

Математички јазик

Дончо Димовски¹, Јасмина Маркоска², Анета Гацовска-Барандовска³, Ѓорѓи Маркоски³

¹Македонска академија на науките и уметностите, Скопје, С. Македонија

²СУГС „Георги Димитров“, Скопје, С. Македонија

³Природно-математички факултет, УКИМ, Скопје, С. Македонија

Апстракт. Трудот се осврнува на конструктивните целини, лексиката, граматиката, карактеристиките и својствата на математичкиот јазик. Илустрирани ќе бидат сличностите и различностите со македонскиот јазик, односно говорниот јазик. Посочена е неизбежната врска на математичкиот јазик со говорниот јазик и значењето при формулација на задачите во образованието по математика. Дадени се примери на непрецизни формулации на математички задачи, како и предлози за нивно правилно формулирање.

Клучни зборови: математички јазик, знаци, симболи, граматика.

ВОВЕД

Во денешно време постојат многу алатки за комуницирање помеѓу луѓето. Една од најстарите, но сеуште најупотребувана алатка за комуницирање, е зборувањето (разговорот, говорот), односно говорниот јазик. Кај нас, многу често, наместо говорен јазик се користат термините: мајчин јазик и македонски јазик. Во целиот свет има многу говорни јазици. Во следната табела се внесени зборовите односно термините за: јазик како човечки орган, мајчин јазик и математички јазик на неколку различни говорни јазици.

македонски	јазик	мајчин јазик	математички јазик
англиски	tongue	mother tongue	mathematical language
германски	zunge	muttersprache	mathematische sprache
италијански	lingua	lingua madre	Linguaggio matematico
руски	јазик	родној јазик	математическиј јазик
белоруски	мова	Роднаја мова	математиченей мовај
турски	dil	ana dil	matematiksel dil
грчки	glossa	mitriki glossa	mathimatiki glossa
албански	gjuha	gjuha nene	mjuha matematikore

Со погоре напишаното е остварена една комуникација помеѓу пишувачот и читателот, но тоа не е направено со говорен јазик, туку со пишуван јазик.

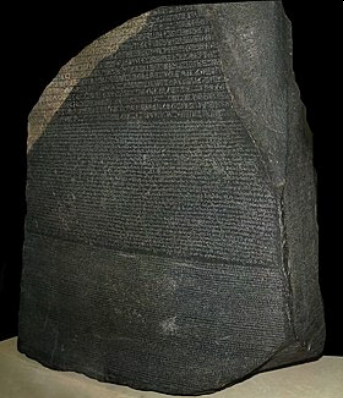
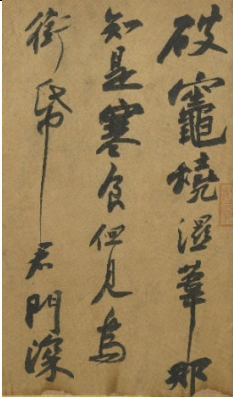
Договорно, во понатамошниот текст ќе се задржиме само на пишуваните јазици.

Како да се објасни што претставува македонскиот јазик (во пишувана форма)?

За скоро сите гласови кои се користат при зборувањето, се избира знак (симбол) за негово означување, кој се нарекува и буква. Во македонскиот јазик се користат 31 буква и тоа: а,б,в,г,д,...,ц,ч,џ,ш. За секој збор, се запишуваат еден по друг знаците за гласовите со кои е изговорен тој збор. Според тоа, збор е низа од конечно многу букви, запишани во соодветниот редослед. Во македонскиот јазик е договорено буквите да се запишуваат хоризонтално, од лево кон десно за соодветниот редослед на гласовите од зборот. Дали секоја конечна низа од букви, е збор во македонскиот јазик? Сигурно не. На пример низата

цшжњњљљ не се користи во македонскиот јазик. Исто така низата **робз** не е збор во македонскиот јазик. Но ако договорот е буквите да се запишуваат хоризонтално од десно на лево, тогаш низата **робз** е збор во македонскиот јазик.

Во секој пишуван јазик е битно да се внимава на направените договори и правила за начинот на запишување на знаците (буквите). Има јазици во кои се пишува хорионтално од десно кон лево или вертикално од горе кон долу. На пример, еврејскиот, персискиот и старомакедонскиот јазик од времето на Клеопатра (каменот на Розета), се пишуваат хоризонтално од десно кон лево, додека кинескиот и јапонскиот се пишуваат вертикално од горе кон долу.

	
СЛИКА 1. а) Каменот од розета Секој ред пишуван од десно кон лево, а редовите се пишуваат од горе на долу.	СЛИКА 1. б) Кинески јазик Секоја колона е пишувана од горе кон долу, а колоните се од десно на лево

При пишувањето на македонски јазик, освен буквите се користат и други знаци, а тоа се:

- знаци за интерпункција, како што на пример се знаците ? ! . ,
- помошни знаци, како што на пример се знаците () - { } .

Нека A е множеството од сите букви (мали и големи), сите знаци за интерпункција и сите помошни знаци. Може да се каже дека македонскиот јазик е множеството од сите конечни низи од знаци што се во A , пишуваат хоризонтално од лево на десно, што имаат одредено значење. За начинот на формирање на споменатите низи со одредено значење е задолжена граматиката (синтаксата) на македонскиот јазик. За содржинското значење на споменатите низи со одредено значење е задолжена семантиката на македонскиот јазик.

Општата дефиниција на **јазик J** , може да се искаже на следниов начин:

Нека е дадено множество A (најчесто конечно), наречено азбука. Множеството $J(A)$ од сите конечни низи од знаци што се во A , пишуваат по договорено правило, се нарекува универзален јазик над азбуката A и се означува со $J(A)$. Претпоставка е дека ниедна буква од A не е и низа од повеќе од една буква од A . Секое подмножество J од универзалниот јазик $J(A)$ се нарекува јазик над азбуката A .

МАТЕМАТИЧКИ СИМБОЛИ (ЗНАЦИ) И МАТЕМАТИЧКИ ЈАЗИК

Математичките симболи претставуваат суштинска одлика на математиката и од нивната развиеност зависи и напредокот на математиката, како наука, но уште повеќе во наставата по математика, како и во физиката и техничките дисциплини. Симболите се појавиле на почетокот од развојот на математиката, прво скромно, но со текот на времето

сè повеќе и сè почесто. Значителен развој на користење на математички симболи се забележува во 16-тиот и 17-тиот век, со работата на Виет, Декарт, Лајбниц, Бул и други.

Математичкиот јазик, како вештачки специјален јазик, бил создаден како резултат на усовршувањето и прилагодувањето на природниот јазик, не само за целите на математиката, туку и за целите на скоро сите области во науката, техниката и животот воопшто. Во него се отстранети гломазноста и двосмисленоста (неопходна е едноставност, прецизност и точност), но проширени се можностите за изразување. Исто така, математичкиот јазик е универзален, односно е ист во целиот свет.

Во математичкиот јазик:

- Секој објект (поим, својство, однос) има свое име;
- Различни објекти имаат различни имиња.

Очекувано е математичкиот јазик да има и сличности, но и разлики со говорниот јазик. За да ги увидиме, потребно е да кажеме нешто повеќе за математичката азбука. Што всушност ја сочинува математичката азбука и како истата се користи во конструкција на математички „зборови“?

Математичкиот јазик се гради над азбука, која произлегува од повеќе природни азбуки (од говорните јазици) и други додадени знаци со посебно значење. Повремено, математичката азбука се збогатува и со нови знаци со цел да се означат нови поими. Сите знаци кои се користат во математичкиот јазик се нарекуваат **математички знаци**.

Низ целото основно и средно образование, поважни и најчесто користени знаци се:

- (1) знаци за константи, како што се на пример: $1, 2, \dots, -1, 0, e, \pi, \emptyset, \dots$
- (2) знаци за променливи, како заедничка ознака за повеќе одредени објекти (односно константи) – како што се на пример: $x, y, a, b, \alpha, \theta, A, \Sigma, P, T, \dots$
- (3) знаци за операции (операцииски знаци) – како што се на пример: $+, -, \cdot, :, *, \cap, \cup, ^\circ, \dots$
- (4) знаци за релации (релацииски знаци) – како што се на пример: $=, <, \geq, \in, \subseteq, \parallel, \sim, \cong, \dots$
- (5) логички знаци – како што се на пример: $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists, \dots$
- (6) помошни знаци – како што се на пример: $(,), \{, \}, [, \dots$

Сите математички знаци ја формираат математичката азбука МА.

Универзалниот јазик над МА се состои од сите конечни низи од математички знаци, ПИШУВАНИ ХОРИЗОНТАЛНО ОД ЛЕВО НА ДЕСНО. Овој договор за пишување е едно од својствата на математичкиот јазик што истиот го прави универзален.

Да разгледаме неколку елементи од $J(MA)$:

$5, 7, 70, 2+3, 2+5=7, 8:2x, 4+6:2, (4+6):2, 4+(6:2), 3-+:5+, 5+++7, a < 3, a <, <3.$

Некои од овие низи се бесмислени (немаат одредено значење), а некои се двосмислени (односно може да имаат повеќе од едно значење).

Што означува $4+6:2$??? Дали тоа ознаува $4+3$ или $10:2$???

Смисловните низи (низи со точно определено значење) од $J(MA)$ во кои има само знаци за константи, знаци за променливи, операцииски знаци и помошни знаци, се нарекуваат **изрази** (терми) во математичкиот јазик. Така, на пример, $5, 7, 70, 2+3, (4+6):2, 4+(6:2)$, се изрази, додека $2+5=7, 8:2x, 4+6:2, 3-+:5+, 5+++7, a < 3, a <, <3$ не се изрази.

Значи, во математичкиот јазик, од сите низи, ги издвојуваме со посебно име низите кои имаат смисла - изрази. Последново е особено важно затоа што може со збор без смисла да означиме конкретен поим, на пример зборот PV составен од две променливи (букви) да биде ознака за сегашна вредност во финансиската математика, но истиот нема смисла ако не е ознака за конкретниот поим.

Прецизна дефиниција за израз е дадена на следниот начин:

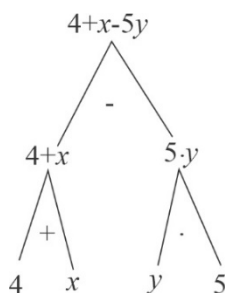
- а) Знаците за константи и променливи се **изрази**,
- б) Ако I_1 и I_2 се изрази и $*$ е операцииски знак, тогаш $(I_1) * (I_2)$ е израз,

в) **Изрази** се само низите кои се добиени со конечна примена на правилата а) и б).

Многу често, со цел да се користат што е мошно помалку знаци при пишувањето, се прават договори околу користењето на помошните знаци и некои други знаци, во што овде нема да навлегуваме. Така на пример по соодветни договори, $8:2x$, $4+6:2$ се изрази (не се двосмислени), додека без договори тие не се изрази.

Забелешка: Во понатомошните текст ќе ги користиме сите направени договори за пишување при користење на помошни и други знаци.

Секој израз се претставува со дрво на израз во кое листови се константите и променливите.



СЛИКА 2. Дрво на изразот $4+x-5y$ при направени договори за помошните знаци

Променливи

Во математичкиот јазик многу често се користат променливи, што е една од разликите со говорните јазици. **Променлива** е договорена ознака (буква или друг знак) за повеќе одредени објекти, односно заедничка ознака за елементите од некое множество. Елементите на тоа множество се нарекуваат **вредности на променливата (допустливи вредности или допуштени вредности)**, а множеството - **област на менување на променливата (дефинициона област D или дефиниционо множество)**.

Пример 1. Во реченицата „Човекот е живо суштество.“ – променлива е зборот човекот, а се менува во множеството од сите луѓе.

Значи променливите се јавуваат и во говорниот (обичниот) јазик.

Пример 2. Во $35 * x > 10$, каде $x \in \{2, 3, 4\}$ и $* \in \{·, +\}$, променливи се x и $*$, кои се менуваат во наведените множества.

Променливата како поим се воведува уште во прво одделение, како на пример со: $3+2=\square$, $5-\square=2$, $\square+3=6$, каде $\square \in \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ или со табела.

a	1	2	3	5
b	2	4	3	1
$a + b$	3	6	6	6

Формули

Да ја разгледаме низата $2+3=5$. Оваа низа има смисла (значење) но не е израз. Ваквите зборови ги нарекуваме (**елементарни**) **формули**. Имено, смисловните зборови од облик $I_1 \rho I_2$, каде I_1 и I_2 се изрази, а ρ е релациски знак, се нарекуваат **елементарни формули**. Релацискиот знак ја има улогата на прирокот во реченицата во македонскиот јазик, односно укажува на дејствието во истата. Се разбира, формулите може да имаат и посложен изглед, како на пример, $6|x \Rightarrow 3|x$. Притоа, „ $|$ “ е релациски знак, но формулата содржи и логички знак. Формулите соодветствуваат на речениците во говорниот јазик.

Прецизна дефиниција за формула е дадена на следниот начин:

- а) Ако I_1 и I_2 се изрази и ρ е релативски знак, тогаш $I_1 \rho I_2$ се вика **елементарна формула**.
- б) Елементарните формули се формули.
- в) Ако F , F_1 и F_2 се формули, тогаш и $\neg F$, $F_1 \wedge F_2$, $F_1 \vee F_2$, $F_1 \Leftrightarrow F_2$, $F_1 \Rightarrow F_2$, $(\forall u)F$, $(\exists u)F$, каде u е променлива, се исто така формули,
- г) **Формули** се само низите кои се добиени конечна примена на правилата а), б) и в).

На сличен начин како што изразите се претставуваат со дрва, така и формулите се претставуваат со дрва, при што листовите се елементарни формули.

Математичкиот јазик $J(MA)$ е подмножеството од сите елементи од $J(MA)$ кои имаат одредено значење, односно од сите изрази и формули.

Во претходниот текст се изнесени основите на синтаксата (граматиката) на математичкиот јазик.

Со семантиката на математичкиот јазик, односно изучувањето на содржинското значење, се занимава математичката логика.

ЕДНОЗНАЧНОСТ ВО РЕЧЕНИЦИТЕ ВО МАТЕМАТИЧКИОТ ЈАЗИК

Основна идеја на математиката како егзактна наука е универзалноста на математичкиот јазик. Тој вообичаено се надополнува со реченици од говорниот јазик и доколку не сме прецизни создава погрешни претстави, односно различни претстави кај различни луѓе. Затоа, наша задача како наставници е да бидеме прецизни и точни во формулациите и на тој начин да им помогнеме на учениците во примена на математичкиот јазик, а воедно да овозможиме еднакво видување на поставените проблеми.

Од математичкиот јазик се очекува точност, прецизност и еднозначност, тој така и се конструира. Но, при учењето математика, спојот на говорниот и математичкиот јазик е исто така од огромна важност. Честопати, иако ненамерно, се прави превид во формулацијата на задачите. Она што изгледа сосема јасно за тој што ја пишува задачата, не е секогаш јасно или еднозначно определено за читателот. За да се постигне целта, при совладување на одредена наставна содржина, наставникот треба јасно, прецизно и еднозначно да го користи говорниот јазик, заедно со математичкиот. Само така сите ученици подеднакво ќе ја разберат содржината.

Пример 3. Да ја разгледаме формулацијата на следната задача:

„Ана и Јана имале 4 круши. Ана изела половина и Јана изела половина. Колку круши им останале?“

Формулацијата на задачата не е еднозначна, и доведува до различни толкувања кај различни ученици.

Вака поставената задача воопшто не дава на знаење што е тоа што Ана и Јана го јаделе, каква половина (од што) изеле. Некои можни разбирања на задачата би биле:

1. Ана и Јана имале 4 круши. Ана изела половина од крушите и Јана изела половина од крушите. Колку круши им останале?
2. Ана и Јана имале 4 круши. Ана изела половина круша и Јана изела половина круша. Колку круши им останале?
3. Ана и Јана имале 4 круши. Ана изела половина круша и Јана изела половина од крушите. Колку круши им останале?
4. Ана и Јана имале 4 круши. Ана изела половина јаболко и Јана изела половина праска. Колку круши им останале?

Задолжително треба формулациите еднозначно да ги определуваат и условите и барањата на задачата.

Пример 4. Да ја разгледаме формулацијата на задачата:

„Нека AB и CD се две паралелни прави на иста страна од точка T , во рамнината во која лежат правите. Растојанието од точката T до правата AB е 13 cm, а до правата CD е 15 cm. Колку е растојанието помеѓу правите?“.

1. Не е ниту јасно ниту прецизно искажан делот „на иста страна од точка T во рамнината во која лежат правите“. Според ова произлегува дека точката T , ја дели рамнината на два дела во кои лежат правите (да забележиме, правата ја дели рамнината на две полурамнини, но точката не).

2. Мозни толкувања за заемната положба на правите и точката се:

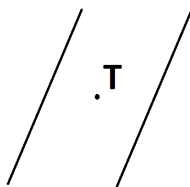


СЛИКА 3. Мозни заемни положби на правите и точката во првичната формулација

Ги предлагаме следниве формулации на задачата, кои нема да предизвикаат двојни толкувања:

1) Нека AB и CD се две паралелни прави и точка T е точка во рамнината на која лежат правите и се наоѓа меѓу нив. Растојанието од точката T до правата AB е 13 cm, а до правата CD е 15 cm. Колку е растојанието помеѓу правите?

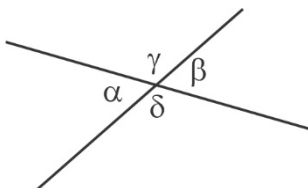
2) Нека AB и CD се две паралелни прави и точка T е точка која лежи во пресекот на две од полурамнините кои се определени со двете паралелни прави. Растојанието од точката T до правата AB е 13 cm, а до правата CD е 15 cm. Колку е растојанието помеѓу правите?



СЛИКА 4. Точна скица на заемни положби на правите и точката во прецизната формулација

Пример 5. Во задачата: „Збирот на три накрсни агли што се добиваат при пресекот на две прави е 300° . Најди го четвртиот агол.“ - повторно има нејасна формулација.

1) Обично накрсни агли се дефинираат по парови. Така, на пример, аглите α и β се накрсни, т.е. аглите γ и δ се накрсни (види Сл.5). Значи нема четири накрсни агли, туку два пара накрсни агли.



СЛИКА 5. Два пара накрсни агли добиени во пресек на две прави

2) Една од прецизните формулации може да биде „Збирот на три од аглиите α , β , γ и δ што се добиваат при пресекот на две прави (како на цртежот) е 300° . Одреди ја големината (во степени) на четвртиот агол.“

Пример 6. Во задачата: „Марко има 13 години, сестра му Маја е две години помала од него, мајка му е тројно постара, а татко му е една година постар од мајка му. Колку години имаат сите заедно?“ - повторно има барем две толкувања:

1) Марко има 13 години, сестра му Маја е две години помала од него, мајка му е тројно постара од Маја, а татко му е една година постар од мајка му. Колку години имаат сите заедно?

2) Марко има 13 години, сестра му Маја е две години помала од него, мајка му е тројно постара од него, а татко му е една година постар од мајка му. Колку години имаат сите заедно?

Пример 7. Задачата „Врвот S на една кула од точката A се гледа под агол од 30° . Колкава е висината на кулата, ако точката A е оддалечена 100 m од подножјето на кулата.“ има нејасна формулација.

1) Што значи врвот (како точка) да се гледа под агол?

2) Каде се наоѓа точката?

Пример 8. До недоразбирање може да доведе и следнава формулација „Колку најмногу еднакви пакетчиња може да се направат од 48 чоколади, 72 бајадери и 120 бонбони?“.

1) Што значи „еднакви пакетчиња“?.

2) Една прецизна формулација гласи: „Колку најмногу еднакви пакетчиња со еднаква содржина може да се направат од 48 чоколади, 72 бајадери и 120 бонбони?“.

Речениците од математичките текстови треба да се што е можно поконцизни. Така, на пример често се сретнуваат записи од типот: „Во триаголник $\triangle ABC$ аголот $\angle ACB$ е 60° “. Овде, треба да се исфрли зборот „триаголник“ или ознаката Δ , затоа што нивното значење во реченицата е едно и исто. Но и зборот „агол“ и ознаката за агол исто така се два пати запишани, со збор и со симбол.

Често се сретнува и задача од типот: „Дадена е низата 1,4,7,10 ... од должините на страните мерени во cm на искршената линија составена од 12 отсечки. Колку dm изнесува должината на искршената линија?“. Овде не е јасно како продолжува низата. Дадени се првите четири члена, но не е познато правилото на низата. Значи, може да дојде до повеќекратни толкувања.

Една прецизна формулација, т.е. едно правило, е:

„Дадена е низата 1,4,7,10, 15,18, 21, 24, 6,9,12,15 од должините на страните мерени во cm на искршената линија составена од 12 отсечки. Колку dm изнесува должината на искршената линија?“. Друга можна формулација е: „Дадена е низата од 12 члена, со прв член 1, а секој следен е за три поголем од претходниот. Таа низа е низа од должините на страните мерени во cm на искршената линија составена од 12 отсечки. Колку dm изнесува должината на искршената линија?“

Недоволно познавање на граматиката или недоволно внимание посветено на граматичките правила, како и премногу долгите сложени реченици често предизвикуваат забуна при решавање на задачи.

На пример - „Директорот Мира и наставникот Миле учествуваат во трка: 100 m по права линија и назад. Во еден чекор наставникот минува 6 dm, а директорот 4 dm, но тој прави

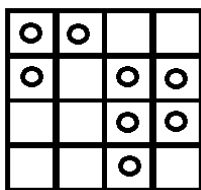
6 чекори за време кога неговиот конкурент прави 4 чекори. Кој е победник во трката?“ - може да доведе до нејаснотии.

Така, ако **тој** е наставникот, победник е наставникот, а ако **тој** е директорот, победник е директорот.

Понекогаш, иако задачата на прв поглед изгледа дека е нејасно формулирана (заради комплицираната формулација), сепак таа е прецизно формулирана.

Пример 9. Вкупната старост на Мери и Ени е 44 години, а Мери 2 пати постара отколку што била Ени, кога Мери била 2 пати помлада отколку ќе биде Ени, кога Ени ќе стане 3 пати постара, отколку што била Мери, кога Мери била 3 пати постара од Ени. Колку години има Мери?

Пример 10. Во осумте полиња на таблата на цртежот, со крукчиња се претставени 8 кенгурчиња. Секое од нив може да скокне со еден скок на соседно слободно поле. Колкав е најмалиот број кенгурчиња што треба да скокаат за после тоа во секој ред и секоја колона да има по две кенгурчиња? Притоа, соседни полиња се единечни квадратчиња кои имаат една заедничка страна.



СЛИКА 6. Поставеност на кенгурчињата на таблата

Да заклучиме, колку и да инсистираме на користење на математичкиот јазик, тоа не може да го направиме без истиот да се комбинира со говорниот јазик. Притоа сите формулации на задачи (но и на други реченици во математичките текстови) треба да се еднозначни, граматички точни (според граматиката на говорниот јазик), концизни, т.е. да нема удвојување на зборови од говорниот јазик и математички знаци. Само тогаш и само така учениците јасно ќе ги разберат барањата на задачите, и ќе се научат на јасно и прецизно изразување.

ЛИТЕРАТУРА

1. Димовски Д., Предавања по елементарна математика (интерна скрипта за студентите на Институтот за математика).
2. Учебници и збирки задачи по математика за основно образование.