

## РАБОТА СО МАТЕМАТИЧКИ НАДАРЕНИ УЧЕНИЦИ ВО ПОЧЕТНОТО ОБРАЗОВАНИЕ – ТРЕТ ДЕЛ

**Методи Главче**  
University Ss. Cyril and Methodius,  
Faculty of Pedagogy, Skopje  
mglavche@gmail.com

**Катерина Аневска**  
FON University, Skopje  
katerina.anevska@fon.edu.mk

**Ристо Малчески**  
FON University, Skopje  
risto.malceski@gmail.com

### Абстракт

Во [3] и [4] се дадени интегрални наставни програми за работа со математички надарените ученици во почетното образование, односно со учениците на возраст од 7 до 10 години. Во оваа работа е направен обид за изразботка на иста ваква програма за ученици на возраст од 10 до 11 години. Притоа дел од разработената програма е поткрепен со соодветен систем задачи за работа со надарените ученици за математика од 10-11 годишна возраст.

### 1. ВОВЕД

Проучувањето на креативноста, надареноста и талентот најчесто се движи во рамките на дефинирање на истите и креирање валидни иснтрументи за препознавање и идентификување на талентираниите и надарените деца. Во нашите разгледувања нема да се задржуваме на овие прашања, бидејќи истите темелно се разработени во постојната литература, а нивна разработка може да се најде и во [1], [2], [5], [11] и [12]. Понатаму, други важни моменти во работата со надарените ученици се развојот на надарените ученици и нивната едукација, т.е. методите и формите за работа со надарените ученици. Во споменатата литература детално се разработени и овие прашања, а во [3] и [4] се презентирани интегрални програми за работа со надарените ученици за математика на возраст од 7 до 10 години. Исто така, во споменатите работи се презентирани и три системи задачи, кои се во три различни области и кои може да послужат за работа со математички надарените ученици, но и за нивно препознавање и идентификување. Ваквите системи задачи се составени во рамките на европскиот проект MATHEU, каде истите преамбициозно се наречени дидактички столбови.

Може да се каже дека користењето на одделни системи задачи при препознавањето, идентификувањето и едукацијата на математички надарените ученици е користено од повеќе автори, и тоа многу години пред реализација на проектот MATHEU. Така, на пример, во [6] и [8] се презентирани два вакви системи задачи, кои се помали по обем и се наменети за усвојување на научните методи и развивање на квалитетите на мислењето на математички надарените ученици.

Во следните разгледувања ќе дадеме интегрална наставна програма за работа со математички надарените ученици на возраст од 10-11 години и за темата деливост ќе презентираме систем задачи, за кој сметаме дека е погоден како за препознавање и откривање на математички надарените ученици од оваа возрастна група, така и за работа со истите.

## 2. ПРОГРАМА ЗА РАБОТА СО НАДАРЕНИТЕ УЧЕНИЦИ ЗА МАТЕМАТИКА ОД 10-11 ГОДИШНА ВОЗРАСТ

Во [3] и [4] се дадени интегрални наставни програми за работа со математички надарените ученици во почетното образование, односно со учениците на возраст од 7 до 10 години. Во овој дел истото ќе биде направено и работа со учениците од возрасната група од 10-11 години, т.е. со учениците од петто одделение од деветгодишното основно образование. При разработката на оваа програма, како и при разработката на претходните три програми се имплементирани искуствата од натпреварите по математика во повеќе држави, но најголемо влијание имаа натпреварите во Руската федерација, Р. Бугарија, Р. Србија, Р. Хрватска, Р. Босна и Херцеговина и Р. Македонија.

Цели на наставната програма за учениците на возраст од 10-11 години се:

- ученикот/ученичката да ги усвои природните броеви до 1000000 и да се оспособи да ги извршува аритметичките операции во множеството природни броеви, заклучно со природните броеви до 1000000,
- ученикот/ученичката да ги усвои комутативниот и асоцијативниот закон за собирањето и множењето, дистрибутивниот закон и да се оспособи истите да ги применува при пресметувањето на бројните изрази,
- ученикот/ученичката да се оспособи да решава задачи со деливост и делење со остаток,
- ученикот/ученичката да се оспособи за аритметичко решавање на текстуални задачи,
- ученикот/ученичката да се оспособи да решава равенки со една непозната и истите да ги користи при решавање на текстуални задачи,
- ученикот/ученичката да се оспособи да ги објаснува поимите дробка, именител и броител на дробка, како и да наоѓа дел од даден број и да собира и одзема дроби со еднакви именители,
- ученикот/ученичката да се оспособи да ги именува поимите: точка, права, полуправа, отсечка, рамнина и агол,
- ученикот/ученичката да ги усвои и да ги искажува суштествените својства на поимите: многуаголник, правоаголник, квадрат, триаголник, кружница, круг, квадар и коцка,
- ученикот/ученичката да се оспособи да пресметува периметар на триаголник, квадрат и правоаголник и на сложени фигури составени од истите,
- ученикот/ученичката да се оспособи да пресметува плоштина на правоаголник и квадрат, како и плоштина на посложени фигури составени од правоаголници и квадрати,
- ученикот/ученичката да се оспособи за решавање на елементарни логички задачи,
- ученикот/ученичката во нејавна форма да ги усвојува основните комбинаторни принципи и комбинаторни конфигурации,
- ученикот/ученичката да се оспособува да пребројува колку пати одреден вид на геометриска фигура се содржи во посложена геометриска фигура,
- ученикот/ученичката да се оспособува за решавање на елементарни задачи со боење, покривање и расекнување на фигури на поедноставни фигури,
- ученикот/ученичката да се оспособува во нејавна форма на елементарно ниво да го користи методот на инваријанти,
- кај ученикот/ученичката да се развиваат квалитетите на мислењето како што се: еластичноста, шаблонизацијата, широчината, рационалноста и критичноста на мислењето,
- ученикот/ученичката во нејавна форма да ги усвојува научните методи: набљудување, споредување, експеримент, анализа и синтеза,

- ученикот/ученичката во нејавна форма да ги усвојува видовите заклучувања: индукција, дедукција и аналогича, при што од особена важност да се презентираат погодни примери од кои ученикот/ученичката ќе осознава дека заклучувањето по аналогича не е секогаш точно.

За постигнување на претходно наведените цели потребно е да се усвојат следниве содржини:

Тема I. Броеви до 1000000: собирање и одземање на броеви до 1000000, множење и делење на броеви до 1000000, комутативен, асоцијативен и дистрибутивен закон, редослед на операциите, пресметување вредност на броен израз, низи броеви кои задоволуваат одредено својство, споредување броеви, запишување низа броеви така што ќе задоволуваат низа неравенства, решавање равенка со една непозната, решавање бројни ребуси со собирање и одземање, решавање бројни ребуси со множење и делење, магични фигури, поим за дробка помала од 1, именител и броител на дробка, пресметување дел од даден број, собирање и одземање на дробки со еднакви именители.

Тема II. Деливост: деливост во множеството броеви до 1000000, делење со остаток и решавање текстуални задачи со деливост на броеви.

Тема III. Решавање текстуални задачи: задачи со броеви и цифри, задачи со мерни броеви, задачи со работа, задачи со мерење време, задачи со пари и комбинирани задачи.

Тема IV. Геометриски фигури: точка, отсечка, права и рамнина, хоризонтални, вертикални и коси рамнини, заемна положба на две рамнини, искршена линија, многуаголник, елементи на многуаголник, триаголник, видови триаголници според страните и аглиите, квадрат и правоаголник, периметар на триаголник, четириаголник, квадрат и правоаголник, пресметување периметри на комбинации од фигури; кружница и круг, елементи на кружница, заемна положба на точка и кружница и на точка и круг; геометриско тело, елементи на геометриско тело, коцка и квадар, составување на фигури со помош на коцки, поим за плоштина, мерки за плоштина и плоштина на квадрат и правоаголник, пресметување плоштини на комбинации од фигури, составување на фигури со помош на чкорчиња и составување на фигури со помош на коцки.

Тема IV. Множества, логика и комбинаторика: поим за множества, унија и пресек на множества, Венови дијаграми и примена, елементарни логички задачи, класични логички задачи (наоѓање на виновник, лажливец и слично), пребројувања со користење на принципите на збир, разлика и производ, пребројување на отсечки, триаголници, квадрати и правоаголници содржани во дадена сложена фигура, пребројување на повеќецифрени броеви со зададено својство (збир на цифри, броеви запишани со определени цифри и слично), пребројување на патишта во квадратна мрежа, распоредувања на броеви и цифри во квадратни и правоаголници табели, распоредувања на букви и цифри на кружница и метод на инваријанти (елементарно ниво).

### 3. ПРИМЕР НА СИСТЕМ ЗАДАЧИ ЗА РАБОТА СО НАДАРЕНИТЕ УЧЕНИЦИ ЗА МАТЕМАТИКА ОД 10-11 ГОДИШНА ВОЗРАСТ

Како и за програмите дадени во [3] и [4], така и за реализирање на предложената програма за работа со надарените ученици од 10-11, неопходна е изработка на соодветни наставни помагала, т.е. учебници кои задолжително ќе бидат пропратени со соодветни збирки задачи. Притоа, учебникот и збирката треба да содржат погодно избрани задачи кои ќе се употребуваат и при препознавањето и идентификацијата на надарените ученици за математика, за кое сметаме дека по правило треба да заврши на оваа возраст. Во следните разгледувања ќе дадеме пример на систем задачи за оваа возрасна група и тоа на тема различна од темите за кои во [3] и [4] се дадени соодветните системи задачи, а тоа е темата Деливост.

**Задача 1.** Определи го множеството делители на бројот 18.

**Задача 2.** На колку најмногу нули може да завршува производот

$$\overline{MA} \cdot \overline{TE} \cdot \overline{MA} \cdot \overline{TI} \cdot \overline{KA},$$

каде на различни букви им соодветствуваат различни цифри, а на исти букви им соодветствуваат исти цифри?

**Задача 3.** Определи го бројот на делителите на најмалиот трицифрен број делив со 18?

**Задача 4.** Определи го бројот на содржателите на бројот 7 кои се поголеми од 43 и се помали од 198, а истовремено се деливи со 2 и со 3.

**Задача 5.** Определи го множеството од сите природни броеви  $S$  такви што разликата  $32 - x$  е делива со 9.

**Задача 6.** При делење на бројот  $a$  со бројот  $b$  се добива количник 2 и остаток 200. Збирот на броевите  $a$  и  $b$  е 3774. Определи ги броевите  $a$  и  $b$ .

**Задача 7.** Збирот на два броја е 192. Ако поголемиот број се подели со помалиот се добива количник 3 и остаток 12. Определи ги овие броеви.

**Задача 8.** При делење на некој број со бројот 48 се добива количник  $q$  и остаток 36. Определи ги количникот и остатокот кои се добиваат при делење на овој број со бројот 16.

**Задача 9.** Определи го двоцифрениот број  $\overline{ab}$  кои при делење со 3 даваат количник  $\overline{2b}$  и остаток 0.

**Задача 10.** Определи го најмалиот природен број чиј производ на цифри е еднаков на 5040.

**Задача 11.** Бројот на спортистите во еден клуб е непарен број, кој е помал од 400. За парадата на почетокот на спортските игри тие може да се постројат во редови со по 7 или во редови со по 11 спортисти, при што нема да остане надвор од стројот ниту еден спортист. Определи го најголемиот можен број спортисти во овој клуб?

**Задача 12.** Фармерот Стојан јацата ги пакува во кутии по 10 и по 12 јајца. Кој е најмалиот број кутии во кои Стојан може да запакуваат точно 2018 јајца?

**Задача 13.** Ако трицифрениот број  $\overline{abc}$  е делив со 37, тогаш и бројот  $n = \overline{bca} + \overline{cab}$  е делив со 37. Докажи.

**Задача 14.** Определи ги сите трицифрени броеви кои се деливи со 2 и со 5 и чиј збир на цифри е еднаков на 9.

**Задача 15.** Која цифра треба да стои на местото на буквата  $a$  така што збирот на броевите  $\overline{2017a}$  и 211 да биде делив со 2, а која цифра треба да стои на местото на буквата  $a$  за овој збир да биде делив со 5.

**Задача 16.** Определи го бројот на двоцифрените броеви со својство: збирот на тој број и десет пати поголемиот број е трицифрен број.

**Задача 17.** Определи го бројот на двоцифрените броеви кои даваат еднаков остаток при делење со 4 и со 5.

**Задача 18.** Определи го бројот на четирифрените броеви такви што двоцифрените броеви формирани од кои било две последователни соседни цифри се деливи со 23.

**Задача 19.** На часот по математика секое момче од  $V^a$  одделение решило по 8 задачи, а секое девојче решило по 13 задачи. Учителката преброила дека вкупно се решени 180 задачи. Колку ученици има во одделението?

**Задача 20.** Определи барем еден десетцифрен број запишан со различни цифри, кој е делив со 7?

**Задача 21.** Горазд купил повеќе од три исти пакети чоколади. Од едниот пакет извадил седум чоколади и вкупно му останале 65 чоколади. Колку чоколади останале во отворениот пакет?

**Задача 22.** Секој ден во текот на седум последователни дена метеоролозите ја мереле дебелината на снежната покривка на врвот Пелистер и добиле седум броја во сантиметри. Вториот ден дебелината на покривката била 20 *cm* поголема во споредба со првиот ден, третиот ден таа била 3 пати поголема од претходниот ден, следниот ден се намалила за 58 *cm*, а петтиот ден заврнал обилен снег и дебелината на снежната покривка се зголемила 5 пати. Следниот ден времето се стопило и половината од снежната покривка се стопила. При мерењето во седмиот ден дебелината на снежната покривка била за 65 *cm* помала, отколку во шестиот ден. Метеоролозите констатирале дека на крајот на седмиот ден дебелината на снежната покривка измерена во сантиметри е број којшто покажува дата од месец февруари. Определи го збирот на цифрите на бројот којшто во сантиметри е дебелината на снежната покривка при првото мерење?

**Задача 23.** За својот нов велосипед Горјан набавил клуч кој се отвара со помош на шифра. Шифрата е четирицифрен број запишан со различни цифри. Секој природен број може да се подели без остаток со цифрата на стотките на шифрата, цифрата на илјадитите на шифрата е парна, а збирот на цифрата на илјадитите и цифрата на десетките е еднаков на 7. Цифрата на единиците на шифрата е помала од цифрата на десетките, а производот на двете цифри завршува на 5. Определи ја шифрата на клучот на Горјан.

**Задача 24.** Провери дали збирот на првите 1000 природни броеви е делив со 77.

**Задача 25.** Определи ги сите природни броеви чиј производ на цифри е еднаков на 528.

**Задача 26.** Кој природен број  $a$ ,  $100 < a < 200$  при делење со 2, 3, 4 и 5 дава остатоци 1, 2, 3 и 4, соодветно?

**Задача 27.** При делење на бројот 2010 со некој двоцифрен број се добива остаток 15. Колку такви двоцифрени броеви постојат?

**Задача 28.** Определи ги количникот и остатокот при делење на изразот

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 + 75$$

со бројот 35.

**Задача 29.** На Дамјан му е ветена награда во вредност на поголемиот од двата собироци чиј збир е 20, а нивниот производ е 96. Колку изнесува наградата на Дамјан?

**Задача 30.** Производот на пет броја поголеми од 10 и помали од 20 изнесува 753984. Кои се тие броеви?

**Задача 31.** Производот на шест броја поголеми од 10, а помали од 20 е 7539840. Кои се тие броеви?

**Задача 32.** При делење на бројот 100 со некој број се добива остаток 6. Определи го делителот. Колку решенија има задачата?

**Задача 33.** Одреди ги сите четирицифрени броеви од облик  $\overline{abba}$  за кои важи равенството  $\overline{abba} \cdot 2 = \overline{ccdd}$ , при што  $a, b, c, d$  се различни цифри.

**Задача 34.** Дали постојат природни броеви  $m$  и  $n$  така што

$$m \cdot n \cdot (m - n) = 2015 ?$$

Образложи го одговорот!

**Задача 35.** Колку четирицифрени природни броеви при делење со 7 и со 41 даваат остаток 5? Кој е најмалиот број со различни цифри од овој вид?

**Задача 36.** При делењето на природните броеви 287 и 431 со природниот број  $n$  се добиваат остатоците 1 и 2, соодветно. При делење на бројот 231 со бројот  $n + 1$  се добива остаток 3. Најди ги сите такви броеви  $n$ .

#### 4. ЗАКЛУЧОК

Во оваа работа се осврнавме на работата со надарените ученици за математика во петто одделение од основното деветгодишно образование. Притоа, покрај тоа што работата со надарените ученици за математика треба да е дел од диференцијацијата на наставата, важно е да се напомене дека, по правило, на оваа возраст треба да заврши препознавањето и идентификацијата на надарените ученици за математика, а самата работа со овие ученици треба да биде организирана така што:

- препознавањето и идентификацијата на учениците надарени за математика ќе се врши согласно карактеристиките на децата надарени за математика,
- за секоја возрасна група ќе се изработи посебна наставна програма, како што е програмата содржана во оваа работа и истата ќе се реализира во текот на целата учебна година, а не само непосредно пред натпреварите за математика, нешто што е практика скоро во сите држави на нашето потесно опкружување,
- за реализирање на програмата за работа со надарени ученици ќе се подготват соодветни дидактички средства, чија подготовка мора да биде поткрепена од надлежните институции, нешто што, колку што ни е познато, не е случај во ниту една држава од нашето потесно опкружување.

#### Литература

1. Đorđević, B.: *Školski oblici podrške u razvoju nadarenih učenika*, Nastava i vaspitanje, Beograd, 1990
2. Gallagher, J. J.: *Teaching the gifted children*, Boston, Allyn & Bacon, 1985
3. Glavche, M., Anevska, K., Malcheski, R.: Working with mathematically gifted students in the initial education – part one, Teacher, Faculty of education, Bitola

4. Glavche, M., Anevska, K., Malcheski, R.: Working with mathematically gifted students in the initial education – part two (accepted at a conference)
5. Heller, K. A., Feldhusen, J. F.: *Identifying and nurturing the gifted. An international perspective*, Studgard, Huber, 1986
6. Malčeski, R., Gogovska, V.: *The Role of Educational method in teaching of gifted and talented students*, The 10<sup>th</sup> International Congress on Mathematical Education, July 4-11, 2004, Copenhagen, Denmark
7. Malčeski, R., Gogovska, V.: *Using means inequality for getting structural mathematical knowledge*, Конференција за работа со надарени ученици, Русе, Бугарија, 2003
8. Malcheski, R., Malcheski, A., Anevska, K., Glavche, M.: *The role of the elementary number theory in the work with mathematically gifted students: the capabilities and challenges*, Teacher Vol. 12, No. 1, pp. 127-139, 2016
9. Polya, D.: *Mathematical Discovery*, Nauka, Moskva, 1976
10. Лесов, Х., Дойчев, С.: *Теми за класна и извънкласна работа по математика*, Регалия, София, 1995
11. Малчески, Р.: *Методика на наставата по математика* (трето издание), Армаганка, Скопје, 2019
12. Малчески, Р., Малческа, Ц.: *Работа со надарени ученици* (второ издание), Армаганка, Скопје, 2019
13. Малчески, Р.: *Математички талент 2* (збирка задачи за петто отделение), Просветно дело, Скопје, 2018
14. Кендеров, П., Гроздев, С.: *Ев ропейския проект MATHEU: откриване, мотивиране и подкрепа на математическите таланти в европейските училища*, Математика и метаматическо образование, 33 пролетна конференция на СМБ, Боровец, 1-4 април 2004, София, 39-49, 2004
15. Гроздев, С., Кендеров, П.: *Инструментариум за откриване и подкрепа на изявени ученици по математика*, Математика и метаматическо образование, 34 пролетна конференция на СМБ, Боровец, 6-9 април 2005, София, 53-64, 2005
16. Кендеров, П., Гроздев, С.: *Диференцираното обучение по математика в европейските училища*, Математика и метаматическо образование, 35 пролетна конференция на СМБ, Боровец, 5-9 април 2006, София, 39-49, 2006