

Најчести грешки и математички заблуди кај студентите од прва година на техничките факултети во средношколски задачи

Валентина Миовска¹, Анета Гацовска-Барандовска^{1*}, Делчо Лешковски², Стефан Мирчевски¹

¹Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Природно-математички факултет,
Институт за математика, Скопје, Р. Македонија

²Меѓународен балкански универзитет, Скопје, Р. Македонија

Апстракт. Во овој труд ќе бидат изложени резултатите од спроведено истражување (студија), во кое се вклучени студенти од прва година, на Природно-математичкиот факултет во Скопје и некои од техничките факултети во државата, во пет последователни години (2017-2021). Истражувањето беше направено по спроведен анонимен тест во кој беа вклучени шест различни задачи од логички тип, линеарни равенки со параметар, како и системи од две линеарни равенки со две непознати кои содржат параметри. Примерокот го сочинуваа четири експериментални групи и една контролна група. Експерименталните групи се тествани пред почетокот на предавањата по математика кои се однесуваат на наставните теми покриени со тестот, а контролната група извесен период откако поголем дел од тие наставните содржини е обработен и продлабочен во универзитетските курсеви. Обработените тестови обезбедија податоци кои укажуваат на голем број заблуди и грешки кај студентите, поединечно, но и во споредба со другите тествани групи. Презентирани се и дополнителни заклучоци кои укажуваат на корелација меѓу постигнатите резултати од групите кои претходно имаат завршено средно училиште со физичко присуство во однос на студенти кои дел од своето образование го поминале со онлајн настава, во периодот на пандемијата со КОВИД-19. Разгледани се основните пропусти и површноста на знаењето стекнато во средното образование, споредено со очекувањата ка авторите, кои како наставен кадар на универзитетите имаат потреба од одредено ниво на знаење за успешно спроведување на наставната програма по своите предмети. Укажано е на можните причини за големата противречност во добиените и очекуваните резултати.

Клучни зборови: математички заблуди, грешки, релации, подредување, линеарни равенки, системи линеарни равенки.

ВОВЕД

Математиката е еден од задолжителните предмети во наставниот процес, на сите нивоа на образование. Токму оваа застапеност во процесот на образование ги оспособува учениците, а подоцна и студентите, да размислуваат логично, критички, аналитички, креативно, прецизно, темелно, но им помага и во развивање на способноста за користење на математиката во решавање на проблеми, од секојдневниот живот но и од избраната професија. Со оглед на важноста на целите на учењето математика, од секој наставник по математика се бара да може правилно да ги пренесе математичките концепти, [1].

* Истражувањето е поддржано од Универзитетот „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје [Проект NIP.UKIM.20-21.6].

За успешно совладување на математичките концепти, исклучително важно е истите прецизно и јасно да се пренесат на учениците уште во почетните фази од овој процес. А за тоа да се спроведе, потребно е да се користи погодна литература, правилно и прецизно да се дефинираат математичките термини, а потоа и сите други формули и правила да им се доближат на учениците преку решавање практични задачи. Дали тоа се применува во секојдневното изведување настава по математика? Истражувањата на светски рамки покажуваат дека главната причина за појавување големи пропусти во знаењата на учениците, кои најчесто се детектираат во високото образование, во голема мера се должат на фактот што наставниците не ги поврзуваат новите математички концепти со претходно научените математички концепти; вознемиреност и одбивност кон учењето математика; негативни перцепции кон математиката; економски фактори; менаџментот во училиштата како и недостаток на инфраструктура во училиштата и отсуство на систем за континуирано оценување [2]. Отсуството на механизам за континуирано оценување отвора нови хоризонти за дискусија, но главниот причинител за тоа е малиот фонд на часови, а квантитативно обемните содржини кои треба да се изучат во која било фаза од образованието [3]. Лесно се заклучува дека учењето математика е еден ланец во кој со нарушување на само една алка, доаѓа до пропусти, заблуди и незнаења кои се детектираат многу доцна во образовниот процес, тогаш кога состојбата е скоро непоправлива.

Не помалку важна е методската страна на проблемот, знаењето на учениците станува сè поповршно, содржините не се совладуваат на потребното ниво, а компетенциите врзани за критичко размислување и примена се остваруваат на релативно ниско ниво.

Авторите како повеќегодишни универзитетски професори и соработници, секојдневно се среќаваат со проблеми во остварувањето на целите на универзитетските курсеви точно заради детектираните пропусти од претходното образование, а сликата станува уште позагрижувачка заради фактот што студентите со кои работат се идни наставници, инженери, програмери,... Обемноста на универзитетските курсеви е голема, а времето достапно за повторување на одредени содржини речиси нема. Наставните програми се конципирани за брзо совладување на нови содржини, при што повторувањето е само низ конкретни примери во служба на новите содржини. Очекувањата студентите брзо да се адаптираат на новиот начин на учење, универзитетските критериуми, обемниот материјал и истото да се усклади со ограниченото време за повторување, претставува прв проблем со кој се судираат брцошите на почетокот на првиот семестар на факултетите.

ИДЕЈА И ЦЕЛИ НА ИСТРАЖУВАЊЕТО

Идеја за истражувањето

Идејата за спроведување на ова истражување произлезе точно од искуството на авторите во повеќегодишното изведување предавања и вежби по неколку фундаментални математички предмети на Природно-математичкиот факултет и техничките факултети и соочувањето со непосакувани резултати од студентите постигнати за време на испитите од овие предмети, како резултат на сомнително формално знаење и учење без разбирање [4].

Наставните предмети Множества и логика, Векторска алгебра и Линеарна алгебра од студиските програми на Институтот за Математика и предметите Математика 1 и Математика 2 од техничките факултети се основни математички курсеви кои студентите ги посетуваат во првите два семестри од своето студирање. Тој факт покажува дека станува збор за основни предмети во кои, во извесна мера се повторуваат некои математички

концепти од средно образование, а дел од структурата на предметите е наменета за продлабочување на стекнатото знаење со изучување на нови концепти, кои се база за понатамошно успешно школување.

Цели на истражувањето

По обработка на добиените резултати од спроведеното тестирање, целта е да се донесат заклучоци кои ќе помогнат во надминување на овие сè почести проблеми во изучувањето на математиката во која било нејзина фаза. Токму поради потеклото на проблемите, спроведениот анонимен тест содржи задачи од горенаведените наставни предмети, со цел да се лоцираат грешките кои ги прават студентите, но и да се процени нивниот интензитет.

Еден аспект се наследените пропусти од средното образование, а вториот секако (преку контролната група), и потребата од промена на концептот на изведуваче на наставата во првиот семестар, бројот на часови на кои се обработуваат одредените содржини, темпото на воведување на новите поими и концепти и начинот на работа со новите генерации студенти.

СТРУКТУРА НА ИСТРАЖУВАЊЕТО

За истражувањето беа тестирани 5 (пет) групи со студенти од прва година на Институтот за Математика и техничките факултети од кои: четири групи студенти кои своето средно образование го завршиле во услови на настава со физичко присуство (првите семестри на факултетите ги запишале во една од годините 2017 – 2020) и по стара наставна програма за основно образование, додека една група, која воедно е и контролна и главна група на ова истражување ја сочинуваат студенти кои во последните две години од своето средно образование наставата ја следеле онлајн (започнале со универзитетско образование во 2021 година). Исто така, контролната група е специфична и по тоа што станува збор за група која во основно образование наставата ја следела по наставни програми и учебници кои започнаа да се воведуваат во 2014. година, со адаптација на програмите и учебниците од Cambridge Examination Center. Така наречената Кембриџ реформа се однесуваше воглавно на наставните програми по математика и природни науки. Програмите се сеуште активни во трето и од шесто до деветто одделение и можат да се најдат на страната на Бирото за развој на образованието (<https://www.bro.gov.mk/>). Во средното образование подолг период се користат истите наставни програми за гимназиското - реформирано образование, а во тек е реформа на стручното образование. Стручната јавност во голем дел, вината за надолжниот тренд во македонското образование ја припишува точно на Кембриџ програмите. За поконкретни резултати во однос на овие тврдења е можеби сеуште рано да се дискутира, од причина што на универзитетите, за сега се запишани само две генерации кои во своето образование имале дел од настава по овие програми, но промената на програмите во основното образование каде има значително намалување на дел од стандардните математички содржини, реално се чувствува.

Во истражувањето се вклучени задачи од средношколска математика, која согласно сите наставни програми треба да се совладани, иако можеби темите се изучувани во различни одделенија/години кај различни генерации студенти.

Истражувањето беше спроведено во форма на анонимен тест со три задачи, структурирани како во Табела 1.

ТАБЕЛА 1. Класификација на задачите од спроведениот тест.

	Број на задачи (подзадачи)	Поле на припадност	Наставен предмет на факултет
Релации за подредување	1	Алгебра	Множества и логика; Математика 1
Линеарни равенки со параметар	1 (3)	Алгебра	Линеарна алгебра; Векторска алгебра; Математика 1
Системи линеарни равенки со параметри	1 (2)	Алгебра	Линеарна алгебра; Векторска алгебра; Математика 1

Во прилог следуваат формулациите на задачите од спроведениот тест:

Задача 1. Нека $a = 15$, $b = 12$, $c = 15$. Заокружи го точниот одговор:

- а) $b \leq c$ б) $a \geq c$ в) $a < b$ г) $a = c$.

Задача 2. Реша ја равенката во множеството реални броеви, во зависност од вредностите на параметарот a :

- а) $x + 2 = a$ б) $ax - 7 = a + 3x$ в) $x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a}$.

Задача 3. Колку решенија има системот?

- а) $\begin{cases} a + 2(x - y) = 4y + a \\ 3(y - b) = x - 3b \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - y = b - 2a \\ 4x - 2y = 2a. \end{cases}$

РЕЗУЛТАТИ И ЗАКЛУЧОЦИ

Резултати од Задача 1

Авторите очекуваа студентите бидат наведени од формулацијата на задачата дека постои само еден точен одговор, но секако не во толкав број во колкав таквиот проблем се појави. Идејата беше да се согледа дали студентите ги разбираат релациите за подредување и симболите со кои се означуваат, и доколку не се одлучат веднаш за повеќе од еден точен одговор, да бидат во најмала рака испровоцирани да постават прашање околу формулацијата, односно наводната еднозначност на одговорот.

Резултатите меѓу експерименталните и контролната група не се разликуваат во голема мера. Значи иако релациите за подредување, вклучувајќи ја и разликата меѓу подредувањето и строгото подредување на реални броеви се изучуваат во зимскиот семестар, резултатите од тестот покажаа дека дел од студентите воопшто не ја применуваат формалната дефиниција за релација за подредување. Земајќи предвид дека има **три точни одговори: а), б) и г)**, во табелите систематизирани по групи (Табела 2 – Табела 6), можат да се забележат пропусти во формалното знаење.

ТАБЕЛА 2. Прва група (тестирани 17 студенти).

Одговор	Број на студенти
Само б)	2
Само г)	14
б) и г)	1

ТАБЕЛА 3. Втора група (тестирани 21 студенти).

Одговор	Број на студенти
а), б) и г)	5
Само г)	15
б) и г)	1

Со исклучок на четвртата група, сите останати групи во најголем процент избрале само еден точен одговор.

ТАБЕЛА 4. Трета група (тестирани 25 студенти).

Одговор	Број на студенти
а), б) и г)	6
Само б)	4
Само г)	14
а) и г)	1

ТАБЕЛА 5. Четврта група (тестирани 22 студенти).

Одговор	Број на студенти
а), б) и г)	18
Само б)	1
Само г)	2
а) и б)	1

ТАБЕЛА 6. Контролна петта група (тестирани 20 студенти).

Одговор	Број на студенти
а), б) и г)	10
Само б)	1
Само г)	8
Не одговорил	1

Во суштина, ако се знае дека релацијата за подредување ги исполнува условите за рефлексивност, антисиметричност и транзитивност, [5], заокружување на само еден точен одговор или неодговарање на поставеното барање е навистина неочекувано.

Резултати од Задача 2

Линеарните равенки се обработуваат и во основното и во средното образование. Линеарните равенки со параметар се составен дел од наставните содржини во прва година. Во универзитетските курсеви по Векторска алгебра и Линеарна алгебра се неопходни. Во почетните курсеви од алгебра, постојано се повторуваат стратегии и техники за решавање линеарни равенки со параметар на кои посебно внимание се обрнува во дискусијата и донесувањето правилен заклучок од истата. Токму поради отсуството од толкување на добиеното решение, студентите добиваат решенија или користат математички чекори кои не се дозволени. Поединечно ќе ги разгледаме трите подзадачи од задачата која беше поставена на анонимниот тест.

2а) Во овој случај јасно е дека решение на задачата е $x = a - 2$, за секоја вредност на параметарот $a \in \mathbb{R}$. Авторите единствено сакаа да проверат дали студентите имаат осет за важноста на параметарот, односно множеството на допустливи вредности на параметарот наспроти множеството вредности на променливата. Кај повеќето студенти е добиено решение во кое отсуствува дискусија по параметарот, а само неколку студенти ја решиле задачата со комплетен запис. Некаде се направени се непотребни дискусии (Слика 1), но речиси кај сите отсуствува делот за можните вредностите на параметарот. Кај неколку студенти се забележани сериозни и загрижувачки математички пропусти кои се однесуваат на основни аритметички операции и математичка писменост, [6].

Handwritten mathematical work showing a piecewise solution for a quadratic equation. It is divided into three cases: $a < 0$, $a = 0$, and $a > 0$. For $a < 0$, it gives $x \in (-\infty, -8)$. For $a = 0$, it gives $x \in (-2)$. For $a > 0$, it shows the equation $x^2 + \frac{1}{x} = 2$ and then $ax^2 + a$.

СЛИКА 1. Неправилен математички запис и непотребни дискусии.

Кај еден студент се забележани и заблуди за поврзаноста на задачите од тестот. Имено, преземена е вредноста $a = 15$ од Задача 1 и заменета е во решавањето на задачата 2a) на местото од параметарот a .

26) Со еквивалентни трансформации, по два чекора равенката се запишува во обликот $(a-3)x = a+7$.

Понатаму, јасно е дека за $a \neq 3$, равенката има единствено решение $x = \frac{a+7}{a-3}$, додека за $a = 3$, равенката нема решение.

Од добиените резултати се забележува дека најголем дел од студентите ја спровеле само дискусијата за единствено решение или ја решиле задачата без дискусија, а целосно решена задача е забележана кај еден студент од секоја група. Едно од покарактеристичните решенија на кое наидоа авторите е прикажано на Слика 2, а се однесува на грешка во основни аритметички операции.

СЛИКА 2. Грешка во основни аритметички операции

2в) За $x \neq 0$, $a \neq 0$ може да ја помножимо равенката со ax и ќе добиеме

$$ax^2 + a = a^2x + x$$

од каде со средување се добива квадратна равенка по x , $ax^2 - (a^2+1)x + a = 0$. При

решавањето добиваме $x_{1/2} = \frac{a^2+1 \pm \sqrt{(a^2-1)^2}}{2a} = \frac{a^2+1 \pm |a^2-1|}{2a}$ и потребна е дискусија по

знакот на изразот во $|a^2-1|$. Во двата случаи се добиваат истите решенија на равенката

$x_1 = a$ и $x_2 = \frac{1}{a}$, но само двајца студенти ја знаела неопходноста од употребата на апсолутната вредност и различните вредности на различни интервали.

СЛИКА 3. Не согледување на важноста на дефиниционата област и елементарни непознавања врзани за операциите.

СЛИКА 4. Еден од ретките точни пристапи.

Во овој пример кај најголем дел од студентите задачата беше решена без да се најде дефиниционата област, што е чест пропуст и во изучување на делови од математичка анализа кои се однесуваат на функција од една реална променлива, [7], што е прикажано на Слика 3. Само еден студент од тестираните групи ја решил задачата целосно. Уште почеста заблуда која се појавува се однесува на термините квадратен корен и апсолутна вредност, [8]. Едно правилно согледување е прикажано на Слика 4.

Резултати од Задача 3

Системите линеарните равенки со параметар се составен дел од наставните содржини во прва и втора година во средното образование и во изборниот предмет по Линеарна алгебра и Аналитичка геометрија за трета година. Резултатите од тестовите на двете подзадачи на задача 3, во кој целта беше да се увиди дали студентите разликуваат при кои параметри системите имаат еднозначно решение, бесконечно решенија или немаат решение. Голем дел од студентите и покрај точната постапка, кога станува збор за дискусијата не се во можност да ја изведат. Тоа доведува до проблем во решавањето задачи во Линеарна алгебра и посебно Векторска алгебра кога толкувањето се поврзува со линеарната зависност и независност на векторите, но и геометриското толкување на системите равенки.

Еве една илустрација. Задачата 3а) е систем со бесконечно многу решенија за било кои вредности на параметрите. Геометриски, станува збор за две прави во рамнина кои се совпаѓаат. Под претпоставка дека системот е резултат на испитување на линеарна зависност на вектори, одговорот би бил дека векторите се линеарно зависни. Но, заради погрешно толкување, и покрај точната постапка, одговорите на студентите укажуваат дека знаењето е површно усвоено и без разбирање, односно шемата за решавање системи се знае, но не се во можност да дадат толкување на добиениот резултат.

Left photo shows the following work:

$$\begin{cases} a + 2(x-y) = 6y + a \\ 3(y-6) = x - 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2x - 2y - 4y - a = 0 \\ 3y - 18 - x + 36 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 6y = 0 \\ 3y - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y = 0 \\ 3y - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y \\ x = 3y \end{cases}$$

Linea совпаѓа, едно. $y \in \mathbb{R}$

Right photo shows the following work:

$$\begin{cases} a + 2(x-y) = 6y + a \\ 3(y-6) = x - 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2x - 2y - 4y - a = 0 \\ 3y - 18 - x + 36 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 6y = 0 \\ -x - y = -18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 6y \\ x = -y - 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 6y \\ x = -y - 18 \end{cases}$$

$$2(-y - 18) = 6y \Rightarrow -2y - 36 = 6y \Rightarrow -36 = 8y \Rightarrow y = -\frac{36}{8}$$

СЛИКА 5. Неправилно расудување при точно добиено решение на системот

ЗАКЛУЧОК

Најважно е да забележиме дека без разлика на различните почетни услови за групите, резултатите во групите не се разликуваат значително. Тоа укажува на длабоки проблеми на сите нивоа на образование. Наставниот процес е сложен процес и зависи од многу фактори. Дури и без да се лоцираат виновници, важно е за сите чинители во наставниот процес да разберат дека нивото на усвоени знаења, трајноста на знаењата и нивната примена во други области се директна последица на правилно водениот наставен процес. Тоа подразбира сериозен пристап од учениците (учење со разбирање) и со прифаќање на фактот дека во секојдневниот живот може во секој момент да се јави потреба од примена на математиката, логичкото мислење и критичкиот пристап кон проблемите. Родителите да ја согледаат потребата од знаење, а не од оценки, а наставниот кадар да не заборави дека во сржта на нашата професија е да се посветиме на крајната цел на образованието, нашите ученици да научат да мислат. И без меѓусебно да се обвинуваме, да се обидеме да најдеме начин да ги намалиме последиците на континуираните проблеми во образованието.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rahaju E. B., Iriyani D., Artiono R., *Identification and Exploration of Elementary School Teacher Misconception in Mathematical Learning*, Journal of Physics: Conference Series 1417 (2019) 012052, pp. 1-4.
2. Jamaludin N. H., Maat S. M. (2020), *A Systematic Literature Review on Students Misconceptions in Mathematics*, International Journal of Academic Research in Business and Social Sciences, 10(6), pp. 127-145.
3. Ng W. K., Lai K. S., *ICT and Constructivist Strategies Instruction for Science and Mathematics Education*, Vol. 28, No. 1 (2016), pp. 138-160.
4. Гацовска-Барандовска А., *Примената на математичките знаења и вештини во решавањето задачи – проблеми и предизвици*, Зборник на трудови од Меѓународна конференција за образованието по природни науки и математика, ДФРМ, Арс ламина публикации, ПМФ, Скопје (2018), стр. 106-113.
5. Чупона Ѓ., *Алгебарски структури и реални броеви*, Просветно дело, Скопје, 1976.
6. Al-Rababaha Y., Yew W. T., Meng C. C., *Misconceptions in School Algebra*, International Journal of Academic Research in Business and Social Sciences, Vol. 10, No. 5 (2020), pp. 804-812.
7. Cansiz Ş., Küşük B., İşleyen T., *Identifying the secondary school students' misconceptions about functions*, Procedia Social and Behavioral Sciences, 15 (2011), pp. 3837-3842.
8. Димовски Д., Гацовска-Барандовска А., *Некои пропусти во образованието по математика во Македонија*, Зборник на трудови од Меѓународна конференција за образованието по природни науки и математика, ДФРМ, Арс ламина публикации, ПМФ, Скопје (2018), стр. 15-21.

Most common mistakes and mathematical misconceptions among first-year technical faculty students in high school assignments

Valentina Miovska¹, Aneta Gacovska - Barandovska¹, Delcho Leshkovski², Stefan Mirchevski¹

¹Ss. Cyril and Methodius University in Skopje, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Institute of mathematics, Skopje, Macedonia

²International Balkan University, Skopje, Macedonia

Abstract. The paper presents the results of a conducted research (study) involving first-year students of the Institute of mathematics and some of the technical faculties in the country, in five consecutive years (2017-2021). The research considers the results of an anonymous test that included six different problems of logical type, linear equations with a parameter, as well as systems of two linear equations with two unknowns containing parameters. The sample consisted of four experimental groups and one control group. The experimental groups were tested before the beginning of the mathematics lectures related to the teaching topics covered by the test, and the control group after most of those teaching contents have been processed and deepened in the university courses. The processed tests provided data indicating a large number of misconceptions and errors among students, individually, but also in comparison with other tested groups. Additional conclusions are presented that indicate a correlation between the results achieved by the groups that have previously graduated from high school with physical attendance in relation to students who spent part of their education with online teaching, during the period of the COVID-19 crisis. The basic omissions and the superficiality of the knowledge acquired in secondary education have been examined, compared to the expectations of the authors, who as teaching staff at universities need a certain level of knowledge for the successful implementation of the curriculum in their subjects. The possible reasons for the great contradiction in the obtained and expected results are pointed out.

Keywords: mathematical misconceptions, errors, relations, ordering, linear equations, systems of linear equations.