УНИВЕРЗИТЕТ „СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ“ – СКОПЈЕ
ЕКОНОМСКИ ФАКУЛТЕТ – СКОПЈЕ

МОДЕЛИРАЊЕ НА АКТУАРСКИТЕ ЕЛЕМЕНТИ НА ЖИВОТНОТО ОСИГУРУВАЊЕ СО ПРИМЕНА НА МАТРИЧНАТА АЛГЕБРА

(ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА)

MODELING ON ACTUARIAL ELEMENTS OF LIFE INSURANCE WITH APPLICATION OF MATRIX ALGEBRA

(DOCTORAL DISSERTATION)

Кандидат
М-р Марина Величкова

Ментор
Проф. Д-р Драге Јанев

Март, 2013

Во оваа прилика би сакала да ја изразам својата благодарност кон сите кои со сопствените научни сознанија, корисните сугестии и моралната поддршка придонесоа за оформување на овој труд.

Посебно, би сакала да се заблагодарам на мојот ментор, ***Проф. д-р Драге Јанев****, кој и покрај респектабилната презафатеност сесрдно се залагаше и со своите корисни сугестии ми помогна во текот на истражувањата и изработката на трудот.*

Благодарност изразувам и до сите мои колеги за поддршката кои ми ја дадоа во текот на моите истражувања и при изработката на трудот.

Трудот го посветувам на ***мојот татко Стојан Величков****, кој секогаш веруваше во мене и ме поттикнуваше на образование, на* ***фамилијата Величкови****, кои секогаш веруваа дека во образованието треба да се чекори понатаму и на* ***мојот сопруг Гаврило Илиевски*** *– кој влезе во вистинско време во мојот живот и ме направи среќна мајка.*

АПСТРАКТ

Предмет на истражување на оваа докторска дисертација е моделирањето на актуарските елементи на животното осигурување со примена на матричната алгебра. Трудов опстојно ги анализира теоретските основи на матричната алгебра, која наоѓа голема примена во напредната статистика, со што ќе се земе како основа за понатамошно разработување на темата. Овде ќе стане збор за векторскиот простор. Потоа ќе се даде соодветна дефиниција за матриците, која е правоаголна шема на броеви подредени во редови и колони, притоа ќе се опфатат и различните видови на матрици. Ќе се разработат операциите со матрици, матричните полиноми, рангот и транспозицијата на матриците и карактеристичните броеви и вектори на матриците. Откако ќе ја поставиме основата на оваа тема ќе се задржиме на актуарските основи за формирање на тарифата за животно осигурување. Ќе бидат разработени различни видови на животна рента и тоа: пренумерандна и постнумерандна константна животна рента, варијабилна периодична животна рента, исподгодишна и континуелна животна рента. Ќе се разработат и комбинираните модели за осигурување на капитал. Во однос на осигурувањето на две лица, односно взаемното осигурување на две лица, ќе биде вклучена веројатноста за доживување на две лица, комутативните броеви, комбинирани модели за заедничка животна рента и осигурување на капитал. Осигурувачот законски е должен да формира фонд - математичка резерва во кој се прибираат средства од уплатената премија на сите осигуреници. Математичката резерва се пресметува врз основа на утврден процент од уплатените премии, со користење на соодветни актуарски проценки. На крај ќе се разработи матричното дефинирање на актуарските основи на животното осигурување, со што ќе се направи матрично дефинирање на комутативните функции, ќе се пресмета еднократна и годишна веројатна сегашна вредност за поделните видови на животна рента, годишна и исподгодишна нето и бруто премија за осигурување на капитал и рентни осигурувања и осигурување на капитал за две лица. Од сето ова се доаѓа до заклучок дека животоното осигурување е единствено меѓу финансиските инструменти. Тоа е еден, ако не и единствен меѓу финансиските инструменти која е базиран на грижата и љубовта. Иако може да се нема лична корист од животното осигурување, вистинскиот поттик е љубовта за оние за коишто се грижиме најмногу – за да бидете сигурни дека тие се згрижени.

Клучни зборови: животно осигурување, матрична алгебра, векторски простор, матрици, животна рента, осигурување на капитал, осигурување на две лица, математичка резерва, премија, комутативни функции.

SUMMARY

The subject of this doctoral dissertation research is modelling the actuarial elements of life insurance by implementation of the matrix algebra. This paper comprehensively analyzes the theoretical basis of the matrix algebra, which is largely applied in the advanced statistics, which will be taken as the basis for further elaboration on the subject. Here we will discuss the vector space. Then it will be given an appropriate definition of matrices, which is a rectangular pattern of numbers arranged in rows and columns, thus we will include various types of matrices. We will develop the operations with matrices, matrix polynomials, rank and transposition of matrices and characteristic numbers and vectors of matrices. After setting the stage on this topic we will focus on actuarial basis for the formation of life insurance tariff. We will work out different types of life rent as follows: anticipative and discursive constant life rent, variable periodic life rent, and under-annual and continuous life rent. We will also develop the combined models for insurance of capital. In terms of insurance of two individuals or mutual insurance of two individuals, we will include the likelihood of two individuals to be alive, commutative numbers, combined models for mutual life insurance rent and capital insurance. The insurer is legally obliged to set up a fund - mathematical reserve that is used to collect the funds from the paid premium of all insurers. The mathematical reserve is calculated on the basis of a predetermined percentage of premiums paid, using appropriate actuarial estimates. At the end we will elaborate the matrix defining the actuarial bases of life insurance, thus defining the matrix of the commutative functions, it will be calculated the one-off premium and annual probable present value of different types of life rent, annual and under-annual net and gross premium for insurance of capital and rental insurances and insurance of capital for two individuals. The aforementioned leads us to the conclusion that the life insurance is unique among the financial instruments. It is one, maybe the unique one among the financial instruments which is based on the care and love. While there may be no personal benefit from the life insurance, the real incentive is the love for those we care most about - to be certain that they are taken care of.

Keywords: life insurance, matrix algebra, vector space, matrices, life rent, insurance of capital, insurance of two individuals, mathematical reserve, premium, commutative functions.

СОДРЖИНА

ВОВЕД

Во динамичното опкружување во кое живееме, во услови на подобрување на животот на своите блиски, нема граѓанин кој не мисли на себе, на својата иднина и на иднината на своето семејство. Поради тоа, животното осигурување е повеќе од потребно. Животното осигурување значи штедење, а штедењето значи долгорочна сигурност и инвестирање во иднината. Целта на животното осигурување е преку планирање на иднината, да се обезбеди полесно справување со предизвиците во современиот живот.

Полисата за животно осигурување е уникатен финансиски производ кој нуди двојна поволност: истовремено сте осигурени и штедите. Доколку настане некој од ризиците кои ги покрива, корисникот на осигурувањето ја добива целата осигурена сума. Доколку не настане некој од ризиците кои ги покрива, осигуреникот го добива штедниот дел, зголемен за износот што го вложил во полисата, пред сè поради приписот на добивка кој се одвојува секоја година. Имајќи предвид дека воспоставениот пензиски систем е неодржлив на долг рок, полисата за животно осигурување е вистински одговор во што треба да се штеди за мирна старост. Како клучни конкуренти на полисата за животно осигурување се наметнуваат: вложувањето во банки, во инвестициски фондови и во пазарот на капитал. Сепак, вистинското конкурентно опкружување за овој производ не е развиено, бидејќи речиси и да не постои друг производ кој овозможува долгорочно и пензиско штедење, притоа покривајќи ризици од појава на болест или несреќен случај.

Премија е износот (влогот) кој се одвојува (штеди) за полисата. Премијата по дефиниција е цена на ризикот. Односно тоа е фиксна сума на пари која осигуреникот и ја плаќа на осигурителната компанија за да добие соодветна осигурителна полиса и да се потпише договорот за осигурување. Премија е цената која осигуреникот ја плаќа заради постоењето на ризикот. Во осигурително-правна смисла под ризик се подразбира можност за настанување на извесен настан кој може да предизвика штета на имотот или да го повреди телесниот интегритет на човекот, односно да му нанесе смрт.

Во основа, главната улога на актуарската математика во животното осигурување е да ја пресмета веројатноста дека одреден настан може да му се случи на осигуреникот и да ја пресмета цената која може да произлезе. На овој начин, се добиваат релативно точни статистики за смртноста, инвалидитетот и болестите.

Еднаш кога ќе се добијат статистиките, со актуарската математика за животно осигурување може да се пресмета цената на конкретната осигурителна полиса за корисникот. Овие полиси варираат според потребите на клиентите, желбите и ситуациите. Осигурителните компании имаат потреба од актуарската математика за да ја пресметаат веројатноста и да ги осигураат нивните осигурителни полиси дека можат сигурно да ги покријат клиентите. Во исто време, компаниите сакаат да им се загарантира дека сепак ќе можат да остварат профит.

За да се направи ова, се развиваат математички модели за стапките и времето на настаните со проучување на настаните од неодамнешното минато и понекогаш развиваат очекувања за тоа како овие изминати настани ќе се променат со текот на времето и прават очекувани стапки за тие настани во иднина, вообичаено засновани на возраста или други релевантни карактеристики на популацијата. Овие таблици се нарекуваат таблици на смртноста, доколку ја покажуваат стапката на смртност, и таблици на морбидност, доколку покажуваат различни типови на болести или стапки на инвалидитет.

Изборот на таблиците на веројатност кои ќе се применуваат при пресметката на математичката резерва (како таблици на смртност, таблици на заболување, таблици на брачен статус, таблици на откажување од осигурување и слично) треба да биде прудентен. При пресметката треба да се земат предвид сите релевантни трендови во искуството на Друштвото и осигурителната индустрија во целина, очекуваните трендови, планираната политика на преземање во осигурување и сите други очекувани промени кои значајно можат да имаат влијание во резултатот од пресметката.

Кај договорите за осигурување кај кои претпоставката за намалување на смртноста ја зголемува математичката резерва, при одредување на смртноста во пресметката на математичката резерва треба да се примени соодветна корекција на идните намалувања на смртноста. Кај осигурувањата на живот кои го покриваат ризикот на смрт и здравствените осигурувања, при одредување на веројатноста на смртност и заболување треба да се земат предвид можните промени на ризикот од веќе познати болести чие влијание не е евидентирано во постоечките таблици на веројатност.

При избор на таблици на веројатност за пресметка на математичката резерва, по правило треба да се користат најновите службени таблици на веројатност и други статистички податоци објавени од надлежен орган во Република Македонија. По исклучок, може да се користат и други таблици на веројатност ако со нивна примена се обезбедува исполнување на сите обврски од договорот (вклучувајќи ја и откупната вредност), се обезбедува заштита на интересите на осигурениците или корисниците на осигурувањето, или се добива поголем износ на математичка резерва за целиот период на траење на договорот. Користените таблици на веројатност треба да бидат обелоденети во актуарскиот извештај.

ОБРАЗЛОЖЕНИЕ НА ПРЕДЛОГ-ТЕЗИТЕ:

Во услови на брз развој на финансиските пазари во светот и зголемувањето на понудата и побарувачката на финансиските инструменти од најразвиените па сѐ до најмалку развиените и пазарите во развој, значително место и улога имаат осигурителните производи.

Основната претпоставка за осигурувањето е всушност постоењето на ризик. Ризикот постои секогаш кога постои можност за варирање на крајниот резултат на некоја акција. Само ако постои определен ризик, настанува и економска потреба за негово покривање по пат на осигурување. Самиот збор осигурување означува сигурност, верување во нешто, обезбедување и ја изразува целта на осигурувањето која, воопштено, се состои од пружање на некоја сигурност.

Од технички апект, осигурувањето е математичко-статистичка категорија која се манифестира преку атомизирање на ризикот, односно негово распоредување на повеќе осигуреници и нивелирање, изедначување на многу пониско ниво. Техничата основа на осигурувањето, односно актуарската организација е специфична за осигурувањето. Без научно базирана техничка организација нема модерно осигурување. Основните задачи на техничката организација се: постигнување на рамнотежа на фондот за осигурување, групирање на ризикот по различни опасности и пресметка на премиските резерви кај осигурувањето на живот. Елементи на техничката организација се: формирање на заедница на ризик, примена на методите на математиката и статистиката и поврзување на заедниците на ризик поради израмнување на ризикот.

Актуарската математика, како научна дисциплина, со бројните методи и модели настојува да ја збогати техничката основа на осигурувањето, со цел да се создадат услови за развој и унапредување на осигурувањето на живот. Актуарската математика е тесно поврзана со финансиската математика, бидејќи и двете проблематики се засновани на вкаматувањето. Разликата е во тоа што финансиската математика не се базира на староста на лицето. Така, според финансиската математика, кога едно лице ќе се договори со банката извесен период да прима рента, тогаш и по неговата смрт рентата ќе се исплатува на неговите наследници. Од друга страна, според актуарската математика, приемот на рентата е поврзан со животот на лицето и со смртта на осигуреното лице се гасне и правото на прием на рента. Со други зборови, финансиската математика е безлична, додека актуарската математика е лична. Финансиската математика се применува главно во банкарското работење, а актуарската математика има примена кај друштвата за осигурување и слични организации.

Во првиот дел од трудот ќе се задржиме на теоретските основи на матричната алгебра, која наоѓа голема примена во напредната статистика, со што ќе се земе како основа за понатамошно разработување на темата. Овде ќе стане збор за векторскиот простор. Потоа ќе се даде соодветна дефиниција за матриците, која е правоаголна шема на броеви подредени во редови и колони, притоа ќе се опфатат и различните видови матрици. Ќе се разработат операциите со матрици, матричните полиноми, рангот и транспозицијата на матриците и карактеристичните броеви и вектори на матриците.

Откако ќе ја поставиме основата на оваа тема, ќе се задржиме на актуарските основи за формирање на тарифата за животно осигурување. Рентата е износ кој се прима во постојани временски интервали. Рентите чиешто примање е поврзано со животот на лицето кое ја прима неа, се изучуваат во актуарската математика, која е цел на нашето истражување. Затоа овде ќе бидат разработени различни видови на животна рента, и тоа: пренумерандна и постнумерандна константна животна рента, варијабилна периодична животна рента, исподгодишна и континуелна животна рента. Ќе се разработат и комбинираните модели за осигурување на капитал. Во однос на осигурувањето на две лица, односно взаемното осигурување на две лица, ќе биде вклучена веројатноста за доживување на две лица, комутативните броеви, комбинирани модели за заедничка животна рента и осигурување на капитал.

Осигурувачот законски е должен да формира фонд - математичка резерва во кој се прибираат средства од уплатената премија на сите осигуреници. По правило, се пресметува посебно за секој договор за осигурување и така собраните средства се уплатуваат на посебна сметка. Се пресметува врз основа на утврден процент од уплатените премии, со користење на соодветни актуарски проценки. Математичката резерва е строго заштитена со законски одредби, како во однос на пресметката така и во однос на вложувањето. Во овој дел ќе се разработат моделите за пресметување на премиски резерви, и тоа: моделите за индивидуално пресметување на премиските резерви, за групно пресметување, апроксимативно пресметување и ќе направиме избор на оптимален модел за групно пресметување на премиските резерви.

Во последниот дел од овој труд ќе се разработи матричното дефинирање на актуарските основи на животното осигурување, со што ќе се направи матрично дефинирање на комутативните функции, ќе се пресмета еднократна и годишна веројатна сегашна вредност за пооделните видови на животна рента, годишна и исподгодишна нето и бруто премија за осигурување на капитал и рентни осигурувања и осигурување на капитал за две лица.

Од сето ова се доаѓа до заклучок дека животоното осигурување е единствено меѓу финансиските инструменти. Тоа е еден, ако не и единствен меѓу финансиските инструменти кој е базиран на грижата и љубовта. Иако може да се нема лична корист од животното осигурување, вистинскиот поттик е љубовта за оние за коишто се грижиме најмногу – за да бидете сигурни дека тие се згрижени.

Интересно е што додека еден се грижи за финансиските потреби и желби на сопружникот или за следните генерации, со животното осигурување, исто така, може да се развијат и да се изградат и сопствените финансиски цели за време на животот. На пример, затоа што имате доволно животно осигурување, вие можете да користите повеќе од своите средства, да уживате во животот во пензија. Зошто е тоа така? Затоа што ако вие знаете дека имате доволно животно осигурување, нема да се чувствувате како да го намалувате своето наследство со трошење на дел од својата основа.

Осигурувањето на живот како најзначаен облик на осигурување во развиените земји сочинува 70% од вкупното портфолио на осигурување. Тоа е разбирливо имајќи го предвид фактот дека колку повеќе е развиено осигурувањето на живот, толку повеќе средствата за осигурување пружаат поволна можност за долгорочни пласмани (инвестиции) и на тој начин ја помагаат економската активност и економскиот развој на земјата. Временското некоиндицирање на уплатите и исплатите на осигурувањето на живот, односно на плаќањето на премија однапред, за разлика од исплатата на осигурениците, која се врши сукцесивно, на тој начин и тогаш кога настанува остварувањето на ризикот, овозможува формирање на премиската резерва. Средствата на премиската резерва се долгорочни, големи и трајни и како такви можат да се вложуваат на пазарот на пари и капитал. Овие средства најчесто се вложуваат во обврзници, акции, недвижност, хипотекарни заеми. Што значи, со помош на средствата на премиската резерва кои се иманентни на осигурувањето на живот, осигурителните компании претставуваат еден од најзначајните учесници на финансискиот пазар.

Осигурувањето на живот кај нас е многу малку застапено и на него припаѓа помалку од 6% од вкупното портфолио на осигурување. Меѓутоа, во периодот на формирање на финансискиот пазар за осигурителните компании да добијат место и улога на значаен финансиски учесник, треба да се развиваат различни видови на осигурување на живот. Свесни за фактот дека осигурувањето на живот зависи од висината на националниот доход и стабилноста на домашната валута, а пред сѐ од довербата на граѓаните во овој вид осигурување, мора да се развиваат не само претпоставките за неговиот развој туку и да се едуцураат граѓаните – потенцијалните осигуреници укажувајќи им на значењето на осигурувањето на живот и на нивната лична корист од таквото, специфично штедење.

3. ПРЕДМЕТ, ЦЕЛИ И МЕТОДОЛОГИЈА НА РАБОТА

1. Предмет на трудот

Предмет на докторскиот труд ќе биде моделирање на актуарските елементи на животното осигурување со примена на матричната алгебра, со што ќе бидат подетално разработени теоретските основи на матричната алгебра и нејзината примена во моделирањето на актуарските елементи на животното осигурување.

2. Цели на трудот

Цели на трудот се следниве:

- разработување на теоретските основи на матричната алгебра, во кои се вклучени: векторскиот простор, дефинирање на матриците и видови матрици, операции со матриците, матрични полиноми, ранг и транспозиција на матриците и карактеристични броеви и вектори на матриците.
- разгледување на актуарски основи за формирање на тарифата за осигурување на живот, и тоа за: пренумерандна и постнумерандна константна животна рента, варијабилна периодична животна рента, исподгодишна и континуелна животна рента, комбинирани модели за осигурување на капитал и осигурување на две лица.
- разработување на математичките (премиски) резерви за рентни осигурувања и осигурување на капитал, и тоа за: моделите за индивидуално пресметување на премиските резерви, моделите за групно пресметување на премиските резерви, моделите за апроксимативно пресметување на премиските резерви и избор на оптимален модел за групно пресметување на премиските резерви.
- разработување на матричното дефинирање на актуарските основи на осигурувањето на живот, матрично дефинирање на комутативните функции, еднократна и годишна веројатна сегашна вредност за поодделните видови на животна рента, годишна и исподгодишна нето и бруто премија за осигурување на капитал, рентни осигурувања и осигурување на капитал за две лица

3. Методологија на истражување

Во изработката на трудот ќе бидат користени податоци и информации добиени од секундарни извори, т.е. податоци и информации од објавена стручна литература, книги, публикации, списанија, семинари и сл. Воедно, голем дел од податоците ќе бидат добиени од интернет.

Сите овие податоци ќе бидат обработени со цел да се добијат информации согласно потребите на трудот, при што ќе се користат методите на индукција и дедукција, како и статистички методи.

Освен погоре наведените секундарни извори, ќе бидат користени и примарни извори, т.е. финансиски извештаи и публикации на осигурителни компании во Македонија земени од интернет или на некој друг начин.

I. ТЕОРЕТСКИ ОСНОВИ НА МАТРИЧНАТА АЛГЕБРА

Во ова поглавје ќе стане збор за линеарната алгебра и нејзината примена во областа на економската наука. Линеарната алгебра е значајна од повеќе причини:

1. Голем дел од економските појави и процеси можат математички да се презентираат со помош на линеарни равенки. Освен тоа, во случаите кога се работи за нелинеарни врски и односи, најчесто е можно да се постигне доволно блиска линеарна апроксимација. Соодветна илустрација е дадена на сликата 1.

Слика 1

Ако непрекинатата крива линија претставува одредена реална нелинеарна врска, линеарната апроксимација во облик на непрекината права линија би покажувала значително отстапување. Меѓутоа, со поделбата на три подрачја $r_1; r_2$ и r_3, може да се постигне поблиска линеарна апроксимација за секое подрачје.

2. Методите на анализа и на изнаоѓање решенија кај линеарната алгебра обично се поедноставни во споредба со методите што се применуваат во рамките на нелинеарната алгебра. Од тие причини, напорите да се задоволи барањето за запазување на реалната нелинеарност честопати резултираат во трансформација на варијаблите, со цел да се добие линеарна равенка која е поедноставна за решавање. На пример нелинеарната функција:

$$y = ax^b$$

со логаритмирање може лесно да се трансформира во функцијата:

$$\log y = \log a + b \log x$$

која што, всушност, претставува линеарна функција со две варијабли: $\log y$ и $\log x$.

3. Значителен дел од методите што се користат во рамките на нелинеарната алгебра имаат доста сличности или, едноставно, претставуваат дополнување на методите користени кај линеарната алгебра. Оттука, може да се заклучи дека доброто познавање на линеарната алгебра претставува предуслов за изучување на нелинеарната алгебра.

Во рамките на линеарната алгебра особено значајно место и припаѓа на *матричната алгебра*. Во таа смисла, предмет на наше внимание ќе бидат детерминантите (како поим тесно поврзан со поимот матрици), матриците (видови, особини, операции и нивна примена во решавање на одредени проблеми од економската теорија и практика) и векторите (операции, линеарна комбинација и зависност и независност на векторите).

1. ВЕКТОРСКИ ПРОСТОР

Линеарната алгебра ги изучува линеарните пресликувања во конечно димензионалните векторски простори. Во некои подрачја на математиката, вклучувајќи ја и линеарната алгебра, подобро е теоремите и интуитивните појави кои ги вклучуваат комплексните броеви да се истражуваат паралелно со оние на реалните броеви. Поради ова, ќе започнеме со воведување на комплексните броеви и нивните основни својства.

1.1. Комплексни броеви

Знаеме дека множеството R е множество на реалните броеви. Комплексните броеви се воведени за да можеме да пресметаме квадратен корен од негативен број. Клучната идеја е да се воведе квадратен корен од -1, означен како *i*[1], и со него да се манипулира користејќи ги вообичаените правила во аритметиката. По правило, ***комплексен број*** е подреден пар (*a*,*b*), каде што $a,b \in R$, но ние го запишуваме како $a+bi$. Множеството на сите комплексни броеви се означува со C:

$$C=\{a+bi : a,b \in C\}.$$

Нека $a \in R$, бројот $a+0i$ го препознаваме како реален број a. Според тоа, за множеството R можеме да размислуваме како за подмножество од множеството C.

Операциите собирање и множење во C се дефинирани со:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i\ ,$$

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i\ ;$$

каде $a,b,c,d \in R$. Користејќи го множењето дефинирано погоре, може да се утврди дека $i^2=-1$. Оваа формула може да се изведе повикувајќи се на фактот дека $i^2=-1$, и потоа користејќи ги вообичаените правила на аритметиката.

[1] Симболот ***i*** за означување на $\sqrt{-1}$ за првпат го употребил швајцарскиот математичар Леонард Ојлер во 1777 година

Користејќи ги познатите својства на реалните броеви, може да се утврди дека операциите собирање и множење во множеството C ги задоволуваат следните својства:

комутативност

$w+z=z+w$ и $wz=zw$ за секои $w,z\in C$;

асоцијативност

$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$ и $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$ за секои $z_1,z_2,z_3\in C$;

постоење на неутрални елементи (нула и единица)

$z+0=z$ и $z1=z$ за секој $z\in C$;

постоење на спротивен елемент (во однос на собирањето)

за секој $z\in C$, постои единствен $w\in C$ така што $z+w=0$;

постоење на инверзен елемент (во однос на множењето)

за секој $z\in C$, каде $z\neq 0$, постои единствен $w\in C$ така што $zw=1$;

дистрибутивност

$\lambda(w+z)=\lambda\cdot w+\lambda\cdot z$ за секои $\lambda,w,z\in C$.

За $z\in C$, со $-z$ ќе го означиме бројот спротивен на z. Значи, $-z$ е единствениот комплексен број таков што

$$z+(-z)=0$$

Операцијата одземање во C е дефинирана како

$$w-z=w+(-z) \text{ за } w,z\in C.$$

За $z\in C$ каде $z\neq 0$, со $1/z$ ќе го означиме бројот инверзен на бројот z. Значи, $1/z$ е единствениот комплексен број така што:

$$z(1/z)=1$$

Операцијата делење во C е дефинирана како

$$w/z = w(1/z) \text{ за } w, z \in C \text{ каде } z \neq 0.$$

Со F ќе ги означиме двете множества: R и C. Елементите на F се нарекуваат скалари. Зборот "скалар", што значи број, често се користи кога сакаме да истакнеме дека некој објект е број, спротивно на вектор.

За $z \in F$ и за природниот број m, дефинираме z^m за да означиме дека бројот z се множи сам со себеси m пати:

$$z^m = \underbrace{z \cdot \ldots \cdot z}_{m.пати}$$

Јасно е дека $(z^m)^n = z^{mn}$ и $(wz)^m = w^m z^m$ за секои $w, z \in F$ и за секои m, n природни броеви.

1.2. Дефинирање на векторски простор

Пред да дефинираме што е тоа векторски простор, да ги погледнеме следниве два значајни примера. Векторскиот простор R^2, којшто може да се разгледува како рамнина, е составен од сите подредени парови од реални броеви:

$$R^2 = \{(x, y) : x, y \in R\}.$$

Векторскиот простор R^3, којшто може да се разгледува како вообичаен простор, е составен од сите подредени тројки од реални броеви:

$$R^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in R\}.$$

Нека n е ненегативен цел број. Подредена **n – торка** (подредена низа со должина n) е подредена колекција од n објекти (кои можат да бидат броеви, други низи или некои поапстрактни ентитети), разделени со запирка и ставени во загради. Една подредена n – торка го има следниов облик:

$$(x_{1,} x_2, \ldots, x_n)$$

За низа со должина 2 се користи називот подреден пар, а за низа со должина 3 подредена тројка. За $j \in \{1,...,n\}$, велиме дека x_j е j-тата координата на подредената низа дадена погоре. Така, x_1 се нарекува прва координата, x_2 се нарекува втора координата, и така натаму.

По дефиниција, секоја подредена низа има конечна должина претставена со ненегативен цел број, така што објектот со следниов облик:

$$(x_{1,} x_2,...)$$

за кој можеме да кажеме дека има неограничена (бесконечна) должина, не е подредена низа. Низата со должина 0 го има ваквиот облик: ( ) и во нашиот случај ќе ја разгледуваме како подредена низа.

Две низи се еднакви ако и само ако тие имаат еднакви должини и соодветните координати им се еднакви. Со други зборови $(x_{1,} x_2,..., x_m) = (y_{1,} y_2,..., y_n)$ ако и само ако m=n и $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, ..., $x_m = y_n$.

Низите се разликуваат од множествата по две работи: во низите редоследот е битен и дозволено е повторување, додека во множествата редоследот и повторувањето се небитни.

Матрицата која има само еден ред или само една колона се нарекува вектор.

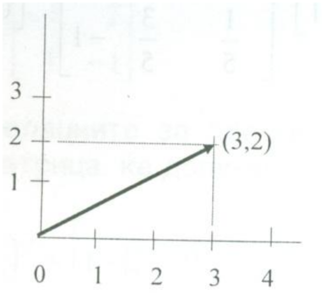
Општата форма на едноредна матрица или вектор-ред би била:

$$a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & .... & a_n \end{bmatrix}$$

Соодветно, едноколона матрица или вектор-колона може да се претстави со следниов општ облик:

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ .. \\ .. \\ .. \\ a_n \end{bmatrix}$$

За појасна илустрација на поимот вектор може да послужи геометриската интерпретација на сликата број 2.



Слика 2

Ова е, всушност геометриски приказ на векторот $a = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}$, како единствена права линија што може да се повлече од координатниот почеток (0,0) до точката (3,2). Соодветно на ова, иако не е едноставно за графичко прикажување, било кој вектор од n -елементи би можеле да го замислиме како правец до одредена точка во n-димензионален простор.

1.3. Алгебарски операции со векторите

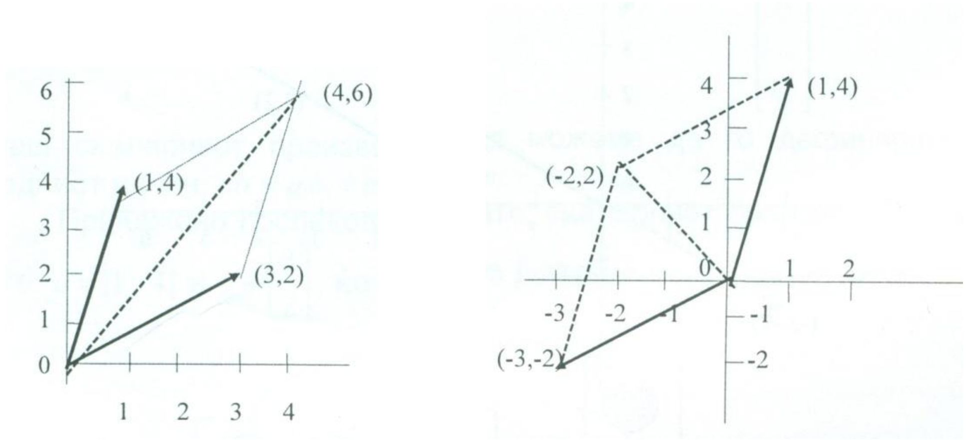
Собирање и одземање на вектори. Векторите можат да се собираат или да се одземаат само ако имаат еднаков број елементи, и тоа така што се собираат, односно одземаат соодветните елементи. Општата формула за собирање, односно одземање на два n -димензионални вектори би била:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & .. & a_n \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & .. & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \pm b_1 & a_2 \pm b_2 & a_3 \pm b_3 & \pm ... \pm & a_n \pm b_n \end{bmatrix}$$

или ако станува збор за вектор – колони:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \\ . \\ . \\ a_n \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \\ \\ . \\ . \\ a_n \pm b_n \end{bmatrix}$$

Геометриската интерпретација на овие две операции е дадена на сликата број 3.



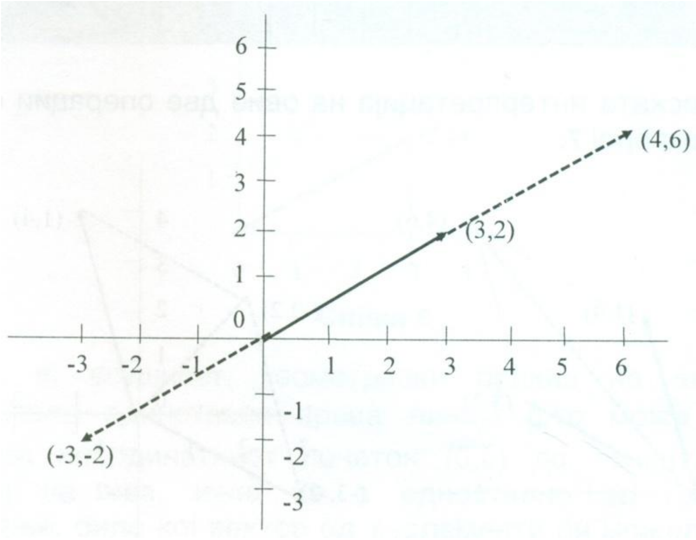
Слика 3

Ако од векторите $a=\begin{bmatrix}1 & 4\end{bmatrix}$ и $b=\begin{bmatrix}3 & 2\end{bmatrix}$ конструираме паралелограм, тогаш нивниот збир $a+b=\begin{bmatrix}4 & 6\end{bmatrix}$ ќе биде дијагоналата на тој паралелограм (слика 3). Со примена на истиот геометриски метод може да ја добиеме и разликата меѓу овие два вектори $a-b=\begin{bmatrix}-2 & 2\end{bmatrix}$ (слика 3).

Множење на вектор со скалар. Векторот се множи со еден број – или според терминологијата на матричната алгебра, со *скалар* – така што секој негов елемент се множи со тој број. Општата формула за извршување на оваа операција е:

$$k\cdot\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\ \\ .\\ .\\a_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ka_1\\ka_2\\ka_3\\ \\ .\\ .\\ka_n\end{bmatrix} \text{ или } k\cdot\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & .. & a_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ka_1 & ka_2 & ka_3 & .. & ka_n\end{bmatrix}$$

Сликата 4 претставува геометриска интерпретација на множењето на векторот $a=\begin{bmatrix}3 & 2\end{bmatrix}$ со броевите $k_1=2$ и $k_2=-1$.



Слика 4

Оттука, може да се заклучи дека множењето на векторот a со позитивен скалар k ќе резултира во вектор чија насока се совпаѓа со насоката на векторот a, но има различен крај, освен во случај кога $k=1$. Ако $k>1$, векторот ќе се продолжи; во случај кога $0<k<1$, векторот ќе биде пократок; додека ако $k=0$, ќе се добие точка која се совпаѓа со координатниот почеток, односно ќе се добие *нулти вектор* (во конкретниов пример нултиот вектор би бил $\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$). Множењето со негативен скалар $(k<0)$ за резултат ќе има вектор со спротивна насока од насоката на векторот a.

Множење на вектор со вектор. Множењето на вектори се карактеризира со извесни специфичности. За разлика од претходно опишаните операции, каде што како резултат повторно се добиваше вектор, при множење на вектори може да добиеме скаларен (внатрешен) производ или матрица од повисок ред.

Скаларен производ се добива при множење на вектор-ред со вектор-колона, при што векторите мора да имаат еднаков број елементи. Пресметувањето на скаларниот производ се врши на тој начин што се множат соодветните елементи од двата вектори и така добиените резултати се собираат.

Ако се дадени векторите: $a=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \ldots & a_n\end{bmatrix}$ и $b=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ ..\\ ..\\ b_n\end{bmatrix}$, тогаш скаларниот производ

можеме да го дефинираме на следниот начин: $ab=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$.

Поимот скаларен производ на вектори е од големо значење за соодветно објаснување на операцијата множење на матрици.

При множење на вектор-колона од n-елементи и вектор-ред од m-елементи се добива матрица од n-редови и m-колони. Притоа, секој елемент на матрицата претставува производ на соодветните елементи.

Производ на векторите $b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ .. \\ b_n \end{bmatrix}$ и $a=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}$ ќе биде матрицата:

$$ba=\begin{bmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 & \dots & \dots & b_1a_n \\ b_2a_1 & b_2a_2 & \dots & \dots & b_2a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_na_1 & b_na_2 & \dots & \dots & b_na_n \end{bmatrix}$$

1.4. Линеарна зависност и независност на векторите

Поимот линеарна зависност и независност на векторите е во најнепосредна врска со поимот линеарна комбинација на векторите. Ако се дадени векторите $a_i \quad (i=1,2,\dots,n)$ и скаларите $\lambda_i \quad (i=1,2,\dots,n)$, нивната линеарна комбинација може да се изрази на следниов начин:

$$a_1\lambda_1+a_2\lambda_2+a_3\lambda_3+\dots+a_n\lambda_n=F$$

И геометриската интерпретација на линеарната комбинација на векторите претставува само дополнување на она што веќе беше кажано: операцијата множење со скалар ќе доведе до поместување на краевите на векторите a и b, а од аспект на операцијата собирање на векторите потребна е конструкција на паралелограм.

Откако го објаснивме поимот линеарна комбинација на векторите, може да се пристапи кон дефинирање на поимот линеарна зависност на векторите. Имено, за векторите a_1, a_2, ... , a_n може да се каже дека се ***линеарно зависни***, ако и само ако постојат скалари λ_1, λ_2, ... , λ_n од кои барем еден не е еднаков на нула, така што:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = N \quad \text{(N - нулти вектор)}$$

Во спротивно, т.е. ако сите скалари λ_1, λ_2, ... , λ_n се еднакви на нула, векторите a_1, a_2, ... , a_n ќе бидат ***линеарно независни***.

Така, ако векторите a_1, a_2, ... , a_n се линеарно зависни, односно ако:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = 0$$

каде што, на пример $\lambda_n \neq 0$, тогаш:

$$a_n = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} a_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_3} a_2 - \ldots - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} a_{n-1}$$

Нека $\mu_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda_n} \quad i = 1,2,\ldots,n-1$, во тој случај векторот a_n можеме да го изразиме како:

$$a_n = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \ldots + \mu_{n-1} a_{n-1}$$

односно како линеарна комбинација на векторите a_1, a_2, ... , a_{n-1}.

Оттука, линеарната зависност на векторите можеме да ја редефинираме на следниот начин: векторите a_1, a_2, ... , a_n се линеарно зависни ако и само ако кој било од нив може да се изрази како линеарна комбинација на останатите вектори.

Множеството од n-вектори a_1, a_2, ... , a_n се линеарно-зависни ако и само ако постои множество од скаларни големини λ_1, λ_2, ... , λ_n (каде што барем една скаларна големина е различна од нула), односно: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = 0$. Од друга страна, претходната равенка е задоволена само ако $\lambda_i = 0 \quad \forall i$, во тој случај векторите се линеарно-независни.

Во врска со линеарната зависност, односно независност на векторите, потребно е да се истакне дека во случај кога постојат n–линеарно-независни вектори, тие ја сочинуваат т.н. база на n-димензионален простор. Сите останати вектори во тој простор можат да бидат изразени како линеарна комбинација на векторите што ја сочинуваат базата. Ова, всушност, значи дека може да постојат само два линеарно-независни дводимензионални вектори, три линеарно-независни тродимензионални вектори, итн. Следува заклучокот дека во n-димензионален простор постојат n–линеарно-независни вектори кои ја сочинуваат неговата база, а останатите вектори во тој простор се линеарно-зависни од базичните вектори. Таквиот n-димензионален простор во литературата честопати може да се сретне и под името *Евклидов простор*.

2. ДЕФИНИРАЊЕ НА МАТРИЦИТЕ И ВИДОВИ МАТРИЦИ

2.1. Детерминанти

Да го анализираме системот од две линеарни равенки со две непознати:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y = b1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b2 \end{array} \right\}$$

Ако го примениме методот на еднакви коефициенти, со цел да ја елиминираме непознатата x, односно y, ќе ги добиеме следниве две равенки:

$$\begin{array}{l} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{array}$$

Во случај кога $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, вредноста на непознатите ќе ја пресметаме на следниот начин:

$$x = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad y = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Евидентно е, именителите за непознатите x и y се исти. Изразот $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ се нарекува детерминанта од дадениот систем на равенки (детерминанта од втор ред) и таа најчесто се запишува во следниов облик:

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Броевите $a_{11,}a_{12,}a_{21}$ и a_{22} се нарекуваат елементи (членови) на детерминантата. Елементите a_{11} и a_{12} припаѓаат на првиот ред, а a_{21} и a_{22} на вториот ред, додека елементите a_{11} и a_{21} припаѓаат на првата колона, а a_{12} и a_{22} на втората колона. Дијагоналата која започнува од левиот горен кон десниот долен агол од детерминантата се нарекува главна дијагонала, додека дијагоналата која започнува од левиот долен кон десниот горен агол се нарекува споредна дијагонала. Според тоа, вредноста на детерминантата од втор ред (детерминантата има два реда и две колони) се пресметува на тој начин што од производот на елементите што се наоѓаат на главната дијагонала се одзема производот на елементите што се наоѓаат на споредната дијагонала. При множењето на елементите по дијагоналите, позитивен предзнак има оној производ што се добива од елементи чиј збир на индексите е парен број (производот $a_{11} \cdot a_{22}$ има позитивен предзнак, бидејќи 1+1=2 и 2+2=4). Ако збирот од индексите на елементите што се множат е непарен број, тогаш производот ќе има негативен предзнак (производот $a_{12} \cdot a_{21}$ има негативен предзнак, бидејќи 1+2=3 и 2+1=3).

Изразите $a_{22}b_1 - a_{12}b_2$ и $a_{11}b_2 - a_{21}b_1$ можат да се запишат во облик на детерминанта од втор ред, имено:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

Овие детерминанти претставуваат детерминанти од слободните членови (или детерминанти за непознатите x и y). Според тоа, вредноста на непознатите ќе ја пресметаме на следниов начин:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{12} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

Наведените формули во литературата се познати како **Крамерови[2] формули**.

[2] Gabrijel Cramer, 1849-1917, швајцарски математичар

Во зависност од тоа дали детерминантата на системот или детерминантата од слободните членови се еднакви или различни од нула, можни се следните решенија на системот од равенки:

- ако $\Delta \neq 0,$ системот од равенки има едно решение, велиме дека системот е регуларен,
- ако $\Delta = 0,$ а $\Delta_x \neq 0$ и $\Delta_y \neq 0$, системот нема решение, велиме дека системот е сингуларен,
- ако $\Delta = 0,$ и $\Delta_x = \Delta_y = 0$, системот има бесконечно многу решенија, велиме дека системот е зависен.

Детерминантата од втор ред ја дефиниравме врз основа на постапката за решавање на систем од две линеарни равенки со две непознати. Детерминантата од трет ред ќе ја дефиниравме врз основа на постапката за решавање на систем од три линеарни равенки со три непознати. Да го анализираме следниов систем од линеарни равенки:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = d_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = d_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = d_3 \end{cases}$$

Од дадениот систем (според истата аналогија како и при решавање на системот од две линеарни равенки) може да се формираат следниве детерминанти од трет ред:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & a_{12} & a_{13} \\ d_2 & a_{22} & a_{23} \\ d_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & d_1 & a_{13} \\ a_{21} & d_2 & a_{23} \\ a_{31} & d_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & d_3 \end{vmatrix}$$

Вредноста на детерминантата од трет ред наједноставно ќе ја пресметаме со примена на Сарусовото[3] правило. Според ова правило, потребно е елементите од првиот и вториот ред да се допишат по елементите од третиот ред. Така ќе добиеме, тргнувајќи од првиот ред надолу, три детерминанти од трет ред, при што ќе ги помножиме елементите кои припаѓаат на главната дијагонала. Првите три слога

[3] Sarrus Pierre Frederic, 1798-1861

(добиени тргнувајќи од лево кон десно) ќе бидат позитивни, а другите три слога (добиени тргнувајќи од десно кон лево) ќе бидат негативни. Според тоа, вредноста на детерминантата пресметана со примена на Сарусовото правило изнесува:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \left(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}\right) - \left(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21}\right)$$

Истиот резултат ќе го добиеме ако по третата колона се допишат елементите од првата и втората колона.

$$\Delta = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}\right|$$

$$\Delta = \left(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\right) - \left(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21}\right)$$

Треба да се има предвид дека Сарусовото правило може да се примени само за пресметување на вредноста на детерминантата од трет ред.

2.2. Особини на детерминантите

Во овој дел од трудот ќе ги анализираме некои од особините на детерминантите, кои ќе ни овозможат поедноставно пресметување на вредноста на детерминантата.

- ако во детерминантата елементите од редот се заменат со елементите од колоната, вредноста на детерминантата не се менува.

- детерминантата го менува својот предзнак, но не и својата апсолутна вредност, ако колоните (или редовите) од дадената детерминанта помеѓу себе ги променат своите места.

- ако сите елементи од колоната (или од редот) се помножат со некој број, вредноста на детерминантата е помножена со тој број.

$\bullet$ ако елементите од една колона (или еден ред) се претставаат во вид на збир од два броја, детерминантата може да се напише во вид на збир од две детерминанти.

$\bullet$ вредноста на детерминантата е еднаква на нула во следниве случаи:

а) ако елементите од кои било две колони (или кои било два реда) се еднакви

б) ако елементите од кои било две колони (или кои било два реда) се пропорционални (со ист фактор на пропорционалност), факторот на пропорционалност помеѓу елементите од првиот и третиот ред е два.

в) ако сите елементи од кој било ред или која било колона се еднакви на нула.

$\bullet$ вредноста на детерминантата нема да се промени ако на елементите од една колона (или еден ред) ги додадеме соодветните елементи од друга колона (или ред), помножени со ист фактор.

$\bullet$ детерминантата се множи со некој број така што елементите од еден ред или една колона се множат со тој број.

2.3. Минори и кофактори

Ако во детерминантата:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ги изоставиме редот и колоната, во кој ред, односно колона се наоѓа елементот a_{11}, ќе добиеме детерминанта од втор ред:

$$M_{11}^{'} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Добиената детерминанта се нарекува минор на детерминантата Δ. Минорот $M_{11}^{'}$ се однесува за елементот a_{11}. Во општ случај, за секој елемент на детерминантата Δ одговара еден минор, кој се добива ако во детерминантата се изостави редот и колоната на кој ред, односно колона припаѓа соодветниот елемент. Така, за елементот a_{12} минорот е $M_{12}^{\prime}$.

$$M_{12}^{\prime}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

За елементот a_{13} минорот е $M_{13}^{\prime}$.

$$M_{12}^{\prime}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Детерминантата Δ има вкупно девет минори, преостанатите шест минори се следниве:

$$M_{21}^{\prime}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad M_{22}^{\prime}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$M_{23}^{\prime}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad M_{31}^{\prime}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$M_{32}^{\prime}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \qquad M_{33}^{\prime}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Со примена на минорите вредноста на детерминантата ќе ја пресметаме на следниов начин:

$$\Delta=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{33}a_{12}a_{21}$$

$$\Delta=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+a_{12}(a_{23}a_{31}-a_{33}a_{21})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22})$$

$$\Delta=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\Delta=a_{11}M_{11}^{\prime}-a_{12}M_{12}^{\prime}+a_{13}M_{13}^{\prime}$$

На овој начин, детерминантата Δ ја развиваме по елементите од првиот ред, при што пресметувањето на вредноста на детерминантата од трет ред го сведовме на пресметување на детерминанта од втор ред.

Детерминантата Δ можеме да ја развиеме и по елементите од вториот или третиот ред, на следниов начин:

$$\Delta = -a_{21}M'_{21} + a_{22}M'_{22} - a_{23}M'_{23}$$

$$\Delta = a_{31}M'_{31} - a_{32}M'_{32} + a_{33}M'_{33}$$

Исто така, детерминантата Δ можеме да ја развиеме и преку елементите од првата, втората и третата колона.

$$\Delta = a_{11}M'_{11} - a_{21}M'_{21} + a_{31}M'_{31}$$

$$\Delta = -a_{12}M'_{12} + a_{22}M'_{22} - a_{32}M'_{32}$$

$$\Delta = a_{13}M'_{13} - a_{23}M'_{23} + a_{33}M'_{33}$$

И при развивање на детерминантата по кој било ред или која било колона, предзнакот пред секој елемент се одредува врз основа на парноста или непарноста на индексите, односно, ако збирот на индексите е парен број, предзнакот е позитивен, ако, пак, збирот на индексите е непарен број, предзнакот е негативен. Исто така, предзнакот пред секој елемент, кога детерминантата ја развиваме по која било колона или кој било ред, може да се одреди врз основа на следнава шема од знаци:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} \text{ за детерминантата од трет ред}$$

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix} \text{ за детерминанта од четврт ред}$$

Ако $s(s = i + j)$ е збир на индексите за кој било елемент $(a_{ij} \Rightarrow s = i + j)$ од детерминантата Δ и ако M'_{ij} е минор на тој елемент, тогаш производот:

$$M_{ij} = (-1)^s M_{ij}^{,}$$

се нарекува кофактор или алгебарски комплемент на елементот a_{ij}, при што $M_{ij} = M_{ij}^{,}$ во случај кога s е парен број, а $M_{ij} = -M_{ij}^{,}$ кога s е непарен број. Кофакторот, за кој било елемент, може директно да се пресмета ако во детерминантата за елементот за кој сакаме да го пресметаме кофакторот запишеме еден, а на местото од преостанатите елементи од истиот ред (или истата колона) запишеме нули. Така, на пример, за детерминантата:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Кофакторот за елементот a_{23} ќе го пресметаме на следниов начин:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \Bigg| = a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}$$

Вредноста на детерминантата со примена на кофакторите ќе ја пресметаме на еден од следните начини (во зависност од тоа дали ќе се избере првиот, вториот или третиот ред или, пак, првата, втората или третата колона):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} + a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}M_{21} + a_{22}M_{22} + a_{23}M_{23}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31}M_{31} + a_{32}M_{32} + a_{33}M_{33}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} + a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}M_{12} + a_{22}M_{22} + a_{32}M_{32}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13}M_{13} + a_{23}M_{23} + a_{33}M_{33}$$

2.4. Хомоген систем на равенки

Кај хомогениот систем на линеарни равенки, независните членови се еднакви на нула. Да го анализираме следниов хомоген систем од три линеарни равенки со три непознати:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases}$$

Ако детерминантата од системот е различна од нула, т.е.:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

системот има очигледно (тривијално) решение: x=0, y=0, бидејќи $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$.

Во случај кога $\Delta = 0$, системот е зависен, бидејќи освен очигледното решение $(x = y = z = 0)$, постојат бесконечно многу други решенија.

Ако детерминантата од системот ја развиеме по елементите од третиот ред, ќе добиеме:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{31}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}-a_{32}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}+a_{33}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$$

Да претпоставиме дека барем еден од минорите е различен од нула. По делење на равенките со z, ќе добиеме систем од три линеарни равенки со две непознати.

$$\begin{cases}a_{11}\dfrac{x}{z}+a_{12}\dfrac{y}{z}+a_{13}=0\\ a_{21}\dfrac{x}{z}+a_{22}\dfrac{y}{z}+a_{23}=0\\ a_{31}\dfrac{x}{z}+a_{32}\dfrac{y}{z}+a_{33}=0\end{cases}$$

По воведување на следните замени: $A=\dfrac{x}{z}$ и $B\dfrac{y}{z}$, ќе добиеме:

$$\begin{cases}a_{11}A+a_{12}B+a_{13}=0\\ a_{21}A+a_{22}B+a_{23}=0\\ a_{31}A+a_{32}B+a_{33}=0\end{cases}\qquad\begin{cases}a_{11}A+a_{12}B=-a_{13}\\ a_{21}A+a_{22}B=-a_{23}\\ a_{31}A+a_{32}B=-a_{33}\end{cases}$$

Од првите две равенки произлегува дека:

$$A=\frac{\begin{vmatrix}-a_{13} & a_{12}\\ -a_{23} & a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}\qquad B=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & -a_{13}\\ a_{21} & -a_{23}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}$$

$$A=\frac{x}{z}=x:z=\frac{\begin{vmatrix}-a_{13} & a_{12}\\ -a_{23} & a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}=\begin{vmatrix}-a_{13} & a_{12}\\ -a_{23} & a_{22}\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$$

$$B=\frac{y}{z}=y:z=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & -a_{13}\\ a_{21} & -a_{23}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}=\begin{vmatrix}a_{11} & -a_{13}\\ a_{21} & -a_{23}\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$$

Користејќи ги особините на пропорциите и детерминантите, ќе добиеме:

$$x : y : z = \begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{22} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13} \\ a_{21} & -a_{23} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

што може да се запише и во следниов облик :

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13} \\ a_{21} & -a_{23} \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = k$$

Добиената пропорција ни овозможува да ги формираме бесконечните многу други решенија за хомогениот систем од линеарни равенки.

2.5. Матрици

Многу често, во теоретската и применетата математика се оперира со правоаголен облик на уредени броеви (реални или комплексни), односно функции. Матрицата претставува правоаголна или квадратна шема од броеви (или некои други математички објекти) подредени во редови (m) или колони (n). Броевите (елементите, компонентите) се означуваат со иста буква, а со различни индекси. Вообичаено е првиот индекс да упатува на кој ред, а вториот индекс на која колона припаѓа посочениот елемент. Така, на пример, во општ случај елементот a_{ij} припаѓа на i-тиот ред и j-тата колона (каде i=1;2;…;m и j=1;2;…;n). Матрицата A, која има m редови и n колони (велиме дека димензијата на матрицата е m x n), ќе ја запишеме во следниов облик.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .. & .. & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & .. & .. & .. & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & .. & .. & .. & a_{3n} \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & .. & .. & .. & a_{mn} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

Во литературата се среќаваат и следните нотации за означување на матрицата:

$A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ за i=1;2;…;m и j=1;2;…;n, или $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_m^n$ или $A_{m,n}$

Ако матрицата има еднаков број редови и колони, велиме дека се работи за квадратна матрица (m = n), односно дека матрицата е од n-ти ред. Односно, квадратната шема од n^2 елементи ја нарекуваме квадратна матрица. Квадратната матрица има главна дијагонала, а тоа се елементите: $a_{11}; a_{22}; a_{33};...; a_{nn}$, односно главната дијагонала има насока од левиот горен дел кон долниот десен агол. Треба да се има предвид дека вака дефинираната матрица нема своја вредност, за разлика од детерминантата која има своја бројна вредност. ***Матрицата можеме да ја дефинираме како уредено множество од броеви (реални или комплексни) подредени во редови и колони. Меѓу елементите од еден ред или колона не постои никаква дефинирана релација.***

2.6. Видови матрици

1. Квадратната матрица во која елементите на главната дијагонала се единици, а сите преостанати елементи се нули, се нарекува *единична матрица* и се означува со **E** или со **I**, во германската односно во руската литература.

$$I = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & .. & .. & 0 \\ 0 & 1 & 0 & .. & .. & 0 \\ 0 & 0 & 1 & .. & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & .. & .. & 1 \end{bmatrix}$$

Треба да се има предвид дека единичната матрица е неутрална во однос на сметковната операција множење, односно: $A \cdot E = A$ и $E \cdot A = A$, од каде што произлегува дека единичната матрица е комутативна со секоја квадратна матрица од ист ред: $A \cdot E = E \cdot A$.

2. *Дијагонална матрица* е онаа квадратна матрица каде што елементите од главната дијагонала се различни од нула, а сите други елементи се еднакви на нула.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & .. & .. & 0 \\ 0 & 5 & 0 & .. & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & .. & .. & 8 \end{bmatrix}$$

3. Дијагоналната матрица во која елементите од главната дијагонала се еднакви и различни од нула, а преостанатите елементи се еднакви на нула, се нарекува *скаларна матрица*.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & .. & .. & 0 \\ 0 & 3 & 0 & .. & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & .. & .. & 3 \end{bmatrix}$$

Со оглед на дефиницијата за множење на матрицата со некоја скаларна големина, скаларната матрица може да се запише и во следниов облик:

$$S=3\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & .. & .. & 0 \\ 0 & 1 & 0 & .. & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & .. & .. & 1 \end{bmatrix}=3\cdot E$$

Или во општ случај:

$$S = k \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & .. & .. & 0 \\ 0 & 1 & 0 & .. & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & .. & .. & 1 \end{bmatrix} = k \cdot E$$

4. Квадратната матрица во која елементите се симетрично распоредени во однос на главната дијагонала се нарекува *симетрична матрица*. Симетричната матрица треба да го задоволи следниов услов: $A_s = A_s^{'}$. Меѓу елементите на симетричната матрица постои следниов однос: $a_{ij} = a_{ji}$ за $i \neq j$.

$$A_s = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -4 & -9 & -3 \\ 6 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

Во случај кога квадратната матрица го задоволува условот: $A^{'} = -A$, односно каде $a_{ij} = -a_{ji}$ за $i \neq j$ додека $a_{ij} = 0$ за $i = j$, се нарекува *антисиметрична (косиметрична, алтернативна) матрица* $-A_k$.

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -6 \\ -4 & 0 & -3 \\ 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Врз основа на својството: $A_S = A_S^T$ и $A_k = -A_k^T$, секоја квадратна матрица може да се прикаже како збир од една симетрична и една косиметрична матрица од ист ред, $A = A_s + A_k$. Од каде што произлегува дека: $A^T = A_s^T + A_k^T = A_s - A_k$. Според тоа, симетричната и косиметричната матрица можеме да ги пресметаме на следниов начин:

$$A_s = \frac{1}{2}(A + A^T) \qquad\qquad A_k = \frac{1}{2}(A - A^T)$$

5. *Сингуларната матрица* е квадратна матрица чија детерминанта е еднаква нула:

$$A=\begin{bmatrix}4 & 6\\ 2 & 3\end{bmatrix}\Rightarrow_{\det}A=0 \qquad B=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ -4 & 2 & 8\\ 3 & 1 & -6\end{bmatrix}\Rightarrow_{\det}B=0$$

Несингуларна (или регуларна) матрица е квадратна матрица чија детерминанта не е еднаква на нула:

$$A=\begin{bmatrix}4 & 6\\ 2 & 8\end{bmatrix}\Rightarrow_{\det}A=20 \qquad B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 4\\ 3 & 0 & 2\\ 1 & 5 & 6\end{bmatrix}\Rightarrow_{\det}B=24$$

6. *Триангуларна (триаголна) матрица* е дијагонална и квадратна матрица, каде што елементите само од едната страна од главната дијагонала се еднакви на нула, а од другата страна се различни од нула.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 3 & 5 & 0\\ 1 & 4 & 6\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}7 & 3 & 6 & 9\\ 0 & 2 & 5 & 8\\ 0 & 0 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 9\end{bmatrix}$$

Матрицата која има само елементи на главната дијагонала и на двата реда паралелни со главната дијагонала (различни од нула) се нарекува *Јакобиева или тродијагонална матрица* и се означува со J.

$$J=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0\\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0\\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45}\\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55}\end{bmatrix}$$

Јакобиевата матрица во секој ред, освен во првиот и последниот, има по три елементи различни од нула. Ако Јакобиевата матрица ја транспонираме, ќе добиеме друга матрица, која, исто така, претставува Јакобиева матрица.

$$J^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & 0 & 0 \\ 0 & a_{23} & a_{33} & a_{43} & 0 \\ 0 & 0 & a_{34} & a_{44} & a_{54} \\ 0 & 0 & 0 & a_{45} & a_{55} \end{bmatrix}$$

7. Матрицата во која сите елементи се еднакви на нула се нарекува *нулта матрица* и се означува со 0 или 0_{mn}.

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & .. & .. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .. & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & .. & .. & 0 \end{bmatrix}$$

Треба да се има предвид дека нулта матриците не се секогаш еднакви, на пример нулта матрица од типот 3 x 4 и нулта матрица од типот 5 x 7 не се еднакви. За операцијата собирање на матриците, нулта матрица е неутрален елемент, бидејќи секогаш A + 0 =A. Ако збирот на матриците A и B е нулта матрица (A + B = 0), велиме дека матриците се спротивни. Од каде што врз основа на дефиницијата за еднаквост и збир на матриците произлегува $a_{ij} + b_{ij} = 0 \Rightarrow b_{ij} = -a_{ij}$. Ова покажува дека елементите на спротивните матрици се спротивни броеви, затоа матрицата B, чии елементи се спротивни елементи на матрицата A, може да се запише во следниов облик : $B = \{-a_{ij}\} = -A.$

8. *Инволвентна матрица* е онаа матрица која ако се помножи сама со себе се добива единична матрица, односно: $A \cdot A = I = E.$

9. Квадратната матрица $A(A \neq 0)$ за која $A^p = A(p \in N)$ се нарекува *идепотентна матрица.*

Матрицата $A = \begin{bmatrix} -26 & -18 & -27 \\ 21 & 15 & 21 \\ 12 & 8 & 13 \end{bmatrix}$ е идепотентна бидејќи $A^2 = A.$

Доказ:

$$A \cdot A = \begin{bmatrix} -26 & -18 & -27 \\ 21 & 15 & 21 \\ 12 & 8 & 13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -26 & -18 & -27 \\ 21 & 15 & 21 \\ 12 & 8 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -26 & -18 & -27 \\ 21 & 15 & 21 \\ 12 & 8 & 13 \end{bmatrix}$$

Додека за матрицата А велиме дека е *нулпотентна*, ако постои $p > 1$, така што $A^p = 0$.

Матрицата $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ е нулпотентна, бидејќи $A^4 = 0$.

3. ОПЕРАЦИИ СО МАТРИЦИТЕ

Матриците $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ и $B = \lfloor b_{ij} \rfloor$ велиме дека се еднакви ако се од ист ред и ако имаат идентични елементи на соодветните места во шемата. Односно, две матрици велиме дека се еднакви ако имаат ист ред ($n \cdot m$), ако и само ако $a_{ij} = b_{ij} \ \forall i, j$.

Матриците **A** и **B** се еднакви (**A**=**B**) бидејќи соодветните елементи од двете матрици се еднакви, односно: $a_{11} = b_{11}$; $a_{12} = b_{12}$; $a_{21} = b_{21}$ и $a_{22} = b_{22}$.

Врз основа на ставовите за еднаквост, кои се дефинирани во алгебрата, произлегуваат следниве четири ставови во врска со еднаквоста на матриците:

- ако А и В се кои било две матрици, тогаш или $A = B$ или, пак, $A \neq B$.
- ако А е која било матрица, тогаш $A = A$, став на рефлексија.
- ако $A = B$, тогаш $B = A$, став на симетрија.
- ако $A = B$, а $B = C$, тогаш $A = C$, став за транзитивноста.

За матрицата **A**, која е од ист ред со матрицата **B**, велиме дека е поголема од матрицата **B** (**A**>**B**) ако секој елемент од матрицата **A** е поголем од соодветниот елемент од матрицата **B**, односно ако: $a_{ij} = b_{ij} \ \forall i, j$.

За матриците да бидат објект за изведување одредени математички операции, потребно е да бидат исполнети одредени услови (матриците да бидат од ист ред, бројот на редовите и колоните на матриците, дали матрицата е сингуларна или несингуларна, квадратна или правоаголна, рангот на матрицата и др.)

3.1. Собирање и одземање на матрици

Две матрици можат да се соберат ако и само ако се од ист ред и во тој случај велиме дека матриците се согласни за извршување на алгебарската операција собирање. Во општ случај важи правилото:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad \forall i, j$$

каде што a_{ij} се елементите на матрицата **A**, b_{ij} се елементите на матрицата **B**, а c_{ij} се елементите на новодобиената матрица **C**. За собирање на матриците е валиден комутативниот и асоцијативниот закон, односно:

$$A + B = B + A$$
$$(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$$

И одземањето на матриците е можно само во случај кога матриците се од ист ред, при што: $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \;\; \forall i, j$.

Матрицата каде што сите елементи се еднакви на нула, се нарекува нулта матрица и најчесто се означува со 0 или 0_n (ако е квадратна), односно 0_{mn} (ако е правоаголна).

Основниот став кој важи за сите матрици е следниов:

$$A+0=A$$

Негативната матрица од матрицата A ќе ја означиме со –A и се добива на тој начин што сите елементи од дадената матрица ќе го променат својот предзнак, од каде што произлегува дека :

$$A+(-A)=0$$

што може да се напише и во следниов облик :

$$A-A=0$$

Во општ слушај, ако треба матрицата B да се одземе од матрицата A, потребно е елементите од матрицата B да се одземат од соодветните елементи од матрицата A, што може да се запише како:

$$A+(-B)=A-B$$

Ако се зададени три матрици од ист ред X, A и B, а треба да се реши следнава матрична равенка:

$$X+A=B$$

каде што компонентите од матрицата X се непознати, тогаш:

$$X = B + (-A) = B - A$$
$$(B - A) + A = [B + (-A) + A]$$
$$(B - A) + A = B + [(-A) + A]$$
$$(B - A) + A = B + 0 = B$$

што значи дека B-A е еднозначно решение на матричната равенка X+A=B.

Ако е зададена следнава матрична равенка: $Y + A = B.$

$$(Y + A) + (-A) = B + (-A)$$
$$Y + [A + (-A)] = B - A$$
$$Y + 0 = B - A$$

што значи дека решение за непознатите X и Y е исто B-A, затоа велиме дека решението на матричните равенки: $X + A = B$ и $Y + A = B$ е единствено, односно еднозначно.

3.2. Множење на матрици

Пред да го дефинираме множењето на матриците, најнапред да видиме како се множи матрица со некој број, односно со некоја скаларна големина. Матрицата се множи со некоја скаларна големина на тој начин што секој нејзин елемент се множи со скаларната големина. Ако производот на матрицата A и скаларот k ги означиме со B, од каде B=A$\cdot$k, при што:

$$b_y = a_y \cdot k = k \cdot a_y \qquad \forall i, j$$

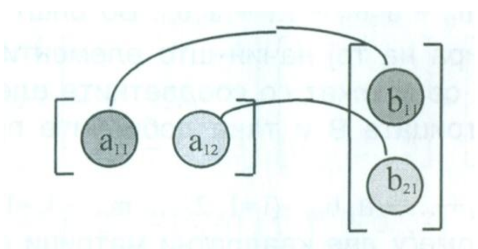
При множење на матрицата со скаларна големина, егзистираат следниве правила:

- **1$\cdot$A=A**
- **k $\cdot$A=A$\cdot$k**
- **$k_1(k_2 \cdot A)=k_2(k_1 \cdot A)=(k_1 \cdot k_2)A= k_1 \cdot k_2 \cdot A$**
- **$(k_1 + k_2)A= k_1 \cdot A+ k_2 \cdot A$**
- **k(A+B)=k$\cdot$A+k$\cdot$B**

Треба да се има предвид дека множењето на матриците не е дефинирано за кои било две матрици. За да можат две матрици да се помножат, потребно е тие да задоволуваат одреден услов, односно за да се помножи матрицата A со матрицата B

$(A \cdot B)$, потребно е првата матрица (А) да има онолку колони колку што втората матрица (В) има редови. Во случај кога е исполнет овој услов, матриците може да се помножат, велиме дека матриците се компатибилни (согласни, погодни). По извршеното множење, новодобиената матрица С $(C = A \cdot B)$ има еднаков број редови како и матрицата А, а еднаков број на колони како и матрицата В.

Множењето меѓу матриците пoсликовито ќе го прикажеме преку следниов шематски облик:



Ако треба матрицата А, која има три реда и три колони ($A_{3,3}$), да се помножи со матрицата В, која има три реда и две колони ($B_{3,2}$), производот меѓу овие две матрици $(C_{3,2} = A_{3,3} \cdot B_{3,2})$ ќе го пресметаме на следниов начин:

- елементите од првиот ред од матрицата А се множат со елементите од првата колона од матрицата В и збирот од тие производи претставува елемент од првиот ред и првата колона во матрицата С.
- елементите од вториот ред од матрицата А се множат со елементите од првата колона од матрицата В и збирот од тие производи претставува елемент од вториот ред и првата колона во матрицата С.
- елементите од третиот ред од матрицата А се множат со елементите од првата колона од матрицата В и збирот од тие производи претставува елемент од третиот ред и првата колона во матрицата С.
- на ист начин се множат елементите од првиот, вториот и третиот ред од матрицата А со елементите од втората колона од матрицата В и збировите од тие производи претставуваат елементи од прв, втор и трет ред од втората колона во матрицата С.

Ако производот меѓу матриците $A_{m,n}$ и $B_{n,p}$ го означиме со $C_{m,p}$, елементите на матрицата $C_{m,p}$, ќе ги пресметаме на следниов начин:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \text{ за } i = 1;2;...;m \qquad k = 1;2...;p.$$

Така, на пример: елементот c_{11} се формира на тој начин што елементите од првиот ред од матрицата A ($a_{11}, a_{12}..., a_{1n}$) ќе се помножат со соодветните елементи од првата колона од матрицата B ($b_{11}, b_{21}..., b_{1n}$) и така добиениот производ се собира, т.е.: $c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + ... + a_{1n}b_{n1}$. Во општ случај, елементот c_{ik} се формира на тој начин што елементите од i-тиот ред од матрицата A се множат со соодветните елементи од k-тата колона од матрицата B и така добиените производи се собираат, т.е.:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + ... + a_{in}b_{nk} \qquad (i=1,2,\ldots,m \quad k=1,2,\ldots,p)$$

Производот помеѓу две квадратни матрици со димензија (n,n) претставува квадратна матрица со истата димензија (истиот број редови и колони), при што, елементот од i-тиот ред и k-тата колона е еднаков на збирот од производот на елементите од k-тиот ред од првата и соодветниот елемент од i-тата колона од втората матрица.

При множење на матриците егзистира асоцијативниот и дистрибутивниот закон:

- $A(B \cdot C) = (A \cdot B)C$
- $(A + B)C = A \cdot C + B \cdot C$
- $A(B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- $(k \cdot A)B = k(A \cdot B)$

Треба да се има предвид дека при множењето на матриците, во општ случај, не важи комутативниот закон, односно $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Степенувањето на матриците е дефинирано само ако матриците се квадратни, односно ако имаат еднаков број редови и колони $(m = n)$. Ако матрицата не е квадратна туку правоаголна $(m \neq n)$, степенувањето не е можно. Добиената матрица, по извршеното степенување, ќе претставува квадратна матрица од ист ред. Ако матрицата A е квадратна и од n-ти ред, во тој случај:

$$A^0 = 1_n \qquad A^1 = A \qquad A^2 = A \cdot A \qquad A^3 = A \cdot A \cdot A$$

Производот од m множители се означува A^m, односно:

$$A \cdot A \cdot A \cdots A = A^m$$

Кај матриците, исто како и кај броевите, важи правилото за множење на степени со иста основа, имено:

$$A^p \cdot A^q = A^{p+q}$$
$$(A^p)^q = A^{p\cdot q}$$
$$I^p = I$$

каде што p и q се природни броеви, односно $p,q \in N$ (N – множеството на природните броеви). При степенувањето на матриците треба да се има предвид дека: $A^p B^p \neq (A \cdot B)^p$.

Ако меѓу квадратните матрици A и B постои следната активност $A^p = B$(p е природен број), велиме дека матрицата A е дефинирана како p-ти корен од матрицата B, односно: $A = B^{\frac{1}{p}}$.

За матрицата $A_{nn} \neq 0$, за која важи релацијата: $A_{nn}^2 = A_{nn}$, велиме дека е идепотентна. Додека матрицата A_{nn} се нарекува нултипотентна ако постои некој број $m > 1$ за кој $A_{nn}^m = 0$.

4. МАТРИЧНИ ПОЛИНОМИ

Нека

$$A_i, \quad i = 0,1,2,...,k \tag{1}$$

се квадратни матрици од n-ти ред над полето P и x е променлива. Изразот

$$A(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + ... + A_k x^k \tag{2}$$

го нарекуваме *матричен полином од x од n-ти ред*, а матриците (1) ги нарекуваме *негови коефициенти*. Ако $A_k \neq [0]_{n\times n}$, тогаш (2) е полином од *k-ти степен*, а $A_k x^k$ е негов *водечки член*.

Во (2) производите $A_i x^i$ ги подразбираме како множење на матрица со скалар, т.е. секој елемент на матрицата A_i се множи со мономот x^i, а собирањето во (2) е обично собирање на матрици.

Нека (2) и $B(x) = xE - B$ се два матрични полиноми од n-ти ред. Тогаш постојат единствени матрици

$$Q_1(x), R_1 \tag{3}$$

од n-ти ред, така што

$$A(x) = Q_1(x)B(x) + R_1, \tag{4}$$

каде R_1 е константна матрица. Исто така, постојат единствени матрици

$$Q_2(x), R_2 \tag{5}$$

од n-ти ред, така што

$$A(x) = B(x)Q_2(x) + R_2, \tag{6}$$

каде R_2 е константна матрица.

Матриците (3) и (5) ги нарекуваме *количник и остаток при делење на $A(x)$ со $B(x)$ од десно и од лево*, соодветно.

Ќе ги докажеме егзистенцијата и единственоста на количникот и остатокот од делењето $A(x)$ со $B(x)$ од десно. Ако $A(x) = A$ е константна матрица, тогаш ставаме $Q_1(x) = 0 = [0]_{n\times n}$, $R_1 = A$ и тврдењето е очигледно. Нека степенот k на полиномот (2) е поголем од нула и нека A_k е коефициентот пред x^k. Ставаме

$$G_1(x) = A_k x^{k-1},\ C_1(x) = A(x) - G_1(x)B(x).$$

Тогаш

$$A(x) = G_1(x)B(x) + C_1(x). \tag{7}$$

Јасно, водечкиот член на $G_1(x)B(x)$ е еднаков на водечкиот член на $A_k x^k$ на полиномот $A(x)$, па затоа $C_1(x) = 0 = [0]_{n\times n}$ или степенот m_1 на полиномот $C_1(x)$ е помал од k. Ако $C_1(x)$ е константна матрица, тогаш равенството (7) има вид (4) и $G_1(x)$ и $C_1(x)$ се количникот и остатокот при делењето на $A(x)$ со $B(x)$ од десно. Ако $m_1 \geq 1$, тогаш за матрицата $C_1(x)$ добиваме

$$C_1(x) = G_2(x)B(x) + C_2(x) \qquad (8)$$

каде $C_2(x) = 0 = [0]_{n\times n}$ или степенот m_2 на полиномот $C_2(x)$ е помал од m_1. Од (7) и (8) следува

$$A(x) = [G_1(x) + G_2(x)]B(x) + C_2(x).$$

Ако $C_2(x)$ е константна матрица, тогаш $G_1(x) + G_2(x)$ и $C_2(x)$ се количникот и остатокот при делење на $A(x)$ со $B(x)$ од десно. Ако $m_2 \geq 1$, тогаш продолжувајќи ја постапката добиваме

$$A(x) = [G_1(x) + G_2(x) + ... + G_i(x)]B(x) + C_i(x),$$

каде $C_i(x)$ е константна матрица. Јасно, $G_1(x) + G_2(x) + ... + G_i(x)$ и $C_i(x)$ се количникот и остатокот при делење на $A(x)$ со $B(x)$ од десно. Според тоа, ја докажавме егзистенцијата на количникот и остатокот.

Да ја докажеме единственоста на количникот и остатокот. Нека $Q_1(x)$ и $Q(x)$ се количници, а R_1 и R се остатоци при делењето од десно на $A(x)$ со $B(x)$. Тогаш

$$A(x) = Q(x)B(x) + R(x) \qquad (9)$$

и ако од (9) го одземеме (4), добиваме

$$O_n = Q_1(x)B(x) + R_1 - Q(x)B(x) - R = [Q_1(x) - Q(x)]B(x) + R_1 - R,$$

т.е.

$$[Q_1(x) - Q(x)]B(x) = R - R_1. \qquad (10)$$

Ако $Q_1(x) \neq Q(x)$, тогаш десната страна на (10) не е константна матрица, што е противречност, значи $Q_1(x) = Q(x)$, па затоа $R_1 = R$.

5. РАНГ И ТРАНСПОЗИЦИЈА НА МАТРИЦАТА

5.1. Транспозиција на матриците

Ако во матрицата А со димензија nxm (без оглед дали се работи за правоаголна матрица $n \neq m$ или квадратна $n = m$) сите редови се заменат со колоните според истиот редослед, односно колоните се заменат со редовите, исто така, според истиот редослед, се добива нова матрица која се нарекува ***транспонирана матрица***. Транспонираната матрица најчесто се означува со A', A^* или со A^T.

Од почетната (појдовната) матрица е $A = \{a_n\}$, од типот (n,m) соодветната транспонирана матрица $A = \{a_n\}$ ќе биде од типот (m,n), при што помеѓу елементите на транспонираната матрица и елементите на појдовната матрица постои потполна коресподенција, $\{a_n'\} = a_n$, во тој случај појдовната и нејзината транспонирана матрица можеме да ги запишеме во следниов облик:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .. & .. & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & .. & .. & .. & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & .. & .. & .. & a_{3n} \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & .. & .. & .. & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A' = A^* = A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & .. & .. & .. & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & .. & .. & .. & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & .. & .. & .. & a_{n3} \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{1m} & a_{2m} & a_{3m} & .. & .. & .. & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Транспонираната матрица може да се запише и во следниов облик:

$$A' = A^{*} = A^{T} = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & .. & .. & .. & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & .. & .. & .. & a'_{2n} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & .. & .. & .. & a'_{3n} \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ a'_{m1} & a'_{m2} & a'_{m3} & .. & .. & .. & a'_{mn} \end{bmatrix} \text{ при што } a'_{ij} = a_{ji}$$

Ако матрицата А е правоаголна, тогаш нејзината транспонирана матрица ќе биде повторно правоаголна, но од друг тип: $A_{3,2} = A'_{2,3}$.

За транспонираната матрица важат следниве правила:

• ако транспонираната матрица повторно ја транспонираме, ќе се добие почетната (појдовна) матрица

$$(A') = A \qquad\qquad (a_{ij})' = a'_{ji} = a_{ij}$$

• транспонираната матрица од збир е еднаква на збирот од транспонираните матрици:

$$(A+B)' = A' + B'$$

$$(a_{ij} + b_{ij})' = a'_{ij} + b'_{ij}$$

• $(k \cdot A)' = k \cdot A'$

• $(A \cdot B)' = B' \cdot A'$

• $(A \cdot B \cdot C)' = C' \cdot B' \cdot A'$

5.2. Ранг на матриците

Видовме дека ако детерминантата од квадратната матрица не е еднаква на нула, матрицата е несингуларна (регуларна, односно недегенеративна), додека ако детерминантата е еднаква на нула, матрицата е сингуларна (дегенеративна). Меѓутоа, и во случај кога матрицата е сингуларна, можеби постои барем еден минор од $(n-1)$ ред кој не е еднаков на нула. Во тој случај велиме дека рангот (r) на сингуларната матрица е $n-1$ $(r = n-1)$. Ако, пак, за сингуларната матрица од n-ти ред, сите минори од $(n-1)$-от ред се еднакви на нула, велиме дека рангот на матрицата е $n-2$, ако барем еден минор од $(n-2)$-от ред е различен од нула итн. Или во општ случај, ако детерминантите од сите минори $(n-1)$, $(n-2),(n-3).....(n-k+1)$ од некоја сингуларна матрица A_{nn} се еднакви на нула, и ако барем еден минор од $(n-k)$ ред е различен од нула, во тој случај велиме дека рангот на сингуларната матрица A_{nn} е еднаков на $(n-k)$. На идентичен начин се одредува и рангот на правоаголната матрица. Рангот на правоаголната матрица од типот n x m, каде што нека m < n, ако постои барем една детерминанта од m-ти ред, која може да се формира и која е различна од нула, рангот на матрицата е еднаков на детерминантата од највисок ред која може да се формира и која детерминанта е различна од нула.

Според тоа, рангот на матрицата, без оглед дали се работи за квадратна $(m=n)$ или за правоаголна $(m \neq n)$ матрица, е еднаков на највисокиот ред на квадратната субматрица, односно матрицата-минор, која може да се формира од елементите на матрицата и чија детерминанта е различна од нула.

Постапката за одредување на рангот на матрицата (без оглед дали матрицата е квадратна или правоаголна) ќе биде поедноставна ако со одредени елементарни трансформации (промена на кои било два реда или колони од дадената матрица; множење на кој било ред или колона, претходно помножен со константна величина, на кој било ред или колона) дадената матрица се сведува на најпрост облик: сите или поголем број од елементите на редот или колоната бидат еднакви на нула; скаларна матрица; дијагонална матрица; единична матрица или некој друг облик. По извршената трансформација се добива матрица од која на поедноставен начин може да се пресмета вредноста на детерминантата на квадратната матрица и на детерминантата минор. Специјален случај на најпрост облик е т.н. триангуларна (триаголна) матрица, каде што елементите само од едната страна од главната дијагонала се еднакви на нула, а од другата страна се различни од нула. Во случај кога дадената матрица со одредени трансформации ќе ја сведеме на триаголна матрица, во тој случај бројот на сите елементи различни од нула од дијагоналата го одредува редот на најголемата квадратна матрица минор, чија детерминанта е различна од нула, кој ред, всушност, претставува ранг на првобитно дадената матрица. Тоа правило е валидно и во случај ако дадената матрица со одредена трансформација се сведува на дијагонална, скаларна или единична форма.

Рангот на матрицата ги има следниве својства:

- $rangA = rangA^T$
- рангот од производот на две матрици не е поголем од рангот на ниедна од двете матрици: $rang(AB) \leq \min(rangA, rangB)$,
- рангот на матрицата нема да се промени ако се изврши пермутација на редовите и колоните,

• рангот на матрицата нема да се промени ако елементите од некој ред или колона се помножат со фактор различен од нула,

• ако се изоставаат колоните или редовите чии елементи се еднакви на нула, рангот на матрицата нема да се промени,

• две матрици со димензија n x m се еквивалентни ако и само ако имаат ист ранг.

5.3. Инверзна матрица

Во теоријата на реалните броеви е познато дека за секој број $R \neq 0$ одговара еден број R^{-1}, така што секогаш $R^{-1}R = RR^{-1} = 1$. За бројот R^{-1} велиме дека е реципрочен (инверзен) на бројот R. Се поставува прашањето дали и кај матриците постои реципрочност, односно инверзност, т.е. дали постои таква матрица B која помножена со дадената матрица A ќе се добие единична матрица.

$$A \cdot B = B \cdot A = 1?$$

Ако таква матрица B постои, во тој случај велиме дека матрицата A има реципрочна (инверзна) матрица и дека тоа е матрицата B. Служејќи се со нотацијата која се применува во алгебрата, инверзната матрица за дадената матрица A ќе ја означиме со A^{-1} , при што треба да имаме предвид дека во алгебрата постои следнава еднаквост: $R^{-1} = \dfrac{1}{R}$, додека во линеарната алгебра : $A^{-1} \neq \dfrac{I}{A}$.

Прв услов кој треба да биде исполнет за матрицата A да има своја инверзна матрица е таа да биде квадратна матрица. Овој услов произлегува од фактот што дадената матрица и нејзината инверзна матрица мора да бидат комутативни, при што производот мора да биде еднаков на соодветната единична матрица, односно:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I = E$$

Втор услов кој треба да биде исполнет за матрицата A да има своја инверзна матрица е детерминантата на матрицата да биде различна од нула $(_{\det}A \neq 0)$, односно велиме дека матрицата A е несингуларна. Во спротивно, ако детерминантата од матрицата A е еднаква на нула, велиме дека матрицата е сингуларна и од неа не може да се пресмета инверзна матрица.

Според тоа, би резимирале дека инверзна матрица може да се пресмета само ако матрицата е квадратна и несингуларна. Додека, кога матрицата е сингуларна, како и ако матрицата е од типот (mxn), за $m \neq n$, во тој случај од дадената матрица не може да се пресмета реципрочна матрица.

Ако од матрицата може да се пресмета инверзна матрица, во тој случај инверзната матрица е еднозначна (единствена). За да докажеме дека инверзната матрица е еднозначна, да претпоставиме дека матрицата C е таква што $A \cdot C = C \cdot A = I = E$, исто така, да претпоставиме дека постои друга матрица D, така што $A \cdot D = D \cdot A = I.$ ако матрицата D ја помножиме со производот $A \cdot C$, ќе добиеме: $D \cdot A \cdot C = D \cdot I = D$. Исто така, ако матрицата C ја помножиме со матрицата $A \cdot D$, ќе добиеме $C \cdot A \cdot D = C \cdot I = C$, од каде што произлегува дека $C = D$, односно дека инверзната матрица е единствена (еднозначна).

Ако матрицата A е несингуларна, а матрицата B таква што $A \cdot B = I$, во тој случај $B = A^{-1}$. Доказот е сосема едноставен: ако равенката $A \cdot B = I$ од левата страна ја помножиме со A^{-1}, ќе добиеме: $A^{-1} \cdot A \cdot B = A^{-1} \cdot I$. Со оглед дека $A^{-1} \cdot A = I$, $I \cdot B = B$ и $A^{-1} \cdot I = A^{-1}$, следи: $I \cdot B = A^{-1} \cdot I \;\Rightarrow\; B = A^{-1}$.

Инверзната, т.е. реципрочната матрица од појдовна матрица A ќе ја добиеме на следниов начин:

- Од матрицата A се пресметува вредноста на детерминантата $\left({}_{\det} A = A_{\det} = |A|\right)$, при што треба да се има предвид дека ако вредноста на детерминантата е нула, не може да се пресмета инверзна матрица бидејќи матрицата е сингуларна;
- Се пресметуваат кофакторите од дадената матрица (кофакторите или алгебарските комплементи претставуваат минори од дадената матрица со соодветен предзнак, така, на пример, за елементот a_{Ij} кофакторот е $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}^{'}$), а потоа се составува матрица од добиените кофактори;
- Се одредува транспонирана матрица од кофакторите (адјунгирана[4] матрица) - A_{cof}^{T};
- Ако елементите од транспонираната матрица ги помножиме со реципрочната вредност на детерминантата, ќе ја добиеме инверзната матрица - $A^{-1} \left(A^{-1} = \dfrac{A_{cof}^{T}}{{}_{\det} A} \right)$.

Како што веќе истакнавме, линеарната алгебра ни овозможува на едноставен начин да го дефинираме системот на линеарни равенки, линеарните трансформации,

[4] Adjunctus – природен, помошен

системот на диференцијалните равенки итн. Да го анализираме системот од m линеарни равенки и n непознати $(x_1, x_2, ..., x_n)$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3 \\ .... \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Непознатата (варијаблата) x, се појавува во j-тата колона на левата страна од знакот за еднаквост. Двојно е означен параметарот $a_{ij,}$ кој се појавува во i-тата равенка и со j-тата варијабла. Параметарот $b_{i,}$ е константен член во i-тата равенка. Множествата: $a_{ij,}$ x_j и $b_{i,}$ можеме да ги запишеме во следниов шематски облик:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n \\ .... \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

Применувајќи го правилото за множење на матриците, ќе добиеме:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ...... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ...... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ...... & a_{3n} \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & ...... & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ... \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ ... \\ ... \\ b_m \end{bmatrix}$$

Ако ги воведеме следниве замени

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .. & .. & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & .. & .. & .. & a_{1n} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} & .. & .. & .. & a_{3n} \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & .. & .. & .. & a_{mn} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ .. \\ .. \\ x_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ .. \\ .. \\ b_m \end{bmatrix}$$

ќе ја добиеме следнава матична равенка: $A \cdot X = B$.

Каде што:

- елементите (компонентите) на матрицата А се коефициентите на непознатите големини,
- елементите на матрицата X се непознати големини и
- елементите на матрицата B се слободните членови (вредноста на равенките).

Во зависност од тоа дали вредноста на детерминантата од матрицата А е еднаква на нула или различна од нула и во зависност од тоа дали матрицата B е нулта матрица или не, разликуваме четири случаи, ние ќе го анализираме случајот кога вредноста на детерминантата за матрицата А не е еднаква на нула, а матрицата B не е нулта-матрица.

Ако матричната равенка $A \cdot X = B$ се помножи со A^{-1} (инверзна-реципрочна матрица на матрицата А), ќе го примениме асоцијативниот закон за множење на матриците, ќе добиеме:

$$A^{-1} A \cdot X = A^{-1} B$$

$$A^{-1} (A \cdot X) = A^{-1} B$$

$$(A^{-1} \cdot A) X = A^{-1} B$$

со оглед дека $A^{-1} \cdot A = E$ а $E \cdot X = X$ ќе ја добиеме следнава матрична равенка:

$$X = A^{-1}B$$

Експлицитниот облик на матричната равенка $X = A^{-1}B$ е следен:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ .. \\ .. \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots\ldots & a_{3n} \\ \ldots.. & \ldots.. & \ldots.. & \ldots.. & \ldots.. \\ \ldots.. & \ldots.. & \ldots.. & \ldots.. & \ldots.. \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ .. \\ .. \\ b_m \end{bmatrix}$$

5.3.1. Особини на инверзната матрица

- Ако од единичната матрица се пресмета инверзна матрица, повторно ќе се добие единична матрица.

$$I = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$_{\det}I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}\Bigg| = 1 \qquad I^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$_{adj}I = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I^{-1} = \frac{{}_{adj}I}{{}_{\det}I} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad I^{-1} = I$$

- Ако од инверзната матрица за матрицата А повторно се пресмета инверзна матрица, ќе се добие почетната (појдовна, регуларна) матрица.

$$A^{-1}\left(A^{-1}\right)^{-1} = I$$

По множење на равенката со А, а имајќи предвид дека $A \cdot A^{-1} = I$, $A \cdot I = A$, ќе добиеме:

$$A\left[A^{-1}\left(A^{-1}\right)^{-1}\right] = A \cdot I$$

$$\left(A \cdot A^{-1}\right)\left(A^{-1}\right)^{-1} = A \cdot I$$

$$I\left(A^{-1}\right)^{-1} = A \quad \Rightarrow \quad \left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$

Тоа значи дека инверзна матрица од инверзната е еднаква на појдовната матрица, односно матриците A и A^{-1} се заемно инверзни.

- Матриците A и A^{-1} се комутативни, односно:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A$$

- Инверзната матрица од производот е еднаков на производот од инверзните матрици.

Нека матрицата X е инверзна матрица од производот $A \cdot B$,

$$X = \left(A \cdot B\right)^{-1}$$

со оглед на дефиницијата за инверзна матрица имаме:

$$\left(A \cdot B\right)X = I$$

по множење на претходната равенка, најнапред со A^{-1}, а потоа со B^{-1}, ќе добиеме:

$$A^{-1} \cdot / \qquad \left(A \cdot B\right)X = I$$

$$A^{-1}\left(A \cdot B\right)X = A^{-1} \cdot I$$

$$\left(A^{-1}\cdot A\right)B\cdot X = A^{-1}\cdot I$$

$$I\cdot B\cdot X = A^{-1}\cdot I$$

$$B^{-1}\cdot / \qquad B\cdot X = A^{-1}$$

$$B^{-1}\left(B\cdot X\right) = B^{-1}\cdot A^{-1}$$

$$\left(B^{-1}\cdot B\right)X = B^{-1}\cdot A^{-1}$$

$$I\cdot X = B^{-1}\cdot A^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad X = B^{-1}\cdot A^{-1}$$

Од каде што произлегува дека: $\left(A\cdot B\right)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$.

Според истата аналогија може да се докаже и дека:

$$\left(A\cdot B\cdot C\right)^{-1} = C^{-1}\cdot B^{-1}\cdot A^{-1}$$

Или, во општ случај, кога се работи за n матрици, важи следната еднаквост:

$$\left(A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot\ldots\cdot A_n\right)^{-1} = A_n^{-1}\cdot A_n^{-1}\cdot\ldots\cdot A_3^{-1}\cdot A_2^{-1}\cdot A_1^{-1}$$

5.4. Гаусова метода

Кога бројот на непознатите е поголем од три, Крамеровото правило станува непрактично за примена. Затоа, во случај кога бројот на непознатите е $n \geq 4$, се применува Гаусовиот алгоритам (редукциона метода), според кој детерминантата од системот се сведува на триаголна детерминанта, т.е. во секоја детерминанта, почнувајќи од првата, постепено се смалува бројот на непознатите, така што на крајот се добива една равенка со една непозната. Да го анализираме следниов систем (m=4, n=5).

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = b_1 \qquad (E_1)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = b_2 \qquad (E_2)$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 = b_3 \qquad (E_3)$$

$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 = b_4 \qquad (E_4)$$

Ако $a_{11} \neq 0$, можеме да ја елиминираме непознатата x_1 од втората, третата и четвртата равенка, така што од втората равенка ја одземаме првата помножена со $\frac{a_{21}}{a_{11}}$, од третата ја одземаме првата равенка помножена со $\frac{a_{31}}{a_{11}}$, и од четвртата ја одземеме првата помножена со $\frac{a_{41}}{a_{11}}$. По извршената пресметка ќе го добиеме следниов еквивалентен систем:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = b_1 \qquad (E_1)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = b_2 \qquad \left(E_2^{'} = E_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot E_1\right)$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 = b_3 \qquad \left(E_3^{'} = E_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} \cdot E_1\right)$$

$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 = b_4 \qquad \left(E_4^{'} = E_4 - \frac{a_{41}}{a_{11}} \cdot E_1\right)$$

Каде: $a_{ij}^{'} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \cdot a_{1j} \qquad b_{ij}^{'} = b_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \cdot b_1 \qquad (i, j = 2,3,4)$

Ако $a_{22}^{'} \neq 0$, можеме да ја елиминираме непознатата x_2 од третата и четвртата равенка на тој начин што од третата да ја одземеме втората равенка помножена со $\frac{a_{32}^{'}}{a_{22}}$, а од четвртата да ја одземеме втората равенка помножена со $\frac{a_{42}^{'}}{a_{22}}$ и ќе го добиеме следниов еквивалентен систем:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = b_1 \qquad (E_1)$$

$$a_{22}^{'}x_2 + a_{23}^{'}x_3 + a_{24}^{'}x_4 + a_{25}^{'}x_5 = b_2^{'} \qquad (E_2^{'})$$

$$a_{33}^{''}x_3 + a_{34}^{''}x_4 + a_{35}^{''}x_5 = b_3^{''} \qquad \left(E_3^{''} = E_3^{'} - \frac{a_{32}^{'}}{a_{22}^{'}} \cdot E_2^{'}\right)$$

$$a''_{43}x_3 + a''_{44}x_4 + a''_{45}x_5 = b''_4 \qquad \left(E''_4 = E'_4 - \frac{a'_{42}}{a'_{22}} \cdot E'_2 \right)$$

Каде: $a''_{ij} = a''_{ij} - \frac{a'_{i2}}{a'_{22}} \cdot a'_{2j}$ $\qquad b''_{ij} = b'_{ii} - \frac{a'_{i2}}{a'_{22}} \cdot b'_2$ $\qquad (i, j = 2,3,4)$

Конечно, ако $a''_{33} \neq 0$, можеме да ја елиминираме непознатата x_3 од четвртата равенка, така што ако од неа ја одземеме третата равенка помножена со $\frac{a''_{43}}{a''_{33}}$, ќе го добиеме следниов систем:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = b_1 \qquad (E_1)$$

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4 + a'_{25}x_5 = b'_2 \qquad (E'_2)$$

$$a''_{33}x_3 + a''_{34}x_4 + a''_{35}x_5 = b''_3 \qquad (E''_3)$$

$$a'''_{44}x_4 + a'''_{45}x_5 = b'''_4 \qquad \left(E'''_4 = E''_4 - \frac{a''_{43}}{a''_{33}} \cdot E''_3 \right)$$

Треба да се има предвид дека системот од равенки може да се реши со примена на Гаусовата елиминација ако и само ако рангот на матрицата А е еднаков на n. Во случај кога рангот на матрицата А е помал од n, тогаш методот на Гаусовата елиминација не ги дава очекуваните резултати. Затоа, во нашите истражувања ние ќе се задржиме само на констатацијата дека Гаусовата елиминација овозможува побрзо и попрегледно решавање на системот од линеарни равенки доколку рангот на матрицата од коефициентите од системот е еднаков на бројот на непознатите големини кои фигурираат во дадениот систем од равенки.

5.5. Партиција на матриците

При изведување на одредени математички операции со матриците (собирање, одземање, множење, инверзна матрица) поедноставно е претходно појдовната матрица да се подели (разложи на блокови, субматрици). Деловите на матрицата добиени со извршената партиција повторно претставуваат матрици со помал број редови и колони (субматрици). Разделувањето (разбивањето на матрицата во блокови) не се врши произволно туку е условено од математичките операции кои треба да се извршат. Така на пример, ако треба две и повеќе матрици да се соберат или помножат, тогаш тие се разбиваат на такви субматрици кои ќе ги исполнуваат условите за изведување соодветни математички операции. Во општ случај, за две матрици A и B од ист ред (со иста димензија) велиме дека имаат идентична партиција, ако имаат еднаков број редови и колони, а соодветните блокови имаат ист облик (ист ред, односно тип). Така на пример, следните две матрици имаат идентична партиција.

$$\left[\begin{array}{cc:c} 3 & 0 & 5 \\ 1 & 6 & 2 \\ \hdashline 1 & 4 & 5 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cc:c} a & b & c \\ d & e & f \\ \hdashline g & h & i \end{array}\right]$$

Идентичната партиција го обезбедува потребниот и доволниот услов за собирање на матриците, односно субматриците се подобни за изведување на сметковната операција собирање.

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g & h \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3+a & 0+b \\ 1+d & 6+e \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5+c \\ 2+f \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1+g & 4+h \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5+i \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+a & 0+b & 5+c \\ 1+d & 6+e & 2+f \\ 1+g & 4+h & 5+i \end{bmatrix}$$

Партицијата на матриците може да се примени и при нивно множење, притоа мора да се респектира основното правило за множење на матриците, т.е. бројот на колоните на левата матрица мора да биде еднаков на бројот на редовите на десната матрица во редослед. Нека се дадени следниве матрици:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \left[\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \right]$$

$$A \cdot B = \left[\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Со разделување на матрицата во блокови (партиција), исто така, можеме на поедноставен начин да пресметаме инверзна (реципрочна) матрица. Да претпоставиме дека матрицата А е квадратна и несингуларна и врз неа да извршиме партиција, така што субматриците ги означиме со A_1, A_2, A_3 и A_4.

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$$

Додека субматриците на инверзната матрица A^{-1} ги означиме со α, β, χ и δ.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \chi & \delta \end{bmatrix}$$

Со оглед дека $A \cdot A^{-1} = I = E$

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \chi & \delta \end{bmatrix} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Од каде што произлегуваат следните равенки:

$$A_1\alpha + A_2\chi = 1$$

$$A_1\beta + A_2\delta = 0$$

$$A_3\alpha + A_4\chi = 0$$

$$A_3\beta + A_4\delta = 1$$

Да претпоставиме дека за субматрицата A_4 е позната соодветната инверзна субматрица A_4^{-1} и по замена во третата равенка ќе ја одредиме субматрицата χ.

$$A_4\chi = -A_3\alpha \quad \Rightarrow \qquad \chi = -A_4^{-1}A_3\alpha$$

Ако вредноста на субматрицата χ ја замениме, во првата равенка ќе ја одредиме субматрицата α.

$$A_1\alpha + A_2(-A_4^{-1}A_3\alpha) = 1$$

$$A_1\alpha - A_2A_4^{-1}A_3\alpha = 1$$

$$\alpha(A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3) = 1$$

$$\alpha = (A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3)^{-1}$$

Субматрицата δ ќе ја пресметаме преку четвртата равенка:

$$A_4\delta = 1 - A_3\beta \qquad \Rightarrow \qquad \delta = A_4^{-1} - A_4^{-1} A_3 \beta$$

По замена во втората равенка ќе ја пресметаме субматрицата β.

$$A_1\beta + A_2(A_4^{-1} - A_4^{-1} A_3 \beta) = 0$$

$$(A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3)\beta + A_2 A_4^{-1} = 0$$

$$(A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3)\beta = -A_2 A_4^{-1}$$

$$\beta = (A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3)^{-1}(-A_2 A_4^{-1})$$

По замена на субматрицата $\alpha = (A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3)^{-1}$, ќе ја добиеме:

$$\beta = -\alpha A_2 A_4^{-1}$$

Според тоа, изразите за пресметување на субматриците на инверзната матрица од појдовната матрица се:

$$\alpha = (A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3)^{-1}$$

$$\beta = -\alpha A_2 A_4^{-1}$$

$$\chi = -A_4^{-1} A_3 \alpha$$

$$\delta = A_4^{-1} - A_4^{-1} A_3 \beta$$

6. КАРАКТЕРИСТИЧНИ БРОЕВИ И ВЕКТОРИ НА МАТРИЦИТЕ

Ако матрицата **A** ја трансформира векторот **x** во некој друг вектор **Ax**, се поставува прашањето под кои услови трансформацијата на некој вектор **x** ќе даде нов вектор, така што тој претставува производ помеѓу дадениот вектор **x** и некоја скаларна големина λ. Односно, кога следниве изрази ќе бидат вистинити.

$$Ax = 8x \qquad Ax = tx \qquad Ax = 0x$$

Во општ случај, се прашуваме дали постои мултипликативна константа λ таква што равенката: $Ax = \lambda x$ има смисла.

Ако A е која било матрица, а λ кој било број, во тој случај ако векторот x=0, равенката ќе биде задоволена $A0 = \lambda 0$. Ова решение се нарекува тривијално и не обезбедува комплетен одговор на поставеното прашање.

Равенката $Ax = \lambda x$ може да се запише и во следниов облик:

$$Ax = \lambda Ix$$

од каде што произлегува:

$$Ax = \lambda Ix = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (A - \lambda I)x = 0$$

Последната равенка ни покажува дека се работи за матрична равенка, која претставува систем од хомогени линеарни равенки. Овој систем од хомогени линеарни равенки освен тривијално решение, може да има и нетривијално доколку детерминантата од системот е еднаква на нула. Во тој случај, системот претставен со равенката:

$$Ax = \lambda Ix = 0$$

има сигурно и нетривијално решение, односно за $x \neq 0$, и тоа ќе го добиеме под услов ако детерминантата Δ е еднаква на нула, т.е. $\Delta = |A - \lambda I| = 0$.

Со развивање на така добиената детерминанта се добива полином, кој се нарекува карактеристичен полином на матрицата A. Корените на λ од карактеристичниот полином се нарекуваат карактеристични броеви на матрицата A. Од каде што произлегува дека за секој карактеристичен број λ одговара соодветен карактеристичен вектор x, т.е. векторот $x \neq 0$ кој ја задоволува релацијата $Ax = \lambda x$.

II. АКТУАРСКИ ОСНОВИ ЗА ФОРМИРАЊЕ НА ТАРИФАТА ЗА ОСИГУРУВАЊЕ ЖИВОТ

1. КОМУТАТИВНИ БРОЕВИ

Основните броеви кои ја карактеризираат таблицата на смртта се поврзани со живите и мртвите луѓе.

Симболот l_x означува, од даден број на лица, колку се живи во непосредните години (h = 1, 2, 3,…), додека со симболот d_x се означува бројот на мртвите лица во непосредните години (h = 1, 2, 3,…). Со помош на овие основни броеви и каматната стапка која се применува во практиката, се пресметуваат комутативните броеви: D_x, C_x, N_x, M_x, S_x и R_x.

Со D_x, се означува <u>*дисконтираниот број на живи лица стари x години*</u>, а се пресметува така што бројот на живите лица стари x години се дели со каматниот фактор на x-ти степен. Односно бројот на живите лица стари x години се дисконтира за x години.

$$D_x = \frac{l_x}{r^x} = \frac{l_x}{I_{p\%}^{x}} = l_x \cdot r^{-x} = l_x \cdot II_{p\%}^{x} \text{ каде што } r = 1 + \frac{p}{100}$$

По иста аналогија се пресметуваат и следниве комутативни броеви: D_{x+1}; D_{x+2}; D_{x+3};….

$$D_{x+1} = \frac{l_{x+1}}{r^{x+1}} = \frac{l_{x+1}}{I_{p\%}^{x+1}} = l_{x+1} \cdot r^{-(x+1)} = l_{x+1} \cdot II_{p\%}^{x+1}$$

$$D_{x+2} = \frac{l_{x+2}}{r^{x+2}} = \frac{l_{x+2}}{I_{p\%}^{x+2}} = l_{x+2} \cdot r^{-(x+2)} = l_{x+2} \cdot II_{p\%}^{x+2}\text{; itn.}$$

$\frac{1}{r^x} = r^{-x}$ - сегашна (дисконтирана) вредност на една парична единица која достасува по x години. Ако r^{-x} се замени со v^x, тогаш дисконтираниот број на живи лица ќе се добие на следниов начин:

$$D_x = l_x \cdot v^x;$$

$$D_{x+1} = l_{x+1} \cdot v^{x+1};$$

$$D_{x+2} = l_{x+2} \cdot v^{x+2}; \text{ itn.}$$

Со N_x се означува *збирот од дисконтираните броеви на живи лица* почнувајќи од x години старост, па до најдлабоката (граничната) старост (w),[5] која може да ја доживее некое лице од анализираната група на живи лица.

$$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{w-1} + D_w = \sum_{i=0}^{w-x} D_{x+i}$$

$$N_{x+1} = D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots + D_{w-1} + D_w = \sum_{i=1}^{w-x} D_{x+i}$$

По одземање на овие две равенки, се добива:

$$N_x - N_{x+1} = D_x \text{ или } D_x = N_x - N_{x+1}$$

$$N_{x+k} = D_{x+k} + D_{x+k+1} + D_{x+k+2} + \ldots + D_{w-1} + D_w = \sum_{i=k}^{w-x} D_{x+i}$$

$$N_{x+k+1} = D_{x+k+1} + D_{x+k+2} + D_{x+k+3} + \ldots + D_{w-1} + D_w = \sum_{i=k+1}^{w-x} D_{x+i}$$

$$N_{x+k} = D_{x+k} + \sum_{i=k+1}^{w-x} D_{x+i} = D_{x+k} + N_{x+k+1}$$

$$D_{x+k} = N_{x+k} - N_{x+k+1}$$

Комутативниот број S_x претставува *збир од збировите на дисконтираните броеви на живите лица* со почетна старост од x години, па сè до крајот на таблиците, односно до длабоката (граничната) старост (w).

$$S_x = N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + \ldots + N_{w-1} + N_w = \sum_{i=0}^{w-x} N_{x+i}$$

[5] Најчесто во литературата со w се означува граничната (најдлабоката) старост која некое лице може да ја доживее. Оваа старост кај: француските морталитетни таблици PM и PF изнесува 106 години, таблиците на смртност на 20 англиски осигурителни друштва 101 година и кај ЈДТ 90 години.

$$S_{x+1} = N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + N_{x+4} + \ldots + N_{w-1} + N_w = \sum_{i=1}^{w-x} N_{x+i}$$

$$S_{x+k} = N_{x+k} + N_{x+k+1} + N_{x+k+2} + N_{x+k+3} + \ldots + N_{w-1} + N_w = \sum_{i=k}^{w-x} N_{x+i}$$

Од равенката:

$$S_x = N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + \ldots + N_{w-1} + N_w = \sum_{i=0}^{w-x} N_{x+i}$$

Може да се добие равенката:

$$S_{x+1} = N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + N_{x+4} + \ldots + N_{w-1} + N_w = \sum_{i=1}^{w-x} N_{x+i}$$

По одземањето на овие две равенки се добива:

$$S_x - S_{x+1} = N_x \text{ односно } \sum_{i=0}^{w-x} N_{x+i} - \sum_{i=1}^{w-x} N_{x+i} = N_x$$

$$S_x = S_{x+1} + N_x \text{ односно } \sum_{i=0}^{w-x} N_{x+i} = \sum_{i=1}^{w-x} N_{x+i} + N_x$$

$$N_x = S_x - S_{x+1} = \sum_{i=0}^{w-x} N_{x+i} - \sum_{i=1}^{w-x} N_{x+i}$$

Оттука:

$$\underline{S_x = N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + \ldots.. + N_w = \sum_{i=1}^{w-x} N_{x+i}}$$

$$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots.. + D_w = \sum_{i=0}^{w-x} D_{x+i}$$

$$N_{x+1} = D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots.. + D_w = \sum_{i=1}^{w-x} D_{x+i}$$

$$N_{x+2} = D_{x+2} + \ldots.. + D_w = \sum_{i=2}^{w-x} D_{x+i}$$

……………………………………………

……………………………………………

$$S_x = D_x + 2D_{x+1} + 3D_{x+2} + ... + (w+1)D_w = \sum_{i=0}^{w-x}(i+1)D_{x+i}$$

Комутативниот број C_x *<u>се користи за означување на дисконтираниот број на лицата коишто умреле во текот на една година,</u>* односно помеѓу x и (x+1)-та година. Бидејќи со d_x се означува бројот на умрените лица меѓу x и (x+1)-та година, тогаш дисконтираниот број на умрените лица во текот на (x+1)-та година ќе го пресметаме на следниов начин:

$$C_x = \frac{d_x}{r^{x+1}} = \frac{d_x}{I_{p\%}^{x+1}} = d_x \cdot II_{p\%}^{x+1} \text{ или } C_x = d_x \cdot v^{x+1} \text{[6] каде } v^{x+1} = \frac{1}{r^{x+1}};$$

$\frac{1}{r^x} = r^{-x}$ - сегашна (дисконтирана) вредност на една парична единица која достасува за (x+1) години со промена на p% (p.a.-d).

$$C_{x+1} = \frac{d_{x+1}}{r^{x+2}} = d_{x+1} \cdot II_{p\%}^{x+2}; \quad C_{x+1} = d_{x+1} \cdot v^{x+2};$$

$$C_{x+2} = \frac{d_{x+2}}{r^{x+3}} = d_{x+2} \cdot II_{p\%}^{x+3}; \text{ итн.} \quad C_{x+2} = d_{x+2} \cdot v^{x+3}; \text{ итн.}$$

Симболот M_x го означува *<u>дисконтираниот збир на умрените лица</u>* со почетна старост од x години.

$$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + ... + C_{w-1} + C_w = \sum_{i=0}^{w-x} C_{x+i}$$

Оваа равенка е аналогна на равенката за пресметување на N_x.

$$M_{x+1} = C_{x+1} + C_{x+2} + C_{x+3} + ... + C_{w-1} + C_w = \sum_{i=1}^{w-x} C_{x+i}$$

[6] Ако исплатите се вршат не на крајот туку на средината од годината, во тој случај комутативниот број се пресметува на следниов начин: $C_x = d_x \cdot v^{x+\frac{1}{2}}$

$$M_x - M_{x+1} = C_x \text{ односно } \sum_{i=0}^{w-x} C_{x+i} - \sum_{i=1}^{w-x} C_{x+i} = C_x$$

$$M_x = M_{x+1} + C_x \text{ односно } \sum_{i=0}^{w-x} C_{x+i} = \sum_{i=1}^{w-x} C_{x+i} + C_x$$

$$C_x = M_x - M_{x+1} = \sum_{i=0}^{w-x} C_{x+i} - \sum_{i=1}^{w-x} C_{x+i}$$

Ако сакаме комутативните броеви C_x и M_x да ги пресметаме преку комутативните броеви D_x односно N_x, во тој случај ќе ги примениме следниве релации:

$$C_x = d_x v^{x+1} = (l_x - l_{x+1}) v^{x+1} = l_x v^{x+1} - l_{x+1} v^{x+1} = l_x v^x v - l_{x+1} v^{x+1} = D_x v - D_{x+1}$$

или во општ случај: $C_i = D_i v - D_{i+1}$, за i = x; x+1; x+2; … ;w-x.

Комутативниот број M_x може да се пресмета и преку N_x, на следниот начин:

$$C_x = d_x v^{x+1} = (l_x - l_{x+1}) v^{x+1} = l_x v^x v - l_{x+1} v^{x+1} = D_x v - D_{x+1}$$

$$C_{x+1} = d_{x+1} v^{x+2} = (l_{x+1} - l_{x+2}) v^{x+2} = l_{x+1} v^{x+1} v - l_{x+2} v^{x+2} = D_{x+1} v - D_{x+2}$$

$$C_{x+2} = d_{x+2} v^{x+3} = (l_{x+2} - l_{x+3}) v^{x+3} = l_{x+2} v^{x+2} v - l_{x+3} v^{x+3} = D_{x+2} v - D_{x+3}$$

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

$$M_x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = N_x \cdot v - N_{x+1}$$

$$M_x = N_x \cdot v - N_{x+1} = N_x \cdot v - (N_x - D_x)$$

$$M_x = N_x \cdot v - N_x + D_x = D_x - (1 - v) N_x = D_x - d \cdot N_x$$

Од равенката $M_x = N_x \cdot v - N_{x+1}$, произлегуваат и следните релации:

$$M_{x+1} = N_{x+1} \cdot v - N_{x+2}$$

$$M_{x+2} = N_{x+2} \cdot v - N_{x+3}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$M_{x+k} = N_{x+k} \cdot v - N_{x+k+1}$$

Симболот R_x означува <u>*збир од збирот на дисконтираниот број на умрените лица*</u> со почетна старост од x години, па до граничната старост (w).

$$R_x = M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + \ldots + M_{w-1} + M_w = \sum_{i=0}^{w-x} M_{x+i}$$

Од оваа равенка може да се добие равенката:

$$R_{x+1} = M_{x+1} + M_{x+2} + M_{x+3} + \ldots + M_{w-1} + M_w = \sum_{i=1}^{w-x} M_{x+i}$$

По одземањето на равенките се добива:

$$R_x - R_{x+1} = M_x \text{ односно } \sum_{i=0}^{w-x} M_{x+i} - \sum_{i=1}^{w-x} M_{x+i} = M_x$$

$$R_x = R_{x+1} + M_x \text{ односно } \sum_{i=0}^{w-x} M_{x+i} = \sum_{i=1}^{w-x} M_{x+i} + M_x$$

$$M_x = R_x - R_{x+1} = \sum_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{w\text{-}x}} \mathrm{M}_{\mathrm{x+i}} - \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{w\text{-}x}} \mathrm{M}_{\mathrm{x+i}} = M_x$$

Аналогно на равенката за пресметување на комутативниот број S_x:

$$R_x = R_{x+1} + M_x \text{ или } M_x = R_x - R_{x+1}$$

$$\underline{R_x = M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + \ldots + M_{w-1} + M_w = \sum_{i=0}^{w-x} M_{x+i}}$$

$$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \ldots + C_{w-1} + C_w = \sum_{i=0}^{w-x} C_{x+i}$$

$$M_{x+1} = C_{x+1} + C_{x+2} + C_{x+3} + \ldots + C_{w-1} + C_w = \sum_{i=1}^{w-x} C_{x+i}$$

$$M_{x+2} = C_{x+2} + C_{x+3} + C_{x+4} + \ldots + C_{w-1} + C_w = \sum_{i=2}^{w-x} C_{x+i}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$R_x = C_x + 2C_{x+1} + 3C_{x+2} + \ldots + (w+1)C_w = \sum_{i=0}^{w-x} (i+1)C_{x+i}$$

2. ПРЕНУМЕРАНДНА И ПОСТНУМЕРАНДНА КОНСТАНТНА ЖИВОТНА РЕНТА

Под **рента** се подразбира износ кој се прима во постојани временски интервали[7]. Осигурувањето на рента е таков вид осигурување при коешто осигуреникот со плаќање на еднократна премија или плаќање премии во рати сака да ја обезбеди својата иднина или иднината на своето семејство.

Економската категорија на рента која е врзана со животот на едно лице се вика ***лична рента***. Осигуреникот ја прима лично, или до крајот на животот или за определен временски интервал.

За разлика од личната постои и таканаречена рента на надживување или ***рента во корист на трето лице (нелична рента)***, со која осигуреникот во случај на смрт сака да го обезбеди своето семејство или определен член од семејството.

Според ***траењето,*** рентата може да биде ***времена***, ако плаќањето на рентата е во одреден временски интервал, а може да биде и ***доживотна***, ако нејзиното плаќање трае доживотно, т.е. до крајот на животот на осигуреното лице.

Според ***почетокот на примањето на рентата*** таа може да биде непосредна или одложена. ***Непосредна рента*** е онаа која почнува да се исплаќа веднаш по склученото осигурување. Ако од денот на склучениот договор до почетокот на примањето на рентата треба да помине определено време, тогаш се работи за ***одложена рента***.

Според ***начинот на примањето*** на рентата таа може да биде ***декурзивна***, ако се прима на крајот од годината и ***антиципативна*** ако се прима на почетокот на годината. Ако рентата се прима во делови од годината се вика ***парцијална рента, рента на рати***.

[7] Д-р Никола Давидовиќ, "Основи на математиката за економисти" Култура, Скопје, стр. 197.

Понатаму, рентата може да биде ***постојана*** или ***променлива***, според ***висината на сумата во која се врши исплатата***.

Износот кој треба да го уплати осигуреникот во моментот на склучување на договорот за осигурување на личната рента се нарекува еднократна нето премија (миза)[8] или веројатна дисконтирана вредност. Овој износ, односно цената за овој вид животна рента, осигуреникот може да го уплати одеднаш (еднократно), на почетокот од секоја година (годишна премија) или, пак, одреден број пати во текот на годината (подгодишна премија или премија на рати)

2.1. НЕПОСРЕДНА ДОЖИВОТНА ЛИЧНА РЕНТА

Кај овој вид рента исплатите почнуваат од моментот на склучување на договорот за осигирување и траат сè додека е жив осигуреникот. Непосредната доживотна лична рента може да биде антиципативна или декурзивна (односно да се прима на почетокот или на крајот од секоја година или неколку пати во текот на годината). Еднократната премија (мизата) кај овој вид рента не може да се пресмета со примена на формулата од финансиска математика:

$$M = R\frac{r^n - 1}{r^n(r-1)}$$

Бидејќи n е непозната вредност (не се знае колку години ќе живее осигуреното лице), овој проблем се решава со примена на моделите на актуарска математика.

Со a_x ќе ја означиме еднократната нето премија (веројатна сегашна вредност) за доживотна годишна **антиципативна рента**, додека со a_x ќе ја означиме еднократната нето премија (веројатна сегашна вредност) за годишна доживотна **декурзивна** рента.

Осигуреникот за да го обезбеди приемот на наведената рента должен е да ја плати цената за овој вид рента, додека осигурувачот се обврзува на секој осигуреник кој ќе ја доживее наредната година да му исплати одреден износ на рента (сè до неговата смрт). Значи, осигурувачот ќе прима вкупно $l_x \mathrm{a}_x$ денари.

[8] Многу често, во поновата литература, наместо еднократна премија се употребува терминот веројатна дисконтирана вредност. Веројатна вредност е затоа што исплатите имаат алеаторен карактер, а дисконтирана (сегашна) вредност е затоа што износот на сите ренти се сведува (дисконтира) на моментот кога е склучен договорот за осигурување

Овој износ треба да му овозможи на осигурувачот да ги изврши следниве исплати:

- на почетокот од првата година - $1 \cdot l_x$ денари,
- на почетокот од втората година - $1 \cdot l_{x+1}$ денари,
- на почетокот од третата година - $1 \cdot l_{x+2}$ денари, итн.

Ако доживотната антиципативна годишна рента ја претставиме на бројна оска, ќе ја добиеме следнава слика:

живи лица	l_x	l_{x+1}	l_{x+2}	l_{x+3} ….
старост	x	$x+1$	$x+2$	$x+3$ ….

Според принципот на еквиваленција, сите уплати треба да бидат еднакви на исплатите сведени (дисконтирани) во моментот кога е склучен договорот за осигурување. Оттука, можеме да ја запишеме следнава равенка:

$$\mathrm{a}_x l_x = l_x + l_{x+1}v + l_{x+2}v^2 + l_{x+3}v^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Каде што $v = \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{1+\dfrac{p}{100}} = (1+\dfrac{p}{100})^{-1} = (\dfrac{100+p}{100})^{-1} = \dfrac{100}{100+p}$

По множење на равенката со v^x добиваме:

$$\mathrm{a}_x l_x v^x = l_x v^x + l_{x+1}v^{x+1} + l_{x+2}v^{x+2} + l_{x+3}v^{x+3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

А со замена на комутативните броеви D_x и N_x добиваме:

$$\mathrm{a}_x D_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\mathrm{a}_x D_x = N_x \Rightarrow \mathrm{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

Истата формула можеме да ја добиеме и преку осигурително техничкиот фактор ${}_iE_x (i = 1,2,3,\ldots),$

исплати:	$1 \quad 1_1 E_x \quad 1_2 E_x \quad 1_3 E_x \ldots\ldots$
старост:	$x \quad x+1 \quad x+2 \quad x+3\ldots\ldots$
еднократна премија:	a_x

$$\mathrm{a}_x = 1 + 1_1 E_x + 1_2 E_x + 1_3 E_x + \ldots\ldots\ldots$$

$$\mathrm{a}_x = 1 + \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \frac{D_{x+3}}{D_x} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\mathrm{a}_x = 1 + \frac{D_{x+} D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots\ldots\ldots}{D_x} = \frac{N_x}{D_x}\ldots\ldots\ldots$$

Ако доживотната декурзивна годишна рента ја претставиме на бројна оска ќе ја добиеме следнава слика:

исплати:	$1 \quad 1_1 E_x \quad 1_2 E_x \quad 1_3 E_x \ldots\ldots$
старост:	$x \quad x+1 \quad x+2 \quad x+3\ldots\ldots$
еднократна премија:	$a_x = 1 + \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \frac{D_{x+3}}{D_x} + \ldots\ldots\ldots$

$$a_x = 1_1 E_x + 1_2 E_x + 1_3 E_x + \ldots\ldots\ldots$$

$$a_x = \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \frac{D_{x+3}}{D_x} + \ldots\ldots\ldots$$

$$a_x = \frac{D_{x+} D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots\ldots\ldots}{D_x} = \frac{N_{x+1}}{D_x}\ldots\ldots\ldots$$

Ако од еднократната премија за доживотна годишна антиципативна рента ја одземеме рентата којашто се прима од првата година, ќе ја добиеме еднократната премија (миза) за декурзивна доживотна годишна рента:

$$a_x = a_x - 1 = \frac{N_x}{D_x} - 1 = \frac{N_x - D_x}{D_x} = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

Еднократната премија (миза) за рента од R денари е еднаква на:

$$M_{(a)} = R \cdot \mathrm{a}_x \qquad\qquad M_{(d)} = R \cdot a_x$$

2.2. ОДЛОЖЕНА ДОЖИВОТНА ЛИЧНА РЕНТА

Исплатата на рентата може да започне веднаш по склучувањето на договорот за осигурување, или, пак, може да се одложи по истекот на одреден број периоди. Бидејќи за првиот случај веќе стана збор во претходниот текст, во ова поглавје ќе го објасниме пресметувањето на еднократната премија во случај кога првата рента ќе ја прима по k години од денот на склучувањето на договорот за осигурување. Со $_{k}/\mathrm{a}_x$ ќе ја означиме еднократната нето премија (веројатна сегашна вредност) за одложена доживотнагодишна **антиципативна** рента, додека со $_{k}/a_x$ ќе ја означиме еднократната нето премија (веројатна сегашна вредност) за одложена годишна доживотна **декурзивна** рента.

Според законот на големите броеви, се претпоставува дека сите лица стари x години се осигурале со цел да примаат рента од еден денар по k години од денот на случувањето на договорот на осигурување, па сè до нивната смрт. Значи осигурувачот ќе прима вкупно $l_{x \cdot k/}\mathrm{a}_x$ денари. Примајќи го овој износ, осигурувачот се обврзува да ги изврши следните исплати:

- на почетокот од $(k+1)$ - та година – $1 \cdot l_{x+k}$ денари,
- на почетокот од $(k+2)$ - та година – $1 \cdot l_{x+k+1}$ денари,
- на почетокот од $(k+3)$ - та година – $1 \cdot l_{x+k+2}$ денари, итн.

Ако одложената доживотна годишна антиципативна рента ја претставуваме на бројна оска, ќе ја добиеме следната слика:

живи лица: $l_x \quad l_{x+1} \quad l_{x+2} \; \ldots\ldots \; l_{x+k} \quad l_{x+k+1} \quad l_{x+k+2}$

старост: $x \quad x+1 \quad x+2 \ldots . \; x+k \ldots\ldots \; x+k+1 \quad x+k+2$

И кај овој вид на рента, при пресметувањето на еднократната премија се почитува принципот на еквиваленција, според кој, сегашната веројатна вредност на сите уплати треба да биде еднаква на сегашната веројатна вредност на сите исплати, односно:

$$ {}_{k/}\mathrm{a}_x l_x = l_{x\,k} v^k + l_{x+k+1} v^{k+1} + l_{x+k+2} v^{k+2} + \ldots.. $$

По множење на равенката со v^x добиваме:

$$ {}_{k/}\mathrm{a}_x l_x v^x = l_{x\,k} v^{x+k} + l_{x+k+1} v^{x+k+1} + l_{x+k+2} v^{x+k+2} + \ldots.. $$

А по замена на комутативните броеви D_x і N_{x+k} добиваме:

$$ {}_{k/}\mathrm{a}_x D_x = D_{x+k} + D_{x+k+1} + D_{x+k+2} + \ldots. $$

$$ {}_{k/}\mathrm{a}_x D_x = N_{x+k} \Rightarrow {}_{k/}a_x = \frac{N_{x+k}}{D_x} $$

исплати: $1_k E_x$ $1_{k+1} E_x$ $1_{k+2} E_x$ ……….

старост: x $x+1 \ldots. x+k$ $x+k+1$ $x+k+2$ ……..

еднократна премија: ${}_{k/}a_x$

$$ {}_{k/}\mathrm{a}_x = 1_k E_x + 1_{k+1} E_x + 1_{k+2} E_x \ldots. + \ldots\ldots $$

$$ {}_{k/}\mathrm{a}_x = \frac{D_{x+k}}{D_x} + \frac{D_{x+k+1}}{D_x} + \frac{D_{x+k+2}}{D_x} \ldots\ldots $$

$$ {}_{k/}\mathrm{a}_x = \frac{D_{x+k} + D_{x+k+1} + D_{x+k+2} + D_{x+k+3} + \ldots.}{D_x} = \frac{N_{x+k}}{D_x} \ldots\ldots $$

Ако рентата се прима на крајот од секоја година, ќе ја добиеме следната состојба на временска линија

исплати: $1_{k+1} E_x$ $1_{k+2} E_x$ ……….

старост: x $x+1 \ldots. x+k$ $x+k+1$ $x+k+2$ ……..

еднократна премија: ${}_{k/}a_x$

$${}_{k/}a_x = 1_{k+1}E_x + 1_{k+2}E_x + 1_{k+3}E_x + \ldots\ldots$$

$${}_{k/}a_x = \frac{D_{x+k+1}}{D_x} + \frac{D_{x+k+2}}{D_x} + \frac{D_{x+k+3}}{D_x} + \ldots\ldots$$

$${}_{k/}a_x = \frac{D_{x+k+1} + D_{x+k+2} + D_{x+k+3} + \ldots}{D_x} = \frac{N_{x+k+1}}{D_x} \ldots\ldots$$

Ако од еднократната премија за доживотна годишна одложена антиципативна рента ја одземеме сегашната вредност на рентата што ќе се прима на почетокот од (k + 1) - та година, ќе ја добиеме еднократната премија (миза) за одложена декурзивна доживотна годишна рента:

$${}_{k/}a_x l_x = \frac{l_{x+k} v^{x+k}}{l_x v^x}$$

$${}_{k/}a_x = \frac{N_{x+k}}{D_x} - \frac{D_{x+k}}{D_x} = \frac{N_{x+k+1}}{D_x}$$

2.3. НЕПОСРЕДНА ПРИВРЕМЕНА (ТЕМПОРЕРНА) ЛИЧНА РЕНТА

Со ${}_{/n}\mathbf{a}_x$ ќе ја означиме еднократната нето премија (веројатна сегашна вредност) за привремена годишна антиципативна рента, додека со ${}_{/n}a_x$ ќе ја означиме еднократната нето премија (веројатна сегашна вредност) за привремена доживотна декурзивна рента.

Исплатата, односно приемот на привремената рента се врши најмногу n пати, под услов осигуреникот да е жив во текот на целиот период за кој е договорена исплатата. Притоа, на денот на склучувањето на договорот за осигурување, осигурувачот ќе прима вкупно $l_{x\,/n}\mathbf{a}_x$ денари. Примајќи го овој износ, осигурувачот се обврзува да ги изврши следниве исплати:

- на почетокот од првата година – $1 \cdot l_x$ денари,
- на почетокот од втората година – $1 \cdot l_{x+k}$ денари,
- …………………………………………………………………….
- на почетокот од n - тата година – $1 \cdot l_{x+n-1}$ денари.

Ако привремената годишна антиципативна рента ја претставиме на бројна оска, ќе ја добиеме следнава слика:

живи лица: $l_x \quad l_{x+1} \quad l_{x+2} \ldots\ldots l_{x+n-1}$

старост: $x \quad x+1 \; x+2 \ldots. x+n-1$

И кај овој вид рента, при пресметувањето на еднократната премија се почитува принципот на еквиваленција, според кој, сегашната веројатна вредност на сите уплати треба да биде еднаква на сегашната веројатна вредност на сите исплати, што значи дека:

$$_{/n}\mathrm{a}_{\mathrm{x}}\mathrm{l}_{\mathrm{x}} = l_x + l_{x+1}v + l_{x+2}v^2 + l_{x+3}v^3 + \ldots.. + l_{x+n-1}v^{n-1}$$

По множење на равенката со v^x добиваме:

$$_{/n}\mathrm{a}_{\mathrm{x}}\mathrm{l}_{\mathrm{x}}\mathrm{v}^{\mathrm{x}} = l_x v^x + l_{x+1}v^{x+1} + l_{x+2}v^{x+2} + l_{x+3}v^{x+3} + \ldots.. + l_{x+n-1}v^{x+n-1}$$

А по замена на комутативните броеви D_x і N_{x+k} добиваме:

$$_{/n}\mathrm{a}_{\mathrm{x}}\mathrm{D}_{\mathrm{x}} = \mathrm{D}_{\mathrm{x}} + \mathrm{D}_{\mathrm{x+1}} + \mathrm{D}_{\mathrm{x+2}} + \mathrm{D}_{\mathrm{x+3}} + \ldots.\mathrm{D}_{\mathrm{x+n\text{-}1}}$$

Бидејќи: $\mathrm{D}_{\mathrm{x}} + \mathrm{D}_{\mathrm{x+1}} + \mathrm{D}_{\mathrm{x+2}} + \mathrm{D}_{\mathrm{x+3}} + \ldots. = N_{\mathrm{x}}$ и

$$\mathrm{D}_{\mathrm{x+n}} + \mathrm{D}_{\mathrm{x+n\text{-}1}} + \mathrm{D}_{\mathrm{x+n+2}} + \ldots. = \mathrm{N}_{\mathrm{x+n}}$$

по извршената замена добиваме

$$_{/n}\mathrm{a}_{\mathrm{x}}\mathrm{D}_{\mathrm{x}} = N_x - N_{x+n}$$

$$_{/n}\mathrm{a}_{\mathrm{x}} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

исплати: $1 \quad 1_1 E_x \quad 1_2 E_x \ldots\ldots\ldots.. 1_{n-1} E_x$

старост: $x \quad x+1 \quad x+2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad x+n-1$

еднократна премија: $_{n/}a_x$

$$_{/n}\mathrm{a}_x = 1 + 1_1 E_x + 1_2 E_x + \ldots\ldots + 1_{n-1} E_x$$

$$_{/n}\mathrm{a}_x = 1 + \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \frac{D_{x+3}}{D_x} + \ldots\ldots + \frac{D_{x+n-1}}{D_x}$$

$$_{/n}\mathrm{a}_x = \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots. + D_{x+n-1}}{D_x} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

Во случај кога рентата се прима на крајот од секоја, ќе ја добиеме следнава состојба на временска линија:

исплати:		$1_1 E_x$	$1_2 E_x$	………..	$1_{n-1} E_x$	$1_n E_x$
старост:	x	$x+1$	$x+2$	…….	$x+n-1$	$x+n$

еднократна премија: $_{n/}a_x$

$$_{/n}a_x = 1_1 E_x + 1_2 E_x + \ldots\ldots + 1_{n-1} E_x + 1_n E_x$$

$$_{/n}a_x = \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \frac{D_{x+3}}{D_x} + \ldots\ldots + \frac{D_{x+n-1}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$_{/n}a_x = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots. + D_{x+n-1} + D_{x+n}}{D_x}$$

Ако во броителот едновремено ги додаваме и одземеме сите наредни комутативни броеви, ќе ја добиеме следнава формула:

$$_{/n}a_x = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots. + D_{x+n-1} + D_{x+n} + (D_{x+n+1} + D_{x+n+2} + \ldots) - (D_{x+n+1} + D_{x+n+2} + \ldots)}{D_x}$$

Со оглед дека: $N_{x+1} = D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots. + D_{90,}$ додека

$$N_{x+n+1} = D_{x+n+1} + D_{x+n+2} + D_{x+n+3} + \ldots. + D_{w,}$$

По замена во претходната равенка ќе добиеме:

$$_{/n}a_x = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

Еднократната премија (миза) за привремена декурзивна годишна рента ќе ја добиеме ако од еднократната премија за привремена годишна антиципативна рента ја одземеме сегашната вредност на рентата што се прима на почетокот од првата година и едновремено ја додадеме вредноста на рентата која се прима на крајот од последната година:

$$_{/n}a_x = {}_{/n}\mathrm{a}_x - {}_0E_x + {}_nE_x = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} + \frac{D_x}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$_{/n}a_x = \frac{(N_x - D_x) - (N_{x+n} - D_{x+n})}{D_x} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

2.4. ОДЛОЖЕНА ПРИВРЕМЕНА ЛИЧНА РЕНТА

Лицето ја прима рентата n години, но по истекот на k години од денот кога е склучен договорот за осигурување. Еднократната нето премија за одложена привремена антиципативна годишна рента ќе ја означиме со $_{k/n}\mathrm{a}_x$, а со $_{k/n}a_x$ ќе ја означиме еднократната нето премија за одложена привремена годишна декурзивна рента. Се прашуваме колкава еднократна премија (миза) треба да уплати осигуреникот, со иницијална старост од x години, со цел да обезбеди еден денар годишна рента. Лицето првите k години (период на одложување-каренца) не прима рента. Рентата се прима n години (период на прием на рентата), но по истекот на k години (период на одложување - каренца) од моментот кога е склучен договорот за овој вид рента.

Во случај кога рентата се прима на почетокот од годината, еднократна премија $_{k/n}\mathrm{a}_x$ ќе ја пресметаме на следниот начин:

$$_{k/n}\mathrm{a}_x = 1_kE_x + 1_{k+1}E_x + 1_{k+2}E_x + \ldots\ldots + 1_{k+n-2}E_x + 1_{k+n-1}E_x$$

$$_{k/n}\mathrm{a}_x = \frac{D_{x+k}}{D_x} + \frac{D_{x+k+1}}{D_x} + \frac{D_{x+k+2}}{D_x} + \ldots\ldots + \frac{D_{x+k+n-2}}{D_x} + \frac{D_{x+k+n-1}}{D_x}$$

$$ {}_{k/n}\mathrm{a}_x = \frac{D_{x+k} + D_{x+k+1} + D_{x+k+2} + \dots + D_{x+k+n-2} + D_{x+k+n-1}}{D_x} $$

Ако во броителот едновремено ги додаваме и одземеме сите наредни комутативни броеви, ќе ја добиеме следнава формула:

$$ {}_{k/n}\mathrm{a}_x = \frac{D_{x+k} + D_{x+k+1} + \dots + D_{x+k+n-1} + (D_{x+k+n} + D_{x+k+n+1} + \dots) - (D_{x+k+n} + D_{x+k+n+1} + \dots)}{D_x} $$

$$ {}_{k/n}\mathrm{a}_x = \frac{D_{x+k} + D_{x+k+1} + \dots + D_{x+k+n-1} + D_{x+k+n} + D_{x+k+n+1} + \dots - D_{x+k+n} - D_{x+k+n+1} - \dots)}{D_x} $$

Со оглед дека:

$$ N_{x+k} = D_{x+k} + D_{x+k+1} + D_{x+k+2} + \dots + D_w $$

$$ N_{x+k+n} = D_{x+k+n} + D_{x+k+n+1} + D_{x+k+n+2} + \dots + D_{w,} $$

По замена на равенката добиваме

$$ {}_{\mathrm{k/n}}\mathrm{a}_{\mathrm{x}} = \frac{N_{x+k} - N_{x+k+n}}{D_x} $$

Во случај кога се прима декурзивна годишна рента, еднократна премија ${}_{\mathrm{k/n}}\mathrm{a}_{\mathrm{x}}$ ќе ја пресметаме на следниот начин:

$$ {}_{k/n}a_x = 1_{k+1}E_x + 1_{k+2}E_x + 1_{k+3}E_x \dots\dots + 1_{k+n-1}E_x + 1_{k+n}E_x $$

$$ {}_{k/n}a_x = \frac{D_{x+k+1}}{D_x} + \frac{D_{x+k+2}}{D_x} + \frac{D_{x+k+3}}{D_x} + \dots\dots + \frac{D_{x+k+n-1}}{D_x} + \frac{D_{x+k+n}}{D_x} $$

$$ {}_{k/n}a_x = \frac{D_{x+k+1} + D_{x+k+2} + D_{x+k+3} + \dots + D_{x+k+n-1} + D_{x+k+n}}{D_x} $$

Ако во броителот едновремено ги додаваме и одземеме сите наредни комутативни броеви, ќе ја добиеме следнава формула:

$$_{k/n}a_x = \frac{D_{x+k+1} + D_{x+k+2} + ... + D_{x+k+n} + (D_{x+k+n+1} + D_{x+k+n+2} + ...) - (D_{x+k+n+1} + ...)}{D_x}$$

$$_{k/n}a_x = \frac{D_{x+k+1} + D_{x+k+2} + ... + D_{x+k+n} + D_{x+k+n+1} + D_{x+k+n+2} ... - D_{x+k+n+1} - D_{x+k+n+2} - ...)}{D_x}$$

Со оглед дека: $N_{x+k+1} = D_{x+k+1} + D_{x+k+2} + D_{x+k+3} + ... + D_{90,}$ додека

$N_{x+k+n+1} = D_{x+k+n+1} + D_{x+k+n+2} + D_{x+k+n+3} + ... + D_{w,}$

По замена во претходната равенка ќе добиеме:

$$_{k/n}a_x = \frac{N_{x+k+1} - N_{x+k+n+1}}{D_x}$$

Помеѓу еднократнатa премија за одложена привремена годишна декурзивна рента и еднократната премија за одложена привремена годишна антиципативна рента постои следнава релација:

$$_{k/n}a_x = {}_{k/n}\mathrm{a}_x - {}_kE_x + {}_{k+n}E_x$$

$$_{k/n}a_x = \frac{N_{x+k} - N_{x+k+n}}{D_x} - \frac{D_{x+k}}{D_x} + \frac{D_{x+k+n}}{D_x}$$

$$_{k/n}a_x = \frac{N_{x+k} - N_{x+k+n} - D_{x+k} + D_{x+k+n}}{D_x}$$

$$_{k/n}a_x = \frac{(N_{x+k} - D_{x+k}) - (N_{x+k+n} - D_{x+k+n})}{D_x} = \frac{N_{x+k+1} - N_{x+k+n+1}}{D_x}$$

$$_{k/n}a_x = \frac{N_{x+k+1}}{D_x} - \frac{N_{x+k+n+1}}{D_x} = {}_{k/}a_x - {}_{k+n/}a_x$$

3. ВАРИЈАБИЛНА ПЕРИОДИЧНА ЖИВОТНА РЕНТА

Кај варијабилната животна рента ќе ги разликуваме следните случаи:

1. рентата секоја наредна година се зголемува за рентата која се плаќа во првата година
2. рентата се зголемува или опаѓа за однапред одреден износ изразен во % од рентата која се плаќа во првата година

3.1. Рентата секоја наредна година се зголемува за апсолутен износ

Лицето старо x години осигурило рента која од година во година ќе расте за износот на рентата која се плаќа во првата година. Да се пресмета колку треба да уплати на име нето миза ако рентата во првата година е 1 денар и ако се прима: а) доживотно, б) во текот на n години од денот на осигурувањето?

3.1.1. Доживотна лична рента

Нето мизата за 1 денар за оваа рента е :

$$(I\text{a})_x \text{ денари}$$

Осигурителното друштво во моментот на осигурувањето ќе прими:

$$l_x(I\text{a})_x \text{ денари,}$$

а ќе исплати:

на почетокот на првата година: l_x денари

на почетокот на втората година: $2 \cdot l_{x+1}$ денари

на почетокот на третата година: $3 \cdot l_{x+2}$ денари

.

.

Затоа што уплатите се еднакви на дисконтираните исплати, имаме:

$$l_x(I\text{a})_x = l_x + 2 \cdot \frac{l_{x+1}}{r} + 3 \cdot \frac{l_{x+2}}{r^2} + \ldots$$

Од тука со делење со r^x ќе добиеме:

$$\frac{l_x}{r^x}(I\text{a})_x = \frac{l_x}{r^x} + 2\cdot\frac{l_{x+1}}{r^{x+1}} + 3\cdot\frac{l_{x+2}}{r^{x+2}} + \ldots$$

итн.

$$D_x(I\text{a})_x = D_x + 2\cdot D_{x+1} + 3\cdot D_{x+2} + \ldots$$

Знаеме дека важат равенките:

$$\begin{gathered} D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots = N_x \\ D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots = N_{x+1} \\ D_{x+2} + \ldots = N_{x+2} \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \end{gathered}$$

Со собирање на левата и десната страна на овие равенки ќе добиеме

$$D_x + 2D_{x+1} + 3D_{x+2} + \ldots = N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + \ldots = S_x\,,$$

Од каде е

$$D_x(\text{a})_x = S_x$$

Значи, нето миза за 1 денар од оваа рента е

$$(I\text{a})_x = \frac{S_x}{D_x}$$

Ако рентата во првата година е R, во другата е 2 R, третата 3 R..., мизата за оваа рента е

$$(IM)_x = R(I\text{a})_x$$

3.1.2. Привремена лична рента

Ако нето мизата за 1 денар од оваа рента ја обележиме:

$$_{|n}(Ia)_x$$

Во моментот на осигурувањето осигурителната компанија ќе прими од l_x лица

$$l_{x\,|n}(Ia)_x \text{ денари}$$

А ќе исплати:

на почетокот на првата година: l_x денари

на почетокот на втората година: $2 \cdot l_{x+1}$ денари

.

.

.

на почетокот на n- тата година $n \cdot l_{x+n-1}$ денари

Затоа што се еднакви дисконтираните исплати, ќе имаме:

$$l_{x\,|n}(Ia)_x = l_x + 2\frac{l_{x+1}}{r} + 3\frac{l_{x+2}}{r^2} + \ldots + n\frac{l_{x+n-1}}{r^{n-1}}$$

Од каде со делење со r^x ќе добиеме:

$$\frac{l_x}{r^x}{}_{|n}(Ia)_x = \frac{l_x}{r^x} + 2\frac{l_{x+1}}{r^{x+1}} + 3\frac{l_{x+2}}{r^{x+2}} + \ldots + n\frac{l_{x+n-1}}{r^{x+n-1}} .$$

Од тука се добива:

$$D_{x\,|n}(Ia)_x = D_x + 2 \cdot D_{x+1} + \ldots + n \cdot D_{x+n-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Знаеме дека важат равенките:

$$D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{x+n-1} = N_x - N_{x+n}$$
$$D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{x+n-1} = N_{x+1} - N_{x+n}$$
$$D_{x+2} + \ldots + D_{x+n-1} = N_{x+2} - N_{x+n}$$
$$D_{x+n-1} = N_{x+n-1} - N_{x+n}$$

Со собирање на левата и десната страна на овие равенки ќе добиеме

$$D_x + 2D_{x+1} + \ldots + nD_{x+n-1} = N_x + N_{x+1} + \ldots + N_{x+n-1} - nN_{x+n},$$

Со замена во равенката (1) добиваме:

$$D_{x\,|n}(I\text{a})_x = S_x - S_{x+n} - nN_{x+n}.$$

Значи, нето миза за 1 денар од оваа рента е

$$_{|n}(I\text{a})_x = \frac{S_x - S_{x+n}}{D_x} - n\frac{N_{x+n}}{D_x}.$$

Ако рентата во првата година е R, во другата е 2 R, третата 3 R..., мизата за оваа рента е

$$_{|n}(IM)_x = R_{|n}(I\text{a})_x$$

3.2. Рентни осигурувања по принцип на геометриска прогресија

Лицето старо x години ја осигурило рентата во првата година од R денари, а во секоја наредна година оваа рента расте или опаѓа за $\varepsilon\%$ од рентата во првата година. Треба да се пресмета колку осигуреното лице треба да плати на име нето миза ако рентата се прима: а) доживотно и б) во текот на n години од денот на осигурувањето.

3.2.1. Доживотна лична рента

Нето мизата за 1 денар во првата година од осигурувањето за оваа рента ја обележиме со:

$(I\text{a}\%)_x^{<}$ ако рентата расте и

$(I\text{a}\%)_x^{>}$ ако рентата опаѓа.

Во случај на растечка рента осигурителната компанија на денот на осигурувањето ќе прими:

$$l_x (Ia\%)_x^{<} \text{ денари}$$

додека ќе исплати:

на почетокот на првата година: l_x денари

на почетокот на втората година: $(1+\varepsilon)l_{x+1}$ денари

на почетокот на третата година: $(1+2\varepsilon)l_{x+2}$ денари

.

.

.

Да напоменеме дека

$$\varepsilon = \frac{\pi}{100}.$$

Затоа што уплатите се еднакви на дисконтираните исплати, ќе имаме:

$$l_x (Ia\%)_x^{<} = l_x + (1+\varepsilon)\frac{l_{x+1}}{r} + (1+2\varepsilon)\frac{l_{x+2}}{r^2} + \left(1+3\varepsilon\right)\frac{l_{x+3}}{r^3} + \ldots$$

Со делење со r^x оттука се добива:

$$\frac{l_x}{r^x}(Ia\%)_x^{<} = \frac{l_x}{r^x} + (1+\varepsilon)\frac{l_{x+1}}{r^{x+1}} + (1+2\varepsilon)\frac{l_{x+2}}{r^{x+2}} + \left(1+3\varepsilon\right)\frac{l_{x+3}}{r^{x+3}} + \ldots,$$

Од тука добиваме понатаму со ред:

$$D_x (Ia\%)_x^{<} = D_x + (1+\varepsilon)D_{x+1} + (1+2\varepsilon)D_{x+2} + \left(1+3\varepsilon\right)D_{x+3} + \ldots$$
$$D_x (Ia\%)_x^{<} = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots + \varepsilon\left(D_{x+1} + 2D_{x+2} + \ldots\right)$$

Со замена на збировите на десната страна на оваа равенка со N_x и S_{x+1} конечно ќе добиеме:

$$D_x (Ia\%)_x^{<} = N_x + \varepsilon \cdot S_{x+1}.$$

Значи, нето мизата за 1 денар од оваа рента е:

$$(Ia\%)_x^{<}=\frac{N_x+\varepsilon\cdot S_{x+1}}{D_x}$$

Ако рентата опаѓа, ќе биде:

$$(Ia\%)_x^{>}=\frac{N_x-\varepsilon\cdot S_{x+1}}{D_x}.$$

Нето мизата за рента од R денари ќе биде:

$$(Ia\%)_x^{<}=R\cdot\left(Ia\%\right)_x$$

3.2.2. Привремена лична рента

Нето мизата за 1 денар за оваа рента ја обележиме со:

${}_{|n}(Ia\%)_x^{<}$ ако рентата расте и

${}_{|n}(Ia\%)_x^{>}$ ако рентата опаѓа.

Во случај на растечка рента, осигурителната компанија на денот на осигурувањето ќе прими:

$$l_{x\,|n}(Ia\%)_x^{<} \text{ денари}$$

додека ќе исплати:

на почетокот на првата година: l_x денари

на почетокот на втората година: $(1+\varepsilon)l_{x+1}$ денари

на почетокот на третата година: $(1+2\varepsilon)l_{x+2}$ денари

.

.

.

на почетокот на n- тата година $\left[1+(n-1)\varepsilon\right]l_{x+n-1}$ денари

Затоа што уплатите се еднакви на дисконтираните исплати, ќе имаме:

$$l_{x\,|n}(Ia\%)_x^{<}=l_x+(1+\varepsilon)\frac{l_{x+1}}{r}+(1+2\varepsilon)\frac{l_{x+2}}{r^2}+\ldots+\left[1+(n-1)\varepsilon\right]\frac{l_{x+n-1}}{r^{n-1}}$$

Со делење со r^x оттука се добива:

$$\frac{l_x}{r^x}{}_{|n}(Ia\%)_x^< = \frac{l_x}{r^x} + (1+\varepsilon)\frac{l_{x+1}}{r^{x+1}} + (1+2\varepsilon)\frac{l_{x+2}}{r^{x+2}} + \ldots + \left[1+(n-1)\varepsilon\right]\frac{l_{x+n-1}}{r^{x+n-1}},$$

односно

$$D_{x\,|n}(Ia\%)_x^< = D_x + (1+\varepsilon)D_{x+1} + (1+2\varepsilon)D_{x+2} + \ldots + \left[1+(n-1)\varepsilon\right]D_{x+n-1}$$

Понатаму се добива:

$$D_{x\,|n}(Ia\%)_x^< = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{x+n-1} + \varepsilon\left[D_{x+1} + 2D_{x+2} + \ldots + (n-1)D_{x+n-1}\right] \qquad (1)$$

Затоа што важат равенките:

$$\begin{gathered} D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots + D_{x+n-1} = N_{x+1} - N_{x+n} \\ D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots + D_{x+n-1} = N_{x+2} - N_{x+n} \\ D_{x+3} + \ldots + D_{x+n-1} = N_{x+3} - N_{x+n} \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ D_{x+n-1} = N_{x+n-1} - N_{x+n} \end{gathered}$$

со собирање на нивните леви и десни страни добиваме:

$$N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + \ldots + N_{x+n-1} - (n-1)N_{x+n}$$

А како е

$$N_{x+1} + N_{x+2} + \ldots + N_{x+n-1} = S_{x+1} - S_{x+n}$$

Со замена во равенката (1) добиваме:

$$D_{x}\,{}_{|n}(Ia\%)_{x}^{<} = N_{x} - N_{x+n} + \varepsilon\left[S_{x+1} - S_{x+n} - (n-1)N_{x+n}\right].$$

За нето мизата за 1 денар од оваа рента по ред добиваме:

$${}_{|n}(Ia\%)_{x}^{<} = \frac{N_{x} - N_{x+n}}{D_{x}} + \frac{\varepsilon\left[S_{x+1} - S_{x+n} - (n-1)N_{x+n}\right]}{D_{x}}$$

$${}_{|n}(Ia\%)_{x}^{<} = {}_{|n}a_{x} + \varepsilon\,\frac{S_{x+1} - S_{x+n} - (n-1)N_{x+n}}{D_{x}}.$$

4. ИСПОДГОДИШНА И КОНТИНУЕЛНА ЖИВОТНА РЕНТА

Предмет на разгледување во досегашниот текст беше само годишната рента (т.е. рентата која осигуреникот ја прима само еднаш во текот на годината). Меѓутоа, честопати рентата се прима m пати во текот на годината, па затоа осигуреникот наместо годишно да прима рента во износ од 1 денар, ќе прими $\frac{1}{m}$ денари на име рента. Да претпоставиме дека осигуреникот прима m - ти дел од износот на годишната рента во секој m - ти дел од годината. Значи, во текот на годината ќе се извршат m исплати, при што секоја исплата изнесува $\frac{1}{m}$ денари ($\sum \frac{1}{m}$ = 1 денар). Еднократната премија (веројатната сегашна вредност-миза) за декурзивна доживотна подгодишна рента ќе ја означиме со $a^{m}{}_{x}$.

$$\begin{array}{cccccccc} & \frac{1}{m} & \frac{1}{m} & \ldots\ldots\ldots & \frac{1}{m} & \ldots\ldots.. & \frac{1}{m} \\ \hline x & x+\frac{1}{m} & x+\frac{2}{m} & \ldots\ldots\ldots & x+\frac{k}{m} & \ldots\ldots.. & x+1 \end{array}$$

Веројатноста осигуреникот да биде жив $\frac{k}{m}$ - тиот дел од годината е: ${}_{\frac{k}{m}}p_{x}$ а сегашната (дисконтираната) вредност на сумата од $\frac{1}{m}$ денари е: $\frac{1}{m} \cdot v^{\frac{k}{m}}$

Според тоа, веројатната сегашна вредност на износот од $\frac{1}{m}$ денари што ќе биде исплатен во $\frac{k}{m}$ - тиот дел од годината е: ${}_{\frac{k}{m}}p_x \cdot \frac{1}{m} \cdot v^{\frac{k}{m}}$.

Со оглед на фактот што во текот на годината се вршат повеќе исплати (како впрочем и во текот на целиот период на осигурување), еднократна премија (мизата) ќе биде еднаква на веројатната сегашна вредност на сите исплати:

$$a_x{}^m = \sum_{m=1}^{\infty} {}_{\frac{k}{m}}p_x \cdot \frac{1}{m} \cdot v^{\frac{k}{m}}$$

Бидејќи ${}_{\frac{k}{m}}p_x \cdot v^{\frac{k}{m}} = \frac{D_{x+\frac{k}{m}}}{D_x}$ следува дека: $a_x{}^m = \frac{1}{D_x} \cdot \frac{1}{m}\sum_{m=1}^{\infty} D_{x+\frac{k}{m}}$

Во таблицата на комутативните броеви содржани се вредности само за цели броеви (години). Бидејќи k е дел од годината, за изразот $\frac{1}{m}\sum_{m=1}^{\infty} D_{x+\frac{k}{m}}$ бараме приближна вредност со примена на Woolhouse[9] – овата формула на следниов начин:

---

[9] Статистичките функции, како што се очекуваните годишни проценки на животните ануитети, обично се претставени во табели на целобројни возрасти и одредби, сметајќи дека приливот на парични средства што тие го претставуваат се плаќа на годишно ниво. Така, статистичките табели најчесто се даваат за целобројни возрасти x.

$$\ddot{a}_{x:n]} = \sum_{t=0}^{n-1} \upsilon^t \, {}_t p_x \qquad (1)$$

која е очекуваната сегашна вредност на ануитет од $1 годишно, кој се плаќа однапред на годишно ниво на личност која е сега на возраст x за n години или додека не умре, што и да се случи прво: но тие обично не даваат

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:n]} = \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{nm-1} \upsilon^{t/m} \, {}_{t/m} p_x \qquad (2)$$

која е очекуваната сегашна вредност на ануитет од $1 годишно, кој се плаќа m пати годишно однапред на личност која е сега на возраст x за n години или додека не умре, што и да се случи прво. Очекуваните сегашни вредности на ануитетите кои се плаќаат континуирано обично не се даваат во табела, на пример

$$\bar{a}_{x:n]} = \int_0^n \upsilon^t \, {}_t p_x dt \qquad (3)$$

Ануитетите и премиите за животно осигурување обично се исплаќаат почесто, а не на годишно ниво (обично месечно), па така во пракса се јавуваат $\ddot{a}^{(m)}_{x:n]}$ и слични вредности. Ануитетите кои се плаќаат континуирано најчесто се употребуваат како апроксимации на годишните исплати, многу често (на пример дневно или неделно). Во денешно време, нивната очекувана вредност може многу лесно да се пресмета со табеларни пресметки, можеби со приближни вредности од постоечките можности ${}_{t/m}p_x$

на небројни одредби t/m. Сепак, обичните апроксимации во однос на ануитети со годишни плаќања се достапни, основани на Euler-Maclaurin-овото проширување и на формулата на Woolhouse, кои се сè уште во употреба.

Euler-Maclaurin-овата формула е серија (низа) од поправки на грешките во давање на приближниот интеграл на соодветна разликувачка функција според трапезиумовото правило; што значи, според интегралот на линеарната приближна функција. Да претпоставиме дека проблемот е да најдеме:

$$\int_a^b f(x)dx \tag{4}$$

Поделувајќи го опсегот на интеграцијата во N еднакви чекори по должина $h=(b-a)/N$ трапезиумовата приближна вредност е:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\sum_{i=0}^{N} f(a+ih)-\frac{f(a)+f(b)}{2}\right) \tag{5}$$

Да претпоставиме дека $f(x)$ е поделено на 2k периоди за секој позитивен број k. Euler-Maclaurin-овата формула дава коректни услови дури до $(2\kappa-1)$ вата изведувачка функција како што следува

$$\int_a^b f(x)dx = h\left(\sum_{i=0}^{N} f(a+ih)-\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)+\sum_{j=1}^{k-1}\frac{B_{2j}}{(2j)!}h^{2j}\left(f^{(2j-1)}(a)-f^{(2j-1)}(b)\right)-(b-a)\frac{B_{2k}}{(2k)!}h^{2k}f^{2k}(\xi) \tag{6}$$

Каде B_i е i-тиот Бернулиев број (1) и во крајниот услов ξ е некој број (a,b). Категорички првите неколку услови од ова проширување се

$$h\left(\sum_{i=0}^{N} f(a+ih)-\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)+\frac{h^2}{12}\left(f'(a)-f'(b)\right)-\frac{h^4}{720}\left(f''(a)f''(b)\right)+\ldots \tag{7}$$

Избирајќи $f(t)=\upsilon^t\,{}_tp_x$ и $h=1$, гледаме дека левата страна е $\bar{a}_{(x:n)}$ и игнорирајќи ги и условите на почетокот и најгорните променливи на десната страна, го имаме најчесто употребуваното проширување

$$\bar{a}_{x:n]} \approx \ddot{a}_{x:n+1]}-\frac{1}{2}\left(1+\upsilon^n\,{}_np_x\right)=\ddot{a}_{x:n]}-\frac{1}{2}\left(1-\upsilon^n\,{}_np_x\right) \tag{8}$$

Ако ги вклучиме и условите во првата променлива, го добиваме поправеното трапезиумово правило (3), коешто може да го употребиме со

$$\frac{d}{dt}\upsilon^t\,{}_tp_x=-(\delta+\mu_{x+t})\upsilon^t\,{}_tp_x \tag{9}$$

Формулата на Woolhouse може да биде добиена од Euler-Maclaurin-овото проширување избирајќи $h=1$ и $h=1/m$, во равенката (6), израмнувајќи ги десните страни на двете проширувања. Од ова добиваме

$$\frac{1}{m}\sum_{t=0}^{nm} f(t/m)=\sum_{t=0}^{n} f(t)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2m}\right)\left(f(n)+f(0)\right)+\sum_{j=1}^{k-1}\frac{B_{2j}}{(2j)!}(1-m^{-2j})$$

x $\left(f^{(2j-1)}(0)-f^{(2j-1)}(n)\right)+$ условот

$$\sum_{t=0}^{nm} f(t)-\frac{m-1}{2m}\left(f(n)+f(0)\right)$$

+

$$\frac{1}{m}\sum_{m=1}^{\infty} D_{x+\frac{k}{m}} \sum_{t=1}^{\infty} D_{x+1} + \frac{m-1}{2m} D_x + \frac{m^2-1d}{12m^2 d_t} D_{x+1} + ...$$

Бидејќи $\sum_{t=1}^{\infty} D_{x+1} = N_{x+1}$ следува дека:

$$\frac{1}{m}\sum_{m=1}^{\infty} D_{x+\frac{k}{m}} N_{x+1} + \frac{m-1}{2m} D_x$$

$$a_x{}^m = \frac{1}{D_x}(N_{x+1} + \frac{m-1}{2m} D_x) = \frac{N_{x+1}}{D_x} + \frac{m-1}{2m} = a_x + \frac{m-1}{2m}$$

Според истата аналогија ќе ја изведеме и формулата за пресметување на еднократната премија за антиципативна доживотна подгодишна (рента во рати), со тоа што корективниот член - $\frac{m-1}{2m}$ ќе го одземеме.

$$\mathrm{a}_x{}^m = \mathrm{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$

На идентичен начин се изведуваат и другите формули за пресметување на еднократната премија за поеделните видови ренти:

- *одложена доживотна парцијална рента*

декурзивна

$${}_{k/}a_x{}^m = {}_{k/}a_x + \frac{m-1}{2m}\, {}_kE_x$$

антиципативна

$${}_{k/}\mathrm{a}_x{}^m = {}_{k/}a_x - \frac{m-1}{2m}\, {}_kE_x$$

- *привремена парцијална рента*

декурзивна

$$\frac{m^2-1}{12m^2}(f'(0)+f'(n)) - \frac{m^4-1}{720m^4}\left(f''(0)+f''(n)\right)\ldots \qquad (11)$$

Речиси безначајно, Euler-Maclaurin-овото проширување може да се добие назад со формулите на Woolhouse дозволувајќи $m \to \infty$. Избирајќи $f(t) = \upsilon^t\, {}_tp_x$, ќе видиме дека левата страна на равенката (11) е $\ddot{a}^{(m)}_{x:n]} = \frac{1}{m}\upsilon^t\, {}_tp_x$ и збирот на десната страна е $\ddot{a}_{x:n]} + \upsilon^t\, {}_tp_x$. Отфрлајќи ги условите во прв и највисок ред променливи и поедноставувајќи ние добиваме:

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:n]} \approx \ddot{a}_{x:n]} - \frac{m-1}{2m}\left(1 - \upsilon^n\, {}_np_x\right).$$

$$_{/n}a_x^{\ m} = {}_{/n}a_x + (1 - \frac{D_{x+n}}{D_x})\frac{m-1}{2m}$$

антиципативна

$$_{/n}\mathrm{a}_x^{\ m} = {}_{/n}\mathrm{a}_x + (1 - \frac{D_{x+n}}{D_x})\frac{m-1}{2m}$$

- *одложена привремена парцијална рента*

декурзивна

$$_{k/n}a_x^{\ m} = {}_{k/n}a_x + (\frac{D_{x+k}}{D_x} - \frac{D_{x+k+n}}{D_x})\frac{m-1}{2m}$$

антиципативна

$$_{k/n}\mathrm{a}_x^{\ m} = {}_{k/n}\mathrm{a}_x + (\frac{D_{x+k}}{x}\frac{D_{x+k+n}}{x})\frac{m-1}{2m}$$

Ако во изразот $a_x - \frac{m-1}{2m}$ корективниот член $\frac{m-1}{2m}$ се подели со m, ќе се добие $\frac{1-1/m}{2}$. Воедно, ако исплатите во текот на годината стануваат се побројни и побројни (т.е. $m \to \infty$), ќе ја добиеме следнава формула:

$$\overline{\mathrm{a}}_x = \mathrm{a}_x - \frac{1}{2}$$

каде што $\overline{\mathrm{a}}_x$ претставува веројатна сегашна вредност на еднократната премија за континуелна пренумерандна лична рента.

Веројатна сегашна вредност на еднократната премија за континуелна пренумерандна лична рента се пресметува по следнава формула:

$$\overline{a}_x = \lim_{m \to \infty} a_x^m = a_x + \frac{1}{2}$$

Со оглед дека $a_x = a_x + 1,\ a_x = a_x - 1,\ a_x - a_x = 1,$ следува дека:

$$\overline{a}_x = a_x - \frac{1}{2} = a_x + 1 - \frac{1}{2} = a_x + \frac{1}{2}$$

$$\overline{a}_x = a_x + \frac{1}{2} = a_x - 1 + \frac{1}{2} = a_x - \frac{1}{2}$$

$$\overline{a}_x = \overline{a}_x$$

$$a_x - \frac{1}{2} = a_x + \frac{1}{2}$$

$$a_x - a_x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Ова, всушност, значи дека износот на еднократната премија за антиципативната и декурзивна рента се изедначува во случај кога рентата се прима континуирано во текот на годината.

"Голем број на проблеми од теориската и применета математика се сведуваат на одредени интеграли, кои не можеме да ги пресметаме бидејќи не може да се најде функција чиј извод е еднаков на функцијата под интегралниот знак, или, пак, за функцијата која треба да се интегрира не го знаеме аналитичкиот израз туку само една од вредностите кои одговараат на независно променливата големина".* За пресметување на овие интеграли се прибегнува кон приближна интеграција, за која постојат повеќе методи од кои задоволителни резултати дава методот на трапезот и Simpso-новата формула. Во овој труд ќе биде користен методот на трапезот. Општата формула за приближно пресметување на одредениот интеграл со помош на методот на трапезот е:

$$P \approx h\left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \ldots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \right)$$

$$P \approx h \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_{i-1} + y_i}{2} \right)$$

Морталитетните таблици покрај основните броеви: x-старост на лицето, l_x- број на живи лица стари x години и d_x-број на лица кои ја доживеале x-тата година, а не ја доживеале x+1-та година, ги содржат и комутативните броеви кои имаат голема практична вредност. Овие комутативни броеви се однесуваат за целобројни вредности на аргументот x / старост на осигуреникот. Комутативните броеви може да се дефинираат и кога x е континуирана променлива големина која може да поприми било која вредност од интервалот $\{0,(w-x)\}$.

$\overline{D}_x$ - дисконтиран број на живи лица за континуираната променлива големина x е:

$$\overline{D}_x = \int_x^{x+1} l_t v^t d_t$$

Апроксимативната вредност на одредениот интеграл пресметана со методот на трапезот е:

$$\overline{D_x} = \int_x^{x+1} D_t d_t \approx \frac{1}{2}\left(D_x + D_{x+1} \right)$$

$\overline{N}_x$ - збир на дисконтираниот број за континуираната променлива величина х е:

$$\overline{N}_x = \int_x^{w-x} D_t d_t$$

$$\overline{N}_x \approx \int_x^{x+1} D_t d_t + \int_{x+1}^{x+2} D_t d_t + \ldots + \int_{w-x-1}^{w+x} D_t d_t$$

$$\overline{N}_x \approx \frac{1}{2}\left(D_x + 2D_{x+1} + 2D_{x+2} + \ldots\right)$$

$$\overline{N}_x \approx \frac{1}{2}\left(N_x + N_{x+1}\right)$$

По истата аналогија се пресметуваат и другите комутативни броеви за континуираната / непрекината променлива величина х.

$\overline{C}_x$ -дисконтиран број на умрени лица

$$\overline{C}_x = \int_x^{x+1} C_t d_t$$

$$\overline{C}_x \approx \frac{1}{2}\left(C_x + C_{x+1}\right)$$

$\overline{M}_x$ -збир на дисконтираниот број на умрени лица

$$\overline{M}_x = \int_x^{w-x} C_t d_t$$

$$\overline{M}_x \approx \int_x^{x+1} C_t d_t + \int_{x+1}^{x+2} C_t d_t + \ldots + \int_{w-x-1}^{w-x} C_t d_t$$

$$\overline{M}_x \approx \frac{1}{2}\left(C_x + C_{x+1}\right) + \frac{1}{2}\left(C_{x+1} + C_{x+2}\right) + \ldots$$

$$\overline{M}_x \approx \frac{1}{2}\left(C_x + 2C_{x+1} + 2C_{x+2} + \ldots\right)$$

$$\overline{M}_x \approx \frac{1}{2}\left(M_x + M_{x+1}\right)$$

Во табелата број 1 (види Анекс) се дадени апроксимативните вредности на континуелните комутативни броеви пресметани со примена на методот на трапезот.

Вредноста на комутативните броеви за континуираната променлива големина х е помала во однос на вредноста на комутативните броеви добиени кога идното траење на живот е случајна променлива големина која поприма само целобројни вредности со одредени веројатности.

$$D_x > \overline{D}_x,\ \ N_x > \overline{N}_x,\ \ S_x > \overline{S}_x,\ \ C_x > \overline{C}_x,\ \ M_x > \overline{M}_x,\ \ R_x > \overline{R}_x,$$

Оваа разлика во износите помеѓу комутативните броеви повлекува премиите / еднократни или повеќекратни за осигурен капитал во случај на смрт да бидат помали во услови на континуелен модел во однос на премиите кај дискретниот / класичниот модел.

Со оглед на фактот дека континуелната рента се прима во бескрајно мали интервали во текот на годината (односно идното траење на живот поприма било која вредност од интервалот $\{0,(w-x)\}$, формулите за пресметување на износот на еднократните премии за поодделните видови на континуелни ренти ќе ги добиеме со помош на определените интеграли. Да претпоставиме дека лице старо x години осигурало рента од еден денар, која ќе ја прима ако ја доживее x+t-тата година (t не мора да биде цел број, t>0). Осигурувачот во x+t- тата година ќе исплати бескрајно мала сума- d_t во бесконечно мал интервал, од каде што имплицитно произлегува дека имаме збир од бесконечно мали износи. Се поставува прашањето, колкава е веројатната сегашна вредност (миза) за да се исплати сумата d_t во моментот на заклучување на договорот за осигурување за да се добие еден денар рента во x+t- тата година, тој износ е ${}_tE_x d_t$ и тоа се однесува на сите бесконечно мали интервали кои може да се направат помеѓу x (почетната старост) и w (граничната старост), затоа имаме:

$$\bar{a}_x = \int_0^{w-z} {}_tE_x d_t = \frac{1}{D_x}\int_0^{w-x} D_{x+t} d_t$$

За пресметување на вредноста на определениот интеграл се прибегнува кон приближна интеграција, за која постојат повеќе методи, а во овој случај ние ќе го користиме методот на трапезот.

$$\int_0^{w-x} D_{x+t} d_t \approx \sum_{k=0}^{w-x}\frac{1}{2}\left(D_{x+k} + D_{x+k+t}\right)$$

По замена во равенката за пресметување на $\overline{a_x}$, ќе добиеме:

$$\overline{a_x} = \frac{1}{D_x}\left[\frac{1}{2}\left(D_x + D_{x+1}\right) + \frac{1}{2}\left(D_{x+1} + D_{x+2}\right) + \ldots + \frac{1}{2}\left(D_{w-1} + D_w\right)\right]$$

$$\overline{a_x} = \frac{1}{2D_x}\left(D_x + 2D_{x+1} + 2D_{x+2} + 2D_{x+3} + \ldots\right)$$

$$\overline{a_x} = \frac{1}{D_x}\left(\frac{D_x}{2} + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots\right)$$

$$\overline{a_x} = \frac{1}{2} + \frac{N_{x+1}}{D_x} = \frac{N_{x+1}}{D_x} + \frac{1}{2}$$

$$\overline{a_x} = a_x + \frac{1}{2}$$

На сличен начин се пресметува и еднократна премија за одложена доживотна континуелна рента, со таа разлика што бесконечно малите интервали ги градиме помеѓу $x+k$ и w.

$$_{k/}\overline{a}_x = \int_k^{w-x-k} {}_tE_x d_t = \frac{1}{D_x}\int_k^{w-x-k} D_{x+t} d_t$$

$$\int_k^{w-x-k} D_{x+t} d_t \approx \frac{1}{2}(D_{x+k} + D_{x+k+1}) + \frac{1}{2}(D_{x+k+1} + D_{x+k+2}) + \dots$$

$$_{k/}\overline{a}_x = \frac{1}{2D_x}(D_{x+k} + 2D_{x+k+1} + 2D_{x+k+2} + \dots)$$

$$_{k/}\overline{a}_x = \frac{D_{x+k}}{2D_x} + \frac{N_{x+k+1}}{D_x}$$

$$_{k/}\overline{a}_x = \frac{N_{x+k+1}}{D_x} + \frac{D_{x+k}}{2D_x}$$

$$_{k/}\overline{a}_x = {}_{k/}a_x + \frac{1}{2}{}_kE_x$$

Со оглед на фактот дека привремената континуелна рента се прима само во наредните n години, интервалот за кој треба да се пресмета апроксимативната вредност на еднократната веројатна сегашна вредност, со примена на методот на трапез, се гради помеѓу x и $x+n$-тата година.

$$_{/n}\overline{a}_x = \int_0^n {}_tE_x d_t = \frac{1}{D_x}\int_0^n D_{x+t} d_t$$

$$_{/n}\overline{a}_x = \frac{1}{D_x}\left(\int_0^{w-x} D_{x+t} d_t - \int_n^{w-x-n} D_{x+t} d_t\right)$$

$$\int_0^{w-x} D_{x+t} d_t \approx \frac{1}{2}(D_x + D_{x+1}) + \frac{1}{2}(D_{x+1} + D_{x+2}) + \dots$$

$$\int_0^{w-x} D_{x+t} d_t \approx \frac{1}{2}(D_x + 2N_{x+1})$$

$$\int_n^{w-x-n} D_{x+t} d_t \approx \frac{1}{2}(D_{x+n} + D_{x+n+1}) + \frac{1}{2}(D_{x+n+1} + D_{x+n+2}) + \dots$$

$$\int_n^{w-x-n} D_{x+t} d_t \approx \frac{1}{2}(D_{x+n} + 2N_{x+n+1})$$

$$_{/n}\overline{a}_x = \frac{1}{2D_x}\left[(D_x + 2N_{x+1}) - (D_{x+n} + 2N_{x+n+1})\right]$$

$$_{/n}\overline{a}_x = \frac{D_x}{2D_x} + \frac{N_{x+1}}{D_x} - \frac{D_{x+n}}{2D_x} - \frac{N_{x+n+1}}{D_x}$$

$$_{/n}\overline{a}_x = \frac{1}{2} + \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} - \frac{D_{x+n}}{2D_x}$$

$$_{/n}\overline{a}_x = {}_{/n}a_x + (1 - {}_nE_x)\frac{1}{2}$$

5. КОМБИНИРАНИ МОДЕЛИ ЗА ОСИГУРУВАЊЕ НА КАПИТАЛ

5.1. Осигурување на капитал во случај на доживување

Според природата на овој вид осигурување, осигурувачот ќе ја исплати договорената сума ако осигуреникот доживее одредена старост. Со $_nE_x$ ќе ја означиме еднократната веројатна сегашна вредност (мизата) за осигурениот капитал од еден денар што ќе се исплати на крајот од годината, ако осигуреникот стар x години ја доживее x+n – тата година. Вредноста $_nE_x$ покажува колку треба да се вложи денес (во моментот на склучување на договорот за осигурување) за во случај на доживување на староста x+n што ќе се добие еден денар. Поради фактот што големината $_nE_x$ ќе биде апплицирана при пресметување на еднократната премија за рентните осигурувања, затоа изведувањето на оваа формула ќе го прикажеме на неколку начини.

Прв начин: Дисконтираната вредност на осигурениот капитал, кој ќе се исплати на крајот од x+n – та година, ќе ја добиеме на следниов начин $1\cdot v^n$. Меѓутоа, со оглед на фактот дека исплатата има случаен (алеаторен) карактер, т.е. зависи од остварување на одреден настан (дали осигуреникот ќе ја доживее староста x+n), а веројатноста да се доживее наведената старост е $_np_x$. Според тоа, еднократната премија кај овој вид осигурување е производ на сегашната вредност - $1\cdot v^n$ и веројатноста за доживување на староста x+n - $_np_x$:

$$_nE_x = {_np_x}\, v^n$$

Бидејќи $_np_x = \dfrac{l_{x+n}}{l}$ следува дека: $_nE_x = \dfrac{l_{x+n}}{l}\, v^n$.

Ако броителот и именителот ги помножиме со v^x ќе добиеме:

$$_nE_x = \frac{l_{x+n}}{l_x v^x}\, v^{x+n} \Longrightarrow {_nE_x} = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

Втор начин: Да претпоставиме дека сите лица од таблицата на смртност кои се стари x години (а ги има вкупно l_x)се осигурале дека во случај на доживување на x+n – тата година ќе им биде исплатен осигурениот капитал од еден денар. Според тоа, на почетокот на x – тата година осигурувачот ќе добие вкупно ${}_{n}E_{x}\ l_{x+n}$ денари, а на сите лица коишто ќе ја доживеат x+n – тата година ќе им се исплати по еден денар или вкупно l_{x+n}. денари.

По примена на принципот на еквиваленција добиваме:

$$ {}_{n}E_{x}\ l_{x} = l_{x+n}\ v^{n} $$

Ако помножиме со v^{x} ќе добиеме:

$$ {}_{n}E_{x}\ l_{x}\ v^{x} = l_{x+n}\ v^{x+n} \quad \Longrightarrow {}_{n}E_{x} = \frac{l_{x+n}}{l_{x}v^{x}}\ v^{x+n} = \frac{D_{x+n}}{D_{x}} $$

Трет начин: Осигурениот капитал од еден денар ќе се исплати ако лицето ја доживее старoста x+n (веројатноста за доживување е ${}_{n}p_{x}$), ако, пак, не ја доживее наведената старост (веројатноста да не се доживее старостa x+n е ${}_{n}q_{x}$), осигурениот капитал нема да се исплати (исплатата е еднаква на нула според тоа, очекуваната веројатна вредност е еднаква на производот од поеделните веројатности и износот на осигурениот капитал. Сегашната вредност на осигурениот капитал ќе ја добиеме откако ќе помножиме со факторот за дисконтирање (v^{n}), односно:

$$ {}_{n}E_{x} = {}_{n}p_{x}\,.\,v^{n}\,.1+ {}_{n}q_{x}\,.\,v^{n}\,.0= {}_{n}p_{x}\,.\,v^{n} = \frac{l_{x+n}\cdot v^{n}}{l_{x}} = \frac{l_{x+n}\cdot v^{n}}{l_{x}}\cdot\frac{v^{x}}{v^{x}} = \frac{l_{x+n}\cdot v^{x+n}}{l_{x}\cdot v^{x}} = \frac{D_{x+n}}{D_{x}} $$

Ако сакаме да ја пресметаме еднократната сегашна веројатна вредност, во случај кога осигурениот капитал се исплатува на крајот од првата, втората, третата итн. година, применувајќи ја истата аналогија, ќе ги примениме следниве формули:

$$ {}_{1}E_{x} = \frac{D_{x+1}}{D_{x}} \qquad {}_{2}E_{x} = \frac{D_{x+2}}{D_{x}} \qquad {}_{3}E_{x} = \frac{D_{x+3}}{D_{x}} $$

Во општ случај вредноста ${}_{i}E_{x}$ за (i = 1; 2; 3; ...), претставува осигурително техничко – дисконтен фактор во случај на доживување и ни покажува колку треба да се вложи во моментот на склучување на договорот за осигурување за во случај на доживување на i – тата година на осигуреникот да му се исплати еден денар.

5.2. Осигурување капитал во случај на недоживување

Кај овој вид осигурување, капиталот се исплатува по смртта на осигуреникот, без оглед на тоа кога ќе настапи смртта. Осигурената сума ќе се исплати на лицето коешто е одредено во полисата за осигурување. Со A_x ќе ја означиме еднократната нето премија (веројатната сегашна вредност) за осигурен капитал од 1 денар што ќе се исплати во случај на смрт (без оглед на тоа кога ќе настапи).

Прв начин: Осигурителната компанија ќе прими од l_x лица по A_x денари, односно вкупно $l_x \cdot A_x$ денари. Примајќи го овој износ, осигурувачот се обврзува да ги изврши следниве исплати:

- на крајот на првата година – 1 . d_x денари,
- на крајот на втората година – 1 . d_{x+1} денари,
- на крајот на третата година – 1 . d_{x+2} денари, итн.

Ако осигурувањето на капитал во случај на смрт го претставиме на бројна оска, ќе ја добиеме следнава слика:

умрени лица		d_x	d_{x+1}	d_{x+2}	
старост	x	x+1	x+2	x+3	

И кај овој вид осигурување, при пресметување на еднократната премија се почитува принципот на еквиваленција, според кој, сегашната веројатна вредност на сите уплати треба да биде еднаква на сегашната веројатна вредност на сите исплати, што значи дека:

$$l_x \; A_x = \; d_x \; v + d_{x+1} v^2 + d_{x+2} v^3 + \dots$$

По множење на равенката со v^x добиваме:

$$l_x \; v^x A_x = \; d_x \; v^{x+1} \; + d_{x+1} v^{x+2} + d_{x+2} v^{x+3} + \dots$$

А по замена на комутативните броеви D_x и C_x добиваме:

$$D_x\ A_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + C_{x+3} + ...$$

Бидејќи : $C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + C_{x+3} + ... = M_x$

по извршената замена добиваме: $D_x\ A_x = M_x \Rightarrow A_x = \dfrac{M_x}{D_x}$

Втор начин: Да претпоставиме дека осигурениот капитал од еден денар ќе се исплати на крајот од t - тата година. За осигурениот капитал да се исплати по t години од денот на осигурувањето, потребно е осигуреникот да ја доживее староста $x+t$ (веројатноста да се доживее $x+t$ година е $e_t + p_x$), а да не ја доживее наредната година (веројатноста да не се доживее наредната година е q_{x+t}). Веројатната вредност на осигурениот капитал на крајот од t - тата година ќе ја добиеме на следниот начин: $1 \cdot_t p_x \cdot q_{x+t}$, а сегашната веројатна вредност на осигурениот капитал во моментот на заклучување на договорот за осигурување ќе ја добиеме по множење на факторот за дисконтирање (v^{t+1}). Според тоа, веројатната сегашна вредност на еднократната нето премија за осигурен капитал во случај на смрт, изнесува:

$$A_x = \sum_{t=0}^{wx} 1_t\, p_x q_{x+t} v^{t+1} = \sum_{t=o}^{wx} \frac{l_{x+1}}{i_x} \frac{l_{x+t} l_{x+t+1}}{l_{x+t}} v^{t+1} / \frac{v^x}{v^x}$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{w-x} \frac{d_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{v^{x+t+1}}{v^x} = \sum_{t=o}^{w-x} \frac{C_{x+1}}{D_x} = \frac{1}{D_x} \sum_{t=0}^{w-x} C_{x+t} = \frac{M_x}{D_x}$$

Трет начин: Со ${}_i I_x$ за $i = 1;2;3;...)$ ќе ја означиме веројатната сегашна вредност за осигурен капитал од еден денар, кој ќе се исплати ако осигуреникот не ја доживее i — тата година. Вредноста ${}_i I_x$ претставува осигурително-технички фактор за осигурување на капиталот во случај на недоживување. Сегашната веројатна вредност на осигурениот капитал од еден денар на крајот од првата година ќе ја пресметаме на следниот начин:

исплати:		$1_0 I_x$
старост:	x	$x+1$

$$ {}_0I_x = q_x \cdot v^1 = \frac{d^x}{l^x} \cdot v = \frac{d^x \cdot v^{x+1}}{l_x\, v^x} = \frac{C_x}{D_x} $$

на крајот од втората година:

$$ {}_1I_x = q_{x+1} \cdot v^2 = \frac{d_{x+1}}{l_x} \cdot v^2 = \frac{d_{x+1} \cdot v^{x+2}}{l_x\, v^x} = \frac{C_{x+1}}{D_x} $$

на крајот од третата година:

$$ {}_2I_x = q_{x+2} \cdot v^3 = \frac{d_{x+2}}{l_x} \cdot v^3 = \frac{d_{x+2} \cdot v^{x+3}}{l_x\, v^x} = \frac{C_{x+2}}{D_x}, $$ итн.

Или во општ случај, кога осигурениот капитал ќе се исплати на крајот од која било година од x, па до граничната старост w = 90 години). Во тој случај еднократната нето премија претставува збир на веројатната вредност на капиталот на крајот од првата, втората, третата итн. година, односно:

исплати		$1_0 I_x$	$1_1 I_x$	$1_2 I_x$
старост	x	$x+1$	$x+2$	$x+3$

еднократна премија

$$ A_x = 1_0 l_x + 1_1 l_x + 1_2 l_x + ... $$

$$ A_x = \frac{C_{x+0}}{D_x} + \frac{C_{x+1}}{D_x} + \frac{C_{x+2}}{D_x} + \frac{C_{x+3}}{D_x} .... = \frac{M_x}{D_x} $$

5.3. Одложено осигурување на капитал

Кај овој вид осигурување, осигурувачот се обврзува да го исплати осигурениот капитал на наследникот означен во полисата за осигурување, под услов осигуреното лице да умре по истекот на k години (каренца, период на одлагање) од денот на склучувањето на договорот за осигурување.

Ова осигурување обично се практикува во случај на сомнителна здравствена состојба на осигуреникот, бидејќи во случај на доживотно осигурување на капитал и скорешна смрт, осигуреникот би го обезбедил назначениот корисник во полисата на штета на осигурувачот. Кај одложеното осигурување на капитал во случај на смрт, ако осигуреникот умре во текот на предвидените k години, осигурениот капитал не се исплатува.

Со ${}_{k/}A_x$ ќе ја означиме еднократната нето премија (веројатната сегашна вредност) за осигурен капитал од 1 денар што ќе се исплати по истекот на k години од денот на склучувањето на договорот за осигурување.

Прв начин: Осигурителната компанија ќе прими вкупно $l_x \cdot {}_{k/}A_x$ денари. Примајќи го овој износ, осигурувачот се обврзува да ги изврши следниве исплати:

- на крајот на првата година - $1 \cdot d_{x+k}$ денари,

- на крајот на втората година - $1 \cdot d_{x+k+1}$ денари,

- на крајот на третата година - $1 \cdot d_{x+k+2}$ денари, итн.

Ако одложеното осигурување на капитал во случај на смрт го претставиме на бројна оска, ќе ја добиеме следнава слика:

умрени лица			d_{x+k}	d_{x+k+1}......	
старост	x	$x+1$........$x+k$	$x+k+1$	$x+k+2$....	

И кај овој вид осигурување, при пресметувањето на еднократната премија се почитува принципот на еквиваленција, според кој, сегашната веројатна вредност на сите уплати треба да биде еднаков на сегашната веројатна вредност на сите исплати, што значи дека:

$$l_{x\,k/}A_x = d_{x+k}v^{k+1} + d_{x+k+1}v^{k+2} + d_{x+k+2}v^{k+3} + \ldots\ldots$$

По множење на равенката во v^x добиваме:

$$l_x v^x{}_{k/}A_x = d_{x+k}v^{x+k+1} + d_{x+k+1}v^{x+k+2} + d_{x+k+2}v^{x+k+3} + \ldots\ldots$$

А по замена на комутативните броеви D^x і C_{x+k} добиваме:

$$D_{x\,k/}A_x = C_{x+k} + C_{x+k+1} + C_{x+k+2} + \ldots\ldots$$

Бидејќи: $C_{x+k} + C_{x+k+1} + C_{x+k+2} + C_{x+k+3} + \ldots. = M_{x+k}$

По извршената замена добиваме: $D_{x\,k/}A_x = M_{x+k} \Rightarrow {}_{k/}A_x = \dfrac{M_{x+k}}{D_x}$

Втор начин:

исплати			$1_k I_x$	$1_{k1} I_x$	$1_{k+2} I_x \ldots\ldots$
старост	x	$x+1 \ldots x+k$	$x+k+1$	$x+k+2$	$x+k+3 \ldots.$

$${}_{k/}A_x = 1_k I_x + 1_{k+1} I_x + 1_{k+2} I_x + \ldots\ldots.$$

$${}_{k/}A_x = \frac{C_{x+k}}{D_x} + \frac{C_{x+k+1}}{D_x} + \frac{C_{x+k+2}}{D_x} + \ldots\ldots.$$

$${}_{k/}A_x = \frac{C_{x+k} + C_{x+k+1} + C_{x+k+2} + \ldots.}{D_x} = \frac{M_{x+k}}{D_x}$$

5.4. Привремено осигурување на капитал

Кај овој вид осигурување капиталот се исплатува на крајот од годината само ако осигуреникот умре во текот на првите години од денот на склучување на договорот за осигурување.

Прв начин: Акционерското друштво за осигурување ќе прими вкупно $l_x \cdot {}_{/n}A_x$ денари. Примајќи го овој износ, заедницата се обврзува да ги изврши следниве исплати:

- на крајот од првата година - $1 \cdot d_x$ денари,
- на крајот од втората година - $1 \cdot d_{x+1}$ денари,
- ……………………………………………………
- На крајот од n - тата година - $1 \cdot d_{x+n-1}$ денари,

Со оглед на тоа што уплатите се еднакви на збирот од дисконтираните вредности на сите исплати, следува дека:

$$l_{x\,/n}A_x = d_x v + d_{x+1}v^2 + \ldots + d_{x+n-1}v^n$$

По множење на равенката со v^x добиваме:

$$l_x v^x{}_k A_x = d_x v^{x+1} + d_{x+1}v^{x+2} + \ldots + d_{x+n-1}v^{x+n}$$

А по замена на комутативните броеви D_x и C_x добиваме:

$$D_{x\,k/}A_x = C_x + C_{x+1} + \ldots. + C_{x+n-1}$$

Ако на десната страна од претходната равенка се додаде и одземе следнава вредност:

$C_{x+n} + C_{x+n+1} + C_{x+n+2} + \ldots.. - C_{x+n} - C_{x+n+1} - C_{x+n+2} - \ldots.,$ ќе добиеме:

$$D_{x\,/n}A_x = M_x - M_{x+n} \Rightarrow {}_{/n}A_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

$${}_{/n}A_x = \frac{M_x}{D_x} - \frac{M_{x+n}}{D_x} = A_x - {}_{n/}A_x$$

Втор начин:

исплати		$1_o I_x$	$1_1 I_x$	$\ldots\ldots 1_{n-1} I_x$
старост	x	$x+1$	$x+2$	$\ldots\ldots\ x+n$

еднократна премија $_{/n}A_x$

$$_{/n}A_x = 1_0 I_x + 1_1 I_x + \ldots . + 1_{n-1} I_x$$

$$_{/n}A_x = \frac{C_x}{D_x} + \frac{C_{x+1}}{D_x} + \frac{C_{x+2}}{D_x} + \ldots\ldots + \frac{C_{x+n-1}}{D_x}$$

$$_{/n}A_x = \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2+\ldots .+}C_{x+n-1}}{D_x} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

$$_{/n}A_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} = \frac{M_x}{D_x} - \frac{M_{x+n}}{D_x} = A_x - {}_{n/}A_x$$

5.5. Одложено привремено осигурување на капитал

Според природата на овој вид осигурување, осигурениот капитал ќе се исплати по изминати k години од моментот на склучувањето на договорот за осигурување и во текот на наредните n години.

Со $_{k/n}A_x$ ќе ја означиме еднократната нето премија (веројатната сегашна вредност на еднократната премија) за осигурен капитал од 1 денар.

Прв начин: Осигурителната компанија ќе прими вкупно $l_x \cdot {}_{k/n}A_x$ денари. Примајќи го овој износ, осигурувачот се обврзува да ги изврши следниве исплати:

- на крајот од $k+1$- та година - $1 \cdot d_{x+k}$ денари,

- на крајот од $k+2$- та година - $1 \cdot d_{x+k+1}$ денари,

-…………………………………………………………………

- на крајот од $k+n$ - тата година - $1 \cdot d_{x+k+n-1}$ денари.

Со оглед на тоа што уплатите се еднакви на збирот од дисконтираните вредности на сите исплати, следува дека:

$$l_{x\,k/n}A_x = d_{x+k}v^{k+1} + d_{x+k+1}v^{k+2} + ... + d_{x+k+n-1}v^{k+n}$$

По множење на равенката го добиваме:

$$l_x v^x{}_{k/n}A_x = d_{x+k}v^{x+k+1} + d_{x+k+1}v^{x+k+2} + ... + d_{x+k+n-1}v^{x+k+n}$$

А по замена на комутативните броеви D_x і C_{x+k} добиваме:

$$D_{x\,k/n}A_x = C_{x+k} + C_{x+k+1} + ... + C_{x+k+n-1}$$

Ако на десната страна од претходната равенка се додаде и одземе следнава вредност:

$$C_{x+n} + C_{x+n+1} + C_{x+n+2} + ... - C_{x+n} - C_{x+n+1} - C_{x+n+2} - ....$$

ќе добиеме: $D_{x\,k/n}A_x = M_{x+k} - M_{x+k+n}$

$$_{k/n}A_x = \frac{M_{x+k} - M_{x+k+n}}{D_x}$$

Втор начин:

$$_{k/n}A_x = 1_k I_x + 1_{k+1} I_x + 1_{k+2} I_x + ... + 1_{k+n-2} I_x - 1_{k+n-1} I_x$$

$$_{k/n}A_x = \frac{C_{x+k}}{D_x} + \frac{C_{x+k+1}}{D_x} + \frac{C_{x+k+2}}{D_x} + ... + \frac{C_{x+k+n-2}}{D_x} + \frac{C_{x+k+n-1}}{D_x}$$

$$_{k/n}A_x = \frac{C_{x+k} + C_{x+k+1} + C_{x+k+2} + ... + C_{x+k+n-2} + C_{x+k+n-1}}{D_x}$$

Ако во броителот едновремено ги додаваме и одземеме сите наредни комутативни броеви, ќе ја добиеме следнава формула:

$$_{k/n}A_x = \frac{C_{x+k} + C_{x+k+1} + ... + C_{x+k+n-1} + (C_{x+k+n} + C_{x+k+n+1} + ...) - (C_{x+k+n} + C_{x+k+n+1} + ...)}{D_x}$$

$$_{k/n}A_x = \frac{C_{x+k} + C_{x+k+1} + ... + C_{x+k+n-1} + C_{x+k+n} + C_{x+k+n+1} + ... - C_{x+k+n} - C_{x+k+n+1} - ....}{D_x}$$

Со оглед дека:

$$M_{x+k} = C_{x+k} + C_{x+k+1} + C_{x+k+2} + \ldots\ldots + C_{90}$$

$$M_{x+k+n} = C_{x+k+n} + C_{x+k+n+1} + C_{x+k+n+2} + \ldots\ldots + C_{w,}$$

По замена во претходната равенка ќе добиеме

$$_{k/n}A_x = \frac{M_{x+k} - M_{x+k+n}}{D_x}$$

$$_{k/n}A_x = \frac{M_{x+k} - M_{x+k+n}}{D_x} = \frac{M_{x+k}}{D_x} + \frac{M_{x+k+n}}{D_x}$$

$$_{k/n}A_x = {}_{k/}A_x - {}_{k+n/}A_x$$

5.6. Комбинирано (мешовито) осигурување на капитал

Доминантен вид осигурување во современи услови е комбинираното осигурување на капитал. Природата на ова осигурување се состои во следново: осигуреникот ќе ја добие осигурената сума ако доживее одредена старост, а ако умре, капиталот ќе биде исплатен на неговите наследници. Овој вид осигурување се јавува во повеќе варијанти, а во современото работење на осигурителните компании за животно осигурување како императив се налага постојаното изнаоѓање нови варијанти со цел да се привлече вниманието на потенцијалните осигуреници.

Во ова поглавје ќе разгледаме три варјанти на комбинираното осигурување на капитал, коишто всушност претставуваат комбинација на осигурување во случај на доживување и осигурување во случај на недоживување.

I Варијанта: На лице старо x години ќе му се исплати капитал од 1 денар ако ја доживее $x+n$ - тата година, додека ако не ја доживее $x+n$ - тата година. осигурениот капитал ќе се исплати на неговите наследници.

Еднократната нето премија за оваа варијанта на комбинирано осигурување ќе ја означиме со $A_{\overline{x,n}}\, l_x$ денари, а ќе ги изврши следните исплати:

- на крајот од 1 - та година - $1 \cdot d_x$ денари,
- на крајот од 2 - та година - $1 \cdot d_{x+1}$ денари,
- ....
- на крајот од n - та година - $1 \cdot d_{x+n-1} + l_{x+n}$ денари,

Збирот на дисконтираните вредности на почетокот од осигурувањето е еднаков на дисконтираните уплати. Оттука:

$$l_x A_{\overline{x,n}} = d_x v + d_{x+1} v^2 + d_{x+1} v^3 + ... + d_{x+n-1} v^n + l_{x+n} v^n$$

По множење на равенката со v^x добиваме:

$$l_x v^x A_{\overline{x,n}} = d_x v^{x+1} + d_{x+1} v^{x+2} + d_{x+1} v^{x+3} + ... + d_{x+n-1} v^{x+n} + l_{x+n} v^{x+n}$$

А по замена на комутативните броеви D_x и C_x добиваме:

$$D^x A_{\overline{x,n}} = C_x + C_{x+1} + ... + C_{x+n-1} + D_{x+n}$$

$$D^x A_{\overline{x,n}} = M_x - M_{x+n} + D_{x+n}$$

$$A_{\overline{x,n}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} = {}_{/n}A_x + {}_nE_x$$

Еднократната нето премија кај оваа варијанта на комбинирано осигурување е збир од еднократната премија за привремено осигурување на капитал во случај на смрт и еднократната премија за осигурување на капитал во случај на доживување. Еднократната премија за овој вид комбинирано осигурување на капитал можеме да ја пресметаме и со примена на осигурително-техничкиот фактор во случај на доживување и недоживување $({}_iE_x; {}_iI_x)$, имено:

$$A_{\overline{x,n}} = 1_0 I_x + 1_1 I_x + 1_2 I_x + ... + 1_{n-1} I_x + 1_n E_x$$

$$A_{\overline{x,n}} = \frac{C_x}{D_x} + \frac{C_{x+1}}{D_x} + \frac{C_{x+2}}{D_x} + ... + \frac{c_{x+n-1}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$A_{\overline{x,n}} = \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + ... + C_{x+n-1} + D_{x+n}}{D_x}$$

$$A_{\overline{x,n}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} = {}_{/n}A_x + {}_nE_x$$

II Варијанта: На лице старо x години ќе му се исплати капитал од 1 денар ако ја доживее $x+n$ - тата година, а ако смртта настапи по $x+n$ -тата година осигурената сума ќе се исплати на неговите наследници. Кај овој вид осигурување фактички се споени два вида осигурување: осигурување на капитал во случај на доживување и одложено осигурување на капитал во случај на недоживување.

Поради тоа, еднократната премија ${}_{n/}A_x$ за овој вид осигурување е збир од еднократните премии за споменатите два вида осигурување за овој вид осигурување е збир од еднoратните премии за споменатите два вида осигурување:

$${}_{n/}A_x = {}_nE_x + {}_{n/}A_x = \frac{D_{x+n} + M_{x+n}}{D_x}$$

III Варијанта: На лице старо x години ќе му се исплати капитал од 1 денар ако ја доживее n - тата година од денот на склучување на договорот за осигурување, додека ако смртта настапи во текот на наредните m години (т.е. во интервал од $x+n$ - тата до $x+n+m$ - тата година). осигурениот капитал ќе се исплати на неговите наследници. И во овој случај се споени два вида осигурување: осигурување на капитал во случај на доживување и одложено привремено осигурување на капитал во случај на смрт. Поради тоа, еднократната премија $({}_{n/m}A_x)$ за овој вид осигурување е збир од еднократните премии за споменатите два вида на осигурување:

$${}_{n/m}A_x = {}_nE_x + {}_{n/m}A_x = \frac{D_{x+n} + M_{x+n} - M_{x+n+m}}{D_x}$$

5.7. Променлив капитал

Осигурувањето на променливиот капитал ќе го објасниме со пример на доживотното осигурување на капитал за случај недоживување.

5.7.1. Осигурениот капитал се зголемува или се намалува од година во година за износот на каиталот кој се плаќа во текот на првата година од осигурувањето

Лице старо x години осигурало капитал за случај недоживување, кој ќе се исплати на наследниците на крајот на годината во која ќе умре осигуреното лице, но така што осигураниот капитал ќе расте од година во година за износот на осигурениот капитал кој се исплаќа на крајот од првата година на денот на осигурувањето.

Да ја обележиме нето мизата за 1 денар осигурен капитал во првата година, 2 денари во втората, 3 денари во третата со $(IA)_x$.

Уплатата од страна на l_x лица на денот на осигурувањето се:

$$l_x(IA)_x \text{ денари}$$

додека исплатите се:

на крајот на првата година: d_x денари

на крајот на втората година: $2 \cdot d_{x+1}$ денари

на крајот на третата година: $3 \cdot d_{x+2}$ денари

.

Со изедначување на уплатите со дисконтираните исплати на денот на осигурувањето ќе добиеме:

$$l_x(IA)_x = \frac{d_x}{r} + 2\frac{d_{x+1}}{r^2} + 3\frac{d_{x+2}}{r^3} + \dots$$

Со делење со r^x оттука се добива:

$$\frac{l_x}{r^x}(IA)_x = \frac{d_x}{r^{x+1}} + 2\frac{d_{x+1}}{r^{x+2}} + 3\frac{d_{x+2}}{r^{x+3}} + \ldots,$$

$$D_x(IA)_x = C_x + 2\cdot C_{x+1} + 3\cdot C_{x+2} + \ldots$$

Затоа што:

$$C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + C_{x+3} + \ldots = M_x$$

$$C_{x+1} + C_{x+2} + C_{x+3} + \ldots = M_{x+1}$$

$$C_{x+2} + C_{x+3} + \ldots = M_{x+2}$$

$$C_{x+3} + \ldots = M_{x+3}$$

...

...

...

Добиваме:

$$C_x + 2C_{x+1} + 3C_{x+2} + \ldots = M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + \ldots,$$

А ако е:

$$M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + M_{x+3} \ldots = R_x$$

Ќе биде:

$$D_x(IA)_x = R_x$$

Односно:

$$(IA)_x = \frac{R_x}{D_x}.$$

Ако осигурениот капитал во првата година е K денари, тогаш нето мизата за тој капитал е:

$$(IM) = K(IA)_x.]$$

5.7.2. Осигурениот капитал се зголемува или се намалува за постојан процент од капиталот кој се плаќа во текот на првата година од осигурувањето

Лице старо x години осигурило капитал од K денари да се исплати на наследниците на крајот на првата година од денот на осигурувањето ако осигуреникот умре во текот на првата година од осигурувањето, а ако умре во некоја година подоцна осигурениот капитал се зголемува или се намалува за постојан износ изразен во % од осигурениот капитал K, кој се исплаќа на крајот од првата година од денот на осигурувањето. Да се пресмета колку осигуреникот треба да уплати на име нето миза ако осигурениот капитал се исплаќа кога и да почине осигуреникот.

Да ја обележиме со $(IA\%)_x^<$ нето мизата за 1 денар осигурен капитал K кој расте во подоцнежните години за $\pi\%$ од осигурениот капитал K.

Уплатата од страна на l_x лица на денот на осигурувањето се:

$$l_x (IA\%)_x^< \text{ денари.}$$

додека исплатите на осигурителната компанија се:

на крајот на првата година: d_x денари

на крајот на втората година: $(1+\varepsilon)\cdot d_{x+1}$ денари

на крајот на третата година: $(1+2\varepsilon)\cdot d_{x+2}$ денари

.

.

.

Каде е $\varepsilon = \dfrac{\pi}{100}$.

Со изедначување на уплатите со дисконтираните исплати на денот на осигурувањето ќе добиеме:

$$l_x (IA\%)_x^< = \frac{d_x}{r} + (1+\varepsilon)\frac{d_{x+1}}{r^2} + (1+2\varepsilon)\frac{d_{x+2}}{r^3} + \dots$$

Со делење со r^x оттука се добива:

$$D_x (IA\%)_x^< = C_x + (1+\varepsilon)\cdot C_{x+1} + (1+2\varepsilon)\cdot C_{x+2} + \dots,$$

$$D_x(IA\%)_x^{<} = (C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + ...) + \varepsilon\left(C_{x+1} + 2C_{x+2} + 3C_{x+3} + ...\right)$$

$$\left(IA\%\right)_x^{<} = \frac{M_x}{D_x} + \varepsilon \cdot \frac{R_{x+1}}{D_x}.$$

Доколку капиталот опаѓа, тогаш е:

$$\left(IA\%\right)_x^{>} = \frac{M_x}{D_x} - \varepsilon \cdot \frac{R_{x+1}}{D_x}.$$

6. ОСИГУРУВАЊЕ НА ДВЕ ЛИЦА

Покрај осигурувањето за еден живот во практиката имаме и осигурување на два или повеќе животи. Во практиката од најголемо значење е осигурувањето на два животи. Кај овој вид осигурување исплатата на осигурената сума зависи од должината на животот на двете осигурани лица (на пример маж и жена, брат и сестра, родител и дете итн.).

Така на пример ако имаме l_x лица стари x години и l_y лица стари y години, од нив можеме да формираме $l_x l_y$ парови. Од овие $l_x l_y$ парови по една година ќе имаме $l_{x+1}l_{y+1}$, по две години $l_{x+2}l_{y+2}$, по n години $l_{x+n}l_{y+n}$ парови.

6.1. ВЕРОЈАТНОСТ ЗА ДОЖИВУВАЊЕ НА ДВЕ ЛИЦА

При пресметување на веројатноста за живот или смрт на две лица постојат повеќе комбинации. Објаснувајќи ги овие комбинации, веројатноста за живот на лицето А ќе ја означуваме со p_x, а со p_y ќе ја означуваме веројатноста за живот на лицето В. Комплементарните веројатности, односно веројатностите за смрт на лицата А и В ќе ги означуваме со симболите q_x и q_y.

- Веројатност по n години и двете лица да бидат живи ${}_n p_{xy}$ претставува сложена веројатност и бидејќи се работи за меѓусебно независни настани, и таа ќе ја пресметаме на следниов начин:

$${}_n p_{xy} = {}_n p_x \cdot {}_n p_y = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y}$$

- Веројатност лицето А да ја доживее и лицето В да не ја доживее староста x + n, ${}_n p_{x/y}$ се пресметува на следниов начин:

$${}_n p_{x/y} = {}_n p_x \cdot {}_n q_y = {}_n p_x (1 - {}_n p_y) = \frac{l_{x+n}}{l_x}(1 - \frac{l_{y+n}}{l_y})$$

- Веројатноста лицето В да ја доживее, а лицето А да не ја доживее староста x + n, ${}_n p_{y/x}$ ќе ја пресметаме на следниов начин:

$${}_n p_{y/x} = {}_n p_y \cdot {}_n q_x = \frac{l_{y+n}}{l_y}(1 - \frac{l_{x+n}}{l_x})$$

- Веројатност и лицето А и лицето В да не ја доживеат староста x + n, односно x + y, ${}_n p_{xy}$:

$${}_n q_{xy} = {}_n q_x \cdot {}_n q_y = (1 - {}_n p_x)(1 - {}_n p_y) = 1 - {}_n p_x - {}_n p_y + {}_n p_x \cdot {}_n p_y$$

$${}_n q_{xy} = 1 + {}_n p_{xy} - ({}_n p_y + {}_n p_y) = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_y - l_{y+n}}{l_y}$$

- Веројатност по n години да биде живо најмалку едно лице (коебило), ${}_n p'_{xy}$:

$${}_n p'_{xy} = 1 - (1 - {}_n p_x) \cdot (1 - {}_n p_y) = 1 - {}_n q_x \cdot {}_n q_y = {}_n p_x + {}_n p_y - {}_n p_{xy}$$

$${}_n p'_{xy} = \frac{l_{x+y}}{l_x} + \frac{l_{y+n}}{l_y} - \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y}$$

- Веројатност по n години да биде живо само едно лице ${}_n p''_{xy}$:

$${}_n p''_{xy} = {}_n p_x \cdot {}_n q_y + {}_n q_x \cdot {}_n p_y = {}_n p_x + {}_n p_y - 2 {}_n p_{xy}$$

Теоремата на сложената веројатност овозможува да се пресмета и веројатноста дека t лица со старост: x; y; z; … години да бидат живи по n години:

$${}_n p_{xyz\ldots} = {}_n p_x \cdot {}_n p_y \cdot {}_n p_z \ldots = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y} \cdot \frac{l_{z+n}}{l_z} \ldots$$

- Веројатноста од вкупно t лица, ниту едно лице да не ги доживее наредните n години, ќе ја пресметаме на следниов начин:

$${}_n q_{xyz\ldots} = {}_n q_x \cdot {}_n q_y \cdot {}_n q_z \ldots \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_y - l_{y+n}}{l_y} \cdot \frac{l_z - l_{z+n}}{l_z} \ldots$$

$${}_n q_{xyz\ldots} = (1 - {}_n p_x)(1 - {}_n p_y)(1 - {}_n p_z) \ldots$$

$${}_n q_{xyz\ldots} = 1 - \sum {}_n p_x + \sum {}_n p_{xy} - \sum {}_n p_{xyz} + \ldots + (-1)^k \sum {}_n p_{xyz\ldots k} + \ldots$$

- Веројатноста барем едно лице од вкупно t лица да биде живо во наредните n, ќе ја пресметаме на следниов начин:

$$ {}_n p'_{xyz\ldots t} = 1 - {}_n q_{xyz\ldots t} = 1 - {}_n q_x \cdot {}_n q_y \cdot {}_n q_z \cdots {}_t = 1-(1-{}_n p_x)(1-{}_n p_y)(1-{}_n p_z)\ldots $$

$$ {}_n p_{xyz\ldots t_{xyz\ldots}} = \sum {}_n p_x - \sum {}_n p_{xy} + \sum {}_n p_{xyz} + \ldots + (-1)^{t+1} \sum {}_n p_{xyz\ldots t} + \ldots $$

6.2. КОМБИНИРАНИ МОДЕЛИ ЗА ЗАЕДНИЧКА ЖИВОТНА РЕНТА

Лицето А старо x години и лицето В старо у години се осигурени така што, додека и двете се живи, да примаат рента од 1 денар на почетокот на годината. Колкава е мизата за ова осигурување?

Ако со a_{xy} ја обележиме нето мизата за 1 денар осигурена рента. Осигурителната компанија ќе прими од $l_x l_y$ парови

$l_x l_y a_{xy}$ денари.

А ќе исплати:

на почетокот на првата година	$l_x l_y$ денари
на почетокот на втората година	$l_{x+1} l_{y+1}$ денари
на почетокот на третата година	$l_{x+2} l_{y+2}$ денари
......	.....
......	.....
......	
	.....

Со дисконитирање на исплатите на почетокот на осигурувањето и изедначување на нивниот збир со уплатите, имаме:

$$ \frac{l_x l_y}{r^{\frac{x+y}{2}}} a_{xy} = \frac{l_x l_y}{r^{\frac{x+y}{2}}} + \frac{l_{x+1} l_{y+1}}{r^{\frac{x+y}{2}+1}} + \frac{l_{x+2} l_{y+2}}{r^{\frac{x+y}{2}+2}} + \ldots $$

Од тука се добива:

$$ D_{xy} a_{xy} = D_{xy} + D_{x+1,y+1} + D_{x+2,y+2} + \ldots $$

Односно:

$$a_{xy} = \frac{N_{xy}}{D_{xy}} .$$

6.3. ОСИГУРУВАЊЕ НА КАПИТАЛ НА ДВЕ ЛИЦА

6.3.1. Осигурување на капитал на две лица во случај на доживување

Кај осигурувањето на капитал во случај на доживување осигурениот капитал се исплаќа по n години во следните случаи:

а) ако тогаш двете личности бидат живи

б) ако е жива само едната личност, која било, а другата пред тоа умре

в) ако тогаш биде жива најмалку една личност од двете осигурени.

Овде ќе дадеме пример за случајот под а).

Лицето А старо x години и лицето В старо y години имаат осигурено исплата на 1 денар капитал ако по n години и двете се живи. Колкава е нето мизата за ова осигурување?

Нето мизата за ова осигурување се обележува со ${}_{|n}E_{xy}$.

Осигурителната компанија ќе прими од $l_x l_y$ парови

$$l_x l_y \, {}_{|n}E_{xy} \text{ денари.}$$

А по n години ќе исплати:

$$l_{x+n} l_{y+n} \text{ денари.}$$

Со изедначување на уплатите со збирот на дисконитираните исплати ќе добиеме:

$$\frac{l_x l_y}{r^{\frac{x+y}{2}}} \cdot {}_{|n}E_{xy} = \frac{l_{x+n} l_{y+n}}{r^{\frac{x+y}{2}+n}}$$

Односно:

$$D_{xy} \cdot {}_{|n}E_{xy} = D_{x+n,y+n}.$$

Од овде е:

$$_{|n}E_{xy} = \frac{D_{x+n,y+n}}{D_{xy}}.$$

6.3.2. Осигурување на капитал во случај на недоживување со доживотно траење

Лицето А старо х години и лицето В старо у години имаат осигурено исплата на 1 денар капитал по смртта на едното лице на преживеаното лице. Осигурената сума се исплаќа на крајот на онаа година во која осигуреното лице починало. Колкава е нето мизата за ова осигурување?

Да ја обележиме нето мизата за 1 денар осигурен капитал со A_{xy}. Од $l_x l_y$ парови на крајот на првата година ќе преживеат $l_{x+1} l_{y+1}$ парови, што значи дека ќе бидат распарени парови

$$l_x l_y - l_{x+1} l_{y+1}.$$

За секој распарен пар осигурителната компанија ќе исплати по 1 денар.

Од $l_{x+1} l_{y+1}$ парови на почетокот на втората година ќе бидат $l_{x+2} l_{y+2}$ парови на крајот на истата година, и повторно на крајот на втората година ќе бидат распарени парови.

$$l_{x+1} l_{y+1} - l_{x+2} l_{y+2}$$

За тој број на распарени парови осигурителната компанија ќе исплати по 1 денар.

На основа на принципот за еквиваленција на уплатите и дисконтираните исплати ќе добиеме:

$$\frac{l_x l_y}{r^{\frac{x+y}{2}}} \cdot A_{xy} = \frac{l_x l_y - l_{x+1} l_{y+1}}{r^{\frac{x+y}{2}+1}} + \frac{l_{x+1} l_{y+1} - l_{x+2} l_{y+2}}{r^{\frac{x+y}{2}+2}} + \ldots$$

Односно:

$$D_{xy} \cdot A_{xy} = C_{xy} + C_{x+1,y+1} + C_{x+2,y+2} + \ldots.$$

Значи нето мизата за ова осигурување е: $A_{xy} = \dfrac{M_{xy}}{D_{xy}}$.

III. МАТЕМАТИЧКИ (ПРЕМИСКИ) РЕЗЕРВИ ЗА РЕНТНИ ОСИГРУВАЊА И ОСИГУРУВАЊЕ НА КАПИТАЛ

Секое рационално работење претпоставува формирање на одредени финансиски резерви со цел да се обезбеди континуирано и непречено работење. Поради тоа, осигурителните компании, покрај редовните, формираат и специјални резерви коишто се нарекуваат математички или премиски резерви.

Нето премиите се пресметани по одредени претпоставки (одредена стапка на смртност и одредена каматна стапка) и треба да овозможат надоместување на сите штети од настанатите смртни случаи. Премиите се плаќаат на почетокот на секоја година и во првите години на осигурувањето се поголеми од реалниот ризик (т.е. од износот на исплатите поради настанатите смртни случаи). На тој начин, од вишокот на премиите се формираат математичките (премиските) резерви, коишто постојано (перманентно) се вкаматуваат. Без овој фонд, идните годишни нето премии не би биле доволни за покривање на тековните трошоци поради настанатите смртни случаи.

При смртта на осигуреникот, од резервите се надоместува дел од осигурената сума и на тој начин сегашната вредност на осигурувањето (ризикот) постојано се намалува. Според тоа, цената на осигурувањето (при плаќање на еднакви годишни премии) не зависи од вкупната осигурена сума, туку од нето износот на ризикот, т.е. од висината на разликата помеѓу вкупната осигурена сума и резервата (создадена до тој момент). Овој принцип на редуцирана осигурена сума (адекватно намалување на вредноста на осигурувањето) произлегува од системот на еднакви годишни премии при осигурувањето на живот (во услови кога ризикот од година во година се зголемува), не се зголемуваат паралелно со зголемувањето на ризикот.

За да се сфати поимот за премиските резерви, неопходно е прво да се направи разлика помеѓу: природна премија; ризико-премија; штедна премија и ризико-осигурена сума. Ова е поради тоа што често разликата помеѓу споменатите премии не е воочена, а, исто така, често не се разликува номиналната договорена осигурана сума од осигурените суми под ризик.

Животното осигурување со природна премија не е ништо друго туку осигурување на една година. Тоа се склучува секоја година, и тоа секогаш со друга премија која се пресметува на основа на староста што одговара на осигуреникот. Таквото осигурување, всушност, е вистинско животно осигурување, затоа што осигуреникот секогаш плаќа онолку колку што треба да плати во однос на својата старост. Така што ризикот од смрт секогаш е осигурен на една година. Затоа и се вели дека природаната премија не е ништо друго туку ризико-премија за една година, односно премија за ризико-осигурувања на една година. Природната премија е во помладите години помала отколку во постарите години од животот, од каде што се забележува видлива разлика помеѓу почетното и завршното плаќање на премијата.

Иако природната премија е оправдана од гледна точка на математичката калкулација за пронаоѓање на реален курс кој осигуреникот треба да го плаќа, сепак е непрактична, па поради тоа во практиката се пресметува просечна премија која е иста за цело време додека трае осигурувањето. Според тоа, природната премија во текот на последните години на осигурување е толку голема така што е недостапна за осигурениците, па затоа тие го напуштаат овој вид осигурување. Значи, природните премии се пресметани така што можат да ја покријат исплатата за сите смртни случаи коишто настануваат во текот на годината, со претпоставка смртните случаи да се случуваат онака како што се во таблиците на смртноста, на кои се засновува предвиденото осигурување на живот.

Како што беше споменато, просечната премија е нужна кај осигурувањето на живот. Таа секогаш е изразена за голем број години наеднаш, скоро секогаш со износ како за доживотните или привремените плаќања. Нејзината предност над природната премија е во тоа што осигурувањето на живот по својата структура на осигурување е секогаш подолго од една година. Додека природна премија во првите години на осигурување е прилично помала од онаа во постарите години, просечната премија во однос на природната е поголема во првите, а помала во подоцнежните години на осигурување.

Со цел да се воспостави рамнотежа помеѓу природната и просечната премија, осигурителните друштва издвојуваат во првите години од наплатените премии на осигурувањето заклучени по просечна премија дел од премијата, по принципот на техниката на животно осигурување, за во подоцнежните години од тие издвоени средства да се формира вид фонд за покривање на смртните случаи во наредните години. Тој фонд, кој секоја година се формира на покажаниот начин од средствата на наплатената премија, се вика "Фонд на премиските резерви на животното осигурување".

Со пресметката на резервите од година во година осигурителните друштва ја намалуваат својата ризико-осигурена сума, односно "ризико-осигурен капитал".

Како што веќе беше споменато, поради просечните премии секогаш во првите години се наплатува поголема премија, што јасно произлегува дека нето премијата (P) се состои од:

a) Ризико-премии (Pr) и

b) Штедни премии (Pš).

Штедна или резервна премија е оној дел од премијата кој се издвојува од година во година од наплатените премии во вид на фонд кој служи за покривање на идните обврски на осигурителните друштва. Меѓутоа, ризико-премијата е разлика помеѓу вкупната нето премија и штедната премија. Според тоа, треба да се има предвид дека со создавањето на штедната премија осигурителните друштва не сносат повеќе ризик на целата осигурена сума, туку само на разликата помеѓу осигурената сума и штедната премија.

Според тоа, разликата помеѓу целата осигурена сума и вкупната штедна премија всушност е ризико-осигураната сума или ризико-капитал. Исто така, може да се заклучи дека ризико-премијата е природна премија за ризико-осигураниот капитал.

Осигурителните друштва од наплатата на нето премиите ја употребува само ризико-премијата за покривање на ризикот, а штедната премија ја одделуваат за штедење со камата за да, кога ќе се појави потреба, ги исполни своите обврски. Затоа може да се каже дека **премиската резерва** во одреден момент не е ништо друго туку <u>*збир на вкаматените и достасани штедни премии*</u>, до тој момент.

Поради тоа што премиската резерва во животното осигурување може да се разгледува од неколку гледни точки, може да се каже дека:

а) ако премиската резерва е, разгледувана сметководствено, разлика помеѓу уплатите на осигуреникот и исплатите на осигурувачот под претпоставка дека сите доспеани уплати во пресметковната година се наплатени и дека сите исплати на осигурителот се извршени онака како што е тоа предвидено во таблицата на смртноста. Со други зборови, премиската резерва е ***разлика помеѓу приходот и расходот кај животното осигурување***.

б) премиската резерва да е ***вкаматена штедна, односно резервирана премија***.

Со други зборови, премиската резерва се јавува како последица на просечната премија која нужно создава вишок. Затоа што просечната премија во првите години е поголема од природната, а во подоцнежните години е помала, тој вишок од уплатената премија се издвојува од година во година за од тие издвоени средства да би се формирал фонд кој во сметководството се појавува како фонд на премиските резерви на животното осигурување. Тој фонд на премиските резерви служи за обезбедување на исплатите на осигурениците во оние подоцнежни години кога просечните премии, кои осигуреникот ги плаќа, се помали од вистинските. Осигурителните друштва не можат и не смеат да ги сметаат уплатените премии како свој приход, туку се должни да ги издвојат како резерва која ќе служи за покривање на исплатите во подоцнежните години кога уплатите нема да бидат доволни за подмирување на тие потреби. Затоа што ако секое осигурување би се заклучувало од година во година за староста која одговара, што претставува природна премија, тогаш премиските резерви не би постоеле затоа што осигуреникот би плаќал онолку колку што му е доволно на заводот за да може да ги подмири исплатите во случај на смрт или доживување спрема видовите осигурување. Поради тоа, премиската резерва може да се издефинира како ***последица на стварната просечна премија***.

в) премиската резерва е ***разгледувана временски***:

- разлика помеѓу сегашната вредност на сите идни исплати на осигурителното друштво и сегашната вредност на сите идни уплати на осигуреникот, при што под сегашна вредност се подразбира вредноста во моментот за кој се пресметува премиската резерва.

- разлика помеѓу сегашната вредност на сите досегашни уплати на осигуреникот и сегашната вредност на сите досегашни исплати на друштвото за осигурување, каде што под сегашна вредност се подразбира вредноста во моментот за кој се пресметува премиската резерва.

1. МОДЕЛИ ЗА ИНДИВИДУАЛНО (ПОЕДИНЕЧНО) ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА ПРЕМИСКИТЕ РЕЗЕРВИ

Пресметката на математичките резерви се врши на крајот на секоја деловна година. Постојат повеќе начини за пресметка на математичката резерва. По дефиниција, премиската резерва ако е ***вкаматена штедна, односно резервирана премија,*** осигурителот е должен за секој вид осигурување да го пресмета збирот на сите штедни премии заедно со каматата, што технички не е изводливо.

Затоа разликуваме три модели за пресметување на премиските резерви, и тоа:

1. сметководствен модел;

2. ретроспективен модел и

3. проспективен модел.

Разликата на збирот на вкапиталираната состојба на математичките резерви од претходната година до крајот на годината заедно со премиите и исплатите го претставува таканаречениот ***сметководствен модел***.

Според тоа, ако состојбата на математичките резерви на крајот на секоја деловна година се добива на тој начин што и салдото од претходната година ќе се вкапитализира со истата каматна стапка со која биле работени комутативните броеви, па од така добиениот збир се одземаат сите исплати, тогаш тој метод на пресметка на премиските резерви се нарекува книговодствен модел.

Меѓутоа, ако состојбата на математичките резерви во одреден момент е еднаква на сегашната вредност на доспеаните математички резерви до тој момент намалени за сегашната вредност на извршените исплати до тој момент, тогаш тој модел на пресметка се нарекува ***ретроспективен метод*** на пресметка на премиските резерви. Овој модел ја дава премиската резерва со помош на податоците за поминатото време од денот на осигурување до денот на пресметување на премиската резерва. Со други зборови, математичката резерва е разликата на вкапиталираниот износ на примените премии и вкапиталираниот износ на исплатите врз основа на осигурените суми од денот на осигурувањето до денот кога се бара премиската резерва.

И на крај, ако состојбата на математичката резерва претставува збир на сите дисконтирани идни исплати и дисконтирани идни плаќања во моментот на пресметката на математичките резерви, тогаш таквиот модел се нарекува ***проспективен***. Овој метод ја дава премиската резерва со помош на податоците од иднината.

Врз основа на претходно изложеното може да се заклучи дека **математичката резерва** е еден фонд кој заедно со сите очекувани годишни премии и камата на каматите го обезбедува осигурителот да може да ги изврши сите исплати на осигурителните суми по таблиците на смртноста.

Пресметување на премиските резерви. Доколку се претпостави дека смртноста на осигурениците ќе се одвива токму според одбраната таблица на смртност, а вложените пари ќе даваат вкаматување предвидено со тарифите и трошоците нема да се разликуваат од трошоците кои се пресметани кај составот на тарифите и кога не би имало самоволни истапувања, тогаш и не би било потребно посебно пресметување на математичките резерви затоа што на осигурителот разликата по вкаматувањето на примените премии и исплатата на настанатите обврски ќе ја претставува потребната резерва.

Ако претходната претпоставка не може да се оствари, така и резервата пресметана по горните услови ќе биде различна од потребната, па затоа на секој осигурител му се наметнува потреба од пресметка на математичка резерва, при што треба да се има предвид фактот дека износот на резервите во моментот на пресметката треба да биде еднаков на разликата помеѓу дисконтираните вредности на сите примени нето премии и дисконтираните вредности на сите извршени исплати, кои ќе ги обележиме со A и V.

Според тоа, математичката резерва *R* би била:

$$\mathbf{R = A - V} \tag{1}$$

Ако ги изземеме новозаклучените осигурувања, тогаш дисконтираната вредност на сите примени премии A ќе биде еднаква на разликата на сегашната вредност на сите нето премии како порано примените така и оние идните S и сегашната вредност на идните нето премии D. Според тоа, A = S – D. Исто така, сегашната вредност на извршените исплати V ќе биде еднаква на разликата на сегашната вредност на сите обврски како извршени така и идни F и сегашната вредност на идните исплати g.

Ако, V = F – g тогаш од R = A – V произлегува:

$$\mathbf{R = A - V = S - D + g - F = S - F + g - D} \tag{2}$$

Во моментот на склучување на договорот за осигурување вредноста на нето премијата е еднаква на вредноста на обврските, така и S = F така да од R = S – F + g – D произлегува:

$$\mathbf{R = g - D} \tag{3}$$

Од каде може лесно да се заклучи дека математичката резерва е еднаква на разликата на сегашната вредност на идните исплати и сегашната вредност на идните нето премии, при што вредноста на идните исплати пресметана во еден одреден момент за осигурителите претставува обврска спрема осигурениците, а вредноста на идните уплати претставува долг на осигуреникот спрема осигурувачот.

Равенките (1) и (3) карактеризираат два начини на пресметка на премиската резерва, и тоа равенката (1) го претставува ретроспективниот начин, а равенката (3) проспективниот начин на пресметка на премиските резерви.

И едниот и другиот начин на пресметка на математичките резерви го дава истиот резултат. Во претходното разгледување земени се предвид само износите на нето премиите со претпоставка дека со останатите давачки на осигуреникот на име трошоци на осигурување слободно располага. Затоа и ваквиот начин на пресметување на премиските резерви каде што во пресметката се користат само нето премиите се нарекува *нето систем*.

Доколку во пресметката на математичките резерви се земат во равенките (1) и (3) наместо нето премиите бруто премии, тогаш може да се каже дека пресметката на математичките резерви се врши по *бруто систем*.

Затоа што бруто премиите се поголеми од нето премиите, затоа што содржат покрај нето премии, и извесен додаток на име покривање на трошоците: аквизациони, управни и инкасо, тоа е и математичката резерва пресметана по нето системот, поголема затоа што во равенките (1), односно (3) вредноста на нето премијата A, односно D е помала, додека износот на резервите по бруто системот е помал поради тоа што за вредностите A и D се зема бруто премија која е поголема.

1.1. Пресметување на математичките резерви по нето ретроспективниот модел

Како премиска, односно математичка резерва во моментот t од нејзиното пресметување претставува разлика помеѓу сегашната вредност на примените нето премии и сегашната вредност на исплатените износи, затоа, за да ја пресметаме, треба да ја знаеме вредноста на сите доспеани нето премии до моментот t, како и вредноста на сите извршени исплати до истиот момент t.

Водејќи сметка за истакнатиот принцип, кој го карактеризира ретроспективниот начин на пресметка на математичката резерва, ќе го покажеме нејзиното пресметување на примерот на доживотно осигурување за случај смрт за доживотно плаќање на премии за лице кое со x години старост стапило во осигурување, а пресметката се врши по t години. Нека е нето премијата за ова осигурување P_x, тогаш е на почетокот на осигурувањето вредноста на сите премии кои ќе доспеат или веќе доспеале во текот на тие t години е $P_x a_{x,\overline{t|}}$ каде $a_{x,\overline{t|}}$ е сегашната вредност на еднократната премија за лична рента од 1 денар за времето на живот на осигуреното лице во текот на траење од t години. Исто така, и вредноста на исплатите по смртта која се очекува во тие t години пресметана на почетокот на осигурувањето е еднаква на еднократните уплати за темпорарно осигурување во случај на смрт во текот на тие t години: $A_{x,\overline{t|}}$.

Вредностите $P_x a_{x,\overline{t|}}$, $A_{x,\overline{t|}}$ се познати вредности во моментот на почетокот на осигурувањето. Меѓутоа, нам ни се потребни вредности по t години, исто така, во моментот на пресметката на премиската резерва. Поради тоа што износот од 1 денар во осигурувањето се зголемува за t години на $\frac{D_x}{D_{x+t}}$, затоа и износите $P_x a_{x,\overline{t|}}$, $A_{x,\overline{t|}}$ по t години ќе изнесуваат:

$$P_x a_{x,\overline{t|}} \cdot \frac{D_x}{D_{x+t}} \quad \text{и} \quad A_{x,\overline{t|}} \cdot \frac{D_x}{D_{x+t}}$$

разликата изнесува:

$$P_x a_{x,\overline{t|}} \cdot \frac{D_x}{D_{x+t}} - A_{x,\overline{t|}} \cdot \frac{D_x}{D_{x+t}}$$

или

$$tVx = (P_x a_{x,\overline{t|}} - A_{x,\overline{t|}}) \cdot \frac{D_x}{D_{x+t}}$$

или

$$tV_x = (P_x \cdot \frac{N_x - N_{x+t}}{D_x} - \frac{M_x - M_{x+t}}{D_x}) \cdot \frac{D_x}{D_{x+t}} = \frac{P_x \cdot (N_x - N_{x+t}) - (M_x - M_{x+t})}{D_{x+t}} \ldots.. \qquad (1)$$

каде

$$\frac{N_x - N_{x+t}}{D_x} = a_{x,\overline{t|}}$$

и

$$\frac{M_x - M_{x+t}}{D_x} = A_{x,\overline{t|}}$$

ја дава математичката резерва.

Со помош на равенката (1) може да се пресмета *индивидуалната математичка резерва* за следните видови осигурување:

а) за случај смрт со доживотно плаќање на годишни премии;

б) за случај смрт со ограничено траење на плаќањето на премиите;

в) за темпорерно осигурување;

г) за мешовито осигурување (за случај смрт и доживување).

Кај осигурувањето за случај доживување треба да се има предвид дека $M_x - M_{x+t} = 0$, затоа што во текот на годината немало никакви исплати. Исто така, и за одложеното осигурување на капиталот $t \le k$ нема исплати, па затоа намалителот е еднаков на нула. Доколку премијата се плаќа n години, тогаш t во првиот член од десната страна на равенката (1) може да има најголема вредност n.

Исто така, кај одложените осигурувања уплатата на мизата треба да е за $t = k$ или $t > k$ во равенката (1) наместо $a_{x+t\overline{k-t|}}$ односно, $A_{x+t,\overline{k-t|}}$ да пишува a_{x+t} кај осигурувањето на рентата, односно A_{x+t} кај осигурувањето на капиталот. За осигурувањето на капитал за случај кога е $t > k$ биле $t-k$ исплати затоа е намалителот миза за одложено темпорерно наместо за темпорерно осигурување. Така, намалителот за капитал ќе биде $K \cdot A_{x,\overline{t-k|}}$, а за рентата $K \cdot a_{x,\overline{t-k|}}$.

Равенката (1) претставува разлика на дисконтираните уплати и исплати на почетокот на осигурувањето сочинети од почетокот на осигурувањето до моментот кога осигуреното лице било старо x години до моментот кога осигуреното лице станало старо x + t години.

Ако осигурувањето е извршено со уплаќање годишната привремена премија, а премијата се плаќа m години, тогаш ја имаме равенката:

$$tVmP(A_x) = \frac{D_x}{D_{x+t}}\left[mP(A_x)a_{x,\overline{t|}} - A_{x,\overline{t|}}\right]... \qquad (2)$$

Треба да се има предвид дека t кај $a_{x,\overline{t|}}$ може да земе најголема вредност m. Кога $t = m$, тогаш намалителот $mP(A_x)a_{x,\overline{t|}}$ станува A_x. Според тоа, ако $t \geq m$ равенката станува:

$$tV\ [mP(A_x)] = \frac{D_x}{D_{x+t}}\left[A_x - A_{x,\overline{t|}}\right] = A_{x+t}.... \qquad (3)$$

Од равенката (3) гледаме дека по уплатите на сите премии премиската резерва се изедначува со низата за истото осигурување, но лицето старо x + t години е лице постаро за t години отколку што било старо осигуреното лице во моментот на осигурувањето.

Во случајот на осигурувањето со уплата на миза намаленикот во равенката (1) е миза на тоа осигурување. Кај осигурувањето на капиталот во случај на смрт кога и да умре осигуреникот, со уплатата на доживотната премија наместо намаленикот $P(A_x)a_{x,\overline{t|}}$ треба да се стави A_x. На тој начин, наместо равенката (1) ја добиваме следната равенка:

$$tV(A_x) = \frac{D_x}{D_{x+t}}\left[A_x - A_{x,\bar{t}|}\right] = A_{x+t} \ldots. \tag{4}$$

Од равенката (4) го изведуваме општото правило за пресметување на премиската резерва кога осигурувањето е извршено со уплата на миза. Тоа правило гласи: Премиската резерва кај сите видови осигурување извршени со уплата на миза која е еднаква на мизата кај истото осигурување, но староста на лицето е онолку години колку што е старо осигуреното лице во моментот кога се бара премиската резерва. Притоа кај осигурувањето со однапред утврдено траење и кај одложеното осигурување траењето и одложеноста се намалуваат за t години. Доколку t е поголемо од одложеноста на мизата, веќе не е за одложено, туку за доживотно, односно доживотно привремено осигурување. Доколку t е поголемо од траењето на осигурувањето премиската резерва е нула.

1.2. Пресметување на математичката резерва по нето проспективниот модел

Пресметката на математичката резерва во моментот t по проспективниот модел се засновува на различни дисконтирани вредности на идните исплати и дисконтираните вредности на сè уште очекувани нето премии во моментот t, затоа што збирот на математичките резерви гледани во еден момент t и дисконтираните вредности во истиот тој момент t на сите сè уште очекувани годишни премии мора да биде еднаков на дисконтираната вредност во моментот t на сите осигурени суми кои треба осигурувачот да ги исплати. Така, ако l_x лица од x години се осигурени на случај смрт со еднакви годишни премии P_x со доживотно плаќање, тогаш математичката резерва по t години ќе биде:

$$l_{x+t} \cdot tV_x = \frac{d_{x+t}}{r} + \frac{d_{x+t+1}}{r^2} + \frac{d_{x+t+2}}{r^3} + \ldots\ldots - P_x(l_{x+t} + \frac{l_{x+t+1}}{r} + \ldots\ldots) \tag{1}$$

каде:

$$\frac{d_{x+t}}{r} + \frac{d_{x+t+1}}{r^2} + \ldots\ldots$$

е дисконтираната вредност во моментот t на сите осигурени суми кои по таблицата на смртноста сè уште треба да се исплатат. Додека

$$P_x(l_{x+t} + \frac{l_{x+t+1}}{r} + \frac{l_{x+t+2}}{r^2} + \ldots\ldots)$$

е дисконтираната вредност во моментот t на сите годишни премии кои осигурувачот треба да ги прими до крајот на осигурувањето.

Ако ја поделиме равенката (1) со l_{x+t} ќе добиеме:

$$tV_x = \frac{d_{x+t}}{rl_{x+t}} + \frac{d_{x+t+1}}{r^2 l_{x+t+1}} + ... - P_x\left(\frac{l_{x+t}}{l_{x+t}} + \frac{d_{x+t+1}}{rl_{x+t}} + ...\right)$$

што по делењето на десната страна со r^{x+t} станува:

$$tV_x = \frac{d_{x+t}}{rl_{x+t}} : \frac{r^{x+t}}{r^{x+t}} + \frac{d_{x+t+1}}{r^2 l_{x+t}} : \frac{r^{x+t}}{r^{x+t}} + ... - P_x\left(\frac{l_{x+t}}{l_{x+t}} : \frac{r^{x+t}}{r^{x+t}} + \frac{l_{x+t+1}}{rl_{x+t}} : \frac{r^{x+t}}{r^{x+t}} + ...\right)$$

или

$$tV_x = \frac{C_{x+t} + C_{x+t+1} + ... + C_w}{D_{x+t}} - P_x \frac{D_{x+t} + D_{x+t+1} + ... + D_w}{D_{x+t}}$$

што може да се напише во следниот облик

$$tV_x = \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} - P_x \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}}$$

или конечно

$$tV_x = A_{x+t} - P_x a_{x+t} \qquad (2)$$

каде што A_{x+t} е дисконтираната вредност на еден денар осигурен капитал по t години, а $P_x a_{x+t}$ е дисконтирана вредност на сите годишни премии кое едно лице од x + t години треба да му ги плати на осигурителот до крајот на осигурувањето. Според тоа, проспективниот начин на пресметка на премиските резерви во моментот t ја дефинира премиската резерва како разлика меѓу нето еднократната премија за видот на осигурување на лице старо x + t години и дисконтираните вредности на денот t на пресметување на сите наредни годишни премии до крајот на нивното плаќање

Кога премијата се плаќа доживотно, но најмногу n години, тогаш наместо равенката (2), ја имаме следната равенка:

$$tV_x = A_{x+t} - P_x a_{x+t,\overline{n-t|}} \qquad (3)$$

За одложените осигурувања, било рента, или капитал за $t \geq k$ одложеноста е помината така што наредниот член на равенката (1) од претходната тема треба да гласи: $-_nP_x a_{x+t}$ кај рентите наместо $-_nP_x a_{x+t,\overline{k-t|}}$ и $-_nP_x A_{x+t}$ кај капиталот наместо $-_nP_x A_{x+t,\overline{n-t|}}$. За $n \leq t$ премиите се уплатени и затоа $-_nP_x A_{x+t,\overline{n-t|}} = 0$.

Равенките (1) и (2) изведени се за случај осигурување со уплата на годишни доживотни и годишни привремени премии. Ако осигурувањето е извршено со уплата на миза наредни уплати нема, па затоа намалителот е еднаков на нула. Во тој случај и проспективниот метод ни ја дава истата формула како и ретроспективниот метод. Овде е:

$$tV(A_x) = A_{x+t}$$

Со помош на равенката (4) од претходниот дел, односно на равенката (3) од овој дел водејќи сметка за дадените напомени кај равенката (4) од претходниот дел можеме за секој вид осигурување да дадеме формула за премиска резерва ако осигурувањето е извршено со уплата на миза.

Ако во равенката (2) наместо A_{x+t} ставиме $l - d \cdot a_{x+t}$ имаме:

$$tV_x = l - d \cdot a_{x+t} - a_{x+t} \cdot P_x$$

или

$$tV_x = l - (P_x + d) \cdot a_{x+t} \qquad (4)$$

Исто така, со замена на P_x so $\frac{l}{a_x} - d$ во равенката (4) добиваме:

$$tV_x = l - (\frac{l}{a_x} - d + d) \cdot a_{x+t}$$

или

$$tV_x = l - \frac{a_{x+t}}{a_x} \qquad (5)$$

Равенките (4) и (5) се многу поволни за пресметување на математичката резерва за осигурување за случај смрт со доживотно плаќање на премија.

1.3. Сметководствен модел

Често во практиката математичката резерва во тековната година се изразува како функција на резервата од претходната година.

Нека е дадена резервата ${}_{t-1}V_x$ со помош на која треба да се одреди резерва ${}_tV_x$. Од l_x осигурени лица по t – 1 година останале живи l_{x+t-1} лица, и ова е нивната резерва:

$$l_{x+t-1} \cdot {}_{t-1}V_x$$

Збирот на оваа резерва и нето премијата која ќе ја плаќа l_{x+t-1} лице во текот на t – 1 година:

$$l_{x+t-1} \cdot {}_{t-1}V_x + l_{x+t-1} \cdot P_x$$

зголемен за каматата до крајот на t – 1 година дава:

$$(l_{x+t-e} \cdot {}_{t-1}V_x + l_{x+t-1} \cdot P_x) \cdot r = l_{x+t-1}({}_{t-1}V_x + P_x) \cdot r$$

Ако во текот на годината умреле $d_{x+t} - 1$ чија обврска се регулира, тоа е резервата на живите l_{x+t} лица:

$$l_{x+t} \cdot tV_x = l_{x+t-1}({}_{t-1}V_x + P_x) \cdot r - d_{x+t-1}$$

Од каде е:

$$tV_x = \frac{l_{x+t-1}}{l_{x+t}} \cdot r({}_{t-1}V_x + P_x) - \frac{d_{x+t-1}}{l_{x+t}} \ldots \quad (1)$$

или, по множењето и делењето на првиот член од десната страна со r^{x+t-1} а другиот со r^{x+t}

$$tV_x = \frac{D_{x+t-1}}{D_{x+t}}({}_{t-1}V_x + P_x - \frac{D_{x+t-1}}{D_{x+t-1}})$$

На сличен начин ќе ја одредиме и резервата ${}_{t+1}V_x$ со помош на резервата ${}_tV_x$. Во тој случај би било:

$${}_{t+1}V_x = ({}_tV_x + P_x - \frac{C_{x+t}}{D_{x+t}})\frac{D_{x+t}}{D_{x+t-1}}$$

Ако равенката (1) ја решиме по P_x ќе добиеме:

$$P_x = (\frac{1}{r} \cdot {}_tV_x - {}_{t-1}V_x) + \frac{1}{r} \cdot q_{x+t-1}(1 - {}_tV_x)$$

Од каде што се гледа структурата на годишната премија на едно осигурување на случај смрт.

Додека изразот: $\frac{1}{r} \cdot {}_tV_x - {}_{t-1}V_x$, ја претставува резервираната премија која служи за формирање на премиските резерви, дотолку изразот $\frac{1}{r} \cdot q_{x+t-1}(1 - {}_tV_x)$ наречен ризико-премија служи за исплата на осигурените суми по настанатите смртни случаи во истата година. Тоа е уделот во исплатата кој му припаѓа на осигуреникот.

Големината $1 - {}_tV_x$ е ризико-капитал додека $\frac{1}{r} \cdot q_{x+t-1}$ е природна премија за единица капитал за лице старо x+t-1 година.

2. МОДЕЛИ ЗА ГРУПНО ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА ПРЕМИСКИТЕ РЕЗЕРВИ

Кога се работи за пресметка на математичките резерви на крајот на деловната година – пресметката на билансните математички резерви – која е поврзана со рок, предвиден со законските одредби и правилници за работењето на осигурителните друштва, осигурителното друштво доаѓа во ситуација во еден релативно краток рок на крајот од деловната година да мора да изврши пресметка на математичката резерва за целото портфолио на животното осигурување кое го има кај себе. Доколку портфолиото е поголемо, дотолку се поголеми и тешкотиите кои настануваат во таа ситуација поради обемноста на работењето околу индивидуалната пресметка на резервите. За пресметката, сепак, да се изврши во деловната година, потребно е или да се ангажира поголем број луѓе да работат на пресметката (што во поголем број случаи е неизводливо, со оглед на потребната стручност во оваа работа), или, пак, да се употреби еден од групните начини на пресметка, што во овие околности и се работи.

Во теоријата на животното осигурување познати се повеќе модели на групно пресметување на математичките резерви. За сите модели карактеристично е дека бројот на пресметковни операции се сведува на најмал број за работењето околу пресметка што повеќе да се поедностави, а крајните резултати, сепак, да даваат ако не сосема точни, барем приближни резултати на оние кои ќе се добијат со индивидуалните пресметки.

Гледано од овој аспект, групните модели на пресметување можат да бидат двосмислени. Пресметката може да се постави така што ќе ги даде крајните резултати, кои по својата вредност во потполност одговараат на резултатите кои ги дава индивидуалната пресметка – групни методи во потесна смисла.

За ваквиот начин на пресметка стојат на располагање како најпознати моделите:

1. Karup-ов модел
2. Altenburger-ов модел (модел на помошни броеви)
3. Whiting-ов модел
4. Fouret-ов модел

Кај другите групни модели на пресметка може да се постави така што да дава крајни резултати кои не се еднакви со индивидуалните пресметки, но отстапувањата се незабелжителни и можат апсолутно да се занемарат кај пресметувањето на билансните математички резерви на целото портфолио (Приближни методи).

Овде се користат најчесто:

1. Lidston-ов - Z- модел
2. "t" модел.

Изборот на моделот зависи во прв ред од видовите осигурување кои се застапени во портфолиото на едно осигурително друштво, но и од целите кои самото осигурително друштво сака да ги постигне со упростувањето на пресметката.

Затоа што за секое осигурително друштво од значење е извршената пресметка на билансната математичка резерва да биде што е можно поточна, и со што е можно помал број операции, затоа и групните модели во потесна смисла се сметаат како најприкладни за пресметка.

Суштината на овие модели е математичката резерва добиена по нив да не се разликува од индивидуалното пресметување, затоа кај анализата на секоја од овие модели мора да се тргне од општата равенка на индивидуалниот начин на пресметка.

Ако се тргне од општата равенка за нето моделот (проспективен начин), ќе се добие:

$$V(t) = A(t) - P \cdot a(t)$$

Од самата равенка јасно се гледа дека математичката резерва (V(t)) е искажана како разлика на сегашната вредност на идните осигурани суми (A(t)) и сегашната вредност на идните нето премии (Pa(t)).

Равенката е прикажана во општ облик и важи за индивидуалниот начин на пресметка кај сите форми на осигурување и за секој начин на плаќање на премијата. Тој понатаму се модифицира според формата на осигурувањето за која се бара математичката резерва.

Користејќи ја изнесената равенка, ќе ги испитаме поединечните групни модели кои ги наведовме:

2.1. Карупов модел

Основниот принцип на кој се заснова Каруповиот модел се состои во тоа групната пресметка на математичките резерви да се постави така што во ништо да не отстапува од индивидуалните пресметки, што значи дека равенката, поставена за индивидуалната пресметка, да не се измени, а сепак да може да се примени и на пресметката на математичките резерви по групи.

Значи, општата равенка која сега го добила својот конкретен облик, а која кај индивидуалната пресметка гласи:

$$V_t S = A_t S - A_t SP$$

каде S е осигурената сума, а SP нето премијата за осигурената сума, сега ќе гласи:

$$V_t \cdot \sum S = A_t \sum S - a_t \sum SP$$

Наместо едно осигурување ќе се појави цела група осигурувања со елементи од ист вид кои се неопходни за пресметка, па затоа математичката резерва за целата група ќе се пресметува како да е само едно осигурување. Додека како константни при индивидуалната пресметка се појавуваат вредностите осигураната сума (S) и нето премијата (P), овде како константи ќе се земе збирот на осигурените суми на целата група ($\sum S$)и збирот на нето премиите ($\sum SP$). Како променливи големини кои зависат од изминатото траење ќе се земат за вредностите A_t и за a_t вредностите кои одговараат од специјалната табела на помошни броеви кои претставуваат составен дел на пресметковно-техничката основа на осигурителното друштво, а кои се направени врз основа на таблицата на смртноста и каматна стапка, кои друштвото ги има усвоено како основа за своето работење.

Вредностите A_t и a_t зависат од следните фактори:

- формата на осигурувањето (тарифата);

- пристапната старост на осигурениот (x);

- договореното траење на осигурувањето (n);

- траење на плаќањето на премијата (m);

- изминатото време на осигурувањето (t).

За секое осигурување постои математичка картица која ги содржи напред наведените елементи кои треба да се користат како материјал за класирање по споменатите елементи. Класирањето на математичките картици по групи треба да се изврши така што секоја група има исти фактори кои се напред наведени.

По ваквото извршено групирање на математичките картици треба по нив да се собере осигураната сума ($\sum S$) и нето премијата ($\sum SP$) и овие вредности да се внесат во посебна помошна табела која е наменета за пресметка. Секоја од помошните табели направена е така што во неа се содржани вкупните осигурани суми и вкупните нето премии за секоја форма на осигурување посебно, а во нив за секоја пристапна старост посебно, и во нив за секое договорно време, како и за секое време на плаќање на премиите и, на крај, за секое изминато време на осигурувањето посебно.

Во колоните што одговараат на овие помошни табели се внесуваат константите ($\sum S$) и ($\sum SP$), а потоа и вредностите кои одговараат за A_t и a_t . Разликата помеѓу производите кои ги даваат вредностите $A_t \sum S$ и $a_t \sum SP$ претставува математичка резерва.

Со рекапитулација, односно збир на добиените вредностите на математичката резерва од помошните табели ќе се добие конечната вредност на математичката резерва која ќе се искаже во билансот како билансна математичка резерва.

Секако дека еден табеларен приказ за ваквиот начин на пресметка на математичката резерва ќе даде појасна слика во текот на работењето, па со тоа се дава еден конкретен пример на пресметка:

Да земеме дека имаме портфолио на животно осигурување чија структура е дадена во табелата 3.

Како што се гледа земен е вкупниот број од 20 осигурувања, а заради упростување на постапката земено е n = m и сите осигурувања да се заклучени по форма на мешовито осигурување. Се претпоставува годишното плаќање на премијата и, исто така, се претпоставува и дека смртта на осигуреникот ќе се случи на крајот на годината на осигурувањето. Како основа за пресметка се земени домашните таблици на смртноста од 2000-2004 година порамнети со 5% годишна камата.

Општата равенка за индивидуалната пресметка на математичката резерва, применета на форма мешовито осигурување, гласи:

$$ {}_tV_{x,\overline{n|}} = A_{x+t,\overline{n-t|}} - P \cdot a_{x+t,\overline{n-t|}} $$

Таа равенка, применета за групната пресметка, ќе биде:

$$\sum S \cdot {}_tV_{x,\overline{n}|} = A_{x+t,\overline{n-t}|} \cdot \sum S - P \cdot a_{x+t,\overline{n-t}|} \cdot \sum S \cdot P$$

Разгледувајќи го портфолиото кое го зедовме за пример, може веднаш да се констатира дека тоасодржи различни елементи за x, n и t, кои се основа за пресметка на резервите. Поради тоа, сите осигурувања треба да се групираат по овие елементи, така што за секој од нив ќе се направи посебна пресметка, прикажана во табелата 5.

Со собирање на добиените резултати од табелата ќе се добие вкупната осигурена сума од 1.582.350 денари математичка резерва и износот од 830.081 денар.

Табела 5

Групна пресметка на математичките резерви по Karup-овата метода

На ден 01.07.2004 год.

$$_{t}V_{x,n}\cdot\sum S = A_{x+t,\overline{n-t|}}\cdot\sum S - a_{x+t,\overline{n-t|}}\cdot\sum SP$$

X + t	n – t	$\sum S$	$\sum SP$	$A_{x+t,\overline{n-t\|}}$	$a_{x+t,\overline{n-t\|}}$	3 * 5	4 * 6	$_{t}V_{x,n}$ (7 – 8)
46	6	316.000	14.810,61	750,477	5,2400	237.150,73	77.607,60	159.543,14
42	2	389.800	30.243,80	907,255	1,9476	353.648,00	58.902,82	294.745,17
28	3	317.000	24.367,16	864,176	2,8523	273.943,79	69.502,45	204.441,34
37	4	27.000	2.088,02	823,684	3,7026	22.239,47	7.731,10	14.508,37
45	8	31.650	1.489,13	684,111	6,6337	21.652,11	9.878,44	11.773,67
32	5	27.000	2.081,48	784,789	4,5194	21.189,30	9.407,04	11.782,26
37	7	39.600	3.072,48	713,974	6,0066	28.273,37	18.455,16	9.818,21
55	7	230.500	18.982,37	722,699	5,8233	166.582,12	110.540,04	56.042,08
28	8	40.500	3.120,36	679,691	6,7265	27.527,49	20.989,10	6.538,38
40	8	163.300	7.560,63	682,024	6,6775	111.374,52	50.486,11	60.888,41
		1.582.350	107.816,04					830.081,04

Табела 3

Состојбата на активните осигурувања на ден 01.07.2004 год.

Број на полиса	Почеток на осигурување	Завршување на осигурување	Датум на раѓање	Осигурителна полиса	Пристапна старост	Договорено траење	Осигурителна сума	Год. нето премија
227.606	01.07.2000	01.07.2015	01.03.1963	мешовито	37	15	42.200	1.977,78
227.607	01.08.2000	01.08.2015	28.06.1963	мешовито	37	15	168.800	7.911,49
227.608	01.03.2000	01.03.2015	30.01.1963	мешовито	37	15	105.000	4.921,25
235.976	01.07.1996	01.07.2006	28.03.1962	мешовито	34	10	19.800	1.536,24
235.977	01.08.1996	01.08.2006	31.07.1962	мешовито	34	10	170.000	13.189,96
235.978	01.12.1996	01.12.2006	30.06.1962	мешовито	34	10	200.000	15.517,60
251.840	01.07.2001	01.07.2011	01.01.1980	мешовито	21	10	27.000	2.075,44
251.841	01.07.2001	01.07.2011	23.01.1980	мешовито	21	10	70.000	5.380,76
251.842	01.02.2001	01.02.2011	28.08.1980	мешовито	21	10	120.000	9.224,16
251.843	01.11.2001	01.11.2011	01.09.1980	мешовито	21	10	100.000	7.686,80
267.206	01.10.1996	01.10.2006	01.06.1965	мешовито	31	10	27.000	2.088,02
271.467	01.12.2002	01.12.2017	01.06.1964	мешовито	38	15	31.650	1.489,13
278.084	01.05.1995	01.05.2005	23.01.1968	мешовито	27	10	27.000	2.081,48
304.676	01.07.2002	01.07.2012	31.03.1968	мешовито	34	10	39.600	3.072,48
303.903	01.10.2001	01.10.2011	13.03.1949	мешовито	52	10	60.500	4.982,36
303.904	01.03.2001	01.03.2011	25.06.1949	мешовито	52	10	70.000	5.764,71
303.905	01.07.2001	01.07.2011	30.09.1949	мешовито	52	10	100.000	8.235,30
311.307	01.03.1999	01.03.2009	03.08.1973	мешовито	26	10	40.500	3.120,36
596.526	01.01.1999	01.01.2009	06.06.1966	мешовито	33	15	63.300	2.930,73
596.527	01.03.1999	01.03.2009	03.09.1966	мешовито	33	15	100.000	4.629,90
20	-	-	-	-	-	-	1.582.350	107.815,95

Во овој пример е тргнато од тоа пристапната старост на осигуреникот и изминатото време на осигурување од почетокот до денот на пресметка на резервата да е прикажано со цели броеви. Во реалноста не е секогаш така. Со оглед на различните датуми на раѓање на одделни осигуреници во текот на годината, како и со оглед на датумот на почетокот на одделните осигурувања, ќе се случи на крајот на деловната година за која се врши пресметка на староста во време на пресметка и изминатото време да дадат еден раздвоен број. Има повеќе начини на кои можат да се регулираат староста и изминатото време, а да не одиме подлабоко во дадената област, ќе ги користиме поставките кои во ваквите случаи најчесто се применуваат при пресметката на билансните математички резерви.

Обично во практиката се зема дека датумите на раѓање на осигурениците рамномерно се распоредени во текот на годината, па затоа може да се каже дека во просек сите осигуреници се родени на 01 јули. Исто така, може да се претпостави дека пристапот во осигурувањето е рамномерен во текот на годината, па поради тоа и тука може да се каже дека во просек сите пристапуваат на осигурување на 01 август. Ако работата се постави така, тогаш пристапната старост на сите осигуреници ќе биде искажана со цели броеви.

Понатаму, со оглед на тоа дека билансот на математичката резерва во најмогу случаи се составува на крајот на календарската година која соодветствува со крајот на календарската година (31 декември), така изминатото време ќе биде искажано со $t+1/2$, а не со t, како што се прикажува во општата формула. Секако, и кога се бара изминатото време има, исто така, повеќе начини на пресметување на елементот “t”, но нашата анализа ќе биде доволна ако се земе како едно просечно изминато време $t+1/2$.

Според Каруп, кој по својот модел, исто така, предвидува изминато време, искажано со раздвоен број, општата равенка ќе добие форма:

$$ {}_{t+h}V_{x,\overline{n|}} = (1-h)\cdot {}_{t}V_{x,\overline{n|}} + h\cdot {}_{t+1}V_{x,\overline{n|}} + (1-h)\cdot P $$

каде под “x” се подразбира делот од годината (во нашиот пример 1/2). Кога оваа равенка ќе се примени кај групното пресметување на резервата и понатаму ќе се трансформира и се добива **<u>конечната равенка</u>**:

$$ \sum {}_{t+h}V_{x,\overline{n|}}\cdot S = A_{x+t,\overline{n-t|}}\cdot \sum S = \left(a_{x+t,\overline{n-t|}} - 1\right)\cdot \sum S\cdot P + \left(A_{x+t+1,\overline{n-t-1|}} - A_{x+t,\overline{n-t|}}\right)\cdot \sum S\cdot h - $$

$$ -\left(a_{x+t+1,\overline{n-t-1|}} - a_{x+t,\overline{n-t|}} + 1\right)\cdot \sum S\cdot P\cdot h $$

Како што се гледа од претходните равенки, вака пресметаната математичка резерва содржи во себе уште и дел од годишната премија, кој е (во однос на годишните плаќања) однапред наплатен, и за дел од годината (1 - х), кој не припаѓа на тековната година. Ова е последица од изминатото време кое не е цел број, додека премијата е платена за цела година. Овој дел од наплатената премија е познат под името “премиски пренос”.

Појавата на премиски пренос е неминовна кај математичката резерва кога изминатото време до денот на биласот не е цел број и со услов плаќањето на премијата да е годишно.

Досега изнесените примери и изложени равенки дадени се за формата на мешовитото осигурување.

Користејќи ја општата равенка лесно може да се дојде до равенката за пресметка на математичките резерви за другите форми на осигурување. Ќе ги прикажеме само за оние форми на осигурување кои најчесто се појавуваат во практиката.

Освен мешовитото осигурување кое лично се појавува како најчесто во практиката, така чести се и осигурувањата за случај смрт, било доживотно или со пократко траење.

Ако за осигурувањето за случај смрт со доживотно времетраење општата равенка за пресметување на математичката резерва ќе се преобрази, така што таа ќе гласи:

$$S \cdot {}_tV_x = \left(A_{x+t} - P \cdot a_{x+t}\right) \cdot S$$

за индивидуалниот начин на пресметување на резервите, додека за групната пресметка ќе гласи:

$$\sum {}_tV_x \cdot S = A_{x+t} \cdot \sum S - a_{x+t} \cdot \sum S \cdot P$$

Како што се гледа, затоа што осигурувањето е доживотно, отпаѓа елементот n - t.

Доколку се работи за осигурување во случај на смрт, но ограничено траење на осигурувањето и на плаќањето на премијата, равенката за индивидуалната пресметка ќе биде:

$$S \cdot {}_tV_{x,\overline{n|}} = \left({}_{n-t}A_{x+t} - P \cdot a_{x+t,\overline{n-t|}}\right) \cdot S$$

а за групната пресметка:

$$\sum {}_tV_{x,\overline{n}|} \cdot S = {}_{n-t}A_{x+t} \cdot \sum S - a_{x+t,\overline{n-t}|} \cdot \sum S \cdot P$$

Ако се работи, на пример, за осигурувањето на случајот доживување, тогаш општата равенка за индивидуална пресметка ќе биде:

$$S \cdot \sum {}_tV_{x,\overline{n}|} = S \cdot E_x + t_{\overline{n-t}|} - a_{x+t,\overline{n-t}|} \cdot S \cdot P$$

а за групната пресметка:

$$\sum {}_tV_{x,\overline{n}|} \cdot S = E_{x+t,\overline{n-t}|} \cdot \sum S - a_{x+t,\overline{n-t}|} \cdot \sum S \cdot P$$

Од овие неколку прикажани равенки може да се утврди дека по поединечната форма на осигурување се менува општата равенка толку колку што е сегашната вредност на осигураната сума ($A_{x+t,\overline{n-t}|}$) секогаш еднаква на нето еднократната уплата (миза) за разгледуваната форма на осигурување. Нето премијата (P), исто така, е зависна од формата на осигурување, додека вредноста $a_{x+t,\overline{n-t}|}$ останува еднаква за секоја форма на осигурување, а зависи само од должината на плаќање на премијата.

Кај сите досегашни примери се смета дека во моментот на пресметката на резервата, премијата се плаќа. Доколку математичката резерва се пресметува за осигурување по кое порано е престанато да се уплаќа премија (било од причина целата премија да е уплатена одеднаш на почетокот на осигурувањето, или е договорено времето на плаќања да е помало од времето на осигурување, или, пак, можеби осигуреникот сам престанал со понатамошни уплати), тогаш за пресметка на математичките резерви ќе се земе предвид само првиот дел од равенката, а другиот, кој ја искажува сегашната вредност на идните премии $\left(P \cdot a_{x+t,\overline{n-t}|}\right)$, овде ќе отпадне. Според тоа, равенката за осигурување по кое не се плаќа премија ќе гласи:

Кај мешовитото осигурување:

$${}_tV_{x,\overline{n}|} = A_{x+t,\overline{n-t}|}$$

кај доживотното осигурување за случај смрт:

$${}_tV_x = A_{x+t}$$

кај временското осигурување за случај смрт:

$${}_tV_{x,n} = {}_{n-t}A_{x+t}$$

кај осигурувањето за случај доживување:

$${}_tV_{x,n} = E_{x+t,\overline{n-t|}}$$

Од излагањето за Каруповиот модел може да се утврди дека по овој модел во прв ред не постојат никакви отстапувања од индивидуалните модели за пресметка на математичката резерва, и во тоа е и нејзиното основно значење. Равенката за групното пресметување останува идентична со равенката за индивидуалното пресметување, освен што наместо поединечните осигурени суми и поединечните нето премии овде имаме збир на осигурените суми и збир на нето премиите за цела група на осигурувања кај кои се еднакви формите на осигурување, пристапната старост на осигурениците, договореното траење на осигурувањето и времетраењето на плаќање на премијата, како и изминатото време на осигурување. Потребно е само материјалот кој служи за пресметка на математичката резерва, а тоа се математичките картичкии, да се групираат по споменатите елементи, да се пресмета по секоја од групите на осигураните суми и нето премиите, а понатамошната обработка тече со примена на комутативните броеви од пресметковно техничката основа, како што се прави тоа кај индивидуалната пресметка. Друга предност на овој модел, како што може да се види од прикажаните табеларни прегледи, е тоа што осигурените суми и нето премиите се земаат како константи кои не се менуваат за целото време на траењето на осигурувањето, па затоа еднаш засекогаш се внесуваат во овие табели.

Променливи вредности се само A_t і a_t, чија вредност зависи од изминатото време и само тие се менуваат од година во година. Сите други пресметки се сосема едноставни.

Каруповиот модел може понатаму да се прилагоди така што да одговара на потребите на самото осигурително друштво. Може на основа на општата равенка која ја користи Каруп однапред да се изработат табели на стапките на математичките резерви за индивидуалното осигурување, па така припремени да се применат на пресметката по групите. Тоа, со други зборови, значи дека треба да се применат готови табели за вредностите на V_t во промилни стапки и само да се применат на осигураните суми по класираните групи.

Со оглед на ваквите свои предности, Каруповиот модел е, секако, еден од најчесто применуваните во практиката.

Кај нас во практиката на осигурувањето на живот се користи, исто така, Каруповиот модел за пресметка на билансните математички резерви. Со краток увид во пресметковно техничката основа на осигурувањето на живот кај нашите осигурителните друштва овозможено ни е да ја видиме примената на овие методи во практиката. Моделот е незнатно променет според конкретните услови на работење и потребите, но така што ништо не се губи ниту се менува во точноста на добиените резултати.

2.2. Алтенбургеров модел

Моделот за кој ќе стане збор во овој дел е познат во литературата по пронаоѓачот Altenburger како Алтенбургеров модел, а, исто така, многумина ја нарекуваат модел на помошните броеви како и модел на Килмеровите помошни броеви.

Основна карактеристика на овој модел, што во основа е и нејзина голема предност над Каруповиот модел, а и останатите напред истакнати модели, е во тоа што со трансформација на општата равенка за индивидуална пресметка на математичката резерва на група осигуреници се изразува како функција на параметрите: било да се годините на доживување во моментот на пресметката или година на раѓање на осигурениците без оглед на времето кое преостанува до рокот на последните премии. За сите останати елементи: формата на осигурување, договореното траење, траењето на плаќање на премија, изминатото времетраење се воведуваат помошните броеви кои во моментот на осигурување се пресметуваат и остануваат непроменети за сето времетраење на осигурувањето.

Со воведувањето на овие константни помошни броеви пресметката на математичката резерва се упростува со сведување на големите броеви на пресметковните операции на минимум, што истовремено значи сведување на минимум број групи по кои треба да се класифицираат математичките картици. Така модификуваната равенка дава точен износ на математичката резерва како да е таа пресметана по општата равенка. И додека со примената на Каруповиот модел за групна пресметка мора да се распоредат осигурените суми и нето премиите според: формата на осигурување, пристапната старост x, договореното траење на осигурувањето n, траењето на плаќање на премиите m и изминатото времетраење t, додека со избегнување на толкав број класификации на групи и подгрупи, по Алтенбурговиот метод општата равенка за пресметка на премиските резерви се модифицира сведувајќи во него елементи кои можат да се сведат по својата вредност на староста на осигуреникот во времето на пресметката на математичката резерва $x + t$, а останатите ги класифицира во помошни броеви.

Понатаму ќе го разгледаме овој метод за најважните видови осигурување. Ќе го користиме проспективниот начин на пресметка на резервите на нето премиите.

Да земеме за пример повторно мешовито осигурување за случај премијата P да е постојана и се плаќа m години, а m е на основа до која со помош на дискусии ќе дојдеме до останатите комбинации на осигурување.

Како општа равенка за индивидуална пресметка на премиските резерви за единица осигурана сума гласи:

$$ {}_tV_{x,\overline{n|}} = A_{x+t,\overline{n-t|}} - a_{x+t,\overline{n-t|}} $$

со понатамошно развивање имаме:

$$ {}_tV_{x,\overline{n|}} = \frac{M_{x+t} - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_{x+t}} - P\frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}} $$

или

$$ {}_tV_{x,\overline{n|}} = \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} - P\frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} + P\frac{N_{x+n}}{D_{x+t}} - \frac{M_{x+t} + D_{x+n}}{D_{x+t}} $$

тогаш премиската резерва за осигураната сума од S единици е:

$$ S\,{}_tV_{x,\overline{n|}} = \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} - PS\frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} + \frac{1}{D_{x+t}}(SPN_{x+n} - SM_{x+n} - SD_{x+n}) \text{ ……………………..……(1)} $$

поради тоа што е:

$$ M_{x+n} = VN_{x+i} - N_{x+n+1} $$

и

$$ D_{x+n} = N_{x+n} - N_{x+n+1} $$

тоа е по одземањето

$$ D_{x+n} - M_{x+n} = N_{x+n} - vN_{x+n} = dN_{x+n} \text{ kade e } d = 1 - \frac{1}{r} $$

Со замена на равенката бр. 1 за $D_{x+n} - M_{x+n}$ со dN_{x+n} ја добиваме конечната равенка за математичката резерва:

$$ S\,{}_tV_{x,\overline{n|}} = SA_{x+t} - PSa_{x+t} + \frac{K}{D_{x+t}} \text{ ……………………………………….……………………..(2)} $$

каде е:

$$K = SPN_{x+m} - SdN_{x+n}$$

Алтенбургеровиот коефициент, кој претставува костантна независна од изминатото траење t, PS нето премија за осигурената сума S. За таа група на осигуреници во моментот на пресметката на x + t години математичката резерва ќе биде:

$$\sum S_t V_{x,\overline{n}|} = A_{x+t} \sum S - a_{x+t} \sum PS + \frac{1}{D_{x+t}} \sum K \quad \text{.......................................}(3)$$

Како што се гледа од равенката бр.3 дека покрај константите S и SP се јавува и константата K.

На основа на равенката бр.3 потребно е:

1. математичките картици врз основа на кои се пресметува резервата да бидат снабдени со константите K, S и SP.

2. математичките картички да се групираат по староста на осигурениците во времето на пресметката како назначените константи според вредностите A_{x+t}, a_{x+t} и $\frac{1}{D_{x+t}}$ земени од табелата на комутативните броеви на пресметковно техничката основа на заводот би се внеле во табеларен преглед.

3. Целата група на осигурување со иста старост на осигурениците x + t да претставува едно осигурување.

4. збирот на осигурените суми на целата група да претставува една осигурена сума, а тоа, исто така, важи и за нето премиите и за помошниот број K. Она што посебно ја карактеризира равенката бр.3 е тоа што за секоја форма на осигурување нејзините први два члена:

$$\sum S_t V_{x,\overline{n}|} = A_{x+t} \sum S - a_{x+t} \sum PS$$

претставуваат математичка резерва на доживотното осигурување за случај смрт.

5. Со помош на третиот член на равенката бр. 2 математичката резерва за доживотно осигурување за случај смрт се сведува на математичка резерва за мешовито осигурување.

6. И воопшто со помош на коефициентот K, кој е зависен од формата на осигурувањето, математичката резерва за доживотно осигурување се сведува на математичка резерва за онаа форма за која таа се бара.

7. Со помош на коефициентот K се поедноставува пресметката поради тоа што сите осигурувања се групираат само по староста во моментот на пресметката, додека се исклучуваат сите останати елементи со оглед на тоа дека се застапени како константи во помошниот коефициент K.

Го прикажуваме на крајот обликот на табелата за групната пресметка на математичката резерва:

$X+t$	$\sum S$	$\sum SP$	$\sum K$	A_{x+t}	a_{x+t}	$\frac{1}{D_{x+t}}$	2 h 5	3 h 6	4 h 7	${}_tV_{x+t}$ $8-9+10$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Vk.:										

На прикажаната табела број 6 прикажана е пресметката на математичката резерва по моделот на Алтенбургер за портфолио на осигурување на живот кој е внесен како пример кај Каруповиот модел. Како што се гледа од приложената табела, износот на математичката резерва е еднаков како и кај примената на Каруповиот модел. Точната пресметка на математичката резерва се изведува лесно и брзо ако претходно се состави табела на стапките на помошните броеви К, табела 6а, како што се составени стапките на нето премиите. Затоа е неопходно во текот на пресметувањето на осигурените суми и нето премиите за секое осигурување истовремено да се пресметува и коефициентот К за да се внесе и тој во математичката таблица.

Значи, важно е да се пресмета вредноста за A_{x+t}, a_{x+t} i D_{x+n}, а потоа да се пресмета збирот на капиталот, збирот на премиите и коефициентите, а остатокот на работа е едноставен. Структурата на Алтенбургеровиот помошен број К, кој кај мешовитото осигурување во својот првобитен облик гласи:

$$K = SPN_{x+n} + SD_{x+n} - SM_{x+n}$$

покажува дека неговата вредност зависи од формата на осигурување, пристапната старост и договореното траење на осигурувањето, како и од времето на плаќање на премијата.

Неговата улога е математичката резерва на доживотното осигурување да се сведе, како што веќе е кажано, на математичката резерва за посакуваната форма на осигурување.

Ќе разгледаме како со помош на коефициентот К се изведува математичката резерва по останатите главни форми на осигурување.

Кај доживотнотото осигурување за случај смрт, каде е и траењето на осигурувањето и плаќањето на премијата доживотно, Алтенбургеровиот број К нема ни да се појави затоа што првите два члена на равенката претставуваат готова математичка резерва за доживотно осигурување.

Кај временското осигурување за случај смрт, каде што нема исплата на осигурените суми за случај доживување, коефициентот К се разликува од коефициентот К за мешовитото осигурување само дотолку што овде отпаѓа комутативниот број D_{x+n}, кој претставува дисконтиран број лица кои ќе го доживеат истекот на осигурувањето. Коефициентот К овде ќе биде:

$$K = SPN_{x+n} - SM_{x+n}$$

А математичката резерва ќе го задржи својот облик

$$\sum S_t V_{x,\overline{n|}} = A_{x+t} \sum S - a_{x+t} \sum PS + \frac{1}{D_{x+t}} \sum K$$

Кај осигурувањето за случај доживување, каде што нема исплата на осигурената сума за случај смрт, отпаѓа мизата за случај смрт (сегашната вредност на осигурената сума А), а од помошниот број К отпаѓа комутативниот број М, кој означува дисконтиран број на умрени лица во x + n години. Како помошен број тогаш останува:

$$\frac{1}{D_{x+t}} K = \frac{1}{D_{x+t}} (SPN_{x+n} + SD_{x+n})$$

А математичкта резерва ќе биде:

$$\sum S_t V_{x,\overline{n|}} = a_{x+t} \sum PS + \frac{1}{D_{x+t}} \sum K$$

На сличен начин се формира и математичката резерва и кај сите останати форми на осигурување.

Како што веќе стана збор кај испитувањето на Каруповиот модел при пресметката на математичката резерва за период кој претставува нецел број, и кај анализата на Алтенбургеровиот модел може да се даде истото објаснување.

Во практиката обично не се поклопува крајот на деловната година со крајот на годината на осигурување, затоа што крајот на годината обично е 31 декември, додека крајот на годината на осигурување, односно почетокот на осигурување е распореден на целата деловна година. Како еден просечен почеток на сите осигурувања може да се земе различен датум, но во практиката како најпогоден се смета 1 јули, што претставува и средина на деловната година. Оправданоста на ова претпоставка лежи во тоа што се претпоставува рамномерен пристап на осигуреникот и осигурувањето, така што почетокот на сите осигурувања може да се земе по својот среден датум на пристапување – 1 јули. Во овој случај од денот на пристапување до денот на билансот (31 декември) изминатото време секогаш ќе биде: изминатиот број години од денот на пристапувањето плус една половина година, што се означува со t + ½.

Во тој случај математичката резерва ќе изнесува:

$${}_{t+1/2}V_{x,\overline{n|}} = \frac{{}_tV_{x,\overline{n|}} + t + V_{x,\overline{n|}}}{2} + \frac{1}{2} P$$

Значи, средната вредност на двете резерви претставува математичка резерва за изминатото времетраење од t + ½. Со резервата е искажана и полугодишна нето премија, како преносна премија, која не е опфатена со резервата туку посебно како износ кој не припаѓа на тековната деловна година. Изразот 1/2P е последица на годишното плаќање на премијата. Годишната премија е платена на 1 јули за целата година, додека до денот на пресметка математичката резерва за покривање на резервата е доволен само износот од 1/2P, а остатокот е издвоен за следната година. Формулата може да се постави во следниот облик:

$$ {}_{t+1/2}V_{x,\overline{n}|} = A_{x+t+1/2} - a_{x+t+1/2} + \frac{1}{D_{x+t+1/2}} K $$

Како вредност на математичката резерва, кога изминатото времетраење е нецел број.

Осврт на Алтенбургеровиот модел

Конечниот заклучок е дека Алтебургеровиот модел е многу сличен на Каруповиот.

Ова е еден од моделите кој при групната пресметка на математичката резерва во ништо не отстапува од индивидуалната пресметка. Овој модел се разликува од тој на Каруп, по тоа што овде е воведена константата К, со што се упростува работата околу групната пресметка.

Доколку за осигурителното друштво нужно секоја година треба да се пресметува математичка резерва точно по принципите на математичкото осигурување на живот, тогаш ова е еден од моделите кој, секако, може да се препорача како многу соодветен за сите видови осигурување.

Табела 6

Групна пресметка на математичката резерва по Altenburger-овиот модел на ден 01.07.2004 година

$${}_tV_{x,n}\cdot\sum S = A_{x+t}\cdot\sum S - a_{x+t}\cdot S\cdot P+\frac{1}{D_{x+t}}\cdot\sum K=\sum S\cdot P\cdot N_{x+n}+\sum S\cdot d\cdot N_{x+n}$$

x + t	S	SP	K	A_{x+t} ‰	a_{x+t}	$\frac{1}{D_{x+t}}$ ‰	2 x 5	3 x 6	4 x 7	${}_tV_{x,n}$ (8-9+10)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
28	357.500	27.487,52	15.809.663,97	161,286	17,6130	0,040320	57.659,75	484.137,69	637.445,65	210.967,71
32	27.000	1.991,48	853.915,13	181,537	17,0827	0,049540	4.901,50	34.019,86	42.302,96	13.184,60
37	66.600	5.160,50	1.455.100,46	224,012	16,2958	0,064258	14.919,20	84.094,48	93.501,85	24.326,57
40	163.300	7.650,63	1.848.866,54	249,932	15,7514	0,075271	40.813,90	120.508,13	139.166,03	59.471,80
42	389.800	30.243,80	7.814.939,51	268,716	15,3570	0,083743	104.745,50	464.454,04	654.446,48	294.737,94
45	31.650	1.489,13	245.876,69	299,183	14,7172	0,098506	9.469,14	21.915,82	24.220,33	11.773,65
46	316.000	14.810,61	2.654.322,31	309,951	14,4911	0,104063	97.944,52	214.622,03	276.216,74	159.539,23
55	230.500	18.982,37	1.087.260,17	420,068	12,1786	0,175113	96.825,67	231.178,69	190.393,39	56.040,37
	1.582.350	107.816,04								830.041,86

Табела 6а

Пресметување ма коефициентот K по Altenburger

$$K = S \cdot P \cdot N_{x+n} + S \cdot d \cdot N_{x+n}$$

Broj na polisa	S	SP	Sd	n + x	N_{x+n}	3 x 5 %o	4 x 5 %o	K (6 + 7)
227.606	42.200	1.977,78	2.009,52	52	88.898,65	175.821,97	178.643,62	354.465,59
227.607	168.800	7.911,49	8.038,09	52	88.896,65	703.304,96	714.559,27	1.417.864,23
227.608	105.000	4.921,25	5.000,00	52	88.899,65	437.497,40	444.498,25	881.995,65
235.976	19.800	1.536,24	942,86	44	160.124,30	245.989,35	150.974,80	396.964,15
235.977	170.000	13.189,96	8.095,23	44	160.124,30	2.112.033,11	1.296.243,04	3.408.276,15
235.978	200.000	15.517,60	9.523,80	44	160.124,30	2.484.744,84	1.524.991,81	4.009.736,65
251.840	27.000	2.075,44	1.285,71	31	366.083,18	759.783,68	470.676,81	1.230.460,48
251.841	70.000	5.380,76	3.333,33	31	366.083,18	1.969.805,73	1.220.276,05	3.190.081,78
251.842	120.000	9.224,16	5.714,28	31	366.083,18	3.376.809,83	2.091.901,79	5.468.711,62
251.843	100.000	7.686,80	4.761,90	31	366.083,18	2.814.008,19	1.743.251,49	4.557.259,68
267.206	27.000	2.088,02	1.285,71	41	195.978,74	409.207,53	251.971,83	661.179,35
271.467	31.650	1.489,13	1.507,14	53	82.061,32	122.199,97	123.677,90	245.877,87
278.084	27.000	2.081,48	1.285,71	34	253.600,47	527.864,31	326.056,66	853.920,97
304.676	39.600	3.072,48	1.885,71	44	160.124,30	491.978,71	301.947,99	793.926,70
303.903	60.500	4.982,36	2.880,95	62	36.292,58	180.822,70	104.557,11	285.379,81
303.904	70.000	5.764,71	3.333,33	63	36.292,58	209.216,20	120.975,15	330.191,34
303.905	100.000	8.235,30	4.761,90	63	36.292,58	298.880,28	172.821,64	471.701,92
311.307	40.500	3.120,36	1.928,57	36	269.998,95	842.493,92	520.711,88	1.363.205,80
596.526	63.300	2.930,73	3.014,28	48	120.550,63	353.301,35	363.373,35	716.674,70
596.527	100.000	4.629,90	4.761,90	48	120.550,63	558.137,36	574.050,04	1.132.187,41

2.3. Whiting-ов модел

Како и двата претходни, и овој е еден од моделите по кој равенката за пресметување на групните математички резерви е така конструирана да дава точен резултат кој се совпаѓа со индивидуалниот начин на пресметка на резервите.

По својата суштина, овој метод е сличен со моделот на Алтенбургер. Како и кај Алтенбургеровиот модел и кај овој модел сите осигурувања се групираат исклучиво по староста на осигуреникот во времето на пресметката на резервата.

Разликата помеѓу коефициентот К кај Алтенбургер и кај Whiting е во тоа што комутативните броеви кај Алтенбургер се сведуваат на староста на осигуреникот во однос на истекот на осигурувањето, а кај Whiting комутативните броеви се даваат според пристапната старост на осигуреникот, односно староста на почетокот на осигурувањето. Примената на оваа равенка во практиката е многу лесно и за практична примена нема никакви потешкотии, особено што може да се примени на сите видови осигурувања.

Општата равенка за математичката резерва ќе биде изведена од општата равенка, како што е тоа направено и кај Алтенбургеровиот метод, па и овде нејзиниот општ облик ќе биде:

$$ {}_tV_{x,\overline{n|}} = A_{x+t} - Pa_{x+t} + \frac{1}{D_{x+t}}K \qquad (1) $$

Коефицинетот К, кој е утврден како костанта за целото времетраење на осигурувањето, ќе има свој облик, зависен од формата на осигурување, па според тоа тој ќе изнесува за мешовитото осигурување:

Ќе тргнеме од Алтенбургеровиот коефициент К:

$$ K = SP_{x,\overline{n|}}N_{x+n} + SD_{x+n} - SM_{x+n} $$

Од каде

$$ P_{x,\overline{n|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} $$

или

$$ P_{x,\overline{n|}}(N_x - N_{x+n}) = M_x - M_{x+n} + D_{x+n} $$

$$ -P_{x,\overline{n|}}N_{x+n} = M_x - M_{x+n} + D_{x+n} - P_{x,\overline{n|}}N_x $$

$$ P_{x,\overline{n|}}N_{x+n} = P_{x,\overline{n|}}N_x - M_x + M_{x+n} - D_{x+n} $$

$$ K = (P_{x,\overline{n|}}N_x - M_x + M_{x+n} - D_{x+n} + D_{x+n} - M_{x+n})S $$

$$ K = (P_{x,\overline{n|}}N_x - M_x)S $$

Од каде е:

$$ M_x = P_x \cdot N_x $$

Така што К понатаму може да се напише како:

$$ K = (P_{x,\overline{n|}}N_x - P_xN_x)S $$

$$K = N_x(P_{x,\overline{n|}} - P_x)S \text{ ………………....……………………………………………….(2)}$$

При што К го означува Whiting-ов коефициентот, $P_{x,\overline{n|}}$, означува нето годишна премија за мешовито осигурување, а P_x годишна нето премија за доживотно осигурување.

Замената на равенката бр.2 во равенката бр.3 ја дава Whiting - овата равенка за индивидуална пресметка на математичката резерва на мешовитото осигурување:

$$S\,{}_tV_{x,\overline{n|}} = SA_{x+t} - PSa_{x+t} + \frac{1}{D_{x+t}} N_x(P_{x,\overline{n|}} - P_x)S$$

За групна пресметка на вкупната математичка резерва ќе биде:

$$\sum S\,{}_tV_{x,\overline{n|}} = A_{x+t}\sum S - a_{x+t}\sum PS + \frac{1}{D_{x+t}}\sum K \text{ ……………………………………(3)}$$

Доживотно осигурување

Како и кај Алтенбургер така и овде коефициентот К не постои, затоа што самата резерва во својот општ облик е дадена за доживотното осигурување.

Временско осигурување за случај смрт

Од општиот облик на Алтербургер коефициентот К изнесува:

$$K = P_{x,\overline{n|}} N_{x+n} + D_{x+n} M_{x+n}$$

Отпаѓа комутативниот број D_{x+n} (дисконтиран број лица кои ќе го доживеат истекот на осигурувањето), поради тоа што овде нема исплата за случај доживување, ќе остане

$$K = P_{x,\overline{n|}} N_{x+n} - M_{x+n} \text{ ……………………………………………………………..(4)}$$

Затоа што е

$${}_nP_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

Тоа ќе биде:

$${}_nP_x(N_x - N_{x+n}) = M_x - M_{x+n}$$

односно

$${}_nP_x \cdot N_{x+n} = {}_nP_x \cdot N_x - M_x + M_{x+n}$$

Што после замена во (6) дава:

$$K={}_nP_x \cdot N_x - M_x + N_{x+n} - M_{x+n}$$

Или

$$K={}_nP_x \cdot N_x - M_x$$

Осигурување за случај доживување

Од:

$$K = P_n \cdot N_{x+n} + D_{x+n}$$

(комутативниот број – M_x отпаѓа, затоа што нема исплата за случај смрт).

Поради тоа што е

$$P_n = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

Тоа ќе биде:

$$P_n(N_x - N_{x+n}) = D_{x+n}$$

или

$$P_n \cdot N_{x+n} = P_n \cdot N_x - D_{x+n}$$

добиваме:

$$K = P_n \cdot N_x - D_{x+n} + D_{x+n}$$

односно:

$$K = P_n \cdot N_x$$

Со одредување на коефициентот К за бараниот облик на осигурување и замена во (5) добиваме равенка за групна пресметка на математичката резерва за односното осигурување.

За да може подобро да се разбере и да се види примената на Whiting – овиот метод во практиката, ќе се послужиме со примерот кој го користевме кај анализата на претходните два модели. На приложениот табеларен преглед број 7 е прикажан текот на пресметката на математичката резерва по групниот модел на Whiting, а во табелата 7а е прикажано пресметувањето на коефициентот К.

Како што ќе се види од овој преглед, секоја математичка картичка, која служи како темел за пресметка на резервите, снабдена е со податоци за осигурената сума, нето премијата, коефициентот К и податоци за староста на осигуреникот, времетраењето и поминатото време.

Како што покажува табеларниот преглед, побројниот резултат на пресметка мора да се совпаѓа со пресметката која ја даваат двете претходни модели, што е и јасно, со оглед на тоа дека сите овие три методи даваат точни резултати. Незначајните отстапувања се резултат на заокружувањето на комутативните броеви и не можат да се сметаат како отстапувања кои се од значење.

Осврт на Whiting-овиот модел

Whiting-овиот модел, како и моделот на Алтенбургер, е многу погоден за примена во практиката, лесно применлив затоа што претходно се утврдува коефициентот К на математичката картичка. Со оглед на тоа дека дава точни вредности, како метод за групна пресметка тој се препорачува во практиката.

Во поглед на разгледувањето на изминатото времетраење, кога не е цела година туку нецел број, постапката е иста како и кај претходните групни модели, што, секако, дека зависи од самото осигурително друштво каков начин ќе се примени во оценката на изминатото времетраење до денот на билансот и утврдувањето на староста на осигуреникот во времето на пресметката на математичката резерва.

Табела 7. *Групна пресметка на математичката резерва по Whiting-овиот модел на ден 01.07.2004 година*

$$ {}_tV_{x,\overline{n|}} \cdot \sum S = A_{x+t} \cdot \sum a_{x+t} \cdot S \cdot P + \frac{1}{D_{x+t}} \cdot \sum K $$

$$ K = S \cdot N_x \cdot \left[P \cdot \left(A_{x,\overline{n|}} \right) - P \cdot \left(A_x \right) \right] $$

x + t	S	SP	K	A_{x+t} ‰	a_{x+t}	$\frac{1}{D_{x+t}}$ ‰	2 x 5	3 x 6	4 x 7	${}_tV_{x,n}$ (8-9+10)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
28	357.500	27.487,52	15.809.720,15	161,286	17,6130	0,040320	57.659,75	484.137,69	637.447,92	210.969,97
32	27.000	1.991,48	853.920,97	181,537	17,0827	0,049540	4.901,50	34.019,86	42.303,24	13.184,89
37	66.600	5.160,50	1.455.106,06	224,012	16,2958	0,064258	14.919,20	84.094,48	93.502,21	24.326,93
40	163.300	7.650,63	1.848.862,10	249,932	15,7514	0,075271	40.813,90	120.508,13	139.165,70	59.471,46
42	389.800	30.243,80	7.814.976,95	268,716	15,3570	0,083743	104.745,50	464.454,04	654.449,61	294.741,07
45	31.650	1.489,13	245.877,87	299,183	14,7172	0,098506	9.469,14	21.915,82	24.220,45	11.773,76
46	316.000	14.810,61	2.654.355,45	309,951	14,4911	0,104063	97.944,52	214.622,03	276.220,19	159.542,68
55	230.500	18.982,37	1.087.273,08	420,068	12,1786	0,175113	96.825,67	231.178,69	190.395,65	56.042,63
	1.582.350	107.816,04								830.053,40

Табела 7а

Пресметување на коефициентот K по Whiting

$$K = S \cdot N_x \cdot \left[P \cdot \left(A_{x,\overline{n}|}\right) - P\left(A_x\right)\right]$$

Broj na dosie	x	x + t	S	N_x	$P\left(A_{x,\overline{n}|}\right)$	$P\left(A_x\right)$	6 - 7	K 4 x 5 x 8
227.606	37	46	42.200	253.600,47	46,869	13,747	33,122	354.469,65
227.607	37	46	168.800	253.600,47	46,869	13,747	33,122	1.417.878,60
227.608	37	46	105.000	253.600,47	46,869	13,747	33,122	881.974,25
235.976	34	42	19.800	305.474,42	77,588	11,957	65,631	396.962,11
235.977	34	42	170.000	305.474,42	77,588	11,957	65,631	3.408.260,58
235.978	34	42	200.000	305.474,42	77,588	11,957	65,631	4.009.718,33
251.840	21	28	27.000	650.950,67	76,868	6,859	70,009	1.230.454,95
251.841	21	28	70.000	650.950,67	76,868	6,859	70,009	3.190.068,38
251.842	21	28	120.000	650.950,67	76,868	6,859	70,009	5.468.688,65
251.843	21	28	100.000	650.950,67	76,868	6,859	70,009	4.557.240,55
267.206	31	37	27.000	366.083,18	77,334	10,442	66,892	661.176,97
271.467	38	45	31.650	238.038,12	47,050	14,414	32,636	245.876,57
278.084	27	32	27.000	462.929,51	77,092	8,774	68,318	853.913,29
304.676	34	37	39.600	305.474,42	77,588	11,957	65,631	793.924,23
303.903	52	55	60.500	88.898,65	82,353	29,293	53,060	285.376,22
303.904	52	55	70.000	88.898,65	82,353	29,293	53,060	330.187,37
303.905	52	55	100.000	88.898,65	82,353	29,293	53,060	471.696,24
311.307	26	28	40.500	490.406,73	77,046	8,410	68,636	1.363.212,03
596.526	33	40	63.300	324.642,20	46,299	11,424	34,875	716.676,06
596.527	33	40	100.000	324.642,20	46,299	11,424	34,875	1.132.189,67

2.4. Fouret-ов модел

Fouret-овиот модел, познат уште како рекурентен модел, исто така, е една од погодните и прецизните модели за групно пресметување на билансните математички резерви.

Основата од која се поаѓа кај Fouret-овиот модел е пресметување на математичката резерва за тековната година тргнувајќи од резервите од претходната година. Ако на математичката резерва од претходната година (${}_{t-1}V$) се додаде годишната нето премија (P) и постигнатата пресметковна камата во тековната година (i), па од вкупниот износ се одбие исплатата за случај смрт (d_{x+t-1}), ќе се добие математичката резерва на крајот на тековната година на осигурување (${}_{t}V$).

Кај ваквиот начин на пресметка на математичката резерва Fouret поаѓа од претпоставките дека датумот на раѓање на сите осигуреници паѓа на 1 јануари, а, исто така, и почетокот на сите осигурувања е на 1 јануари, така што годините на присутната старост на осигуреникот, како и изминатото времетраење на осигурувањето до денот на билансот (31 декември) е заокружен на цел број години.

Fouret, исто така, зема дека плаќањето на премиите е годишно, а исплатите за случај смрт да се вршат на крајот на годината на осигурувањето. Со тоа работата е многу олесната, затоа што се претпоставува годишно вкаматување.

За групното пресметување на математичките резерви по овој модел од основна важност е групирањето на математичките картички по староста на осигурениците во времето на пресметка на резервата, без оглед на договореното траење на осигурувањето, како и на преостанатото времетраење до истекот.

Ако се земе една друга група на осигурувања кај кои на денот на пресметката на билансната резерва староста на осигуреникот x + t, тогаш општата равенка за пресметување на резервата по Fouret - овиот модел ќе гласи:

$$ {}_{t}V = l_{x+t-1}({}_{t-1}V + P)\cdot(i+1) - d_{x+t-1} \qquad \text{………………………………………………………(1)} $$

при што l_{x+t-1} е бројот на живи лица на крајот на претходната година на осигурувањето, а l_{x+t} е бројот на живи лица на крајот на тековната година на осигурувањето. Вредноста d_{x+t-1} претставува бројот на умрени лица во тековната година.

Со делење на горните равенки за вредноста l_{x+t-1} ќе се добие:

$$ l_{x+t-1}\cdot {}_{t}V = ({}_{t-1}V + P)\cdot(i+1) - \frac{d_{x+t-1}}{l_{x+t-1}} \qquad \text{……………………………………………………..(2)} $$

Затоа што $\frac{l_{x+t}}{l_{x+t-1}} = p_{x+t-1}$ е веројатност дека лицата во x + t -1 староста ќе доживеат старост x + t и поради тоа што $\frac{d_{x+t-1}}{l_{x+t-1}} = q_{x+t-1}$ е веројатност за смртноста во тековната година, затоа равенката бр.2 го добива следниот облик:

$$P_{x+t-1} \cdot {}_tV = ({}_{t-1}V + P) \cdot (i+1) - q_{x+t-1}$$

$${}_tV = \frac{1}{p_{x+t-1}}[({}_{t-1}V + P) \cdot (i+1) - q_{x+t-1}]$$

Равенката е конечен облик за пресметка на математичката резерва по Fouret-овиот модел.

Ако оваа формула се примени на целата група на осигурување кај кои староста на осигуреникот во времето на пресметката е x + t, тогаш ќе се добие:

$$\sum S \cdot {}_tV = \frac{1}{p_{x+t-1}}[(\sum S \cdot {}_{t-1}V + \sum S \cdot P) \cdot (i+1) - q_{x+t-1} \sum S]$$

Во ваков облик наведена формулата може да се примени за пресметка на математичката резерва за секоја форма на осигурување по кое е плаќање премијата во тек, а при тоа обликот на формулата да не се менува.

Така за мешовитото осигурување резервата на крајот на годината t за старост x + t во функција на резервата x + t-l би била:

$$l_{x+t} \cdot {}_tV_{x,\overline{n|}} = l_{x+t-1}({}_{t-1}V_{x,n|} + P) \cdot (i+1) - q_{x+t-1}$$

или

$${}_tV_{x,\overline{n|}} = \frac{1}{p_{x+t-1}}[({}_{t-1}V_{x,n|} + P) \cdot (i+1) - q_{x+t-1}]$$

а за група осигуреници со иста старост x + t:

$$\sum S \cdot {}_tV_{x,\overline{n|}} = \frac{1}{p_{x+t-1}}[(\sum S \cdot {}_{t-1}V_{x,n|} + \sum SP) \cdot (i+1) - q_{x+t-1} \cdot \sum S]$$

Врз основа на последните равенки може да се заклучи дека математичката резерва на осигуреници стари x + t години во моментот на пресметката е еднаква на разликата на крајната вредност на математичката резерва t-1 години зголемена за премијата и крајната вредност на ризико-капиталот.

Во приложениот табеларен преглед број 8 е даден приказ на начинот на пресметка на билансната математичка резерва по Fouret-овиот модел за портфолио на осигурување кое го земавме како пример кај сите останати групни модели за пресметка на резервите.

Како што се гледа, отстапувањата од индивидуалниот модел се незначителни, што е доказ дека Fouret-овиот модел може да се примени во практиката, затоа што дава прецизни резултати. Малото отстапување произлегува само од различниот начин на примена на комутативните броеви, што не влијае на конечната вредност на резервата.

Fouret-овиот модел обично служи за проверка на точноста на другите модели кои служат за групна пресметка на резервите. Меѓутоа, тој, исто така, може да се користи и самиот како таков. Неговите посебни погодности се во тоа што многу е брз и пружа одлична прецизност во резултатот, а за практична примена е многу лесен и едноставен.

Меѓутоа, поради тоа што овој модел во својата суштина е рекурентен, затоа што резервата за тековната година се пресметува врз основа на резервата од минатата година, може лесно да се случи грешка, која ако во една година се подкраде во пресметката, се провлекува целосно од година во година, а не се забележува. Со тоа, се препорачува во случајот на примена на Fouret-овиот групен модел одвреме навреме да се врши контрола на пресметката со помош на индивидуалните модели, за да би би се избегнало повторувањето на евентуалните грешки. На пример, може да се усвои примената на Fouret-овиот модел со тоа барем секоја трета или петта година (што зависи од практиката на осигурителното друштво) да изврши контрола на извршената пресметка по Fouret-овиот модел.

Осврт на Fouret-овиот модел

Од сето ова досега кажано, користењето на Fouret-овиот модел за групна пресметка на математичката резерва, секако, треба да се проучи со напомена дека кај неговата примена е неопходно да се вложи голема претпазливост при изведувањето на самата пресметка за резултатот да би бил точен. Само во тој случај примената на Fouret-овиот модел ќе даде задоволителни резултати, со оглед на тоа дека ова е еден многу прецизен модел, а освен тоа е и лесно изводлив. Што е најважно, овде бројот на елементите по кои треба да се групираат математичките картички е навистина сведен на минимум. Потребно е само да се класифицираат картичките по староста на осигуреникот во времето на пресметката, односно, точно како што се гледа од самата формула, по староста на осигуреникот на почетокот на годината за која се врши пресметката $(x + t -1)$. Сите останати податоци кои се потребни за пресметка веќе се наоѓаат во математичката картичка и во таблиците на смртноста и заради тоа пресметката е многу упростена и брза.

Според ова, со внимателна работа и внимателност при пресметката, Fouret-овиот модел, како единствен модел кој дава точни резултати, се препорачува за практична примена.

Видовме дека Fouret-овиот модел е заснован на ретроспективниот начин на пресметка на премиските резерви. Ќе се обидеме во понатамошниот дел да го примениме проспективниот начин на пресметка. Ќе тргнеме од познатата математичка резерва на осигуреникот со страост $(x + t -1)$ години и ќе ја бараме математичката резерва на осигуреникот со старост (x + t) години што е во согласност со принципост на иднина-минато.

Нека математичката резерва, на пример, за едно мешовито осигурување на крајот на x + I година на осигуреник стар x години е $t+IV_{x,n}$ и нека времетраењето на осигурувањето е n години.

Тогаш математичката резерва на крајот на годината t ќе биде:

$$ {}_tV_{x,\overline{n}|} = \frac{l}{r}(q_{x+t} + p_{x+t} - {}_{t+1}V_{x,\overline{n}|}) - P \qquad (3)$$

што е на основа на рекурентната формула

$$l_{x+t+1} \cdot {}_{t+1}V_{x,\overline{n}|} = l_{x+t}({}_tV_{x,\overline{n}|} + P)r$$

е очигледно.

Исто така, математичката резерва за група осигуреници стари x + t години во моментот на пресметката t за сума S ќе биде:

$$\sum S \cdot {}_tV_{x,\overline{n}|} = \frac{l}{r} \cdot q_{x+t} \cdot \sum S + \frac{l}{r} \cdot p_{x+t} - \sum S \cdot {}_{t+1}V_{x,\overline{n}|} - \sum SP$$

што може да се напише на следниот начин, имајќи во предвид дека $q_{x+t} = 1 - p_{x+t}$:

$$\sum S \cdot {}_tV_{x+t} = \frac{l}{r}\sum S - \sum SP - \frac{l}{r} p_{x+t}(\sum S - \sum S_{x+t} V_{x,\overline{n}|})$$

Последната равенка е доказ дека математичката резерва на група осигуреници стари x + t години може да се пресмета во функција на капиталот под ризик на старост x + t + 1 година. Таа има повеќе теоретско отколку практично значење. Може да се препорача нејзиното користење само во случајот кога во разгледуваниот период не би било како напуштање, така и зголемувањето на осигурувањето поради што е многу тешко да се знае вредноста на резервата на крајот на наредната година.

Табела 8

Групна пресметка на математичката резерва по Fouret-овиот модел на ден 31.12.1965 година

$$\sum S \cdot_t V_{x,\overline{n|}} = \frac{1}{P_{x+t-1}}\left[\left(\sum S_{t-1} \cdot V_{x,n} + \sum S \cdot P\right)\cdot(1+i) - q_{x+t-1} \cdot \sum S\right]$$

x + t	x + t - 1	$\sum S$	$\sum S \cdot P$	$\sum S \cdot_{t-1} V_{x,\overline{n|}}$	4 + 5	5 x (1 + i)	q_{x+t-1} %o	3 x 8	7 - 9	$\frac{1}{P_{x+t-1}}$	$_tV_{x,\overline{n|}}$ (10 x 11)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
28	27	357.500	27.487,52	173.789,56	201.277,08	211.340,93	2,4722	883,81	210.457,12	1,0024722	210.977,41
32	31	27.000	1.991,48	9.180,78	11.172,26	11.825,37	2,8297	76,40	11.748,97	1,0028297	11.782,21
37	36	66.600	5.160,50	18.150,23	23.310,73	24.476,27	3,5370	235,56	24.240,71	1,0035370	24.326,45
40	39	163.300	7.650,63	50.833,43	58.484,06	61.313,76	4,1516	677,96	60.635,80	1,0041516	60.887,54
42	41	389.800	30.243,80	250.888,95	281.132,75	295.189,39	4,6705	1.820,56	293.368,83	1,0046705	294.739,01
45	44	31.650	1.489,13	9.831,17	11.320,30	11.886,32	5,6674	179,37	11.706,95	1,0056674	11.773,29
46	45	316.000	14.810,61	138.039,63	152.850,24	160.492,75	6,0724	1.918,88	158.573,87	1,0060724	159.536,80
55	54	230.500	18.982,37	36.400,80	55.383,17	58.152,33	12,0892	2.786,56	55.365,77	1,0120892	56.035,10
		1.582.350	107.816,04								830.057,81

2.5. Заклучок во однос на моделите за групно пресметување на премиските резерви

Во овој дел се прикажани најпознатите модели кои се применуваат за групна пресметка на математичките резерви. Покрај овие модели, секако, се појавуваат во практиката и многу други модели, но тие се по малку непрактични за примена. Во голем број случаи тоа се модели кои се изведени од претходно наброените модели.

На сите изнесени модели заедничка карактеристика е дека по своите крајни резултати се совпаѓаат со резултатите кои се добиваат кај индивидуалните модели на пресметка на математичката резерва. Сите тие се само трансформирани формули на индивидуалните модели. Со една погодна трансформација на формулите за индивидуална пресметка самата формула се модифицира така шт во себе содржи минимум елементи по кои треба да се класира математичката картичка.

Од тие причини, сите наведени методи мора да даваат еднакви резултати кои ќе се поклопуваат со индивидуалниот метод. Евентуалните отстапувања се сосема незначајни и можат да се занемарат.

Доколку осигурителното друштво сака да изврши точна пресметка на билансните математички резерви за целото портфолио на осигурување на живот, ќе се послужи со еден од изнесените групни методи. Осигурителното друштво може која сака од изнесените групни модели да ја примени, но, секако, притоа ќе води сметка тоа да биде моделот кој во конкретните услови најмногу одговара на постоечкото портфолио на едно друштво.

Во понатамошното излагање ќе стане збор за методите кои се користат за групна пресметка на билансните математички резерви, но кои не даваат точни, туку само приближни резултати.

3. МОДЕЛИ ЗА АПРОКСИМАТИВНО ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА ПРЕМИСКИТЕ РЕЗЕРВИ

Кога осигурителното друштво е во неможност во предвидениот рок да направи пресметка на билансната математичка резерва во износот на нејзината точна вредност, тогаш е принудено да се послужи со некој апроксимативен модел по кој ќе се изврши пресметката на резервите. Секако дека при изборот на еден од апроксимативните модели мора да се води сметка таа сепак да дава резултати кои нема многу да отстапуваат од резултатите по индивидуалниот метод. Од структурата на самото животно портфолио со кое друштвото располага зависи и изборот на еден ваков модел.

Освен тоа, ако и осигурителното друштво го усвои приближниот начин на пресметка на резервите, тоа ќе мора повремено, периодично, сепак, да изврши точна пресметка по еден од точните групни модели, а со тоа би ги изедначило евентуалните отстапувања приближно од точната пресметка која може да настане во текот на неколку години. Тоа обично се практикува во случај кога за пресметка на резервата се применуваат приближните модели, ваквата приближна пресметка се врши, на пример, заедно за две или четири години, а секоја трета или петта година мора да се изврши точна пресметка на математичката резерва и на тој начин да се корегираат сите отстапувања кои настанале во меѓувреме кога е правена приближната пресметка. За тие отстапувања да бидат што помали, мора строго да се води сметка за изборот на приближниот модел кој најчесто се користи во практиката и кој се дава во случаите кои одговараат задоволителни резултати. Покрај овие, во практиката се применуваат уште различни приближни модели, но затоа што даваат само групи резултати, овде за нив нема да стане збор. Како што е понапред изнесено, како најпознат од приближните методи за пресметка на билансната математичка резерва се употребува Lidston-овиот модел, па затоа подетално ќе се задржиме на него.

3.1. Lidston-ов модел

Lidston-овиот модел, во практиката уште познат и под името Z-модел, е еден од најчесто применуваните апроксимативни модели. По овој модел сите осигуреници, без оглед на реалната старост на некои осигуреници во времето на пресметката на резервата, имаат една иста просечна старост означена со Z, всушност, таа што во досегашните модели е означувана со x + t.

Врз основа на една единствена просечна старост која ја претставува староста на сите осигуреници во времето на пресметката се врши понатамошно групирање на математичката картичка исклучиво по времето кое е преостанато до истекот на осигурувањето (x - t). Внатре во сите тие групи се врши пресметка на математичката резерва по општата равенка која е изразена на следниот начин:

$$V_t = A_t - P \cdot a_t$$

Затоа што е $A_t = 1 - d \cdot a_t$ со понатамошно развивање на равенката ќе биде:

$$V_t = 1 - d \cdot a_t - P \cdot a_t$$

а за целата група ќе биде:

$$\sum S \cdot V_t = \sum S - d \cdot a_t \cdot \sum S - \sum S \cdot P \cdot a_t$$

$$\sum S \cdot V_t = \sum S - a_t \cdot (d \cdot \sum S - \sum S \cdot P)$$

Како што се гледа ова е една сосема воопштена равенка која се однесува на секоја форма на осигурување, а нејзината понатамошна формулација зависи од самата форма.

Ако се земе за пример едно мешовито осигурување, кај кое осигураната сума е S, општата равенка ќе биде:

$${}_tV_{x,\overline{n|}} = S - S \cdot d \cdot a_{z',\overline{n-t|}} - S \cdot P \cdot a_{z',\overline{n-t|}}$$

Ако се разгледува една цела група на осигурувања кај кои преостанатото времетраење на осигурувањето (n - t) е еднакво, а просечната репрезентативна старост на сите осигуреници во времето на пресметката на резервата е еднаква на Z, тогаш математичката резерва за таа група на осигурувања е:

$$\sum S \cdot {}_tV_n = \sum S - a_{z,\overline{n-t|}} \cdot (d \cdot \sum S - \sum S \cdot P)$$

Доколку, пак, се работи за други форми на осигурување, секогаш треба да се тргне од основната равенка:

$$V_t = A_t - P \cdot a_t$$

и се развива според формата на осигурување за кое се бара резервата. Во принцип равенката останува непроменета, споредена со индивидуалниот модел, освен што староста на осигуреникот која кај индивидуалните модели во времето на пресметката изнесува x + t овде е означена со една просечна старост “Z”.

Според тоа, ако разгледуваме едно доживотно осигурување на случај смрт, ќе ја добиеме равенката:

$$V_t = A_z - P \cdot a_z$$

Ако разгледуваме една цела група на осигурувања, равенката ќе гласи:

$$\sum S \cdot {}_tV = A_z \cdot \sum S - a_z \cdot \sum S \cdot P$$

Како што се работи овде за доживотното осигурување, кај кое не се води сметка за времетраењето кое преостанало до истекот, отпаѓа елементот n – t, што значи дека сите осигурителни портфолија, кои се заклучени со доживотно траење треба да се опфатат како едно единствено осигурување со старост која во времето на пресметка изнесува “Z” без какви и да е понатамошни групирања на осигурувањето.

Ако се работи за изработка на резерва за временско осигурување за случај смрт, ако е во прашање само едно осигурување, равенката ќе биде:

$$ {}_tV_n = {}_{/n-t}A_z - P \cdot a_{z,\overline{n-t|}} $$

а за група осигурувања, кои имаат еднакво преостанато времетраење до истекот на осигурувањето (n – t), равенката ќе гласи:

$$ \sum S \cdot {}_tV_n = {}_{/n-t}A_z \cdot \sum S - a_{z,\overline{n-t|}} \cdot \sum S \cdot P $$

Кај осигурувањето за случај доживување математичката резерва за едно осигурување со просечна старост z ќе гласи:

$$ {}_tV_n = E_{z,\overline{n-t|}} - P \cdot a_{z,\overline{n-t|}} $$

а за цела група на осигурувања кои се заклучени на случај доживување со истото преостанато времетраење до истекот на математичката резерва ќе гласи:

$$ \sum S \cdot {}_tV_n = E_{z,\overline{n-t|}} \cdot \sum S - a_{z,\overline{n-t|}} \cdot \sum S \cdot P $$

итн., како што се гледа, структурата на равенката се менува според формата на осигурување, но во секој случај во суштина секогаш го задржува принципот по кој математичката резерва, искажана на проспективен начин, е еднаква на разликата помеѓу сегашната вредност на договорената осигурана сума и сегашната вредност на идните премии. Поради тоа една од важните карактеристики на Lidston-овиот модел е математичката резерва да се искаже по проспективна формула.

Од самата равенка се гледа, како што е покажано и во табеларниот преглед, дека понатамошната работа околу пресметката на математичката резерва е многу брза.

Суштината на работата, како и проблемот, всушност е во тоа да се пронајде просечна старост која ќе одговара на осигуреникот во времето на пресметката на резервата, и тоа онаа која што е можно подобро и поточно ќе го застапува просекот на сите старости кои се опфатени во портфолиото на едно осигурително друштво. Од оценката на просечната старост ќе зависи и точноста на пресметката на резервите, односно големината на отстапувањето од точната пресметка. Според сè досега кажаното, од најголемо значење е да се одреди староста на осигуреникот.

Пред Lidston, Манли на основа на основа на однапред изработените таблици за временски лични ренти кои одговараат ја пресметувал средната старост z на денот на пресметката на математичката резерва. Манли при пресметувањето на средната старост z на денот на пресметката тргнувал од следните претпоставки: кај мешовитите осигурувања, групираните по старост осигуреници и истекот на осигурувањето или според календарската година на истекот на осигурувањето или, пак, според преостанатото времетраење на осигурувањето пресметано од денот на пресметката до истекот на осигурувањето, може како за сегашната вредност на идните обврски на заводот, пресметани на денот на пресметката на премиските резерви, така и за сегашната вредност на идните уплати на осигуреникот да се одреди таква средна вредност така што износите на споменатите вредности пресметани на основа на средната старост з за сите разгледувани осигурувања, точно да се поклопуваат со износите кои за истата вредност би се добиле ако овие вредности се пресметани и собрани за секое поединечно осигурување на разгледуваните осигурувања.

На основа на тие претпоставки, ако се обележи: 1. осигураната сума на поединечните старосни групи на денот на пресметката на премиските резерви со K_x; K_{x+1}; K_{x+2} …а

$$A_{z,\overline{n-t|}} \cdot (K_x + K_{x+1} + K_{x+2} ...) = A_{x,\overline{n-t|}} \cdot K_x + A_{x+1,\overline{n-t|}} \cdot K_{x+1} + ... \quad \text{……………………}(1)$$

$$a_{z,\overline{n-t|}} \cdot \{[P_x] + [P_{x+1}] + [P_{x+2}] ...\} = a_{x,\overline{n-t|}} \cdot [P_x] + a_{x+1,\overline{n-t|}} \cdot [P_{x+1}] + ...$$

…………………...(2)

Каде што $[P_x]$; $[P_{x+1}]$… се збировите на премиите на поедини старосни групи на денот на пресметката на премиските резерви.

Имајќи предвид дека

$$A_{z,\overline{n-t|}} = 1 - d \cdot a_{z,\overline{n-t|}}$$

$$A_{x,\overline{n-t|}} = 1 - d \cdot a_{x,\overline{n-t|}} \quad \text{итн.}$$

равенката бр.1 може да се напише во следниот облик:

$$(1 - d \cdot a_{z,\overline{n-t|}}) \cdot (K_x + K_{x+1} + K_{x+2} ...) = (1 - d \cdot a_{x,\overline{n-t|}}) \cdot K_x + (1 - d \cdot a_{x+1,\overline{n-t|}}) \cdot K_{x+1} ...$$

од каде е

$$a_{z,\overline{n-t|}} = \frac{a_{x,\overline{n-t|}} \cdot K_x + a_{x+1,\overline{n-t|}} \cdot K_{x+1} + ...}{K_x + K_{x+1} + ...} \quad \text{………………………………………}(3)$$

На основа на равенките бр.1, 2 и 3 може сосема лесно да се пресмета средната старост. Со помош на таа старост може од една страна да се утврди вкупната вредност на премиските резерви за односната група, а од друга страна може да се процени вредноста на вкупните обврски, секако, доколку средната старост е точно пресметана. Поради грешката која е многу возможна со оглед на комплицираноста на пресметката на средната старост проценката на обврските ќе биде погрешна.

Lidston посоодветно ја одредил бараната средна старост Z со "моделот Z". Тој математичката резерва на секое осигурување ја изразил со функцијата за привремена рента при што се соочил со еден проблем чие решение се состои во пронаоѓањето на средната старост, но за истото времетраење. По "Z моделот" привремената лична рента треба да се развие во конвергентен ред за, поради пресметување на средната старост, да се занамарат сите членови на редот, почнувајќи од вториот, при што, таблиците на смртноста кои служат за оваа пресметка треба да го задоволуваат Makevan-овиот закон.

$$l_x = K \cdot s^x \cdot g^{c^x}; \qquad l_{x+t} = K \cdot s^{x+t} \cdot g^{c^{x+t}}$$

и

$$t \cdot P_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} - s^t \cdot g^{c^x} \cdot (c^t - 1) = s^t \cdot e^{c^x} \cdot (c^t - 1) \cdot \log_e g$$

што помножено со V^t станува

$$V^t \cdot t \cdot P_x = V^t s^t \cdot e^{c^x} \cdot (c^t - 1) \cdot \gamma, {}^8\gamma = \log_e g$$

Со развивање на експоненцијалната функција во ред кој одговара ќе добиеме:

$$V^t \cdot t \cdot P_x = V^t s^t [1 + C^x \cdot (C^t - 1) \cdot \gamma + \frac{C^{2x}(C^t - 1) \cdot \gamma^2}{l \cdot 2} + \ldots$$

или

$$V^t \cdot t \cdot P_x = V_0^t + C^x \cdot \gamma \cdot [V_1^t - V_0^t] + \frac{C^{2x} \cdot \gamma^2}{l \cdot 2} \cdot [V_2^t - 2V_{-1}^t + V_0^t] \ldots$$

односно:

$$V^t \cdot t \cdot P_x = V_0^t + C^x \cdot \gamma \cdot \Delta(V_0^t) + \frac{C^{2x} \cdot \gamma^2}{l \cdot 2} \cdot \Delta(V_0^t) + \ldots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(4)$$

каде е

$$V_S = V_0\,;\; V_{SC} = V_1\,;\; V_{SC^2} = V_2$$

и

$$\Delta V_0^t = V_1^t - V_0^t\,; \quad \Delta^2 (V_0^t) = V_2^t - 2V_1^t + V_0^t$$

со собирање од 0 до n – 1 равенката бр. 4 постанува:

$$\sum_0^{n-1} V^t tp_x = a_{x,\overline{n}|} = a_0 + C^x \gamma \cdot \Delta a_0 + \frac{C^{2x}\gamma^2}{2!}\Delta^2 a_0 \ldots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

или

$$a_{x,\overline{n}|} = e^{c^x}\gamma \cdot \Delta a_0$$

каде е

$$a_0 = \sum_o^{n-1} V_0^t\,; \quad a_1 = \sum_o^{n-1} V_1^t$$

$$a_1 - a_0 = \Delta a_0\,; \quad a_2 - 2a_1 + a_0 = \Delta^2 a_0$$

при што Δ се смета за операционен симбол и се однесува само на a_0. Поради тоа што γ е многу мал број, може без големи грешки да се занемари третиот, четвртиот итн. членови на равенката бр.5, па така таа го добива следниот облик:

$$a_{x,\overline{n}|} = a_0 + C^x \gamma \cdot \Delta a_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .. (6)$$

со замена на равенката бр.6 во равенката бр.3 имаме:

$$(a_0 + C^z \gamma \cdot \Delta a_0)\cdot(K_x + K_{x+1} + \ldots) = (a_0 + C^x \gamma \cdot \Delta a_0)\cdot K_x + (a_0 + C^{x+1}\gamma \cdot \Delta a_0)\cdot K_{x+1} + \ldots$$

Или

$$C^Z \sum K_x = \sum C^x K_x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Од равенката бр.7 добиваме:

$$C^{Z} = \frac{\sum C^{x} K_{x}}{\sum K_{x}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

Од каде е

$$Z = \frac{1}{\log(e)C}\log(e)\frac{\sum C^{x} K_{x}}{\sum K_{x}}$$

Според Lidston равенката бр. 8 се пишува:

$$C^{z+n} = \frac{\sum C^{x+n} \cdot K_{x}}{\sum K_{x}} = \frac{\sum C^{m} K_{x}}{\sum K_{x}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

Каде x + n = m, ја означува староста на осигуреникот за истекот на осигурувањето. Ако равенката бр.9 се помножи со C^{K} , таа постанува

$$C^{z+n+k} = \frac{\sum C^{x+n+k} \cdot K_{x}}{\sum K_{x}} = \frac{\sum C^{m+k} K_{x}}{\sum K_{x}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

каде што во практичната примена се зема К = - 55 со цел намалување на пресметковните големини. Поради равенката бр.10, прикажаниот модел се вика “Z модел”. Како што се гледа од равенката бр.10, во неа не се појавува староста на осигуреникот, која е променлива на денот на пресметката, туку староста при истекот на осигурувањето, која е постојана за целото време на траењето на осигурувањето.

На горе прикажаниот начин, според равенката бр.10 ја одредивме средната старост со помош на осигураните суми. Исто така, може да се покаже и одредувањето на средната старост со помош на нето премиите каде равенката бр.6 би ја замениле со равенката бр.2. По утврдувањето на средната старост може да се помине на одредување како на разликата меѓу сегашната вредност на идните обврски така и на сегашната вредност на идните премиски уплати.

Иако Lidston смета дека средната вредност ќе биде иста, било да се пресметува со помош на осигураните суми било со помош на нето премиите, теоретски гледано може да дојде до значајни разлики. Ова е поради тоа што средната старост може да зависи како од случајниот распоред на пристапните старости така и од староста за истекот на осигурувањето. И средната старост може да биде дотолку одредена само ако збирот на премиите според целокупната осигурана вредност на исти старости во моментот на пресметката на премиските резерви биде константен.

А ако износот на премиите од помладите кон постарите постојано расте, тогаш е сигурно дека и средната старост пресметана на основа на премијата ќе биде поголема од средната старост пресметана со помош на осигурените суми. Меѓутоа, со пресметувањето на средните премиски рати за поединечни билансни старости би се утврдило дали со растечката билансна старост расте или отпаѓа премиската рата, за да се одреди средната старост и со помош на осигурените суми и со помош на премиите, а потоа да се процени карактерот на разликата на така добиените средни старости.

Иако Lidston тргнал од одредувањето на староста од таблиците прилагодени по Makeam, тоа не значи дека не можат да се користат и останатите таблици на смртноста. Во случај кога таблиците на смртноста не се правени по равенката на Makeam, треба да се има предвид пресметката на просечната старост врз основа на веројатната смртност:

$$q_x^{'} = \frac{\sum l_x \cdot q_x}{\sum l_x}.$$

Доколку се работи за едно портфолио со голем број осигурувања и со поголемо поминато траење на осигурувањето, секако дека отстапувањата ќе бидат скоро незабележителни. Од тоа произлегува дека осигурителните друштва кои имаат младо животно портфолио и кај кои покрај тоа и не е големо портфолио на осигурување на живот, не би требало да се служат со Lidston-овиот модел за групна пресметка на резервите. Предност во овој поглед имаат големите и стари друштва за осигурување на живот. Во практиката кај големите осигурителни друштва во светот е познато користењето на овој модел.

Со увид на изработениот табеларен преглед бр.9 математичката резерва по Lidston утврдено е дека сепак постои извесна разлика помеѓу овој и индивидуалната пресметка која изнесува околу 3%. Со детално испитување утврдено е дека оваа разлика е настаната кај староста од 55 години, а тоа е поради тоа што пресметаната просечна старост на осигуреникот во конкретниот пример пресметана со 44 години и таа потполно задоволува за сите старости до 55 години, додека од оваа старост понатаму дава забележително помала резерва отколку што би дало индивидуалното пресметување. Тоа кажува дека Lidston-овиот метод не дава задоволителни резултати кај постарите старости. Сепак, доколку бројот на осигурувањата е доволно голем, а староста на осигурениците во просек не достига некоја голема старост, тогаш повторно овој метод ќе даде задоволителни резултати и може, без правење поголеми грешки, да се користи во практиката.

Табела 9

Групна пресметка на математичката резерва по Lidston-овиот модел
на ден 01.07.2004 година

$$\sum S \cdot {}_tV_{x,n} + \sum S - a_{z,\overline{n-t}|} \cdot \left(d \cdot \sum S + \sum S \cdot P\right)$$

n-t	S	$S \cdot P$	$d \cdot S$	3+4	$a_{z,\overline{n-t}|}$	5x6	${}_tV_{x,\overline{n}|}$ $(2-7)$
1	2	3	4	5	6	7	8
2	389.800	30.243,80	18.561,89	48.805,69	1,9470	95.025	294.775
3	317.000	24.367,16	15.095,22	39.462,38	2,8433	112.203	204.797
4	27.000	2.088,02	1.285,71	3.373,73	3,6916	12.320	14.680
5	27.000	2.081,48	1.285,71	3.367,19	4,4937	15.131	11.869
6	316.000	14.810,61	15.047,60	29.858,21	5,2518	156.809	159.191
7	270.100	22.054,85	12.861,89	34.916,74	5,9680	208.383	61.717
8	235.450	12.170,12	11.211,89	23.382,01	6,6442	155.355	80.095
	1.582.350	107.816,04					827.124

3.2. Модел “t”

Моделот “t”, исто така, е апроксимативен модел, како и Lidston-овиот модел. Во својата суштина овој модел е изведен од Lidston-овиот модел.

Разликата помеѓу овој и Lidston-овиот модел е во тоа што по “t” моделот математичката резерва се пресметува на основа на изминатото времетраење t од денот на пристапувањето во осигурување до денот на пресметката на математичката резерва, додека по Lidston-овиот модел резервата се пресметува според времетраењето кое е преостанато до истекот (n - t). Инаку, апроксимацијата на пресметувањето е во тоа што и овде, како и кај Lidston, резервата се пресметува на основа на една просечна репрезентативна старост на осигуреникот, која се пресметува по истиот принцип како и кај Lidston, исто така и овде важи староста на осигуреникот x + t. Меѓутоа, затоа што по “t” модел резервата се пресметува на основа на изминатото времетраење, затоа математичката резерва се пресметува по ретроспективната формула за која е потребна просечна старост на осигуреникот во времето на пристапувањето во осигурување. Таа се добива на основа на изнајдените просечни старости во времето на пресметката, со одбивање на овие две старости од изминатото времетраење, значи ќе биде x = z - t, односно x + t = z.

Од ова произлегува дека математичките картички, кои служат како основа за пресметка на резервата, треба да се групираат исклучиво по изминатото траење на осигурувањето.

Равенката за пресметка на математичката резерва во ретроспективен облик ќе гласи:

$$V_t = \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} \cdot P - \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}}$$

што значи дека математичката резерва е еднаква на разликата помеѓу уплатените премии и исплатените осигурени суми за случај смрт, сè сведено по својата вредност на денот на пресметката на математичката резерва.

Ако наведената равенка се примени на една група осигурувања, кај кои е застапена една просечна старост на осигуреникот како репрезентативна старост на сите осигуреници, x + t, тогаш ќе се добие равенката за математичката резерва:

$$\sum S \cdot V_t = \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} \cdot \sum S \cdot P - \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}} \cdot \sum S$$

Со оглед на тоа дека принципот на пресметка на просечната старост на осигуреникот во времето на пресметката на резервата е ист кај Lidston-иот модел, затоа пресметувањето не мора да се повторува, освен што може да се нагласи дека средната старост, исто така, може да се пресмета и според просечниот интензитет на смртноста:

$$\eta_{x+t} = \frac{\sum S \cdot \eta_x}{\sum S}$$

или

$$m_{x+t} = \frac{\sum S \cdot m_x}{\sum S \cdot P}$$

За табеларниот преглед број 10, во кој е даден приказ за пресметка на математичката резерва по методот “t”, земена е просечната старост на осигуреникот во времето на пресметката (x + t = z) како и кај Lidston-овиот модел, 44 години.

Што се однесува до оценувањето на просечната старост на осигуреникот, секако дека треба оваа старост многу претпазливо да се земе за резервата добиена на апроксимативен начин да би одговарала што повеќе на индивидуалната пресметка на резервата.

Освен тоа, за примена на моделот “t” во практиката се препорачува повремено, можеби дури и еднаш годишно, да се проверува точноста на пресметаната старост на осигуреникот. Може, на пример да се случи поради големите промени во портфолиото во текот на деловната година (голем прилив на нови осигурувања, голем број на откуп и сл.) да делува осетно на порано пресметаната старост, така што во случај на недоверливост може да дојде до големи отстапувања помеѓу пресметаните приближни резерви и оние кои би се добиле со точниот начин на пресметување. Затоа, моделот “t” може да даде задоволителни резултати во пресметката на резервите само со контрола на изнајдените просечните старости.

Со услов за внимателна проценка на староста на осигуреникот, како што се гледа математичката резерва добиена по "t" моделот задоволува, што докажува и приложениот табеларен преглед, по кој отстапувањето од индивидуалната пресметка е незначително.

Секако дека и овде важи тоа кај прилично постарите осигуреници отстапувањата да мора да постојат, па заради тоа се избегнува примената на овој модел кај осигурувањата со високи старости на осигурениците. Моделот е погоден посебно за масовно, т.н. колективно осигурување, кај кои нема некои поголеми разлики помеѓу поедините осигурувања.

Изведената равенка за пресметка на резервите по "t" моделот е дадена во општ облик и тој лесно се модифицира за останатите видови осигурувања. Во конкретниот пример, во приложената табела е земен ист пример како и кај останатите модели. Ова е така за да може да се врши споредба помеѓу добиените вредности на математичката резерва по поедините модели.

Погоре се дадени моделите за групна пресметка на билансните математички резерви кои се најпознати како во теоријата на осигурувањето на живот така и во праксата. Внимателната примена на секоја од овие методи ќе даде сосема задоволителни резултати, што посебно се однесува на моделите кои даваат приближна вредност за резервата.

Табела 10

Групни модели за пресметка на математичките резерви по моделот "t" на ден 01.07.1965 година

$$\sum S \cdot {}_tV_{x+t} = \frac{N_x - N_z}{D_z} \cdot \sum S \cdot P - \frac{M_x - M_z}{D_z} \cdot \sum S$$

x + t	Z = 44	$\sum S$	$\sum S \cdot P$	$\frac{N_x - N_z}{D_z}$	$\frac{M_x - M_z}{D_z}$	4 x 5	3 x 6	${}_tV_{x,\overline{n}|}$ $(7-8)$
42	2	40.500	3.120,36	2,1695	10,6081	6.769,62	429,63	6.339,99
41	3	270.100	22.054,85	3,3446	15,8366	73.764,65	4.277,47	69.487,19
39	5	27.000	2.081,48	5,8906	26,1911	12.261,17	707,16	11.554,01
38	6	27.000	2.088,02	7,2681	31,3385	15.175,94	846,14	14.329,80
37	7	511.950	33.416,92	8,7198	36,4812	291.388,86	18.676,55	272.712,31
36	8	389.800	30.243,80	10,2495	41,6351	309.983,83	16.229,36	293.754,47
35	9	316.000	14.810,61	11,8611	46,8048	175.670,13	14.790,32	160.879,81
		1.582.350	107.816,04					829.057,57

Во подолу прикажаниот приказ се дава споредбен преглед на пресметаните резерви по сите изнесени модели за подобро да би се согледале разликите помеѓу поединечните модели, односно што подобро ќе се оцени нивната вредност во споредба со индивидуалниот метод. Сите резерви се пресметани за еден ист вид осигурување кој е земен за пример.

Споредбен преглед
на пресметаните билансни математички резерви

Model	Iznos na rezervata
Individualna	830.081
Karup-ova metoda	830.081
Altenburger-ova metoda	830.078
Whiting-ova metoda	830.059
Fouret-ova metoda	830.058
Lidston-ova metoda	827.124
"t" metoda	829.058

Како што беше нагласено во почетокот, кај анализата на сите изнесени модели почетна точка беше билансната математичка резерва да се пресметува за цел број на изминати години и притоа да се дадени старостите на осигурениците во цели години. Освен тоа, исто така е земено кај секој модел датумот на почеток на осигурувањето и датумот на билансот да се поклопуваат. Сето ова е направено само поради тоа да би се упростил самиот приказ на пресметување на математичката резерва по поедините методи. Воедно, накратко е објаснето како треба да се пресмета резервата ако изминатото траење е фракција.

Инаку, како во поглед на оценувањето на пристапната старост на осигуреникот, така и во поглед на изминатото траење од почетокот на осигурувањето до денот на пресметката на резервата постојат повеќе начини оваа работа околу пресметката да се поедностави и да се сведе на еден просек кој ќе задоволува при пресметката на билансните резерви. Иако не спаѓа во доменот на ова излагање, може да се каже колку на пример, пристапната старост на осигуреникот може многу различно да се цени и пронаоѓа и според тоа дали треба да се земе предвид точната старост или датумите на раѓањето да се групираат и да се заокружат на цела година. Тоа важи и за датумот на пристап во осигурување. Кај ова може да се земе дека пристапот во осигурувањето рамномерно е распореден преку целата година, како што може да се претпостави и кај пристапната старост на осигуреникот. Во таквиот случај може да се земе како просек, што во практиката обично и се прави, дека сите осигуреници во просек се родени на 01.07 како и дека сите пристапиле во осигурувањето на 01.07 така што на сите осигуреници пристапната старост е изразена во заокружен број години.

Ова е само еден пример како може да се постапи кога е во прашање пресметката на билансната математичка резерва. При ова треба да се води сметка билансната математичка резерва да не се пресмета на крајот на годината на осигурување туку на крајот на деловната година. Крајот на деловната година во практиката е најчесто 31 декември. Ако така се постави, тогаш изминатото траење во конкретниот пример ќе биде нецел број.

Во еден од изнесените методи за групна пресметка на математичката резерва (Fouret-овиот метод) е избегната појавата на нецели броеви кај пресметувањето на староста на осигурениците и изминатото траење, земена е како основа за пресметка на билансните резерви претпоставката дека сите осигуреници се родени на 01 јануари, како и почетокот на сите осигурувања дека е 01 јануари, додека пресметката на билансната резерва се врши на крајот на деловната година, кој се паѓа на 31 декември.

По Karup-овата метода, на пример, земено е изминатото траење во нецел број години. Кај анализата на Karup-овата метода за пресметка на билансната резерва даден е и приказ како треба да се пресметува резервата ако изминатото траење е нецел број.

Инаку, во пронаоѓањето на пристапната старост на осигуреникот и утврдувањето на изминатото траење во теоријата постојат опширни објаснувања и гледишта кои по избор можат да се применуваат, што повторно зависи од потребите и деловните прилики на самите осигурителни друштва.

Потребно е, исто така, да се спомене дека кај излагањето на групните методи за пресметка на математичката резерва е тргнато оттаму плаќањето на премијата да е годишно, како и дека осигураната сума за случај на смрт на осигуреникот во текот на траењето на осигурувањето се исплаќаат на крајот на годината на осигурувањето. На тој начин се пресметани и помошните (комутативни) броеви по таблицата на смртноста, како и сите други потребни елементи кои се користени за пресметка на резервите.

Ова е направено поради поедноставување на самото прикажување на поединечните (индивидуални) модели на групна пресметка на билансните математички резерви.

Избегнато е, поради тоа, сè она што ќе претставува детализирање и оддалечување од самиот модел на пресметка, со тоа што останатите старости да се изнесат дополнително само како објаснување на излагањето за групните модели.

Доколку во практиката на пресметковно-техничката основа на едно осигурително друштво за основа за пресметување на математичката резерва е земено под годишното плаќање на премиите, како и рамномерното плаќање на осигурените суми во случај на смрт на осигуреникот, тогаш некои елементи во формулата за групна пресметка по изнесените модели ќе се прилагоди на претпоставката на поедините модели, така што одговарачките елементи, кои се применуваат во формулата за резервата, ќе се прилагодат на начинот на плаќање на премијата и начинот на исплатата на осигурените суми. Ова може да се изведе на тој начин што веќе пресметаните комутативни броеви, кои се пресметани на основа на таблицата на смртноста и каматните стапки, ќе се пресметаат така што во себе да ги содржат факторите за исподгодишно вкаматување, или, пак, комутативните броеви пресметани врз основа на годишното вкаматување ќе се пресметаат во однос на исподгодишниот каматен фактор.

Ова, исто така, е едно посебно поглавје на математиката на осигурувањето во кое нема детално да се впуштиме поради тоа што за тоа ќе стане збор во излагањето за групните модели на пресметка на математичките резерви во нашата практика.

3.3. Пресметување на премиската резерва во интервали

Досега станувaше збор за моделите кои можат да се применуваат кај групната пресметка на билансната математичка резерва.

Секоја од изнесените модели по своите карактеристики направена е така да може да се усвои за пресметка на билансните математички резерви за секоја деловна година. Исклучок прават апроксимативните методи: Lidston-овиот и „t" моделот, кај кои е потребно повремено да се проверуваат, со оглед на тоа дека тие ја даваат само приближната вредност на резервата, изградени на основа на просечната старост на осигуреникот. Повремената контрола на пресметаните резерви е потребна, исто така, како што е нагласено и кај Fouret, затоа што кај тој модел математичката резерва се пресметува на основа на минатогодишната резерва (рекурентна формула), со што се овозможува лесно да се направи грешка, која понатаму се провлекува во наредната година. Кај овие методи, значи, потребно е повремено да се врши контрола на извршените пресметки на резрвите и корекција со помош на индивидуалниот метод.

Со други зборови, доколку во практиката се усвои било кој од приближните модели за да се олесни и забрза пресметката на билансната математичка резерва, ќе биде потребно повремено, во одредени интервали, да се изврши контрола на добиените резерви, односно да се изврши точна пресметка на резервите за да се извршат корекции и порамнувања од евентуалните отстапувања кои се предизвикани од претходните приближни модели на групна пресметка.

Математичката резерва, според тоа, во однапред утврдени интервали ќе се врши по една од точните методи, додека во меѓувреме за нејзина пресметка ќе се користи некоја од приближните методи.

Во современата практика приближната пресметка на резервата обично се врши секои две, три или четири години, а по тој период се пристапува кон точната пресметка со помош на која се израмнуваат и отстрануваат сите отстапувања настанати во претходниот период, кога се вршела приближната пресметка на резервите.

Покрај наведените приближни модели, во практиката постојат уште и низа други со помош на кои работата на билансните математички резерви може да се упрости и да се убрза. За нив не стана збор во ова излагање затоа што се само групи апроксимации, без доволна научна подлога.

Овие апроксимации можат да дадат задоволителни резултати (кои сепак ни во кој било случај не се точни вредности) само доколку структурата на портфолиото на осигурувањето на живот во едно осигурително друштво е такво што нема голема разлика помеѓу осигураните суми, тарифите, траењето на осигурувањето и останатите елементи кои се од пресудно значење за утврдување на висината на резервата. Доколку е, значи, портфолиото на осигурувањето на живот покомпактно, дотолку ќе може да се уважи приближното пресметување на вредноста на математичката резерва на крајот на деловната година.

Во наведените услови ќе биде, исто така, потребно покрај портфолиото, кое во текот на годината не претрпело големи отстапувања на пресметуваните предвидувања од остварените резултати во поглед на калкулираната смртност, поставените каматни стапки, вкалкулираните трошоци на работењето и останато што би можело да влијае на висината на резервите.

Сé на сé, само доколку портфолиото на осигурувањето на живот би било толку идеално создадено и неговото движење би одело точно според поставените предвидувања во пресметковно техничката основа, би можело да се усвои дека математичката резерва на крајот на деловната година ќе се пронаоѓа на некој приближен начин, под услов во однапред утврдените интервали (секоја трета, четврта итн. година) да се пресметува точно по принципите на математиката на осигурување на живот.

Како еден од приближните начини за пресметување на билансната математичка резерва на крајот на деловната година може да се прифати математичката резерва да се утврди во еден процент од осигурената сума. Овој однос може да се утврди на основа на статистичките податоци во врска со движењето на односот помеѓу математичката резерва и осигурената сума во претходните години. Доколку движењето на портфолиото е рамномерно од година во година, како и под услов математичката резерва во претходните години да се движи рамномерно во однос на осигураната сума, тогаш овој начин на пресметување на резервата ќе може да задоволи две три години по ред, по што ќе мора да се изврши точна пресметка на резервите.

Ако повторно врз основа на статистичките податоци за движењето на портфолиото, како и односот на наплатените премии и зголемувањето на математичката резерва, може да се утврди дека во претходните години стапката на пораст на математичката резерва покажувала извесна законитост во однос на наплатената премија, тогаш може да се усвои математичката резерва да се пронаоѓа на тој начин, со што математичката резерва од претходната година ќе се зголеми за еден однапред утврден процент од наплатната премија. Доколку движењето на портфолиото е рамномерно од година во година и под услов да нема некои забележителни разлики помеѓу поедините осигурувања во поглед на тарифите, траењето и слично, тогаш овој начин на приближно пронаоѓање на математичката резерва може да задоволи. Во спротивно, ќе се добие само еден грубо проценет износ на математичката резерва, кој тешко ќе може да се користи за билансни потреби.

Исто така, може да се усвои дека точна пресметка на математичката резерва се врши во определени интервали, на пример, секоја трета или четврта година, а во меѓувреме за секои две или три години последователно математичката резерва да се пресмета така што на математичката резерва пресметана од претходната година да се додаде целата разлика помеѓу приходите и расходите како дотација за математичата резерва за тековната година.

Како приходи овде би биле опфатени: математичката резерва од претходната година, наплатената премија, постигнатата камата од пласманот на средствата на математичката резерва и вложената премија. Како расходи би биле опфатени: настанатите обврски во тековната година (по смртта, доживувањето и откупот) трошоците на работењето и други евентуални издатоци.

Сите наведени начини на приближно групно оценување на вредноста на математичката резерва се само мерки кои во практиката само се преземаат во неможност со точниот математички пат во одредениот рок да се дојде до точната вредност на математичката резерва. Во тие услови се смета за доволно ако точниот износ на математичката резрва добиен на основа на математиката на осигурувањето на живот се пресмета во одредени интервали, па така вредностите за резервата кои се добиени по приближниот пат да се користат како задоволувачки.

За полесно да се разбере пресметувањето на математичките резерви во одредени интервали, ќе се земе за пример едно осигурување со осигурена сума од100.000 денари, со договорено траење од 10 години, пристапна старост од 37 години, по тарифа на мешовитото осигурување. На основа на таблицата на смртноста, по каматна стапка од 5% се пронаоѓа дека нето годишната премија за ова осигурување е 7.943 денари. Со разгледување на движењето на смртноста во текот на траењето на осигурувањето може да се заклучи дека на покритие на настанатите смртни случаи во текот на траењето просечно ќе отпаѓаат околу 5% од нето премијата секоја година. Тоа значи дека за покритие на идните обврски (доживување на договорениот рок односно, обезбдување за случај смрт во подоцните години) ќе остане 95% од премијата, па тој износ треба да се издвои на име на математичка резерва во секоја тековна година, во времето кога ќе се пресметува математичката резерва. Тој износ заедно со постигнатата камата треба приближно да одговара на математичката резерва добиена со примена на точниот индивидуален метод на пресметување. Во табеларниот преглед бр.11 е даден споредбен преглед на математичката резерва пресметана по точниот индивидуален модел и математичката резерва работена по приближниот метод, која е погоре објаснета. Како што се гледа, разликите се минимални и можат да се занемарат., Меѓутоа, тоа вреди и може да се користи само кога претходно на основа на статистичките податоци за движењето на портфолиото може да се заклучи дека неговото движење е рамномерно и дека ја задржува потребната законитост. Во спротивно нема корист од ваквиот начин на приближно пресметување на резервата.

Табела 11

СПОРЕДБЕН ПРЕГЛЕД НА ПРЕСМЕТКА НА МАТЕМАТИЧКАТА РЕЗЕРВА
По индивидуалниот модел и по приближниот модел на одредени интервали (во % од наплатената премија)
Нето премија = 7943,00

Изминато траење во години	По индивидуалниот модел	По приближниот модел (% од нето премијата)
1	7,768	7,928
2	15,944	16,255
3	24,555	24,991
4	33,634	34,171
5	43,211	43,805
6	53,323	53,922
7	64,010	64,565
8	75,317	75,704
9	87,294	87,414
10	100,000	99,713

Во понатамошниот текст ќе се обидеме математичката резерва да ја изразиме во функција од резервата на крајот од првата година и просечното зголемување изразено во промили од осигурената сума. Ќе земеме, на пример, едно мешовито осигурување на лице старо x години со траење од n години.

Со примена на равенката:

$$ {}_tV_x = A_{x+t,n-t} - P_{x,\overline{n|}} \cdot a_{x+t,\overline{n-t|}} $$

ќе добиеме:

$$
\begin{aligned}
1 \cdot V_x &= p_1 \\
2 \cdot V_x &= p_2 \\
3 \cdot V_x &= p_3 \\
t \cdot V_x &= p_t \\
&................ \\
n \cdot V_x &= p_n
\end{aligned}
$$

каде p_1, p_2, p_3,... p_t,... p_n,... претставуваат премиски резерви на разгледуваното осигурување во промили од осигураната сума.

Со разгледување на членовите од низата: $1 \cdot V_x$, $2 \cdot V_x$,... $t \cdot V_x$,... $n \cdot V_x$ во правоаголен координатен систем се забележува дека развојната тенденција на пресметаните резерви може да се претстави со права линија што значи дека зголемувањата на вредностите $1 \cdot V_x$, $2 \cdot V_x$,... $n \cdot V_x$ во последователни временски единици е скоро еднаква.

Ако го обележиме со $\Delta' V_i$ првото зголемување на разгледуваната низа ќе биде:

$$ \Delta' V_i = (i+1) \cdot V_x - {}_iV_x, \quad (\mathrm{i} = 1, 2, 3, ..., \mathrm{n} - 1) $$

Тогаш аритметичката средина на збирот на разликите се обележува со V ќе биде:

$$ V_s = \frac{\Delta' V_1 + \Delta' V_2 + ... + \Delta' V_{n-1}}{n-1} $$

или

$$ V_s = \frac{(2V_x - 1V_x) + (3V_x - 2V_x) + ... + ({}_nV_x - (n-1) \cdot V_x)}{n-1} = \frac{nV_x - 1V_x}{n-1} $$

што може да се напише во обликот:

$$ V_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta' V_i}{n-1} \qquad \text{..(1)} $$

Големината V_s најсоодветно го изразува просечниот пораст на резервите во промили. Тоа , всушност, е средната вредност на промените на математичката резерва.

Средното зголемување на резервите може да се пресмета со помош на равенката:

$$V_s = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{p_i - p_k}{i-k}}{\binom{n}{2}}, i > k \text{ ....(2)}$$

Меѓутоа, за наши потреби, равенката (6.1) дава задоволителни резултати. По пресметаниот елемент V_s математичката резерва разгледувана кај мешовитото осигурување во моментот t ќе биде:

$$1 \cdot V_x = 1 \cdot V_x + (t-1) \cdot V_s; (t = 1,2,...,n) \text{ ....(3)}$$

Равенката (6.3) е општа и важи за кој било вид осигурување без оглед на начинот на плаќање на премијата.

Со анализа на равенката (6.3) може да се заклучи дека $t \cdot V_x$, za $t < \frac{n}{2}$, поголеми од калкулираните резерви. За $t > \frac{n}{2}$, $t \cdot V_x$ сè повеќе се приближува до калкулираните резерви да за t = n, nV_x би се изедначила со капиталот.

Иако изнесениот начин на пресметка е повеќе апроксимативен, што покажува претходната дискусија, тој, сепак, има практично значење. Таков начин на пресметување е економски оправдан посебно затоа што се издвојува од ризико-премијата дел за покривање на резервите, се вкаматува и на тој начин се зголемуваат средствата.

Пресметката на резервите на напред покажаниот начин му овозможува на осигурувачот да може да ја зголеми премиската резерва на товар на ризико-премијата кај која и онака во практиката се јавува вишок поради разликата на вистинскиот и калкулативниот морталитет.

За група на истоврсни осигурувања премиската резерва би била:

$$\sum S_t V_x = 1 \cdot V_x \cdot \sum S + (t-1) \cdot V_s \cdot \sum S \text{ ....(4)}$$

Равенката (6.4) е општа и служи за групна пресметка на математичката резерва без оглед на тоа по кој метод или систем е пресметувана.

Да би можело без пресметување на средната стапка да се добие премиската резерва за секој вид осигурување и секоја почетна старост за единица осигурена сума, исто како кај амортизацијата на долгорочните заеми, премиската резерва може да се добие со множење на добиениот промил за секоја година на сите осигуреници и сите категории на осигурувања.

Равенките (6.1) и (6.2) даваат математички приближни решенија, но економски секако оправдано како што покажа претходната дискусија.

Овде ќе покажеме дека идејата за која станува збор не само економски туку и математички е сосема точна и како таква претставува новина во пресметката на премиските резерви како во интервали така и во пресметката, без оглед на видот на осигурувањето и начинот на плаќањето на премиите со помош на интервали.

Да го докажеме нашето тврдење ќе тргнеме од кое било осигурување и кој било начин на плаќање на премијата на лице старо х години кое се осигурало во траење од н години.

Нека $1 \cdot V_x$, $2 \cdot V_x$, $3 \cdot V_x ,\ldots$ $t \cdot V_x ,\ldots$ $n \cdot V_x$ се премиски резерви на осигураните лица на крајот на првата, втората, итн... н-тата година, тогаш ќе биде:

$$2 \cdot V_x - 1 \cdot V_x = \Delta_1$$
$$3 \cdot V_x - 2 \cdot V_x = \Delta_2$$
$$4 \cdot V_x - 3 \cdot V_x = \Delta_3$$

$$t \cdot V_x - (t-1) \cdot V_x = \Delta t - 1$$
$$n \cdot V_x - (n-1) \cdot V_x = \Delta n - 1$$

Со собирање на левата и десната страна добиваме:

$$n \cdot V_x - 1 \cdot V_x = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \ldots + \Delta n - 1$$

Затоа што десната страна од оваа равенка е геометриска прогресија од n – 1 членови, ќе биде:

$$n \cdot V_x - 1 \cdot V_x = \frac{\Delta_1 (r^{n-1} - 1)}{r - 1}$$

односно:

$$n \cdot V_x - 1 \cdot V_x = \frac{(2V_{x-1} \cdot V_x)(r^{n-1} - 1)}{r - 1}$$

Од каде е:

$$n \cdot V_x = 1V_x + \Delta_t \frac{(r^{n-1} - 1)}{r - 1}$$

или за n = t:

$$tV_x = 1V_x + \Delta_1 \frac{r^{t-1} - 1}{r - 1}$$

Како е

$$r = 1 + \frac{p}{100} = I_p^1$$

Каматната стапка по која се работени таблиците на смртноста, тоа е:

$$tV_x = 1V_x + \Delta_1 \frac{I_p^{t-1} - 1}{I_p^1 - 1}$$

или

$$tV_x = 1V_x + \frac{100 \cdot \Delta_t}{p} \cdot (I_p^{t-1} - 1) \qquad (5)$$

Со помош на равенката (6.5) можеме сосема точно да ја пронајдеме вредноста на премијата во кој било кој момент на пресметката t. Нејзина предност е, секако, во тоа што на основа на 1 и 2 функционално се поврзани за формата на осигурувањето.

Видовме дека равенката 5 е општа. Ќе се обидеме со помош на неа да ја одредиме премиската резерва $t + kV_x$, $k = t + k - t$. Нека е:

$$t + 1V_x - tV_x = \Delta t$$

$$t + 2V_x - t + 1V_x = \Delta t + 1$$

$$t + 3V_x - t + 2V_x = \Delta t + 2$$

$$t + kV_x - t + k - 1V_x = \Delta t + k - 1$$

што по собирањето на левата и десната страна дава:

$$t + kV_x - tV_x = \Delta t \frac{r^k - 1}{r - 1}$$

Од каде е:

$$t + kV_x = tV_x + \Delta t \frac{I_p^k - 1}{I_p^1 - 1}$$

или

$$t + kV_x = tV_x + \frac{100 \cdot \Delta t}{p} \cdot (I_p^k - 1)$$

односно:

$$t + kV_x = tV_x + \frac{100}{p} \cdot \Delta_1 I_p^{t-1} (I_p^k - 1)$$

што значи дека со помош на која било премиска резерва и која било разлика може точно да се пресмета премиската резерва на денот t+k-тата пресметка на одреденото осигурување само да е $t + k \leq n$.

Поради прецизноста, практичноста и економичноста на изведената формула се препорачува на секое осигурително друштво.

Премиската резерва за група на истоврсни осигурувања во моментот t ќе биде:

$$\sum S_t V_x = \left[{}_1V_x + \frac{100 \cdot \Delta_1}{p} (I_{p-1}^{t-1}) \right] \cdot \sum S$$

односно

$$\sum S_{t+k} V_x = \left[{}_tV_x + \frac{100}{p} \cdot \Delta_t I_{p-1}^{t-1} (I_p^k - 1) \right] \cdot \sum S$$

3.4. Модели за групно пресметување по бруто системот

Во претходниот дел ја пресметувавме математичката резерва со нето премии. Не треба да се изгуби од вид тоа дека групните методи можат да се применат и кај другите начини на плаќање на премиите. Овде ќе го примениме Altenburger-овиот модел со резервните премии за пресметка на математичката резерва.

Најпрвин го земаме доживотното осигурување со темпорерна годишна резервна премија P’ и да претпоставиме дека плаќањето на премијата трае x + n години старост на осигуреникот. Тогаш резервата ќе биде:

1. за поединечното осигурување:

$$S \cdot A_{x+t} - P' \cdot \left(a_{x+t} - \frac{N_{x+n}}{D_{x+t}} \right) \quad \text{..........}(1)$$

а за цела група на осигуреници стари x + t години во моментот на пресметката:

$$A_{x+t} \cdot (S) - a_{x+t} \cdot (P') + \frac{1}{D_{x+t}} \cdot (P' \cdot N_{x+t}) \quad \text{..........}(2)$$

каде (S) е збир на сите осигурени капитали P’ нивна резервна премија.

2. за некое темпорерно осигурување за случај смрт кое истекува за старост x + n во моментот на пресметката x + t, математичката резерва ќе биде:

$$S \cdot \left(A_{x+t} - \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} \cdot A_{x+n} \right) - P' \cdot \left(a_{x+t} - \frac{N_{x+n}}{D_{x+t}} \right)$$

или

$$S \cdot A_{x+t} - P' \cdot a_{x+t} - \frac{1}{D_{x+t}} \cdot \left(S \cdot M_{x+n} - P' \cdot N_{x+n}\right) \text{..}(3)$$

а за друга група на осигуреници стари x + t години

$$A_{x+t} \cdot (S) - a_{x+t} \cdot (P') - \frac{1}{D_{x+t}} \cdot \sum \left(S \cdot M_{x+n} - P' \cdot N_{x+n}\right)$$

3. За мешовитото осигурување каде x + n е староста кога треба да се извшат исплатите за случај доживување, а x + t староста на осигуреникот во моментот на пресметката на резервите тогаш математичката резерва по осигуреник ќе биде:

$$S \cdot \left(A_{x+t} - \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} \cdot A_{x+n} + \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}}\right) - P' \cdot \left(a_{x+t} - \frac{N_{x+n}}{D_{x+t}}\right)$$

или

$$S \cdot A_{x+t} - P' \cdot a_{x+t} - \frac{1}{D_{x+t}} \cdot \left(S \cdot D_{x+n} \cdot \left(1 - A_{x+n}\right) + P' \cdot N_{x+n}\right)$$

односно, поради:

$$A_{x+n} = 1 - d \cdot \frac{N_{x+n}}{D_{x+n}}$$

и

$$D_{x+n} \cdot \left(1 - A_{x+n}\right) = d \cdot N_{x+n}$$

премиската резерва станува:

$$S \cdot A_{x+t} - P' \cdot a_{x+t} + \frac{1}{D_{x+t}} \cdot \left(S \cdot d + P'\right) \cdot N_{x+n} \text{..}(4)$$

а за група осигуреници стари x + t години во моментот на пресметката:

$$A_{x+t} \cdot (S) - a_{x+t} \cdot (P') - \frac{1}{D_{x+t}} \cdot \sum \left(S \cdot d + P'\right) \cdot N_{x+n} \text{..}(5)$$

каде (S) и (P’) го имаат напред истакнатото значење.

Структурата на формулата бр.5 за математичката резерва со нето премија е слична на структурата на формулата на математичката резерва пресметана со резервна премија. И овде треба полисите да се групираат по елементот x + t и поради тоа изразите: A_{x+t}, a_{x+t} и $\frac{1}{D_{x+t}}$ кои се функција на доживеаната старост x + t, ќе се помножат респективно со збирот на големините (S), (P’) и збирот на Altenburger-овиот коефициент кои можат да бидат пресметани на почетокот на осигурувањето.

На сличен начин би се покажало дека со помош на останатите модели, кои беа предмет на нашето истражување, математичката резерва може да се пресмета со бруто премиите. Доволно е да се заменат нето премиите со бруто премии.

Воопшто, принципот секогаш е ист, било да се работи за чист нето модел или за некој друг начин на пресметување на премиската резерва, само треба да се води сметка за идејата на која е засновано групното пресметување на математичката резерва, така што наведените равенки да ја содржат осигураната сума и премијата за голем број истоврсни осигурувања со исти заеднички фактори.

4. Избор на оптимален модел за групно пресметување на билансните математички резерви

Изборот на модел за групно пресметување на билансните математички резерви зависи во прв ред од причината која се сака да се постигне во текот на пресметката. Ако причината е вредноста на математичките резерви, добиена со помош на една од групните методи, да биде во потполност точна и да одговара на вредноста, добиена на основа на индивидуалниот модел на пресметка, да одговори и на другите барања, на пример, што помал број операции на пресметување, што попрост начин на работење.

Како што видовме, бројот на операции за пресметување е прилично поедноставен и намален кај моделите кои во формулата за пресметување на резервите го внесуваат помошниот број „К", а тоа се моделите на Altenburger и Whiting. Константата К, утврдена еднаш за секогаш, кај секое осигурување поединечно, навистина ја упростува работата околу обработката на останатите податоци за пресметување на математичката резерва, сведувајќи го бројот на операции на минимум. Ако овие две методи меѓусебно се споредат, всушност, се утврдува дека коефициентот К кај Whiting е изведен од коефициентот кај Altenburger. Со понатамошно споредување може, исто така, да се утврди дека за практиката, и секако зависно и од видот на осигурување, сепак методот на Altenburger е поедноставен, односно поедноставно и побрзо доаѓа до константата К.

Поради тоа што овие два модели даваат одлични резултати, без отстапување од точната вредност на резервата, како препорака за најсоодветен модел се смета методот на Altenburger.

Со ова не сака да се каже дека останатите точни групни модели немаат своја вредност како што ги има Altenburger–овиот. Само факт е дека освен давањето точни резултати, овој модел овозможува упростување на работата до максимум и сведување на бројот на пресметковни операции на најмал можен број, што кај останатите модели не е случај, иако и сите тие по своите карактеристики даваат видни олеснувања и ја забрзуваат работата околу изработката на резервите.

Ако, пак, ги разгледуваме моделите кои даваат приближни вредности за математичката резерва (Lidston-овата и „t" методата), тие ќе дадат потполно задоволувачки резултати само во случај ако репрезентативните старости во портфолиото точно се изнајдат. Овде работата е сосема поедноставена затоа што се пресметува само за една старост на сите осигуреници и доколку на осигурителното друштво му е важно да добие само приближна вредност на билансните математички резерви, со заштеда на време и труд, тогаш ќе може да избере една од овие две методи.

Тие се, всушност, многу слични меѓу себе, односно самиот „t" модел е изведен од Lidston-овиот модел, па затоа по свој избор може да се избере еден од нив.

Кај приближните модели на игра, како што е кажано, најважна улога има изборот на староста на осигуреникот. Овде е важно да се каже уште и тоа дека, посебно кај осигурувањето со временско траење, секако, осигурителното друштво сака за покритие на своите обврски да обезбеди што повеќе средства. Ако користењето на приближните групни модели за пресметка на резервата има цел приближно да ја пресмета математичката резерва и да даде што попозитивни резултати, тогаш треба староста на осигуреникот да се процени таа да биде нешто под просечната репрезентативна старост поради поголема математичка резерва. За помладите лица математичката резерва е поголема, па со одбирање на ниска просечна старост се постигнува поголема вредност за математичките резерви.

Што се однесува до останатите модели на групна пресметка на резервите, кои даваат приближни резултати, сите тие се само еден групен начин, кога веќе нема можност за точна пресметка, да се дојде барем до некои ориентациони вредности. Кај таквите начини на пресметка на резервите задолжително мора да се води сметка за тоа во одредени интервали да се изврши и точна пресметка како отстапувањата, кои биле во пораните години кај приближните модели на пресметка на резервите, може да се корегираат.

На крај треба да се нагласи и тоа дека при изборот на моделите за групна пресметка на резервите треба да се има на ум дека целта на обработката на податоците, исто така, има и аналитички цели. Со математичкиот биланс на едно осигурително друштво не мала улога играат и табеларните прегледи кои го покажуваат прегледот на движењето на портфолиото на осигурувањето на живот, неговиот прираст во текот на деловната година, опаѓањето, причините за опаѓање, како и сè друго од што може да се види дишењето на едно портфолио, неговата стабилност и структура. Поради ова, обично при одбирање на групен модел се води сметка тој да биде таков што во себе ќе ги содржи податоците потребни за статистичка обработка на портфолиото. Од тие причини повторно е пожелно да се одбере некој модел кој тоа го овозможува, но со што помал обем на работа, така што во тој поглед може да се каже дека најсоодветен е Altenburger-овиот модел, иако овде често се користи и Karup-овиот модел, кој во својата формула ги содржи истите елементи како и индивидуалниот модел, така што за групната пресметка се користи без какви било промени, што е една од нејзините значајни карактеристики.

4.1. Економско оправдување за групна пресметка на математичката резерва

По својата улога во осигурувањето на живот и по важноста која ја има математичката резерва претставува една од основните ставки во математичкиот биланс на осигурувањето на живот, па и воопшто во билансот на едно осигурително друштво.

Од тие причини самото пресметување на математичките резерви треба да биде така средено и направено да дава што е можно поточни резултати и преглед на состојбата на сегашната вредност на идните обврски на осигурителните друштва, искажана во вредноста на математичките резерви.

Индивидуалниот начин на пресметка на билансните математичките резерви во едно осигурително друштво, па дури ако тоа е младо и со мал број осигурувања, претставува скоро неизводлива работа затоа што постои рок во кој треба да се пресмета резервата, а кој е обично веднаш по завршувањето на деловната година, каде што поради краткото време осигурителното друштво мора да прибегне кон поедноставување на работата околу изработката на резервата. При ова важна улога има изборот на модели со помош на кои ќе може, со заштеда на време и работна сила, да ја пресмета математичката резерва така што да даде што подобри резултати. Со што помал обем на работа бројот на пресметковни операции треба да се сведе на еден дозволен минимум, а со тоа да не трпи точноста на добиените податоци за вредноста на резервите.

4.2. Економско значење на премиските резерви

Иако кај нас не се посветува особено внимание на економската улога на премиските резерви, неопходно е покрај техничката улога да се истакне и економското значење на премиските резерви како за осигурениците и осигурувачите, така и за целокупното наше општество.

Имајќи го предвид фактот дека математичката резерва е фонд – сопственост на осигурениците создаден од примените премии со цел на осигурителот заедно со очекуваните премии да му овозможи извршување на своите обврски, лесно е да се воочи една од најзначаните функции на математичката резерва изразена во подигањето на животниот стандард како на осигуреникот така и на неговото семејство.

Како работата на осигурувњето на живот по својата природа е долгорочна, така се и средствата на математичката резерва долгорочни, што за заедницата е од големо значење затоа што и овозможува да ги користи овие средства за долгорочни инвестиции.

Гледано низ призмата на парите – мобилизаторската улога на математичката резерва претставува елемент, како на стабилизацијата така и на насочувањето на заедницата. Ова е поради долгорочноста на осигурувањето на живот и карактерот на ова осигурување како организатор на колективното штедење. Математичката резерва е резултат на штедење од посебен вид, осигурителни колективни штедења кои се разликуваат од обичното штедење, првенствено индивидуално чија намена може слободно да се менува. Тоа покажува дека штедењето кај банките не е единствена маса на средства, туку е функција на штедните барања. Меѓутоа, осигурителното штедење кое се јавува под влијание на статистичките законитости, во чија природа единствено е колективното штедење, поради тоа и математичката резерва единствено е разбирлива како колективна резерва. Нејзината намена е однапред дефинирана и не може произволно да се менува. Според тоа, средствата на математичката резерва сочинуваат единствена и наменска маса на средства за разлика од износот на штедните влогови кај банките. Средствата на математичките резерви се долгорочни и овозможуваат долгорочни пласмани во инвестирањето. Долгогодишната тенденција покажува дека во споредба со банките уделот на математичките резерви во вкупните средствапополека расте во прилог на осигурителната институција.

Исто така, гледано низ призмата на колективното и индивидуалното одложување на потрошувачката, неоспорна е улогата на математичките резерви и воопшто – на осигурувањето на живот. Познато е дека секое штедење, било да е индивидуално или колективно, влијае на одложувањето на потрошувачката во корист на инвестициите. Осигурениците кои се осигурани или за случај смрт со доживотно траење или по мешовито осигурување за износот на математичката резерва се одрекуваат од непосредната потрошувачка и таа ја одложуваат до времето на доспевање на осигураната сума. Меѓутоа, кај осигурувањето за случај смрт со ограничено траење како и кај осигурувањето на случај доживување, дури е и неизвесно за поедини осигуреници дали воопшто ќе дојде до потрошувачка, затоа што не се знае кога и дали осигурениот случај ќе се случи.

И во останатите видови осигурувања постои одложување на потрошувачката. Секако, со одложувањето на потрошувачката се ослободуваат парични средства со цел вложување во стопанството, што е од посебно значење за нејзино унапредување. Во тие услови на стопанисување во стопанството од една страна се припремени добра и услуги кои одговараат и од друга страна во потрошувачкиот дел на народниот доход примени се парични средства за набавка на овие добра и услуги, што значи дека осигурувањето врши усогласување во стопанството на куповниот и фондот на залихи.

IV. МАТРИЧНО ДЕФИНИРАЊЕ НА АКТУАРСКИТЕ ОСНОВИ НА ЖИВОТНОТО ОСИГУРУВАЊЕ

4.1. МАТРИЧНО ДЕФИНИРАЊЕ НА КОМУТАТИВНИТЕ БРОЕВИ

Комутативниот број N_x ќе го дефинираме како производ помеѓу векторот ред – V и векторот колона – L, при што компонентите на векторот ред се вредностите на дисконтниот фактор - $v^i \ \left(i = x, x+1, ..., w\right)$, а компонентите на векторот колона е бројот на живите лица - $l_i \ \left(i = x, x+1, ..., w\right)$.

$$N_x = V \cdot L = \begin{bmatrix} v^x & v^{x+1} & v^{x+2} & \dots & v^w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_x \\ l_{x+1} \\ l_{x+2} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ l_w \end{bmatrix}$$

$$N_x = \left[v^x l_x + v^{x+1} l_{x+1} + v^{x+2} l_{x+2} + \dots + v^w l_w\right]$$

Ако векторот ред – V го замениме со тријангуларната матрица - V_T (дијагонална и квадратна матрица), каде што елементите само од едната страна од главната дијагонала се еднакви на нула, а од другата страна се различни од нула.

$$V_T = \begin{bmatrix} v^x & v^{x+1} & v^{x+2} & .. & .. & .. & v^w \\ 0 & v^{x+1} & v^{x+2} & .. & . & .. & v^w \\ 0 & 0 & v^{x+2} & .. & .. & .. & v^w \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & .. & .. & .. & v^w \end{bmatrix}$$

Ако со N го означиме векторот колона, при што компонентите на векторот се соодветните комутативни броеви- $N_i(i = x, x+1,..., w)$, во тој случај елементите на векторот N ќе ги пресметаме со примена на следната матрична равенка:

$$N = \begin{bmatrix} N_x \\ N_{x+1} \\ N_{x+2} \\ ... \\ ... \\ ... \\ N_w \end{bmatrix} = V_T \cdot L = \begin{bmatrix} v^x & v^{x+1} & v^{x+2} & .. & .. & .. & v^w \\ 0 & v^{x+1} & v^{x+2} & .. & .. & .. & v^w \\ 0 & 0 & v^{x+2} & .. & .. & .. & v^w \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & .. & .. & .. & v^w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_x \\ l_{x+1} \\ l_{x+1} \\ ... \\ ... \\ ... \\ l_w \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} v^{x+1} & + & v^{x+1}l_{x+1} & + & v^{x+2}l_{x+2} & + & ... & + & v^w l_w \\ 0 & & v^{x+1}l_{x=1} & + & v^{x+2}l_{x+2} & + & ... & + & v^w l_w \\ 0 & & 0 & & v^{x+2}l_{x+2} & + & ... & + & v^w l_w \\ ... & & ... & & ... & & ... & & ... \\ ... & & ... & & ... & & ... & & ... \\ ... & & ... & & ... & & ... & & ... \\ ... & & ... & & ... & & ... & & ... \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & v^w l_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_x \\ N_{x+1} \\ N_{x+2} \\ ... \\ ... \\ ... \\ N_w \end{bmatrix}$$

Елементите на матрицата S ќе ги добиеме со множење на матриците H и N:

$$S = H \cdot N$$

Каде:

- Компонентите на матрицата S се комутативните броеви $S_i\,(i = x, x+1, \ldots, w)$;
- Матрицата H е триангуларна, т.е. елементите лево од главната дијагонала се нули а десно се еднакви на еден;

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & .. & .. & .. & 1 \\ 0 & 1 & 1 & .. & .. & .. & 1 \\ 0 & 0 & 1 & .. & .. & .. & 1 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & .. & .. & .. & 1 \end{bmatrix}$$

$$S = H \cdot N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & .. & .. & .. & 1 \\ 0 & 1 & 1 & .. & .. & .. & 1 \\ 0 & 0 & 1 & .. & .. & .. & 1 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & .. & .. & .. & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_x \\ N_{x+1} \\ N_{x+2} \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ N_w \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} N_x & + & N_{x+1} & + & N_{x+2} & + & \ldots & + & N_w \\ 0 & & N_{x+1} & + & N_{x+2} & + & \ldots & + & N_w \\ 0 & & 0 & & N_{x+2} & + & \ldots & + & N_w \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & N_w \end{bmatrix}$$

Елементите на матрицата D, т.е. комутативните вредности – дисконтираниот број на живи лица од x – тата година, па до граничната старост $D_i (i = x, x+1, ..., w)$ ќе ги пресметаме со одземање на матрицата N^{i+1} од матрицата $N^i (i = x, x+1, ..., w)$.

$$D = N^i - N^{i+1} = \begin{bmatrix} N_x \\ N_{x+1} \\ N_{x+2} \\ ... \\ ... \\ ... \\ N_w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_{x+1} \\ N_{x+2} \\ N_{x+3} \\ ... \\ ... \\ ... \\ N_{w+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x \\ D_{x+1} \\ D_{x+2} \\ ... \\ ... \\ ... \\ D_w \end{bmatrix}$$

Компонентите на матрицата M, чии елементи се комутативните броеви $M_i (i = x, x+1, ..., w)$, ќе ги пресметаме со примена на следната матрична равенка:

$$M = \begin{bmatrix} M_x \\ M_{x+1} \\ M_{x+2} \\ ... \\ ... \\ ... \\ M_w \end{bmatrix} = V_T^{i+1}(L^i - L^{i+1})$$

$$M = \begin{bmatrix} v^{x+1} & v^{x+2} & v^{x+3} & .. & .. & .. & v^w \\ 0 & v^{x+2} & v^{x+3} & .. & .. & .. & v^w \\ 0 & 0 & v^{x+3} & .. & .. & .. & v^w \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & .. & .. & .. & v^w \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} l_x \\ l_{x+1} \\ l_{x+2} \\ .. \\ .. \\ .. \\ l_w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_{x+1} \\ l_{x+2} \\ l_{x+3} \\ .. \\ .. \\ .. \\ l_{w+1} \end{bmatrix} \right)$$

$$M = \begin{bmatrix} v^{x+1}(l_x - l_{x+1}) & + & v^{x+2}(l_{x+1} - l_{x+2}) & + & .. & .. & .. & .. & + & v^w(l_w - l_{w+1}) \\ 0 & & v^{x+2}(l_{x+1} - l_{x+2}) & + & .. & .. & .. & .. & + & v^w(l_w - l_{w+1}) \\ .. & & .. & & .. & .. & .. & .. & & .. \\ .. & & .. & & .. & .. & .. & .. & & .. \\ .. & & .. & & .. & .. & .. & .. & & .. \\ .. & & .. & & .. & .. & .. & .. & & .. \\ 0 & & 0 & & .. & .. & .. & .. & & v^w(l_w - l_{w+1}) \end{bmatrix}$$

Матрицата M може да ја пресметаме и врз основа на следната матрична равенка

$$M = N^i v - N^{i+1} \qquad \text{за} \qquad (i = x, x+1, ..., w)$$

каде v е скаларна величина – дисконтен фактор $\left(v = \dfrac{100}{100+p}\right)$.

$$M = \begin{bmatrix} M_x \\ M_{x+1} \\ M_{x+2} \\ ... \\ ... \\ ... \\ M_w \end{bmatrix} = N^i v - N^{i+1} = \begin{bmatrix} N_x \\ N_{x+1} \\ N_{x+2} \\ ... \\ ... \\ ... \\ N_w \end{bmatrix} v - \begin{bmatrix} N_{x+1} \\ N_{x+2} \\ N_{x+3} \\ ... \\ ... \\ ... \\ N_{w+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_x v - N_{x+1} \\ N_{x+1} v - N_{x+2} \\ N_{x+2} v - N_{x+3} \\ ... \\ ... \\ ... \\ N_w v - N_{w+1} \end{bmatrix}$$

Елементите на матрицата C, т.е. комутативните вредности – дисконтираниот број на умрени лица од x-тата година, па до граничната старост $C_i \quad (i = x, x+1, ..., w)$, ќе ги пресметаме со одземање на матрицата M^{i+1} од матрицата $M^i \quad (i = x, x+1, ..., w)$.

$$C = M^{i} - M^{i+1} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_{x+1} \\ M_{x+2} \\ .. \\ .. \\ .. \\ M_w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{x+1} \\ M_{x+2} \\ M_{x+3} \\ .. \\ .. \\ .. \\ M_{w+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_x - M_{x+1} \\ M_{x+1} - M_{x+2} \\ M_{x+2} - M_{x+3} \\ .. \\ .. \\ .. \\ M_w - M_{w+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x \\ C_{x+1} \\ C_{x+2} \\ .. \\ .. \\ .. \\ C_w \end{bmatrix}$$

Матрицата R, т.е. векторот-колона чии компоненти се комутативните броеви $S_i\,(i = x, x+1, ..., w)$, ќе ја пресметаме со множење на матрицата H со матрицата M:

$$R = \begin{bmatrix} R_x \\ R_{x+1} \\ R_{x+2} \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ R_w \end{bmatrix} = H \cdot M$$

$$R = \begin{bmatrix} R_x \\ R_{x+1} \\ R_{x+2} \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ R_w \end{bmatrix} = H \cdot M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & .. & .. & .. & 1 \\ 0 & 1 & 1 & .. & .. & .. & 1 \\ 0 & 0 & 1 & .. & .. & .. & 1 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & .. & .. & .. & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_x \\ M_{x+1} \\ M_{x+2} \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ M_w \end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix} M_x & + & M_{x+1} & + & M_{x+2} & + & \dots & + & M_w \\ 0 & & M_{x+1} & + & M_{x+2} & + & \dots & + & M_w \\ 0 & & 0 & & M_{x+2} & + & \dots & + & M_w \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & M_w \end{bmatrix}$$

2. ЕДНОКРАТНА И ГОДИШНА ВЕРОЈАТНА СЕГАШНА ВРЕДНОСТ ЗА ПООДЕЛНИТЕ ВИДОВИ ЖИВОТНА РЕНТА

2.1. НЕПОСРЕДНА ДОЖИВОТНА ЛИЧНА РЕНТА

Ако ја земеме равенката за непосредна доживотна антиципативна годишна рента:

$$a_x D_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \dots\dots\dots$$

знаеме дека

$$D_x = N_x - N_{x+1} \qquad D_{x+1} = N_{x+1} - N_{x+2} \qquad D_{x+2} = N_{x+2} - N_{x+3} \text{ итн.}$$

од тука следува:

$$a_x D_x = \left(N_x - N_{x+1}\right) + \left(N_{x+1} - N_{x+2}\right) + \left(N_{x+2} - N_{x+3}\right) + \left(N_{x+3} - N_{x+4}\right) + \dots\dots\dots$$

ако замениме со матрици:

$$a_x D_x = \left(\begin{bmatrix} N_x \\ N_{x+1} \\ N_{x+2} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_{x+1} \\ N_{x+2} \\ N_{x+3} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix} \right) + \left(\begin{bmatrix} N_{x+1} \\ N_{x+2} \\ N_{x+3} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_{x+2} \\ N_{x+3} \\ N_{x+4} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix} \right) + \left(\begin{bmatrix} N_{x+2} \\ N_{x+3} \\ N_{x+4} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_{x+3} \\ N_{x+4} \\ N_{x+5} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix} \right) + \dots\dots\dots$$

$$a_x D_x = \begin{bmatrix} N_x \\ N_{x+1} \\ N_{x+2} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix}$$

$$a_x = \begin{bmatrix} N_x \\ N_{x+1} \\ N_{x+2} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_x \\ D_{x+1} \\ D_{x+2} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ D_w \end{bmatrix}^{-1} = \frac{N_x}{D_x}$$

2.2. ОДЛОЖЕНА ДОЖИВОТНА ЛИЧНА РЕНТА

Ако ја земеме равенката за одложена доживотна антиципативна годишна рента:

$$ {}_{k/}a_x D_x = D_{x+k} + D_{x+k+1} + D_{x+k+2} + \ldots. $$

знаеме дека

$$ D_{x+k} = N_{x+k} - N_{x+k+1} $$

$$ D_{x+k+1} = N_{x+k+1} - N_{x+k+2} $$

$$ D_{x+k+2} = N_{x+k+2} - N_{x+k+3} \text{ итн.} $$

оттука следува:

$$ {}_{k/}a_x D_x = \left(N_{x+k} - N_{x+k+1}\right) + \left(N_{x+k+1} - N_{x+k+2}\right) + \left(N_{x+k+2} - N_{x+k+3}\right) + \left(N_{x+k+3} - N_{x+k+4}\right) + \ldots\ldots\ldots $$

ако замениме со матрици:

$$ {}_{k/}a_x D_x = \left(\begin{bmatrix} N_{x+k} \\ N_{x+k+1} \\ N_{x+k+2} \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ N_w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_{x+k+1} \\ N_{x+k+2} \\ N_{x+k+3} \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ N_w \end{bmatrix} \right) + \left(\begin{bmatrix} N_{x+k+1} \\ N_{x+k+2} \\ N_{x+k+3} \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ N_w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_{x+k+2} \\ N_{x+k+3} \\ N_{x+k+4} \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ N_w \end{bmatrix} \right) + \left(\begin{bmatrix} N_{x+k+2} \\ N_{x+k+3} \\ N_{x+k+4} \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ N_w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_{x+k+3} \\ N_{x+k+4} \\ N_{x+k+5} \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ N_w \end{bmatrix} \right) + \ldots\ldots\ldots $$

$$
{}_{k/}a_x D_x = \begin{bmatrix} N_{x+k} \\ N_{x+k+1} \\ N_{x+k+2} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix}
$$

$$
{}_{k/}a_x = \begin{bmatrix} N_{x+k} \\ N_{x+k+1} \\ N_{x+k+2} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_x \\ D_{x+1} \\ D_{x+2} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ D_w \end{bmatrix}^{-1} = \frac{N_{x+k}}{D_x}
$$

2.3. НЕПОСРЕДНА ПРИВРЕМЕНА (ТЕМПОРЕРНА) ЛИЧНА РЕНТА

Ако јаземеме равенката за непосредна привремена (теморерна) антиципативна годишна рента:

$$
{}_{/n}\mathrm{a}_{\mathrm{x}}\mathrm{D}_{\mathrm{x}} = \mathrm{D}_{\mathrm{x}} + \mathrm{D}_{\mathrm{x+1}} + \mathrm{D}_{\mathrm{x+2}} + \mathrm{D}_{\mathrm{x+3}} + \dots \mathrm{D}_{\mathrm{x+n\text{-}1}}
$$

$$
{}_{/n}a_x D_x = \left(\begin{bmatrix} N_x \\ N_{x+1} \\ N_{x+2} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_{x+1} \\ N_{x+2} \\ N_{x+3} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix} \right) + \left(\begin{bmatrix} N_{x+1} \\ N_{x+2} \\ N_{x+3} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_{x+2} \\ N_{x+3} \\ N_{x+4} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix} \right) + \dots + \left(\begin{bmatrix} N_{x+n-1} \\ N_{x+n} \\ N_{x+n+1} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_{x+n} \\ N_{x+n+1} \\ N_{x+n+2} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix} \right)
$$

Бидејќи: $\mathrm{D_x} + \mathrm{D_{x+1}} + \mathrm{D_{x+2}} + \mathrm{D_{x+3}} + ... = N_{\mathrm{x}}$ и

$$\left(\begin{bmatrix} N_x \\ N_{x+1} \\ N_{x+2} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_{x+1} \\ N_{x+2} \\ N_{x+3} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix}\right) + \left(\begin{bmatrix} N_{x+1} \\ N_{x+2} \\ N_{x+3} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_{x+2} \\ N_{x+3} \\ N_{x+4} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix}\right) + \left(\begin{bmatrix} N_{x+2} \\ N_{x+3} \\ N_{x+4} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_{x+3} \\ N_{x+4} \\ N_{x+5} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix}\right) + \dots = \begin{bmatrix} N_x \\ N_{x+1} \\ N_{x+2} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix} = N_x$$

$$\mathrm{D_{x+n}} + \mathrm{D_{x+n+1}} + \mathrm{D_{x+n+2}} + ... = \mathrm{N_{x+n}}$$

$$\left(\begin{bmatrix} N_{x+n} \\ N_{x+n+1} \\ N_{x+n+2} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_{x+n+1} \\ N_{x+n+2} \\ N_{x+n+3} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix}\right) + \left(\begin{bmatrix} N_{x+n+1} \\ N_{x+n+2} \\ N_{x+n+3} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_{x+n+2} \\ N_{x+n+3} \\ N_{x+n+4} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix}\right) + \left(\begin{bmatrix} N_{x+n+2} \\ N_{x+n+3} \\ N_{x+n+4} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_{x+n+3} \\ N_{x+n+4} \\ N_{x+n+5} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix}\right) + \dots = \begin{bmatrix} N_{x+n} \\ N_{x+n+1} \\ N_{x+n+2} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix} = N_{x+n}$$

по извршената замена добиваме

$$_{/\mathrm{n}}\mathrm{a_x D_x} = N_x - N_{x+n}$$

$$
{}_{/n}a_x D_x = \begin{bmatrix} N_x \\ N_{x+1} \\ N_{x+2} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_{x+n} \\ N_{x+n+1} \\ N_{x+n+2} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix}
$$

$$
{}_{/n}\mathrm{a}_{\mathrm{x}} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}
$$

$$
{}_{/n}a_x D_x = \left(\begin{bmatrix} N_x \\ N_{x+1} \\ N_{x+2} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_{x+n} \\ N_{x+n+1} \\ N_{x+n+2} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} D_x \\ D_{x+1} \\ D_{x+2} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ D_w \end{bmatrix}^{-1}
$$

2.4. ОДЛОЖЕНА ПРИВРЕМЕНА ЛИЧНА РЕНТА

Ако ја земеме равенката за непосредна привремена (темпоререрна) антиципативна годишна рента:

$$ {}_{k/n}\mathrm{a}_x \cdot D_x = D_{x+k} + D_{x+k+1} + D_{x+k+2} + ... + D_{x+k+n-2} + D_{x+k+n-1} $$

Ако од десната страна на равенката едновремено ги додаваме и одземеме сите наредни комутативни броеви, ќе ја добиеме следнава формула:

$$ {}_{k/n}\mathrm{a}_x \cdot D_x = D_{x+k} + D_{x+k+1} + ... + D_{x+k+n-1} + (D_{x+k+n} + D_{x+k+n+1} + ...) - (D_{x+k+n} + D_{x+k+n+1} + ...) $$

$$ {}_{k/n}\mathrm{a}_x \cdot D_x = D_{x+k} + D_{x+k+1} + ... + D_{x+k+n-1} + D_{x+k+n} + D_{x+k+n+1} + ... - D_{x+k+n} - D_{x+k+n+1} - ... $$

Со оглед дека:

$$ N_{x+k} = D_{x+k} + D_{x+k+1} + D_{x+k+2} + ... + D_w $$

$$ N_{x+k} = \left(\begin{bmatrix} N_{x+\kappa} \\ N_{x+\kappa+1} \\ N_{x+\kappa+2} \\ ... \\ ... \\ ... \\ N_w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_{x+\kappa+1} \\ N_{x+\kappa+2} \\ N_{x+\kappa+3} \\ ... \\ ... \\ ... \\ N_w \end{bmatrix} \right) + \left(\begin{bmatrix} N_{x+k+1} \\ N_{x+k+2} \\ N_{x+k+3} \\ ... \\ ... \\ ... \\ N_w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_{x+k+2} \\ N_{x+k+3} \\ N_{x+k+4} \\ ... \\ ... \\ ... \\ N_w \end{bmatrix} \right) + \left(\begin{bmatrix} N_{x+k+2} \\ N_{x+k+3} \\ N_{x+k+4} \\ ... \\ ... \\ ... \\ N_w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_{x+k+3} \\ N_{x+k+4} \\ N_{x+k+5} \\ ... \\ ... \\ ... \\ N_w \end{bmatrix} \right) + ... $$

$$ N_{x+k+n} = D_{x+k+n} + D_{x+k+n+1} + D_{x+k+n+2} + ... + D_{w,} $$

$$N_{x+k+n}=\left(\begin{bmatrix} N_{x+\kappa+n} \\ N_{x+\kappa+n+1} \\ N_{x+\kappa+n+2} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} N_{x+\kappa+n+1} \\ N_{x+\kappa+n+2} \\ N_{x+\kappa+n+3} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix}\right)+\left(\begin{bmatrix} N_{x+k+n+1} \\ N_{x+k+n+2} \\ N_{x+k+n+3} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} N_{x+k+n+2} \\ N_{x+k+n+3} \\ N_{x+k+n+4} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix}\right)+\left(\begin{bmatrix} N_{x+k+n+2} \\ N_{x+k+n+3} \\ N_{x+k+n+4} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} N_{x+k+n+3} \\ N_{x+k+n+4} \\ N_{x+k+n+5} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix}\right)+\dots$$

По замена на равенката добиваме

$${}_{k/n}a_x=\left(\begin{bmatrix} N_{x+\kappa} \\ N_{x+\kappa+1} \\ N_{x+\kappa+2} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} N_{x+\kappa+n} \\ N_{x+\kappa+n+1} \\ N_{x+\kappa+n+2} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_w \end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix} D_{x+\kappa} \\ D_{x+1} \\ D_{x+2} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ D_w \end{bmatrix}^{-1}$$

$${}_{\mathrm{k/n}}\mathbf{a}_{\mathrm{x}}=\frac{N_{x+k}-N_{x+k+n}}{D_x}$$

3. ГОДИШНА И ИСПОДГОДИШНА НЕТО И БРУТО ПРЕМИЈА ЗА ОСИГУРУВАЊЕ НА КАПИТАЛ

3.1. ОСИГУРУВАЊЕ НА КАПИТАЛ ВО СЛУЧАЈ НА ДОЖИВУВАЊЕ

$${}_n\mathrm{E}_x$$

$$1\mathrm{P}^{\mathrm{v}}{}_{o}I_x \quad 2\mathrm{P}^{\mathrm{v}}{}_{1}I_x \quad 3\mathrm{P}^{\mathrm{v}}{}_{2}I_x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad n\mathrm{P}^{\mathrm{v}}{}_{n-1}I_x$$

$$\mathrm{x} \quad \mathrm{x}+1 \quad \mathrm{x}+2 \quad \mathrm{x}+3 \ldots\ldots\ldots\ldots \mathrm{x}+n-1 \quad \mathrm{x}+\mathrm{n}$$

$$\mathrm{P}^{\mathrm{v}}{}_{0}E_x \quad \mathrm{P}^{\mathrm{v}}{}_{1}E_x \quad \mathrm{P}^{\mathrm{v}}{}_{2}E_x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathrm{P}^{\mathrm{v}}{}_{p-1}E_x$$

$$\mathrm{P}^{\mathrm{v}}({}_0E_x+{}_1E_x+{}_2E_x+\ldots.+{}_{p-1}E_x) = \mathrm{P}^{\mathrm{v}}({}_0I_x+2{}_1I_x+3{}_2I_x+\ldots.+p{}_{p-1}I_x)+{}_nE_x$$

$$\mathrm{P}^{\mathrm{v}}\frac{N_x-N_{x+p}}{D_x} = \mathrm{P}^{\mathrm{v}}\frac{R_x-R_{x+p}-pM_{x+p}}{D_x}+\frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$\mathrm{P}^{\mathrm{v}}{}_{\mathrm{p}}\mathrm{a}_{\mathrm{x}} = \mathrm{P}^{\mathrm{v}}{}_{p}A^{+}{}_{x}+{}_nE_x$$

$$\mathrm{P}^{\mathrm{v}}({}_{\mathrm{p}}\mathrm{a}_{\mathrm{x}}-{}_pA^{+}{}_x)={}_nE_x$$

$$\mathrm{P}^{\mathrm{v}}\frac{{}_nE_x}{{}_{\mathrm{p}}\mathrm{a}_x-{}_pA_x^{p}} = \frac{D_{x+n}}{N_x-N_{x+p}-R_x+R_{x+p}+pM_{x+p}} \quad \text{za } p=n$$

Во случј кога p < n

$$P^{v}({}_{0}E_{x}+{}_{1}E_{x}+....+{}_{p-1}E_{x}) = P^{v}({}_{0}I_{x}+2{}_{1}I_{x}+....+p\,{}_{p-1}I_{x}+p\,{}_{p}I_{x}+...+p\,{}_{n-1}I_{x})+{}_{n}E_{x}$$

$$P^{v}\,{}_{p}a_{x} = P^{v}({}_{p}A^{+}{}_{x}+p\,{}_{p/n-p}A_{x})+{}_{n}E_{x}$$

$$P^{v}({}_{p}a_{x}-p\,{}_{p/n-p}A_{x})={}_{n}E_{x}$$

$$P^{v} = \frac{{}_{n}E_{x}}{{}_{p}a_{x}-{}_{p}A_{x}^{+}-p\,{}_{p/n-p}A_{x})}$$

$$P^{v} = \frac{D_{x+n}}{N_{x}-N_{x+p}-R_{x}+R_{x+p}+pM_{x+p}-p(M_{x+p}-M_{x+n})}$$

3.2. ПРИВРЕМЕНО ОСИГУРУВАЊЕ НА КАПИТАЛ

$$\begin{array}{llllll}
 & & & & & {}_{p}P^{v}\,{}_{n}E_{x} \\
 & {}_{o}I_{x} & {}_{1}I_{x} & {}_{2}I_{x}\,.................. & {}_{n-2}I_{x} & {}_{n-1}I_{x} \\
\hline
x & x+1 & x+2 & x+3\,............... & x+n-1 & x+n
\end{array}$$

$$P^{v}\,{}_{0}E_{x}\quad P^{v}\,{}_{1}E_{x}\quad P^{v}\,{}_{2}E_{x}\,..........................\,P^{v}\,{}_{p-1}E_{x}$$

$$P^{v}({}_{0}E_{x}+{}_{1}E_{x}+{}_{2}E_{x}+....+{}_{p-1}E_{x}) =({}_{0}I_{x}+{}_{1}I_{x}+{}_{2}I_{x}+....+{}_{n-1}I_{x})+{}_{p}P^{v}\,{}_{n}E_{x}$$

$$\mathrm{P}^{\mathrm{v}}\frac{N_x-N_{x+p}}{D_x}=\frac{M_x-M_{x+n}}{D_x}\,{}_pP^{v}\frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$\mathrm{P}^{\mathrm{v}}\,{}_{\mathrm{p}}\mathrm{a}_{\mathrm{x}}-{}_pP^{v}\,{}_nE_x={}_nA_x$$

$$\mathrm{P}^{\mathrm{v}}({}_{\mathrm{p}}\mathrm{a}_{\mathrm{x}}-p\,{}_nE_x)={}_nA_x$$

$$\mathrm{P}^{\mathrm{v}}=\frac{{}_nA_x}{{}_{\mathrm{p}}\mathrm{a}_{\mathrm{x}}-p\,{}_nE_x}=\frac{M_x-M_{x+n}}{N_x-N_{x+p}-pD_{x+n}}$$

3.3. ОДЛОЖЕНО ОСИГУРУВАЊЕ НА КАПИТАЛ

$$1P^{v}\,{}_oI_x\quad 2P^{v}\,{}_1I_x\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad kP^{v}\,{}_{k-1}I_x\quad {}_kI_x\qquad {}_{k+1}I_x\ \ldots.$$

$$\mathrm{x}\quad \mathrm{x}+1\quad \mathrm{x}+2\quad \ldots\ldots\ \mathrm{x}+k-1\quad \mathrm{x}+\mathrm{k}\quad \mathrm{x}+\mathrm{k}+1\ \mathrm{x}+\mathrm{k}+2\ldots$$

$$\mathrm{P}^{\mathrm{v}}\,{}_0E_x\quad \mathrm{P}^{\mathrm{v}}\,{}_1E_x\quad \mathrm{P}^{\mathrm{v}}\,{}_2E_x\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \mathrm{P}^{\mathrm{v}}\,{}_{p-1}E_x$$

$$\mathrm{P}^{\mathrm{v}}({}_0E_x+{}_1E_x+{}_2E_x+\ldots.+{}_{p-1}E_x)=P^{v}({}_0I_x+2\,{}_1I_x+\ldots.+k\,{}_{k-1}I_x)+({}_kI_x+{}_{k+1}I_x+\ldots.)$$

$$\mathrm{P}^{\mathrm{v}}\frac{N_x-N_{x+p}}{D_x}=P^{v}\frac{R_x-R_{x+k}-kM_{x+k}}{D_x}+\frac{M_{x+k}}{D_x}$$

$$\mathrm{P}^{\mathrm{v}}\,{}_{\mathrm{p}}\mathrm{a}_{\mathrm{x}}=P^{v}\,{}_kA^{+}{}_x+{}_{k/}A_x$$

$$\mathrm{P}^{\mathrm{v}}({}_{\mathrm{p}}\mathrm{a}_{\mathrm{x}}-{}_kA^{+}{}_x)={}_{k/}A_x$$

$$\mathrm{P}^{\mathrm{v}}=\frac{{}_{k/}A_x}{{}_{\mathrm{p}}\mathrm{a}_{\mathrm{x}}-{}_kA^{+}{}_x}=\frac{M_{x+k}}{N_x-N_{x+p}-R_x+R_{x+k}+kM_{x+k}}$$

3.4. ОСИГУРУВАЊЕ НА КАПИТАЛ ВО СЛУЧАЈ НА ДОЖИВУВАЊЕ СО ВАРИЈАБИЛНА ГОДИШНА ПРЕМИЈА

$${}_nP^{+\nu}{}_n\mathrm{E}_x$$

$${}_oI_x \quad 2_1I_x \quad 3_1I_x \ldots\ldots\ldots\ldots \quad n_{n-1}I_x \ldots$$

$$\mathrm{x} \quad \mathrm{x}+1 \quad \mathrm{x}+2 \quad \mathrm{x}+3 \ldots\ldots\ldots \mathrm{x}+\mathrm{n}-1 \quad \mathrm{x}+\mathrm{n}$$

$$\mathrm{P}^{+\mathrm{v}}{}_0E_x \quad 2\mathrm{P}^{+\mathrm{v}}{}_1E_x \quad 3\mathrm{P}^{+\mathrm{v}}{}_2E_x \ldots\ldots\ldots\ldots \mathrm{p}\mathrm{P}^{+\mathrm{v}}{}_{p-1}E_x$$

$$\mathrm{P}^{+\mathrm{v}}({}_0E_x+2_1E_x+3_2E_x+\ldots+p_{p-1}E_x)={}_0I_x+2_1I_x+3_2I_x\ldots+n_{n-1}I_x+nP^{+\nu}+{}_nE_x$$

$$\mathrm{P}^{+\mathrm{v}}\frac{S_x-S_{x+p}-pN_{x+p}}{D_x}=\frac{R_x-R_{x+n}-nM_{x+n}}{D_x}+nP^{+\nu}\frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$\mathrm{P}^{+\mathrm{v}}{}_\mathrm{p}\mathrm{a}^+{}_\mathrm{x}={}_nA_x{}^{+}+{}_nP^{+\nu}{}_nE_x$$

$$\mathrm{P}^{+\mathrm{v}}{}_\mathrm{p}\mathrm{a}^+{}_\mathrm{x}-nP^{+\nu}{}_nE_x={}_pA^+{}_x$$

$$\mathrm{P}^{+\mathrm{v}}({}_\mathrm{p}\mathrm{a}^+{}_\mathrm{x}-n_nE_x)={}_pA^+{}_x$$

$$\mathrm{P}^{+\mathrm{v}}=\frac{{}_nA^+{}_x}{{}_\mathrm{p}\mathrm{a}^+{}_\mathrm{x}-n_nE_x}=\frac{R_x-R_{x+n}-nM_{x+n}}{S_x-S_{x+p}-pN_{x+p}-nD_{x+n}}$$

4. РЕНТНИ ОСИГУРУВАЊА И ОСИГУРУВАЊЕ НА КАПИТАЛ ЗА ДВЕ ЛИЦА

4.1. КОМБИНИРАНИ МОДЕЛИ ЗА ЗАЕДНИЧКА ЖИВОТНА РЕНТА

Лицето А старо x години и лицето В старо y години се осигурени така што, додека и двете се живи, да примаат рента од 1 денар на почетокот на годината. Колкава е мизата за ова осигурување?

Ако со a_{xy} ја обележиме нето мизата за 1 денар осигурана рента. Осигурителната компанија ќе прими од $l_x l_y$ парови

$$l_x l_y a_{xy} \text{ денари.}$$

А ќе исплати:

на почетокот на првата година	$l_x l_y$ денари
на почетокот на втората година	$l_{x+1} l_{y+1}$ денари
на почетокот на третата година	$l_{x+2} l_{y+2}$ денари
......	.....
......	.....
......	.....

Со дисконитирање на исплатите на почетокот на осигурувањето и изедначување на нивниот збир со уплатите, имаме:

$$\frac{l_x l_y}{r^{\frac{x+y}{2}}} a_{xy} = \frac{l_x l_y}{r^{\frac{x+y}{2}}} + \frac{l_{x+1} l_{y+1}}{r^{\frac{x+y}{2}+1}} + \frac{l_{x+2} l_{y+2}}{r^{\frac{x+y}{2}+2}} + \dots$$

Од тука се добива:

$$D_{xy} a_{xy} = D_{xy} + D_{x+1,y+1} + D_{x+2,y+2} + \dots$$

Односно:

$$a_{xy} = \frac{N_{xy}}{D_{xy}}.$$

4.2. ОСИГУРУВАЊЕ НА КАПИТАЛ

4.2.1. Осигурување на капитал во случај на доживување

Кај осигурувањето на капитал во случај на доживување осигурениот капитал се исплаќа по n години во следните случаи:

а) ако тогаш двете личности бидат живи

б) ако е жива само едната личност, која било, а другата пред тоа умре

в) ако тогаш биде жива најмалку една личност од двете осигурани.

Овде ќе дадеме пример за случајот под а).

Лицето А старо x години и лицето В старо y години имаат осигурено исплата на 1 денар капитал ако по n години и двете се живи. Колкава е нето мизата за ова осигурување?

Нето мизата за ова осигурување се обележува со ${}_{|n}E_{xy}$.

Осигурителната компанија ќе прими од $l_x l_y$ парови

$$l_x l_y\,{}_{|n}E_{xy} \text{ денари.}$$

А по n години ќе исплати:

$$l_{x+n} l_{y+n} \text{ денари.}$$

Со изедначување на уплатите со збирот на дисконитираните исплати ќе добиеме:

$$\frac{l_x l_y}{r^{\frac{x+y}{2}}} \cdot {}_{|n}E_{xy} = \frac{l_{x+n} l_{y+n}}{r^{\frac{x+y}{2}+n}}$$

Односно:

$$D_{xy} \cdot {}_{|n}E_{xy} = D_{x+n,y+n}.$$

Одовде е:

$${}_{|n}E_{xy} = \frac{D_{x+n,y+n}}{D_{xy}}.$$

4.2.2. Осигурување на капитал во случај на недоживување со доживотно траење

Лицето А старо x години и лицето B старо y години имаат осигурано исплата на 1 денар капитал по смртта на едното лице на преживеаното лице. Осигурената сума се исплаќа на крајот на онаа година во која осигуреното лице починало. Колкава е нето мизата за ова осигурување?

Да ја обележиме нето мизата за 1 денар осигурен капитал со A_{xy}. Од $l_x l_y$ парови на крајот на првата година ќе преживеат $l_{x+1} l_{y+1}$ парови, што значи дека ќе бидат распарени парови

$$l_x l_y - l_{x+1} l_{y+1}.$$

За секој распарен пар осигурителната компанија ќе исплати по 1 денар.

Од $l_{x+1} l_{y+1}$ парови на почетокот на втората година ќе бидат $l_{x+2} l_{y+2}$ парови на крајот на истата година и повторно на крајот на втората година ќе бидат распарени парови.

$$l_{x+1} l_{y+1} - l_{x+2} l_{y+2}$$

За тој број на распарени парови осигурителната компанија ќе исплати по 1 денар.

На основа на принципот за еквиваленција на уплатите и дисконтираните исплати ќе добиеме:

$$\frac{l_x l_y}{r^{\frac{x+y}{2}}} \cdot A_{xy} = \frac{l_x l_y - l_{x+1} l_{y+1}}{r^{\frac{x+y}{2}+1}} + \frac{l_{x+1} l_{y+1} - l_{x+2} l_{y+2}}{r^{\frac{x+y}{2}+2}} + \dots$$

Односно:

$$D_{xy} \cdot A_{xy} = C_{xy} + C_{x+1,y+1} + C_{x+2,y+2} + \dots .$$

Значи нето мизата за ова осигурување е:

$$A_{xy} = \frac{M_{xy}}{D_{xy}}.$$

ЗАКЛУЧНИ СОГЛЕДУВАЊА

Иако во економијата, како што е впрочем и во сите општествени науки, законите делуваат како тенденција, значи низ бројни отстапувања и исклучоци, сепак таа се вбројува во доменот на најквантитативните општествени науки. Оттука, голем број економски проблеми, низ користење на адекватна математичко-статистичка апаратура, можат да се моделираат, односно квантитативно да се дефинираат. Овие карактеристики се посебно иманентни за процесот на осигурувањето бидејќи со примена на одредени методи и модели од теоријата на веројатноста, теоријата на игри, теоријата на ризикот, векторската и матричната алгебра, со голема извесност може да се предвиди износот на: премиските резерви, резервираните штети, маргините на солвентноста, максималната веројатна штета итн.

Девастацијата предизвикана од екстремното делување на природните сили и несреќни случаи понекогаш достигнува и такви размери што во одреден степен го забавува или оневозможува идниот развој на поделни региони или области. Поради тоа проблемите за обезбедување на економска заштита поради неповолното делување на природните сили и несреќни случаи го преокупирале вниманието на поединецот и општествената заедница уште многу одамна, при што, начините, формите и модалитетите на осигурителната заштита во основа биле детерминирани од степенот на развиеноста на националната економија. Денес кога човекот остварил значаен технички, економски и културен развој, едновремено станува сѐ повеќе зависен од општествените потреби, а во тој контекст и од потребата за обезбедување економска сигурност. За обезбедување на оптимална осигурителна заштита од екстремното делување на природните сили го принудиле човекот да пронаоѓа организациони форми за поуспешна заштита на национален и меѓународен план. Мошне коректна е констатацијата на еминентниот германски теоретичар на осигурувањето F. Dieter, дека "Осигурувањето е една од најфасцинантните економски категории. Тоа како многу други работи не постоело за да биде откриено, туку човечкиот дух го изнаоѓа како вештачка синтеза на голем број економски, правни, математички и други елементи". Современото осигурување има научна основа, функционира по правилата на економските, правните и техничките науки. Благодарение на својата научна заснованост модерното осигурување функционира на принципот на економското рационално работење, кое, пред сѐ, е изразено во обезбедувањето на непосредно и полно надополнување на штета. Тоа се постигнува со примена на научни методи, засновани на теоријата на веројатност, а пред сѐ, на законот на големите броеви, односно користење на математичко-статистички и стандардните актуарски методи.

Секој човек е изложен на опасности и ризици кои го загрозуваат неговиот живот, здравје, способност, приходи, и др. Во многу случаи тој не е во состојба самиот да ги предвиди и отстрани причините за овие настани. Тој може да смета на извесна помош од другите лица или заедницата, но тоа е несигурно, па затоа се формираат организации кои осигуруваат плаќање на одредена сума при настанувањето на штета. Во светот многу се распространети осигурителните компании за животно осигурување, кои имаат цел да му обезбедат на осигуреникот извесни приходи доколку се случи несакан настан поврзан со животот на човекот.

Актуарската математика, како научна дисциплина, со бројните методи и модели настојува да ја збогати техничката основа на осигурувањето, со цел да се создадат услови за развој и унапредување на осигурувањето за живот. Актуарската математика е тесно поврзана со финансиската математика, бидејќи и двете проблематики се засновани на вкаматувањето. Разликата е во тоа што финансиската математика не се базира на староста на лицето. Така, според финансиската математика, кога едно лице ќе се договори со банката извесен период да прима рента, тогаш и по неговата смрт рентата ќе се исплатува на неговите наследници. Од друга страна, според актуарската математика, приемот на рентата е поврзан со животот на лицето и со смртта на осигуреното лице се гасне и правото на прием на рента. Со други зборови, финансиската математика е безлична, додека актуарската математика е лична. Финансиската математика се применува главно во банкарското работење, а актуарската математика има примена кај друштвата за осигурување и слични организации.

За животното осигурување како мошне погодна форма за акумулирање на слободните парични средства, со едновремена заштита од девастацијата предизвикана поради екстремното делување на природните сили и случајни настани, посебно се значајни средствата на премиските резерви кои претставуваат ”вечен заем" и тие можат да се користат за долгорочно кредитирање на стопанството. Имајќи ги предвид односите помеѓу природната и просечната премија од една страна и односите помеѓу ризико-премијата и штедната премија од друга страна, се наметнува потребата од континуирано формирање на премиската (математичка) резерва. Респектирајќи го основниот принцип на еквивалентност помеѓу веројатните дисконтирани досегашни уплати и веројатните дисконтирани исплати, можат да се дефинираат индивидуалните методи за пресметување на премиските резерви (проспективниот, ретроспективниот и сметководствениот метод) за поделните видови рентни осигурувања и осигурувања на капитал за еден и повеќе осигуреници. Имајќи ги предвид осигурителните стандарди, актуарските начела и потребата за краток временски рок за целото портфолио на животно осигурување да се одреди износот на премиската (математичката) резерва, императивно се наметнува потребата од апликација на групните методи за пресметување на премиските резерви, како и моделите за апроксимативно пресметување на премиските резерви (Karup - овиот, Altenburger - овиот, Whiting - овиот, Fouret - овиот, Lidstone - овиот модел, t - моделот и моделот за пресметување на резервите во интервали.

Базичните постулати на векторската и матричната алгебра (карактеристиките на триангуларната матрица, Јакобиевата матрица, компатибилноста на матриците, идепотентната матрица, адјугованата и реципрочната матрица, карактеристичните броеви и карактеристичните вектори на матриците) создаваат услови основните комутативни броеви, во случај кога идното траење на живот е дискретна или континуелна алеаторна променлива, матрично да се моделираат. Потоа, врз основа на осигурителниот технички фактор во случај на недоживување, на сосема едноставен начин се дефинираат поеделните модели за пресметување на еднократната премија за: непосредна, одложена, привремена, одложена-привремена константна и варијабилна рента како и моделите за пресметување на еднократна премија за: одложено, темпорерно осигурување на варијабилен капитал, како и некои модалитетите на микс осигурување на капиталот.

Врз основа на принципот на еквивалентноста помеѓу вкупните веројатни дисконтирани идни уплати и вкупните веројатни дисконтирани идни исплати се дефинирани поеделните модели за пресметување на еднократната нето техничка премија за рентните осигурувања. Притоа треба да се прави дистинкција помеѓу временската рента и животната рента, бидејќи кај втората рента во пресметката треба да се инкорпорира и веројатноста за доживување на едно, две или повеќе лица. Осигурително-технички фактор во случај на доживување - ${}_{i}E_{x}$, ни овозможува на едноставен начин да ја пресметаме нето премијата за: непосредна, одложена, привремена, одложена - привремена константна и варијабилна животна рента, како и да ги дефинираме теоретските основи на исподгодишните и континуелните периодични примања. При споредба на износот на еднократната веројатна вредност на премијата за поеделните видови рентни осигурувања може да констатираме дека: еднократната веројатна вредност е најмала кога рентата се прима само еднаш во текот на годината; еднократната сегашна вредност е најголема во случај кога рентата се прима континуелно во текот на годината и вредноста на еднократната веројатна вредност е еднаква без оглед дали се работи за пренумерандна рента, во случај кога таа се прима во бескрајно мали интервали во текот на годината. Во случај кога идното траење на животот може да поприми која било вредност од одреден интервал, вредноста на еднократната премија за одделните видови на континуелна рента се пресметува со примена на определените интеграли (методи на трапезот).

Анекс

Табела 1

x	$\overline{D}_x$	$\overline{N}_x$	$\overline{C}_x$	$\overline{M}_x$
1	2	3	4	5
15	46.912,00	882.064,11	87,41	4.909,07
16	44.590,68	835.152,11	84,32	4.821,66
17	42.382,98	790.561,43	81,12	4.737,34
18	40.283,64	748.178,45	78,22	4.656,22
19	38.287,16	707.894,81	75,78	4.578,00
20	36.388,19	669.607,65	73,40	4.502,22
21	34.582,02	633.219,46	70,90	4.428,82
22	32.864,36	598.637,44	68,79	4.357,92
23	31.230,60	565.773,08	67,03	4.289,13
24	29.676,40	534.542,48	65,28	4.222,10
25	28.197,96	504.866,08	63,67	4.156,82
26	26.791,53	476.668,12	62,21	4.093,15
27	25.453,53	449.876,59	60,75	4.030,94
28	24.180,72	424.423,06	59,62	3.970,19
29	22.969,64	400.242,34	58,70	3.910,57
30	21.817,14	377.272,70	57,73	3.851,87
31	20.720,49	355.455,56	57,03	3.794,14
32	19.676,78	334.735,07	56,46	3.737,11
33	18.683,33	315.058,29	55,91	3.680,65
34	17.737,74	296.374,96	55,54	3.624,74
35	16.837,54	278.637,22	55,34	3.569,20
36	15.980,42	261.799,68	55,19	3.513,86
37	15.164,26	245.819,26	55,16	3.458,67
38	14.386,99	230.655,00	55,29	3.403,51
39	13.646,61	216.268,01	55,50	3.348,22
40	12.941,27	202.621,40	55,83	3.292,72
41	12.269,20	189.680,13	56,31	3.236,89
42	11.628,70	177.410,93	56,86	3.180,58
43	11.018,05	165.782,23	57,51	3.123,72
44	10.435,87	154.764,18	58,30	3.066,21
45	9.880,62	144.328,31	59,14	3.007,91
46	9.350,97	134.447,69	60,16	2.948,77

47	8.845,58	125.096,72	61,19	2.888,61
48	8.363,17	116.251,14	62,29	2.827,42
49	7.902,63	107.887,97	63,50	2.765,13
50	7.462,82	99.985,34	64,81	2.701,63
51	7.041,65	92.522,52	66,23	2.636,82
52	6.641,05	85.480,87	67,67	2.570,59
53	6.257,14	78.839,82	69,14	2.502,92
54	5.890,05	72.582,68	70,71	2.433,78
55	5.538,86	66.692,63	72,29	2.363,07
56	5.202,75	61.153,77	73,79	2.290,78
57	4.881,17	55.951,02	75,50	2.216,99
58	4.573,23	51.069,85	77,12	2.141,49
59	4.278,35	46.496,62	78,72	2.064,37
60	3.995,89	42.218,27	80,27	1.985,65
61	3.725,35	38.222,38	81,73	1.905,38
62	3.466,10	34.497,03	83,07	1.823,65
63	3.218,09	31.030,93	84,32	1.740,58
64	2.980,54	27.812,84	85,42	1.656,26
65	2.753,20	24.832,30	86,34	1.570,84
66	2.535,75	22.079,10	87,04	1.484,50
67	2.327,97	19.543,35	87,48	1.397,46
68	2.126,64	17.215,38	87,62	1.309,98
69	1.940,61	15.088,74	87,46	1.222,36
70	1.760,73	13.148,13	86,93	1.134,90
71	1.589,98	11.387,40	85,96	1.047,97
72	1.428,31	9.797,42	84,57	962,01
73	1.275,72	8.369,11	82,74	877,44
74	1.132,23	7.093,39	80,42	794,70
75	997,90	5.961,16	77,60	714,28
76	872,79	4.963,26	74,30	636,68
77	756,93	4.090,47	70,52	562,38
78	650,37	3.333,54	66,31	491,86
79	553,09	2.683,17	61,67	425,55
80	465,08	2.130,08	56,68	363,88
81	386,25	1.665,00	51,44	307,20
82	316,43	1.278,75	46,02	255,76
83	255,35	962,32	40,53	209,74

84	202,67	706,97	35,07	169,21
85	157,95	504,30	29,78	134,14
86	120,64	346,35	24,76	104,36
87	90,14	225,71	20,12	79,60
88	65,73	135,57	15,94	59,48
89	46,66	69,84	25,26	43,54
90	19,18	23,18	18,28	18,28

ЛИТЕРАТУРА

Andrejeva, J.M., Volkova, (1997), A. G. Izucenije prodolzitelnosti zizni, Statistika Moskva

Athearn James ., Travis Pritchett I JoanT.schmit., (1989), Risk and Insurance. 6 izd.St Paul,Minn.: West Publishing

Avdalovi} D-r Veselin, (2000), Menaxment rizikom u osigurawu, Belgrad

Axler, S., (1997), Linear Algebra Done Right, 2nd ed. New York: Springer-Verlag

Ayres, F., (1962), Jr. Theory and Problems of Matrices. New York: Schaum

Banchoff, T. and Wermer, J., (1992), Linear Algebra Through Geometry, 2nd ed. New York: Springer-Verlag.

Bader H., Frohlich S., (1980), Matematika za ekonomisti, Beograd

Bellman, R. E., (1970), Introduction to Matrix Analysis, 2nd ed. New York: McGraw-Hill

Beezer Robert A., (2011), A First Course in Linear Algebra, Department of Mathematics and Computer Science, University of Puget Sound, Version 2.30

BLAS. "BLAS (Basic Linear Algebra Subprograms)." http://www.netlib.org/blas/.

Bijeli} M., (1998), Osigurawe, Birotehnika, Zagreb

Black, K. SkipperIr, (1988), Life Insurance, Prentice-Hall Inc

Bowers, Gerber, Hickman, Jones, Nesbit, (1996), Acturial Mathematics-The society of Actuaries, Itasca Ilinois

Carlson, D.; Johnson, C. R.; Lay, D. C.; Porter, A. D.; Watkins, A. E.; and Watkins, W., (1997), (Eds.). Resources for Teaching Linear Algebra. Washington, DC: Math. Assoc. Amer.

Chiang, C. L., (1984), The Life Table and its Applications, ,R. E. Kreger, Florida, USA

Connell E. H., (2004), Elements of Abstract and Linear Algebra, University of Miami

Deacon S.R., R.L. Carter, (1996), Sucsess and Insurance (3rd edition), J Murray, London

Dickson G., (1986), Introduction to insurance, CII, Tuition Service, London

Faddeeva, V. N., (1958) Computational Methods of Linear Algebra. New York: Dover

Falin, A., Falin, A. I., (1994), Vedenije v aktuarnuju matematiku, MGU Lomonosov

Filipovic, Jirasek, (1957) Finansijska i aktuarska matematika, Zagreb

Filipovic, Jirasek, (1972) Finansijska i aktuarska matematika, Sarajevo

George Monti, (1995), A Practical Guide to Finite Risk Insurance and Reinsurance, Wiley

Gissel R., (1978), Mathematic of finance, New York

Gohman, V. S., (1998), Strahovanije zizni – teorija I praktika aktuarnih rascotov, Delo, Moskva

Golub, G. and Van Loan, C., (1996), Matrix Computations, 3rd ed. Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press.

Gordon C.A. I Dikson M., (1984), Introduction to insurance, The CII Tuition Service, Cambridge

Greene Mark R., James S Trieschman I Sandra G. Gustavson., (1995), Risk and Insurance, 8 Izd. Cincinnati: South- Western Publishing

Halmos, P. R., (1995), Linear Algebra Problem Book. Providence, RI: Math. Assoc. Amer.

Hansell A. S., (1999), Introduction to insurance (second edition), LLP, London

Harrington S., Niehaus G., (1999), Risk Management and insurance, Irwin/McGraw-Hill, Boston

Impogiarro J., (1985), Deterministic Aspects of Mathematical Demography, Springer, Hiedelberg

Isenbart F., Munzker H., (1987), Lebeusversicherunngsmathematik Fur Praxis und Studium, Gabler, Wiesbaden

Izvekov, (1937), Prakticno uputstvo za Izracunavanje premijske reserve kod osiguranja za odredzenim rokom isplate, Glasnik udruzenja aktuara

Јанев Драге, (2004), Осигурување и актуарска математика, Економски факултет, Скопје

Јанев Драге, (1997), Основи на актуарската анализа, Економски факултет , Скопје

Јанев Драге, (2010), Финансиска математика, Економски факултет ,Скопје

James B. Carrell, (July, 2005), carrell@math.ubc.ca

Kocovic J., (1999), Finansiska matematika, Ekonomski fakultet, Beograd

Kocovic J., Rakonjac-Antic T., (2000), Zbirka resenih zadataka iz finansijske I aktuarske matematike, Ekonomski fakultet, Beograd

Kocovic J., (1999), Osiguranje, Zavod za udzbenike I nastavna sredstva, Beograd

Kocovic Jelena, (2004), Aktuarske osnove formiranja tarifa u osiguranju lica, Beograd

Lang, S., (1997), Introduction to Linear Algebra, 2nd ed. New York: Springer-Verlag

LAPACK. "LAPACK--Linear Algebra PACKage." http://www.netlib.org/lapack/.

Lipschutz, S., (1991), Schaum's Outline of Theory and Problems of Linear Algebra, 2nd ed. New York: McGraw-Hill

Lumsdaine, J. and Siek, J. "The Matrix Template Library: Generic Components for High Performance Scientific Computing." http://www.lsc.nd.edu/research/mtl/.

Larsou, R., (1990), Lif insurance mathematics, San Francisco

Malisic J., (1992), Zbirka zadataka iz teorije verovatnoca sa primenama, Beograd

Marovic B., Mrkcic D., (1996), Osiguranje I reosiguranje, Finansing centar, Novi Sad

Marovic D-r Boris, (1997), Osiguranje, Finansing Centar, Novi Sad

Marcus, M. and Minc, H., (1988) Introduction to Linear Algebra. New York: Dover

Marcus, M. and Minc, H., (1992), A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities. New York: Dover

Marcus, M., (1993), Matrices and Matlab: A Tutorial. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall

Mirsky, L., (1990), An Introduction to Linear Algebra. New York: Dover

Muir, T., (1960), A Treatise on the Theory of Determinants. New York: Dover

McGill, D.M., (1967), Life insurance rev. ed. Homewood, Ili: Richard D. Irwin, Inc.

Mehr, R. I., (1987), Gustavson, S. G., Life insurance, Theory and Practice, Dallas, Business Publications, Inc.

Milosevic, V., (1999), Matematicka statistika, Ekonomski fakultet, Beograd

Мирчески Б., Трајкоски Д., (1981), Математика за економисти, Скопје

Mowbray A.H., R.H. Blanchard & C. Arthur Williams, (1969), Insurance, 6 Izd New York: McGrew – Hill

Nash, J. C., (1990), Compact Numerical Methods for Computers: Linear Algebra and Function Minimisation, 2nd ed. Bristol, England: Adam Hilger, 1990.

Outreville J. F., (1998), Theory and practice of insurance, Kluwer Academic Publicher Dordrecht

Panse Z., (1974), Vjerojatnost, informacija, stoahasticki procesi, Zagreb

Petranovic M., (1984), Osiguranje i reosiguranje, Informator, Zagreb

Petard, H., (1967), Problems in Linear Algebra, preliminary ed. New York: W.A. Benjamin

Ralevic M. Rajko, (1995), Finansijska i aktuarska matematika, Savremena Administracija, Beograd

Ralevic M. Rajko, (1997), Grupne metode obracuna premiske reserve, Beograd

Речкоски Н., (1997), Виша математика, Охрид

Речкоски Н., (1998), Веројатност, Охрид

Rejda, E. G., (1995), Principles of Risk Management and Insurance, Harper Collins Publichers

Saxer, W., (1979), Wericherungsmathematik I+II, Springer, Heidelberg

Sigma, Swis Re br. 3/1999, br.4, 1999, br. 1 I 2, 2000

Solomon F., (1987), Probability and stochastic processes, New Jersey

Sulejic P., (1998), Pravo osiguranja, DDOR Novi Sad

Strang, G., (1988), Linear Algebra and its Applications, 3rd ed. Philadelphia, PA: Saunders

Strang, G., (1993), Introduction to Linear Algebra. Wellesley, MA: Wellesley-Cambridge Press

Strang, G. and Borre, K., (1997), Linear Algebra, Geodesy, & GPS. Wellesley, MA: Wellesley-Cambridge Press

Tasic A., (1976), Osnove osiguranja (treto izdanje), Privredno-finansiski vodic, Beograd

Andjelic T. Matrice, (1990), Zavod za izdavanje udzbenika, Beograd

Valhner E., Vaughan T., (2000), Osnove osiguranja I upravljanje rizicima (prevod od Angliski) Mat, Zagreb

Veselinovic, (1946), Osnovi na osiguranja na zivot, Belgrad

Veselinovic V., (1952), Aktuarska matematika, Ekonomski fakultet

Vranic, (1963), Osnove finansiske I aktuarske matematike, Zagreb

Webb Bernard L., Howard N. Anderson, John A Cookman & Peter R. Kensicki., (1990), Principles of reinsurance, I i II, Malvern, Pa.: Insurance institute of America

Williams C. Arthur & Richard M. Heins, (1989), Risk Management and Insurance, 6 Izd, New York: McGraw-Hill

Williams C. A., Smith M. L., Young P. C., (1995), Risk Management and Insurance, McGraw-Hill, New York

Wolfsdort, K., (1996), Versichernugsmathematik, B. G. Teubner Stuttgart

Weisstein, E. W. "Books about Linear Algebra"
http://www.ericweisstein.com/encyclopedias/books/LinearAlgebra.html.
http://mathworld.wolfarm.com/LinearAlgebra.html

Zhang F., (1999), Matrix Theory: Basic Results and Techniques. New York: Springer-Verlag

www.read-books.info/money/lifeinsurancecodes.ohio.gof/orc/3903.72

legis.state.sd.us/statutes

delcode.dalaware.gof/title18

www.steadtische.co.at/fileadmin/gb2006/en/notes/accountingpolicies

www.gp.gov.bc.ca/statreg/reg/f/fininst/325_90.htm

www.life-line.org

www.actuary.org/pdf/life/universal_1204.pdf

en.wikipedia.org

www.vardarcroatia.com.mk
www.insurance.com.mk
www.tabakosiguruvanje.com.mk
www.qbe.com.mk
www.cro.mk
www.winner.com.mk
www.grawe.com.mk