на релацијата подредување $\leq$ во $\mathbb{N}$.

Нека $\preceq$ е релација во $\mathbb{Q}^+$ дефинирана со

$$(a|b) \preceq (c|d) \Leftrightarrow a \cdot d \leq b \cdot c.$$

$$(a|1) \preceq (b|1) \Leftrightarrow a = a \cdot 1 \leq b \cdot 1 = b.$$

Тогаш, за **секои** $(a|b)$, $(c|d)$,

$$(a|b) \preceq (a \cdot d + b \cdot c|2 \cdot b \cdot d) \preceq (c|d).$$

Претходното својство кажува дека подредувањето во $\mathbb{Q}^+$ е **густо**, за разлика од подредувањето во $\mathbb{N}$ кое е **дискретно**, што значи дека помеѓу два природни броја може да има најмногу конечен број природни броеви.

ЦЕЛИ БРОЕВИ

Сличен пристап може да се користи и при конструкцијата на множеството цели броеви. Да го разгледаме случајот кога $(G, \circ)$ е $(\mathbb{N}_0, +)$. Тогаш релацијата $\equiv$ е:

$$(n, m) \equiv (p, q) \Leftrightarrow n + q = m + p.$$

Добиената комутативна група ќе ја означиме со $(\mathbb{Z}, \oplus)$, при што $e = 0$. Притоа важи:

$$a + b = (a + b|0) = (a|0) \oplus (b|0) = a \oplus b,$$

што значи дека $(\mathbb{N}_0, +)$ е подмоноид од групата $(\mathbb{Z}, \oplus)$.

Описот на целите броеви е поедноставен затоа што, за секоја класа на еквиваленција $(a|b) \in \mathbb{Z}$ важи: ако $a > b$ тогаш $(a|b) = (a - b|0) = a - b$;

$$\text{ако } a < b \text{ тогаш } (a|b) = (0|b - a);$$

$$\text{и ако } a = b \text{ тогаш } (a|b) = (0|0) = 0.$$

Според тоа,

$$\mathbb{Z} = \{(n|0) | n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0|0)\} \cup \{(0|n) | n \in \mathbb{N}\}$$

од што следува и описот $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n | n \in \mathbb{N}\}$.

Операцијата множење во $\mathbb{Z}$ ја дефинираме со:

$$(a|b) \odot (c|d) = (a \cdot c + b \cdot d | a \cdot d + b \cdot c).$$

Лесно се проверува дека $(a|0) \odot (b|0) = (a \cdot b|0)$, а докажувањето дека операцијата множење $\odot$ во $\mathbb{Z}$, е дистрибутивна во однос на $\oplus$ го оставаме на читателот.

На крајот, може да заклучиме дека алгебарската конструкција дава еднозначно определен начин на проширување на множеството природни броеви до целите и до позитивните рационални, користејќи фактор множества и операции над класи на еквиваленција.

Така, прошируваме:

- 1) Од $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ со "решливост" на $a = x \cdot b$ до $(\mathbb{Q}^+, \oplus, \odot)$.
- 2) Од $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ со "решливост" на $a = x + b$ до $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$.
- 3) Од $(\mathbb{Q}^+, \oplus, \odot)$ со "решливост" на $a = x + b$ до $(\mathbb{Q}, \oplus, \odot)$.
- 4) Од $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ со "решливост" на $a = x \cdot b$, $b \neq 0$ до $(\mathbb{Q}, \oplus, \odot)$.

Алгебарските својства се сумирани во убавите својства на новодобиените структури: $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ е комутативен прстен со единица, $(\mathbb{Q}, \oplus, \odot)$ е поле, а $(\mathbb{Q}^+, \oplus, \odot)$ нема такво својство.

На крај и покрај сета прецизност во алгебарската конструкција, останува прашањето како на поединечна ученичка возраст да се воведуваат алгебарските структури и до која длабочина може да се оди. Одговорот е: „Различно на различна возраст“. Низ редовното школување во основно и средно образование, секако не би ја користеле прецизната алгебарска конструкција.

Но за нас, наставниот кадар, пресудно е да знаеме кој чекор од каде доаѓа, да ја разбираме конструкцијата, за да можеме што е можно поедноставно да ги доближиме бројните множества, преку нивните својства до целосно конструирани алгебарски структури, до нашите ученици.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чупона Ѓ., Алгебарски структури и реални броеви, Современа математичка настава, Просветно дело, Скопје, 1976
<http://www.slvesnik.com.mk/Issues/4b95972c6c054366b7c0d95697f0c7e3.pdf> (29.1.2018).
2. Димовски Д., Предавања по Елементарна математика (интерна скрипта за студентите на Институтот за математика)
3. Учебници по математика за основно и средно образование

Construction of the sets of integers and positive rational numbers in mathematics teaching

Dončo Dimovski¹, Aneta Gacovska-Barandovska²

¹*Macedonian Academy of Sciences and Arts, Skopje, Macedonia*

²*Institute of Mathematics, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Skopje, Macedonia*

Abstract. Natural numbers in mathematics teaching, at an early age, are introduced completely intuitively. At different ages, integers and positive rational numbers are introduced differently. Thus, whole numbers are introduced by discussing, for example, negative air temperatures, and positive rational numbers by discussing fractions and decimal numbers. For a complete understanding of the sets of integers and positive rational numbers by the students, a certain mathematical precision and the introduction of the reasons for the construction of these sets are also necessary. In the curricula, not even in secondary education, the expansion of natural numbers from the aspect of construction of certain algebraic structures, nor from the aspect of obtaining solutions of certain equations, is found. In this paper, a complete construction of the sets of integers and positive rational numbers is given, through the extension of a commutative cancellative semigroup to a commutative group.

Keywords: natural numbers, integers, positive rational numbers, algebraic structure, groupoid, semigroup, group, commutativity, cancellative groupoid, solvable equation