Годишен зборник на ПМФ
Том 38 (1997)
Скопје, Р.Македонија

ISSN 0351-7441

Драган Димитровски, Весна Целакоска-Јорданова

ЛАПЛАСОВАТА РАВЕНКА И ХАРМОНИСКИ ФУНКЦИИ ОД ДВЕ КОМПЛЕКСНИ НЕЗАВИСНИ ПРОМЕНЛИВИ ВО АНАЛИТИЧЕН СЛУЧАЈ

Апстракт. *За функцијата* $W(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)$ *се дефинира лапласијанатa* ΔW *и се определува решение на Лапласовата диференцијална равенка* $\Delta W = 0$ *за една доста широка класа функции, имено за функции* W *што се аналитични по сите свои четири аргументи.*

Вовед. Лапласовата равенка [1]

Со Δ го означуваме диференцијалниот оператор со парцијални изводи од втор ред

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \tag{1}$$

и го нарекуваме *лапласијана*. Равенката

$$\Delta\, U = 0\,, \tag{2}$$

каде што $U = U(x_1,x_2,...,x_n)$, се вика *Лапласова равенка.* Познато е дека оваа равенка е од елиптичен тип во целата рамнина.

Хармониска функција

Функцијата U којашто има непрекинати парцијални изводи од втор ред и ја задоволува Лапласовата равенка (2), се вика *хармониска функција.* Општиот облик на хармониската функција не е познат, туку се познати само, повеќе или помалку, општи детали за решенијата.

Во овој труд се разгледуваат следниве два проблема:

I. Нека x_i, $i = 1,2,3,4$, се заменат со две комплексни независни променливи z_1, z_2 и со нивните конјугации $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$, соодветно. Се разгледува комплексната функција

$$W(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2) = U + iV \tag{3}$$

и нејзината лапласијана

$$\frac{\partial^2 W}{\partial {z_1}^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial {z_2}^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial {\bar{z}_1}^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial {\bar{z}_2}^2}. \tag{4}$$

II. Нека W е аналитичка функција од сите свои четири аргументи. Се бараат решенија на (4) во зависност од две произволни аналитични функции.

Основни познавања за хармониски функции

а) Со непосредно проверување се констатира дека за функцијата E од две точки x и ξ, дефинирана со:

$$E(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{n-2} |\xi - x|^{2-n}, & n > 2 \\ -\ln|\xi - x|, & n = 2 \end{cases} \tag{5}$$

каде што $|\xi - x|$ е растојанието меѓу точките x и ξ (за $x \neq \xi$), е решение на равенката (2), како по однос на x, исто така по однос на ξ. Овие решенија (5) се викаат *елементарни* или *фундаментални* решенија на Лапласовата равенка. За $n = 3$, равенката (2) претставува потенцијал на електрично полнење, ставено во точката x (или ξ).

б) Изразите од облик

$$U(x) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \left[\frac{{x_n}^{2k}}{(2k)!} \Delta^k P(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + \frac{{x_n}^{2k+1}}{(2k+1)!} \Delta^k Q(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \right] \tag{6}$$

каде што Δ^k е оператор, $\Delta^k = \Delta(\Delta^{k-1})$, а P и Q се произволни полиноми од $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, исто така се хармониски функции – *хармониски полиноми* – од променливите $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

в) Нека S е глатка хиперповршина (затворена или отворена) во просторот E_n и нека $\mu(\xi)$ е реална непрекината функција зададена врз S. Тогаш изразот од облик

$$U(x) = \int_S E(x,\xi)\,\mu(\xi)\,dS_\xi \tag{7}$$

каде што dS_ξ е елемент на плоштината на хиперповршината по променливата на интеграција ξ, е хармониска функција во сите точки x на просторот E_n кои не лежат врз S.

Доказот се добива со помош на диференцирање под знакот на интеграл, со оглед на (5).

Хармоничност и аналитичност

Хармоничноста и аналитичноста на функција се два различни поима. Имено, хармониска функција не мора да биде аналитична. Меѓутоа, за $n = 2$, при $z = x + iy$, ако

$$W(z) = W(x+iy) = W(x,y) = U(x,y) + i\,V(x,y) \tag{8}$$

е аналитична функција, тогаш важат Коши-Римановите услови:

$$U_x = V_y, \quad U_y = -V_x \tag{9}$$

и

$$U = \operatorname{Re} W(z), \qquad V = \operatorname{Im} W(z) \tag{10}$$

се хармониски функции, т.е.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0\,. \tag{11}$$

Ваквата врска меѓу аналитичноста и хармоничноста може да се прошири и на комплексна функција $W(z_1, z_2)$ од две независни комплексни променливи. Тоа и ќе биде целта на овој труд.

Воведуваме четири реални независни променливи, две независни комплексни променливи формирани од нив и операторски изводи.

Нека $\bar{r}=(x,y,z)$ и t се реални независни променливи и нека

$$U=U(x,y,z,t), \quad V=V(x,y,z,t) \tag{12}$$

се функции од четири реални независни променливи.

Ставајќи

$$z_1=x+iy, \quad z_2=z+it, \tag{13}$$

добиваме
$$U=U(z_1,z_2), \quad V=V(z_1,z_2), \tag{14}$$

каде што U и V ја вклучуваат и операцијата конјугирање на независнопроменливите (13):

$$\bar{z}_1=x-iy, \quad \bar{z}_2=z-it. \tag{15}$$

Го формираме комплексот

$$W=U(x,y,z,t)+i\,V(x,y,z,t)=U(z_1,z_2)+i\,V(z_1,z_2)=W(z_1,z_2), \tag{16}$$

којшто претставува функција од две независни комплексни променливи.

Да ги воведеме, според класичната дефиниција, *операторските изводи*:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1}&=\frac{1}{2}\left[U_x-V_y+i(U_y+V_x)\right]\\
\frac{\partial W}{\partial z_1}&=\frac{1}{2}\left[U_x+V_y+i(U_y-V_x)\right]\\
\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2}&=\frac{1}{2}\left[U_z-V_t+i(U_t+V_z)\right]\\
\frac{\partial W}{\partial z_2}&=\frac{1}{2}\left[U_z+V_t+i(U_t-V_z)\right]
\end{aligned} \tag{17}$$

Одовде, обратно, без тешкотии ги наоѓаме парцијалните изводи на U и V по x,y,z,t:

$$U_x=\frac{1}{2}\left[W_{\bar{z}_1}+W_{z_1}+\overline{W}_{z_1}+\overline{W}_{\bar{z}_1}\right]$$

$$U_y=\frac{i}{2}\left[-W_{z_1}-W_{\bar{z}_1}+\overline{W}_{z_1}+\overline{W}_{\bar{z}_1}\right]$$

$$V_x = \frac{i}{2}\left[W_{z_1} - W_{\bar{z}_1} - \overline{W}_{z_1} + \overline{W}_{\bar{z}_1} \right]$$

$$V_y = \frac{1}{2}\left[W_{z_1} + \overline{W}_{z_1} - W_{\bar{z}_1} - \overline{W}_{\bar{z}_1} \right]$$

$$U_z = \frac{1}{2}\left[W_{\bar{z}_2} + W_{z_2} + \overline{W}_{z_2} + \overline{W}_{\bar{z}_2} \right] \tag{18}$$

$$U_t = \frac{i}{2}\left[-W_{z_2} - W_{\bar{z}_2} + \overline{W}_{z_2} + \overline{W}_{\bar{z}_2} \right]$$

$$V_z = \frac{i}{2}\left[W_{z_2} - W_{\bar{z}_2} - \overline{W}_{z_2} + \overline{W}_{\bar{z}_2} \right]$$

$$V_t = \frac{1}{2}\left[W_{z_2} + \overline{W}_{z_2} - W_{\bar{z}_2} - \overline{W}_{\bar{z}_2} \right]$$

Понатаму, на елементарен начин, со изводи од сложена функција, ги добиваме вторите изводи:

$$U_{xx} = \frac{1}{2}\left[W_{z_1 z_1} + 2W_{z_1 \bar{z}_1} + W_{\bar{z}_1 \bar{z}_1} + \overline{W}_{z_1 z_1} + 2\overline{W}_{z_1 \bar{z}_1} + \overline{W}_{\bar{z}_1 \bar{z}_1} \right]$$

$$U_{yy} = \frac{1}{2}\left[W_{z_1 z_1} - W_{\bar{z}_1 \bar{z}_1} - \overline{W}_{z_1 z_1} + \overline{W}_{\bar{z}_1 \bar{z}_1} \right] \tag{19}$$

$$V_{xx} = \frac{i}{2}\left[W_{z_1 z_1} - W_{\bar{z}_1 \bar{z}_1} - \overline{W}_{z_1 z_1} + \overline{W}_{\bar{z}_1 \bar{z}_1} \right]$$

$$V_{yy} = \frac{i}{2}\left[W_{z_1 z_1} - W_{z_1 \bar{z}_1} - W_{z_1 \bar{z}_1} + W_{\bar{z}_1 \bar{z}_1} + \overline{W}_{z_1 z_1} - \overline{W}_{z_1 \bar{z}_1} - \overline{W}_{\bar{z}_1 z_1} + \overline{W}_{\bar{z}_1 \bar{z}_1} \right]$$

и аналогно

$$U_{zz} = \frac{1}{2}\left[W_{z_2 z_2} + 2W_{z_2 \bar{z}_2} + W_{\bar{z}_2 \bar{z}_2} + \overline{W}_{z_2 z_2} + 2\overline{W}_{z_2 \bar{z}_2} + \overline{W}_{\bar{z}_2 \bar{z}_2} \right]$$

$$U_{tt} = \frac{1}{2}\left[W_{z_2 z_2} - W_{\bar{z}_2 \bar{z}_2} - \overline{W}_{z_2 z_2} + \overline{W}_{\bar{z}_2 \bar{z}_2} \right] \tag{20}$$

$$V_{zz} = \frac{i}{2}\left[W_{z_2 z_2} - W_{\bar{z}_2 \bar{z}_2} - \overline{W}_{z_2 z_2} + \overline{W}_{\bar{z}_2 \bar{z}_2} \right]$$

$$V_{tt} = \frac{i}{2}\left[W_{z_2 z_2} - W_{z_2 \bar{z}_2} - W_{z_2 \bar{z}_2} + \overline{W}_{\bar{z}_2 \bar{z}_2} + \overline{W}_{z_2 z_2} - \overline{W}_{z_2 \bar{z}_2} - \overline{W}_{\bar{z}_2 z_2} + \overline{W}_{\bar{z}_2 \bar{z}_2} \right]$$

каде што $W(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)$ се диференцира по назначените променливи, додека другите се сметаат за константни.

Формираме лапласијана:

$$\Delta U = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} + U_{tt} \tag{21}$$

Заменувајќи ги (19) и (20) во (21) добиваме:

$$\Delta U = W_{z_1 z_1} + W_{z_1 \bar{z}_1} + \overline{W}_{z_1 \bar{z}_1} + \overline{W}_{\bar{z}_1 \bar{z}_1} + W_{z_2 z_2} + W_{z_2 \bar{z}_2} + \overline{W}_{z_2 \bar{z}_2} + \overline{W}_{\bar{z}_2 \bar{z}_2}\,. \tag{22}$$

Потполно аналогно се добива

$$\Delta V = i\left[W_{z_1 z_1} - W_{z_1 \bar{z}_1} - \overline{W}_{z_1 \bar{z}_1} + \overline{W}_{\bar{z}_1 \bar{z}_1} + W_{z_2 z_2} - W_{z_2 \bar{z}_2} - \overline{W}_{z_2 \bar{z}_2} + \overline{W}_{\bar{z}_2 \bar{z}_2}\right]. \tag{23}$$

Лапласовата диференцијална равенка гласи $\Delta\, U = 0$, или:

$$(W_{z_1 z_1} + W_{z_1 \bar{z}_1}) + (\overline{W}_{z_1 \bar{z}_1} + \overline{W}_{\bar{z}_1 \bar{z}_1}) +$$

$$+ (W_{z_2 z_2} + W_{z_2 \bar{z}_2}) + (\overline{W}_{z_2 \bar{z}_2} + \overline{W}_{\bar{z}_2 \bar{z}_2}) = 0 \tag{24}$$

и $\Delta\, V = 0$, или:

$$(W_{z_1 z_1} - W_{z_1 \bar{z}_1}) + (-\overline{W}_{z_1 \bar{z}_1} + \overline{W}_{\bar{z}_1 \bar{z}_1}) +$$

$$+ (W_{z_2 z_2} - W_{z_2 \bar{z}_2}) + (-\overline{W}_{z_2 \bar{z}_2} + \overline{W}_{\bar{z}_2 \bar{z}_2}) = 0 \tag{25}$$

Равенствата (24) и (25) определуваат *услови за реалниот и имагинарниот дел на функцијата* W (дадена со (16)) *да се хармониски функции.* Во тој случај и функцијата (16), $W(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)$, ја нарекуваме *хармониска функција* од променливите z_1,z_2.

За да бидат функциите U и V *аналитични функции* од реалните променливи x,y,z,t, т.е. комплексот $W(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2) = U + iV$ да е аналитична функција од комплексните променливи z_1,z_2, потребно е да важат Коши-Римановите услови

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2} = 0 \tag{26}$$

т.е. $\qquad U_x = V_y,\ \ U_y = -V_x \quad$ и $\quad U_z = V_t,\ \ U_t = -V_z$.

Тогаш U и V се *хармониски функции* и равенките (24) и (25) треба да се земат *заедно*. Собирајќи ги овие равенки и кратејќи со 2, добиваме:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial {z_1}^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial {z_2}^2}+\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial {\bar{z}_1}^2}+\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial {\bar{z}_2}^2}=0\ , \tag{27}$$

што претставува комплексна лапласова равенка за $W(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)$.

Втор облик на лапласовата равенка

Ако од равенката (24) ја одземеме равенката (25), ја добиваме равенката:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z_1\,\partial \bar{z}_1}+\frac{\partial^2 W}{\partial z_2\,\partial \bar{z}_2}+\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial z_1\,\partial \bar{z}_1}+\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial z_2\,\partial \bar{z}_2}=0 \tag{28}$$

којашто е еквивалентна на лапласовата равенка (27). Карактеристичниот облик на лапласијаната (27), со *еднојподруги изводи*, е заменет со обликот (28), со *мешани изводи*.

Имајќи за цел да ја сврземе во W *аналитичноста* со *хармоничноста*, ќе претпоставиме дека W е аналитична. Тогаш, поради (26) добиваме:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z_1\,\partial \bar{z}_1}=\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1}\right)=\frac{\partial}{\partial z_1}(0)=0\,,$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z_2\,\partial \bar{z}_2}=\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2}\right)=\frac{\partial}{\partial z_2}(0)=0\,.$$

Заменувајќи ги овие резултати во (28), се добива:

$$\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial z_1\,\partial \bar{z}_1}+\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial z_2\,\partial \bar{z}_2}=0\,. \tag{29}$$

Аналогно, од особините на конјугација, имаме:

$$\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial z_1\,\partial \bar{z}_1}=\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\left(\frac{\partial \overline{W}}{\partial z_1}\right)=\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\left[\overline{\left(\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1}\right)}\right]=\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}(0)=0\,,$$

$$\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial z_2\, \partial \overline{z}_2} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}_2}\left(\frac{\partial \overline{W}}{\partial z_2}\right) = \frac{\partial}{\partial \overline{z}_2}\left[\overline{\left(\frac{\partial W}{\partial \overline{z}_2}\right)}\right] = \frac{\partial}{\partial \overline{z}_2}(0) = 0 .$$

Ова значи дека во случај на аналитичност, условот (28) за хармоничност е автоматски задоволен. Условите (27) и (28) се еквивалентни, т.е. од двете равенки се добива истата функција W, но (28) може да биде покорисен за оперативна употреба, со оглед на можностите на едноподруго интегрирање, прво по z_2, а потоа по z_1 (во специјални случаи).

Случај на аналитичност и хармоничност при една комплексна променлива

Нека W е функција само од $z_1 \equiv z$. Тогаш $\dfrac{\partial^2 \overline{W}}{\partial z_2\, \partial \overline{z}_2} = 0$, па заменувајќи во (29), добиваме :

$$\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial z\, \partial \overline{z}} = 0 . \tag{30}$$

Оваа едноставна парцијална диференцијална равенка од втор ред ќе ја решиме со раздвојување на променливите. Со конјугација на (30) добиваме:

$$\overline{\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial z\, \partial \overline{z}}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \overline{\overline{W}}}{\partial \overline{z}\, \partial \overline{\overline{z}}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \overline{z}\, \partial z} = 0 , \tag{31}$$

т.е. $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\dfrac{\partial W}{\partial z}\right) = 0$. Оттука $\dfrac{\partial W}{\partial z} = \varphi(z)$, каде што $\varphi(z)$ е аналитична функција од z. Вториот интеграл дава

$$W = \int \varphi(z)\, dz + \overline{\psi(z)} ,$$

каде што $\overline{\psi(z)}$ е антианалитична функција, т.е. функција конјугирана со аналитична функција. Бидејќи интеграл од аналитична функција е аналитична функција, следува дека

$$W(z,\overline{z}) = \Phi(z) + \overline{\Psi(z)} \tag{32}$$

каде што Φ и Ψ се аналитични функции.

Обратно, нека е дадено (32). Од обопштениот извод по z имаме: $\frac{\partial W}{\partial z} = \Phi'(z) + \frac{\partial}{\partial z}\overline{\Psi(z)} = \Phi'(z) + 0 = G(z)$,

каде што $G = G(z)$ е аналитична функција. Оттука $\frac{\partial^2 W}{\partial \bar{z}\, \partial z} = \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} = 0$,

па според тоа равенката (31) е задоволена. Од сето тоа следува:

Теорема 1. *Општиот облик на хармониска функција W составена од аналитични функции од една комплексна променлива z е (32), каде што* Φ *е аналитична, а* $\overline{\Psi}$ *е антианалитична функција.*

Непосреден доказ, без интервенција на повеќе комплексни променливи.

Нека $W = W(z) = W(x+iy) = U(x,y) + iV(x,y)$. Ќе ги побараме ареоларниот извод на W

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left[U_x - V_y + i\left(U_y + V_x\right)\right]$$

и обичниот (обопштениот) извод на W

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{1}{2}\left[U_x + V_y + i\left(V_x - U_y\right)\right].$$

Користејќи ги горните две равенства добиваме:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial \bar{z}}\right) = \frac{\partial^2 W}{\partial z\, \partial \bar{z}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}\left[U_x - V_y + i\left(U_y + V_x\right)\right] - i\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{2}\left[U_x - V_y + i\left(U_y + V_x\right)\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(U_{xx} - V_{xy}\right) + i\left(U_{yx} + V_{xx}\right) - i\left(U_{xy} - V_{yy}\right) + \left(U_{yy} + V_{xy}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(U_{xx} + U_{yy}\right) + i\left(V_{xx} + V_{yy}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\,\Delta U + i\,\Delta V\,\right] \quad .$$

Според тоа, важи:

$$\left(\Delta U = U_{xx} + U_{yy} = 0 \ \wedge \ \Delta V = V_{xx} + V_{yy} = 0\right) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 W}{\partial z\, \partial \bar{z}} = 0, \qquad (33)$$

т.е. следнава:

Теорема 2. *Двете скаларни равенки од втор ред*

$$\Delta U = 0 \ \ i \ \ \Delta V = 0 ,$$

се еквивалентни со една комплексна равенка од втор ред

$$W_{z\bar{z}} = 0 .$$

Како последица се добива следнава интересна

Теорема 3. *Парцијалната равенка*

$$\frac{\partial^2 W}{\partial {z_1}^2} + \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial {\bar{z}_1}^2} = 0 \tag{34}$$

има општо решение во множеството од хармониско-аналитични функции, од облик

$$W(z_1) = W(x + iy) = \varphi(z_1) + \overline{\psi(z_1)} \ \ , \tag{35}$$

каде што φ и ψ се аналитични функции.

Теорема 4. *Равенката*

$$\frac{\partial^2 W}{\partial {z_2}^2} + \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial {\bar{z}_2}^2} = 0 ,$$

каде што $W = W(z + it)$, има решение во множеството хармониско-аналитични функции од облик

$$W(z_2) = W(z + it) = G(z_2) + \overline{H(z_2)} ,$$

каде што G и H се аналитични по z_2.

Општ случај на две комплексни променливи

По аналогија со напред кажаното, сега можеме да се вратиме на равенката (27) (и на еквивалентната (28)). Решенијата на оваа равенка можат да се добијат директно.

1°. Нека $\varphi(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ е произволна аналитична функција по своите аргументи. Бидејќи *не ги содржи* z_1 и z_2, со неа се анулираат првите два собирока во равенката (27), а ако важи

$$\overline{\varphi(\bar{z}_1, \bar{z}_2)} = \varphi(\bar{\bar{z}}_1, \bar{\bar{z}}_2) = \varphi(z_1, z_2) ,$$

тогаш со неа се анулираат и вторите два собирока во (27), бидејќи во $\varphi(z_1, z_2)$ не се содржани $\bar{z}_1, \bar{z}_2$.

2°. Нека $\psi(z_1,z_2)$ е произволна аналитична функција по своите аргументи. Тогаш со $\overline{\psi(z_1,z_2)}$ се анулираат првите два собирока од (27), бидејќи таа е антианалитична, а со нејзината конјугација $\overline{\overline{\psi(z_1,z_2)}} = \psi(z_1,z_2)$ се анулираат и вторите два собирока во (27), бидејќи во $\psi(z_1,z_2)$ не се содржани $\bar{z}_1,\bar{z}_2$.

Аналитичните функции

$$\varphi(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_k z^k + \cdots$$

со *реални тејлорови* коефициенти ја имаат особината $\overline{\varphi(z)} = \varphi(\bar{z})$:

$$\overline{\varphi(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k \bar{z}^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \bar{z}^k = \varphi(\bar{z}),$$

поради што ја имаме следнава теорема:

Теорема 5. Равенките (27) и (28) по непознатата функција $W(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)$, аналитична по своите аргументи во множеството на аналитични функции чии тејлорови коефициенти се реални, имаат општо решение

$$W(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2) = \varphi(\bar{z}_1,\bar{z}_2) + \overline{\psi(z_1,z_2)}, \tag{36}$$

каде што φ *и* ψ *се произволни аналитични функции од своите аргументи.*

Специјални случаи на вакви решенија се:

$\overline{G(z_1)}$, $\overline{H(z_2)}$ и $\overline{G(z_1)+H(z_2)}$, $P(\bar{z}_1)$, $Q(\bar{z}_2)$ и $P(\bar{z}_1) + Q(\bar{z}_2)$

каде што G, H, P, Q се аналитични функции од своите аргументи.

Литература

[1] А. В. Бицадзе: *Уравнения математической физики*, "Наука", Москва, 1976

[2] И. Н. Векуа: *Обобщенные аналитические функции*, 1959, р. 40

[3] Д. Димитровски и други: *Равенка Векуа со аналитички коефициенти*, Специјални изданија на Год. зборник на Институтот за математика, ПМФ, Унив. "Св. Кирил и Методиј", Скопје, том 24 (III), 1995

D. Dimitrovski, V. Celakoska-Jordanova

LAPLACE EQUATION AND HARMONIC FUNCTIONS OF TWO COMPLEX VARIABLES IN THE ANALITICAL CASE

Summary

We consider the Laplace equation (4) in the case when the function of four complex variables $W(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)$, composed by two functions of four real variables $U(x, y, z, t)$ and $V(x, y, z, t)$, is analitical in all of its arguments. The main result of the paper is Theorem 5: the equations (27) and (28) in the unknown function $W(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)$ of four complex variables, has a general solution given by (36), where φ and ψ are two arbitrary analitical functions of their arguments, which coefficients of their Taylor series are real.