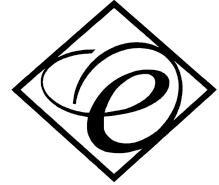




УНИВЕРЗИТЕТ „СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ“ - СКОПЈЕ

ФАКУЛТЕТ ЗА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА И
ИНФОРМАЦИСКИ ТЕХНОЛОГИИ



м-р Душко Ставров

**Анализа и управување на осцилаторно придушување
на спрегнати осцилаторни системи преку
временско-променливи функции на спрега**

-ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА-

Скопје, 2021

Ментор:

проф. д-р Стојче Десковски,

Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје, Факултет за електротехника и информациски технологии.

Членови на комисијата за одбрана на докторската дисертација:

- проф. д-р Миле Станковски, претседател,
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје, Факултет за електротехника и информациски технологии,
- проф. д-р Стојче Десковски, ментор,
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје, Факултет за електротехника и информациски технологии,
- проф. д-р Драган Антиќ, член,
Универзитет во Ниш, Електронски факултет,
- проф. д-р Христина Спасевска, член,
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје, Факултет за електротехника и информациски технологии,
- вон. проф. д-р Весна Ојлеска-Латкоска, член,
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје, Факултет за електротехника и информациски технологии.

Датум на одбрана:**Датум на промоција:****Научна област:** Електротехника и информациски технологии

Благодарност

Најпрво, би сакал да изразам огромна благодарност кон мојот ментор, проф. д-р Стојче Десковски кој со еден збор ја превзеде одговорноста да биде мој ментор и моја поддршка низ целиот процес на докторирање.

Посебна благодарност би сакал да изразам кон проф. д-р Миле Станковски, кој од самиот почеток на мојата кариера, на институтот за Автоматика и системско инженерство, игра клучна улога во мојот живот и кариерен развој, насочувајќи ме секогаш кон правиот пат, кој во одредни моменти јас од перспективата на моето гледање не сум можел да го видам. Му благодарам за неговото трпение и залагање во секоја етапа од процесот на моето докторирање.

Исто така, би сакал да изразам огромна благодарност кон вон. проф. д-р Томислав Станковски, со чија поддршка и насочување навлегов во светот на функциите на спрегнување и импликациите предизвикани од нив. Неговата постојана достапност за сите прашања и расположеноста за неброени дискусии, заедно со неговите совети, беа од есенцијално значење во постигнувањето на неопходниот квалитет на овој докторски труд. За сето ова и многу повеќе, бескрајно сум му благодарен.

Не можам а да не изразам огромна благодарност и кон доц. д-р Горјан Наџински, за неговото трпение, неговата помош и поддршка во секоја етапа од мојата кариерна еволуција. За сето ова и за многу други детали, за кои ќе треба да напишам роман ако почнам да ги наведувам, сум му благодарен.

Дополнително, би сакал да изразам благодарност кон вон. проф. д-р Весна Андова за нејзината несебична и постојана поддршка во секоја фаза од пишувањето на докторатот.

Искрено им се заблагодарувам и на останатите колеги од институтот за Автоматика и системско инженерство за нивната поддршка и совети во текот на моите докторски студии.

И конечно, најголема благодарност им должам на моето семејство, особено на мојот татко Љупчо, мојата мајка Роза, мојот брат Александар, мојата дада Душица и моите дедо и баба, Васил и Сијка, за нивната неизмерна и неисцрпна поддршка, љубов и емпатија низ целиот мој живот, но особено во макотрпниот процес на докторирање. Особено сум им благодарен затоа што секогаш веруваа во мене и во ниту еден момент не дозволија акумулираните негативни емоции од бројните препреки да надвладаат да тргнам по пат кој ќе ме оддалечи од мојата цел.

На крај, би сакал да се заблагодарам за поддршката од компанијата Росал ДС која го финансира целокупното мое образование.

Содржина

Листа на слики	iv
Листа на табели	ix
Акроними	x
Апстракт	11
Abstract	12
1 Вовед	13
2 Нелинеарни системи - анализа	20
2.1 Динамички системи: линеарни и нелинеарни сили	21
2.2 Нелинеарности и нивни математички импликации	24
2.2.1 Линеарни и нелинеарни системи	25
2.2.2 Принцип на суперпозиција	26
2.3 Ефекти од присуството на суштинска нелинеарност во моделот на динамичко поведење	28
2.4 Квалитативни карактеристики на нелинеарните системи	32
2.4.1 Модели на нелинеарни системи	33
2.4.2 Феноменолошки особини кај нелинеарните системи	36
2.4.3 Нелинеарни системи од втор ред	38
2.4.4 Квалитативно поведење во близина на рамнотежните положби	39
2.4.5 Типизација на рамнотежното поведење	39
2.4.6 Анализа на поведението на нелинеарниот систем непридушено нишало	42
2.4.7 Граничен круг	43
2.4.8 Теорема на Poincaré - Bendixon	45

2.4.9	Егзистенција на граничен круг во парадигмичните Stuart Landau и Van der Pol осцилатори	46
3	Бифуркации	50
3.1	Седло-јазел бифуркација	51
3.2	Вила бифуркација	53
3.3	Транскритична бифуркација	56
3.4	Хопфова бифуркација	57
4	Временско променливи функции на спрега	61
4.1	Концепт на функциите на спрега	63
4.1.1	Силина и насоченост на спрегата	64
4.1.2	Состојбени функции на спрега	65
5	Инференција на параметри на модел со позната структура	68
5.1	Имплементација на динамичкиот Баесов метод за инференција	70
5.1.1	Карактеризација на интеракциите	74
5.1.2	Детекција на синхронизација	75
5.1.3	Анализа на кардиореспираторната интеракција	76
6	Временско променливи функции на спрега: настапување на осцилаторно придрушување	82
6.1	Сфери на појава: синхронизација и придрушување на осцилации	83
6.1.1	Типизација на различните состојби при настапување на осцилаторно придрушување	84
6.2	Транзиција меѓу осцилаторна и неосцилаторна состојба како резултат на временско променливи функции на спрега	86
6.2.1	Настапување на осцилаторно придрушување во спрегнатиот систем од два спрегнати Van Der Pol осцилатори	87
6.2.2	Настапување на осцилаторно придрушување во спрегнатиот систем од два спрегнати Stuart Landau осцилатори	93
6.3	Режим на бесконечно многу нетривијални рамнотежни положби	98
7	Управување и одржување на непречен осцилаторен процес	108
7.1	Проектирање и имплементација на управувачки пристап за управување и одржување на непречен осцилаторен процес	109

8	Заклучок и насоки за идно истражување	116
---	---------------------------------------	-----

	Библиографија	119
--	---------------	-----

Листа на слики

2.1	На сликата (а) е даден приказ на линеарната сила (2.1), додека на сликата (б) е дадена функцијата на потенцијална енергија $V(x)$	22
2.2	На сликата (а) е даден приказ на нелинеарната сила (2.3), додека на сликата (б) е дадена функцијата на потенцијална енергија $V(r)$	23
2.3	На сликата (а) е даден приказ на нелинеарната сила (2.4), додека на сликата (б) е дадена функцијата на потенцијална енергија $V(x)$. Вредностите на k и α се усвоени 1 и -1, соодветно.	23
2.4	На сликата (а) е даден приказ на нишало кое изведува транслаторно движење. На сликата (б) е даден приказ на нишало кое изведува кружно движење.	29
2.5	На сликата (а) е даден приказ на прачка на чиј крај е закачен тег со маса M . На сликата (б) е дадена нелинеарната статичка карактеристика на виткање на прачката при различно оптоварување M	30
2.6	На оваа слика е даден приказ кој го опишува можното поведење на честица со функција на потенцијална енергија од четврти ред. Честицата со тек на време се наоѓа или во левиот или во десниот минимум на функцијата на потенцијална енергија, слика (а). На сликата (б), е опишана траекторијата на движење на честицата од еден енергетски минимум во друг.	31
2.7	Фазни портрети на различните типови на рамнотежно поведење.	41
2.8	Фазен портрет на непридушено нишало.	43
2.9	Различни видови на граничен круг гледано од аспект на нивната стабилност.	44
2.10	Приказ на граничните кругови кои се реализираат кај парадигмичните Stuart Landau и Van der Pol осцилатори, слики (а) и (б) соодветно. За почетни услови се усвоени $x(0) = 0.1, 3, y(0) = 0$	49

3.1	Фазни портрети на системот при промена на параметарот μ кај седло-јазел бифуркацијата.	52
3.2	Бифуркационен дијаграм кај седло-јазел бифуркацијата. Стрелките потенцираат дали станува збор за стабилна (стрелките се насочени едни кон други) или нестабилна рамнотежна положба (стрелките се насочени во спротивни насоки).	52
3.3	На сликите (а) и (б) се дадени фазните портрети на системот при различни вредности μ , додека на сликата (в) е даден бифуркациониот дијаграм на системот кај суперкритичната вила бифуркација.	54
3.4	На сликите (а) и (б) се дадени фазните портрети на системот при различни вредности μ , додека на сликата (в) е даден бифуркациониот дијаграм на системот кај субкритичната вила бифуркација.	55
3.5	Фазни портрети на системот при промена на параметарот μ кај транскритичната бифуркација.	56
3.6	Бифуркационен дијаграм кај транскритичната бифуркација.	57
3.7	Фазни портрети на системот при промена на параметарот μ кај суперкритичната хопфова бифуркација.	58
3.8	Бифуркационен дијаграм кај суперкритичната хопфова бифуркација.	58
3.9	Фазни портрети на системот при промена на параметарот μ кај субкритичната хопфова бифуркација.	59
3.10	Бифуркационен дијаграм кај субкритичната хопфова бифуркација.	59
4.1	Илустрација на влијанието на квадратна состојбена функција на спрега при насоченост на спрегата од првиот (1) кон вториот (2) осцилатор. На сликата (а) е дадена состојбата x_1 за еден период T_1 . На сликата (б) е дадена 3D илустрација на функцијата на спрега $q(x_1, x_2)$. На сликата (в) е дадена 2D проекција на функцијата на спрега по x_2 . На последната слика (г) е дадена состојбата x_2 на вториот осцилатор за време од еден период на првиот осцилатор.	66
5.1	Шематски приказ на процедурата на идентификација на спрегнат динамички систем.	68

5.2	На сликата е дадена споредба меѓу симулираните, реалните и усреднетите фреквенции на дишење кај трите протоколи на дишење (1), (2) и (3), кои се дадени на сликите (а), (б) и (в), соодветно. Протоколите на дишење се дадени со црвени линии, со сиви линии се дадени фреквенциите на дишење на различните субјекти и со сини линии се дадени усреднетите фреквенции по субјекти.	77
5.3	Кардиореспираторна интеракција и нејзината временска променливост според четирите протоколи на дишење: (а) спонтано, (б) линеарно, (в) синусно и (г) аperiодично. Сивите линии ја претставуваат силната на спрегата за различните субјекти, додека црвените линии ги претставуваат усреднетите вредности на засилувањето на спрега. Испрекинатите линии го претставуваат сурогат нивото на сигнификантност на спрегата. Трите графици (д), (ѓ) и (е) прикажуваат усреднети функции на спрега по субјекти при синусно дишење во три временски моменти индицирани со стрелките.	78
5.4	Усреднети кардиореспираторни функции на спрега по субјекти и време за четирите различни протоколи на дишење. Претставените функции на спрега ја дефинираат интеракцијата во насока од белите дробови кон срцето.	79
6.1	Еволуција на формата на функцијата на спрега q_i (равенка (6.2)) со тек на време при временски променливи коефициенти на спрега $c_1(t)$ и $c_2(t)$ и константно вкупно засилување $\varepsilon(t)$, слика (а). На сликите (б)-(ѓ) е дадена формата на функцијата на спрега во временските моменти потенцирани со сивите стрелки.	88
6.2	Бифуркациона и нумеричка анализа, во XPPAUT и MATLAB, на спрегнатиот систем (6.3) при временски променлива форма на функцијата на спрега q_i (равенка (6.2)) и временски инваријантно вкупно засилување на спрега $\varepsilon(t)$, слика 6.1. На сликите од (а) до (г) се претставени: (а) двопараметарски бифуркационен дијаграм при $c_1, c_2 \in [0, 3]$, (б) одзивот на состојбата $x_2(t)$ на вториот осцилатор, (в) и (г) бифуркациони дијаграми за состојбите x_1 и x_2 на првиот и вториот осцилатор при $c_2 \in [0, 3]$, каде со зелена (сина) боја е претставен стабилен (нестабилен) граничен круг, а со црвена (црна) боја се претставени стабилни (нестабилни) рамнотежни положби.	90
6.3	Одзив на состојбата $x_1(t)$ на првиот осцилатор.	91

-
- 6.4 Анализа на импликацијата на временски променливата дифузна функција на спрега врз транзицијата меѓу различните квалитативни состојби LC, AD и OD. На сликата (а) е претставена еволуцијата на коефициентите на спрега $c_1(t)$ и $c_2(t)$ со тек на време. На сликите (б) и (в) се дадени одзивите на состојбите $x_1(t)$ и $x_2(t)$ на двата осцилатори, соодветно. 92
- 6.5 Еволуција на формата на функцијата на спрега q_i (равенка (6.2)) со тек на време при временски променливи коефициенти на спрега $c_1(t)$ и $c_2(t)$ и константно вкупно засилување $\varepsilon(t)$, слика (а). На сликите (б)-(ѓ) е дадена формата на функцијата на спрега во временските моменти потенцирани со сивите стрелки. 94
- 6.6 Бифуркациона и нумеричка анализа, во XPPAUT и MATLAB, на спрегнатиот систем (6.7) при временски променлива форма на функцијата на спрега q_i (равенка (6.2)) и временски инваријантно вкупно засилување на спрега $\varepsilon(t)$, слика 6.5. На сликите од (а) до (г) се претставени: (а) двопараметарски бифуркационен дијаграм при $c_1, c_2 \in [0, 3]$, (б) одзивот на состојбата $x_2(t)$ на вториот осцилатор, (в) и (г) бифуркациони дијаграми за состојбите x_1 и x_2 на првиот и вториот осцилатор при $c_2 \in [0, 3]$, каде со зелена (сина) боја е претставен стабилен (нестабилен) граничен круг, а со црвена (црна) боја се претставени стабилни (нестабилни) рамнотежни положби. 96
- 6.7 Одзив на состојбата $x_2(t)$ на вториот осцилатор. 97
- 6.8 Корелациона анализа меѓу квантитативните вредности на нетривијалните рамнотежни положби од тип А) и Б) набљудувани во MATLAB и XPPAUT. На сликата (а) е даден бифуркациониот дијаграм на системот даден со равенката (6.10), каде со црвена (црна) боја се дадени стабилни (нестабилни) рамнотежни положби. На сликите (б) и (в), во MATLAB, се дадени нумеричките решенија над интервалот $x \in [-11, 11]$ на равенките (6.14) и (6.16) соодветно, при $(c_1, c_2) = (0.4, 2)$. На сликите (г) и (д), во MATLAB, се дадени нетривијалните рамнотежни положби од тип А) и Б) кои се реализираат во системот за 5000 случајни почетни услови над интервалот $[-10, 10]$ 103

- 6.9 Корелациона анализа меѓу квантитативните вредности на нетривијалните рамнотежни положби од тип В) набљудувани во MATLAB и XPP-AUT. На сликата (а), во MATLAB, се дадени рамнотежните положби од тип В) кои се реализираат за 5000 случајни почетни услови над интервалот $[-10, 10]$. На сликите (б)-(г) се дадени бифуркационите дијаграми на системот при $c_1 = 0.4$ и $c_2 \in [0, 3]$, каде со црвена (црна) боја се дадени стабилни (нестабилни) рамнотежни положби. 105
- 6.10 На сликите (а) и (б) е дадена анализа на влијанието на функцијата на спрега во генерирањето на нетривијалните рамнотежни положби при $(c_1, c_2) = (0.4, 2)$. На сликата (а) е дадена 3D претстава на пресеците на функцијата f_1 (f на сликата) од равенката (6.13) со рамнината $z = 0$. На сликата (б) е дадена птичја перспектива на сликата (а). Со маркерите во боја се дадени по една рамнотежна положба од тип А), Б) и В), означени со круг, правоаголник и триаголник, чии вредности се $(0.4575, 0.4575)$, $(0.639, -0.639)$ и $(3.31, -6.934)$, соодветно. 106
- 7.1 Структурна блок шема на управувачкиот пристап составен од Естиматор и Управувач. Спрегнатиот систем е составен од два автономни системи и е претставен со правоаголник со испрекинати линии каде функцијата на спрега се наоѓа меѓу двата спрегнати системи. Естиматорот ја естимира вредноста на $c_1(t)$. Управувачот, естимираната вредност $c_{1,inferred}$ ја споредува со некоја номинална вредност $c_{1,ref}$ и продуцира управувачка вредност Δc_1 која се аплицира во функцијата на спрега. . . 110
- 7.2 Анализа на ефективноста на предложениот управувачки пристап кога тој е аплициран на системот (7.2). На сликите (а), (б) и (в) се дадени двопараметарскиот бифурационен дијаграм (слика (а)) за $c_1, c_2 \in [0, 2]$ и еднопараметарските бифуркациони дијаграми за состојбите x_1 и x_2 на двата осцилатори при $c_1 \in [0, 2]$ и $c_2 = 0.6$ (слики (б) и (в)), при $\Delta c_1 = 0$, каде со зелена (сина) боја е претставен стабилен (нестабилен) граничен круг, а со црвена (црна) боја се претставени стабилни (нестабилни) рамнотежни положби. На сликата (г) е дадено поведението на вкупниот коефициент на спрега $c_{1,agg} = c_1 + \Delta c_1$ при ПИ управување. Одсивот на состојбата $x_2(t)$ пред и по воведувањето на управувачкиот алгоритам е даден на сликите (д) и (ѓ), соодветно. 113
- 7.3 Одсивот на состојбата $x_1(t)$ на првиот осцилатор пред и по воведувањето на управувачкиот пристап. 114

Листа на табели

2.1	Математички формализам за опишување на моделите на динамичко по- ведение.	21
-----	--	----

АКРОНИМИ

AD амплитудно придушување/Amplitude Death. [vii](#), [17](#), [84–86](#), [89–93](#), [97](#), [98](#), [104](#), [113](#)

HB хопфова бифуркација/Hopf Bifurcation. [51](#), [91](#), [98](#), [104](#), [105](#), [113](#)

IHLC нехомоген граничен круг/Inhomogeneous Limit Cycle. [89](#), [105](#)

IHSS нехомогена рамнотежна положба/Inhomogeneous Steady State. [85](#), [99](#), [100](#), [102](#)

LC граничен круг/Limit Cycle. [vii](#), [89–93](#), [97](#), [98](#), [113](#), [114](#)

NHSS нетривијална хомогена рамнотежна положба/Non-Trivial Homogeneous Steady State. [85](#), [99](#), [101](#)

OD осцилаторно придушување/Oscillation Death. [vii](#), [17](#), [84–86](#), [89–93](#), [97](#), [98](#), [104](#)

OQ осцилаторно придушување/Oscillation Quench. [83](#), [86](#)

OS осцилаторна состојба/Oscillatory State. [104](#)

PB суперкритична вила бифуркација/Pitchfork Bifurcation. [51](#), [92](#), [98](#), [104](#), [114](#)

PBS субкритична вила бифуркација/Subcritical PB. [51](#), [104](#)

SN седло-јазел бифуркација/Saddle-Node Bifurcation. [51](#), [105](#), [114](#)

TB транскритична бифуркација/Transcritical Bifurcation. [51](#)

Анализа и управување на осцилаторно придушување на спрегнати осцилаторни системи преку временско-променливи функции на спрега

Душко Ставров

Апстракт

Во оваа докторска дисертација го анализиравме влијанието на временски променливите функции на спрега во настапувањето на осцилаторно придушување. Конкретно, ја анализиравме транзицијата од осцилаторна во осцилаторно придушена состојба (неосцилаторна состојба). Покажавме дека временски променливите функции на спрега воведуваат дегенеративна димензија во механизмите на интеракција, меѓу осцилаторните системи, која води до прекин на осцилациите. Разгледавме специјален вид на временска промена, во која, формата на функцијата на спрега се менува додека вкупното засилување на спрега е константно. При усвоената временска променливост, функцијата на спрега ги пренесе разгледуваните спрегнати системи низ серија од премини меѓу осцилаторна и неосцилаторна состојба. Следно, откривме дека функциите на спрега може да воведат бесконечно многу, стабилни и нестабилни, нетривијални рамнотежни положби кои се карактеризираат со своја структура и област на привлечност. Реализацијата на овој режим може да предизвика транзиција од осцилаторна во неосцилаторна состојба или транзиција низ различни осцилаторни и неосцилаторни состојби при пертурбации или шум.

Настапувањето на осцилаторното придушување е непожелно во голем број на природно осцилаторни системи. Имајќи го ова на ум, проектиравме управувачки пристап кој детектира и превенира транзиција од осцилаторна во неосцилаторна состојба. Ефективноста на овој управувачки пристап беше тестирана на систем кај кој во нормални услови, без управување, доаѓа до премин од осцилаторна во неосцилаторна состојба. По инкорпорирањето на управувачкиот пристап, осцилаторното поведение во спрегнатиот систем се одвиваше непрекинато над разгледуваниот временски интервал.

Клучни зборови: временски променливи функции на спрега, осцилаторна состојба, осцилаторно придушена состојба, неосцилаторна состојба, нетривијални рамнотежни положби, управувачки пристап.

Analysis and control of oscillation quench in oscillatory systems coupled with time-varying coupling functions

Dushko Stavrov

Abstract

In this doctoral thesis we analyzed the effect of time-varying coupling functions on the oscillation quenching mechanisms. We showed that the time-varying coupling functions introduce a degenerative dimension in the interaction between oscillators that leads to cessation of the oscillations. A special case of coupling function variability was considered, the form of the coupling function changes in time, while the net-coupling strength is constant. Under the assumed variability, the considered time-varying coupling function took the discussed systems through a series of qualitative transitions between oscillatory and quenched states. During our investigation of the time-varying interactions, we discovered that the coupling functions can be responsible for the manifestation of uncountable, stable and unstable, non-trivial steady states, that have their own, characteristic structure and basin of attraction. The emergence of this regime, not observed in literature until now, can trigger a transition from oscillatory to non-oscillatory state or transitions among different oscillatory and non-oscillatory states, under perturbation or noise.

The cessation of the oscillatory process should be avoided at all costs in numerous systems with intrinsic oscillatory dynamic. Having this in mind, we designed a control approach that detects and prevents the emergence of an oscillation quench state. The effectiveness of the proposed control algorithm was tested on a coupled system that normally, without control, undergoes a transition from oscillatory to oscillation quench state. After we incorporated the designed control approach the oscillations persisted in the coupled system over the observed period of time.

Key words: time-varying coupling functions, oscillations, oscillation quench, non-trivial steady states, control approach.

Глава 1

Вовед

Несомнено, еден од најмасовно присутните зборови во секојдневниот живот и работа е поимот систем. Во основа на тој поим независно од употребата и интерпретациите се подразбира единство на движењето, материјата и човековата мисла. Една најопшта дефиниција на зборот систем е: *Систем претставува множество од елементи кои се во взаемна интеракција заради постипнување на цел која не може да биде остварена од било кој елемент поединечно.* Ако се разгледува поимот систем во смисла на времето како основна координата тогаш доаѓаме до дефиницијата на поимот динамички систем. Тоа е систем кој со тек на времето има определена еволуција за која е карактеристично дека не настанува мигновно туку е континуиран процес кој се карактеризира со определена брзина на еволуција.

Во теоријата на динамичките системи многу често анализата на системите се сведува на претпоставката дека се изолирани и дека не се под влијание на надворешни пертурбации. Во пракса, оваа претпоставка е идеализирана и е далеку од вистината бидејќи сите системи кои егзистираат во природата се засегнати од надворешни пертурбации или од останати системи кои имаат влијание врз временската еволуција на состојбата на системот. Најчесто ова влијание е одговорно за манифестацијата на плејада од комплексни физички ефекти (феномени). Како генерален принцип, пред кој било феномен да се анализира од аспект на причинско последичната врска за неговото настапување, неопходно е тој да биде опишан со модел кој верно го опишува процесот на еволуција на состојбата при неговото настапување. При развојот на модели на динамичко поведење многу важно е да се направи разлика меѓу динамиката на индивидуалниот систем (изолираниот систем) и динамиката инјектирана во системот од страна на околината во која се наоѓа. Првиот чекор во моделирањето на одреден физички ефект, е откривање на силите кои се одговорни за набљудуваната

временска еволуција. При познати сили со примена на теоријата на Њутн, која е темел на нашето осознавање на физичките феномени, силите добиваат математички формализам во вид на динамички равенки. Зависно од природата на системот (системите може да се: со просторно манифестирани физички својства, континуални, дискретни, линеарни, нелинеарни, временски променливи итн.), моделот на динамичко поведение се опишува со обични или парцијални диференцијални, интегрални или диферентни равенки, соодветно.

Бројот на димензии со кои може да се опишат феномените кои се случуваат во системите е дефиниран од редот на моделот. Од друга страна, параметрите во моделите на динамичко поведение ја опишуваат тековната состојба на околината (која може да е или да не е променлива) за која се смета дека е незасегната од системот. Кај автономните системи, кои се темел на класичната теорија на динамички системи, основниот закон на еволуција на состојбата е претпоставката дека околината е статична со тек на време. Усвојувањето на статична околина, во пракса, е премногу рестриktivно и неиздржано заради неминовната временска променливост на околината која, во моделите на динамичко поведение, се рефлектира со промена на вредностите на нивните параметри. На краток или долг рок, промената во природата се случува неминовно. Таа е предизвикана од мноштво фактори, меѓу кои може да се вбројат: живите организми стареат, а со тоа и еволуцијата на состојбата во системите кои се застапени во живите организми се менува според нови закономерности; физичките компоненти се абат, а со тоа настапува нова работна точка во системите; влијанието на сеприсутниот шум; интеракцијата со другите системи и др. Многу често, промената во параметрите на моделот се воведува намерно со цел да се инкорпорира управувачка стратегија во системот која ќе го присили системот да се однесува на некој посакуван начин. Имено, кај третманот на пациент со тумор неопходно е да се менува дозата на лекови и радијација за да се управува со метастазирањето на туморот; кај справувањето со ковид кризата неопходно е преземање на (управувачки) акции за да се намали факторот на ширење на вирусот; кај пациентот со покачен крвен притисок неопходно е да се интервенира со медикамент за да не дојде до срцев удар и др.

Како последица на претходно кажаното, при изградбата на модели на динамичко поведение неопходно е во моделите експлицитно да се земе предвид временската променливост на околината во која се наоѓаат системите преку воведување на временската независна променлива (t) во параметрите на моделот и/или во надворешните влезови. При ова усвојување, класичната теорија на динамички системи, која е посветена на анализата на автономните системи, не е директно применлива, и таа

мора да биде проширена со подрачје кое ја опфаќа анализата на неавтономните системи. Од перспектива на теоријата на динамичките системи, неавтономните системи се опишуваат со равенки во кои времето експлицитно се јавува во моделот на динамичко поведење. Во пракса, оваа временска зависност може да се јави како резултат на: периодичен или квазипериодичен влез; на временски променливата природа на некои од параметрите на моделот; на временски променливите интеракции во кои стапуваат системите во природата.

Земајќи го предвид претходно кажаното, може да се заклучи дека временската променливост на дел или на цел систем претставува потенцијален двигател на промени во системите. Дополнително, ако се земе предвид дека динамичките системи со огромна веројатност не се изолирани туку се дел од поголема мрежа на динамички системи кои се во постојана взаемна интеракција, тогаш доаѓаме до потребата динамичките системи да се анализираат од два аспекти: првиот аспект се однесува на анализата на ефектот во еволуцијата на состојбата предизвикан од индивидуалната динамика на системот, а вториот аспект се однесува на анализа на ефектот во еволуцијата на состојбата предизвикан од временски променливата интеракција на системот со останати системи во околината. Системите кои се во взаемно содејство се широко распространети во науката и технологијата, со примери кои често може да се сретнат во: физика, хемија, биологија, медицина, комуникациски системи, пренос на електрична енергија, електронски уреди, индустриски постројки и др. [1–5].

Категоризацијата на интеракциите може да се направи од аспект на нивната структура и нивната функција. Структурниот аспект ја дефинира експлицитната поврзаност меѓу системите, додека функционалниот аспект ја моделира интеракцијата дефинирајќи функција која ги обликува физичките закони според кои се одвива интеракцијата меѓу системите. Оваа функција се нарекува функција на спрега, а системите во кои таа ја дефинира интеракцијата се нарекуваат спрегнати системи.

Во зависност од функцијата на спрега, динамичкото поведење може да е сложено и разновидно, притоа манифестирајќи се во облик на квалитативно различни состојби и физички ефекти, меѓу кои најпроминентни во литературата се: синхронизација [4, 6–8] и осцилаторно придрушување [9, 10], појава на осцилации [11, 12], коегзистирачки фази [13], фрактални димензии [14], сила и насока на спрегнување [15–17] и др. Овие феномени, во помала или поголема мера се реализираат во сите системи во природата, со таа разлика што во одредени системи нивната појава е целесходна и посакувана, додека во некои системи нивната појава е нецелесходна и непосакувана и треба да се превенира. Токму затоа, знаењето за овие феномени може да се преточи во каталог од конкретни функции на спрега, кои понатаму може да се користат како алатка за

детекција, предвидување и превенирање на непосакувана еволуција во состојбата на спрегнатите системи.

Примената на функциите на спрега е широко распространета во огромен број на сфери од науката, како на пример во хемиските процеси за предвидување на интеракциите меѓу електрохемиските реакции [18–22], во кардиореспираторната физиологија за реконструкција на човечката кардиореспираторна спрегнувачка функција и нејзината еволуција во зависност од возраста на човекот [23, 24], во невро-науката за откривање на спрегнувачките функции кои го моделираат меѓу невронското осцилирање [25] и полиритмичкото однесување во невронските врски [26, 27], во социјалната наука за откривање на функцијата која ја дефинира интеракцијата меѓу демократијата и економскиот раст [28], во сигурноста на комуникациите каде нов протокол е развиен специфично базиран на состојбена функција на спрега [10, 29].

Методите за детекција и реконструкција на функциите на спрега се групираат во неколку категории и тоа: структурни, функционални и ефективни [30, 31]. Ефикасноста на методите за анализа на интеракциите меѓу системите, кои се темелат на функциите на спрега, во голема мера е ограничена од развојот на моќни алгоритми кои ќе овозможат реконструкција на функциите на спрега на база на мерења од состојбите на системот. Реконструкцијата на функциите на спрега се темели на повеќе методи на инференција, некои од нив се: методот на најмали квадрати [16, 23], динамичка Баесова инференција [32], стохастичко моделирање [27] и фазно ресетирање [33, 34]. Во контекстот на оваа дисертација ќе се користи методот на динамичка Баесова инференција кој со голема прецизност може да ја открие ефективната временски променлива интеракција меѓу два и повеќе спрегнати системи.

Во рамките на оваа дисертација ги анализираме физичките ефекти синхронизација и осцилаторно придушување. Со оглед на тоа што феноменот синхронизација во длабочина е проучен во литературата од аспект на временски променливите функции на спрега за него ќе дадеме само осврт кон неговата важност и сферите на неговата појава. Останатиот феномен, феноменот на осцилаторно придушување, ќе го проучиме во детали од аспект на неговото настапување предизвикано од временски променливите функции на спрега.

Феноменот синхронизација се карактеризира со прилагодување на ритмите на системите предизвикано од нивната слаба интеракција [4]. Во голем број на кооперативни системи во природата синхронизацијата е плод на нивната интеракција. Некои познати примери и области во кои се јавува синхронизација се: кардиореспираторна синхронизација [6, 35, 36], мозочни удари [37], невро-мускулна активност [38], во хемија [18, 19], кај трепкањето на огнените пеперутки, [39, 40], еколошка синхронизација [41] и

др. Во зависност од феноменлошките особини со кои се карактеризира појавата на оваа состојба може да се набљудуваат неколку видови, и тоа: фазна синхронизација, генерализирана синхронизација, фреквенциска синхронизација, комплетна синхронизација и др. [3, 41–49].

Преостанатиот феномен, феноменот на осцилаторно придушување, кој може да настапи под влијание на варијацијата на параметрите во индивидуалните спрегнати системи или како резултат на интеракцијата меѓу спрегнатите системи, се карактеризира со состојби кои означуваат целосно отсуство на осцилации во спрегнатите системи. Притоа, овој феномен се манифестира со две структурно различни стабилни рамнотежни положби, **амплитудно придушување/Amplitude Death (AD)** и **осцилаторно придушување/Oscillation Death (OD)**, кои означуваат различен тип на динамичко поведение [50–55]. Состојбата **AD** се дефинира како состојба во која запаѓаат системите како резултат на појавата на стабилна хомогена рамнотежна положба. Од друга страна, состојбата **OD** се дефинира како состојба во која запаѓаат системите како резултат на појавата на стабилна нехомогена рамнотежна состојба. Функциите на спрега кои водат до овие два типа на состојби се: силно спрегнување [40, 55, 56], коњугирано спрегнување [57], нелинеарно спрегнување [58], репулсивно спрегнување [59] и еколошко спрегнување [60]. Во рамките на докторската дисертација ќе покажеме дека настапувањето на феноменот на осцилаторно придушување не е стриктно поврзано со конкретен облик на функција на спрега, туку неговото настапување може да е резултат на временската променливост на интеракцијата меѓу системите.

Функцијата на спрега во целост е дефинирана преку нејзиното вкупно засилување и нејзината форма. Неодамна, е откриено дека интеракцијата во биолошките осцилаторни системи е проследена со временска променливост не само на фреквенцијата и силината на спрегнување туку и на формата на спрегнувачката функција [24]. Во случајот на кардиореспираторните интеракции е покажано дека временски променливата кардиореспираторна функција на спрега води во и вон синхронизација. Ова претставува силен доказ дека временската променливост на функциите на спрега претставува механизам кој го менува физичкото правило по однос на кое интеракциите се одвиваат и на тој начин таа влијае врз исходот од самите интеракции. Во [24], е покажана транзицијата од состојба на стабилни осцилации во состојба на синхронизација кај фазно спрегнати осцилатори. Во истоимениот труд, се отпочнува дискусија со која се навестува дека временски променливите функции на спрега може да претставуваат потенцијален причинител на осцилаторно придушување во класа на осцилаторни биолошки системи, за кои е познато дека непрекинатиот осцилаторниот процес е есенцијален за нивно нормално функционирање.

Во рамките на докторската дисертација се фокусиравме на проучување на улогата на временски променливите функции на спрега во придружувањето на осцилаторниот процес во спрегнатите осцилаторни системи. За таа цел, преку бифуркациона и нумеричка анализа, ги проучивме интеракциите во два спрегнати системи, составени од два Van der Pol (VDP) и два Stuart Landau (SL) осцилатори. За да се истакне влијанието на временски променливата форма на функцијата на спрега врз исходот од интеракциите, за функција на спрега беше усвоена непарна (бихармониска) периодична функција од состојбените променливи на спрегнатите осцилатори. Во двата разгледувани спрегнати системи покажавме дека временски променливата функција на спрега индуцира транзиција меѓу осцилаторна и неосцилаторна состојба во индивидуалните осцилатори како резултат на избраната временска променливост, при која се менува формата на функцијата на спрега, а вкупно засилување на спрега е константно.

Понатаму, од анализата на спрегнатите системи, откривме нов режим на поведение во спрегнатите системи кој е индуциран од периодичноста на избраната функција на спрега. Имено, како резултат на периодичноста на функцијата на спрега, во системот се реализираат бесконечно многу нетривијални, стабилни и нестабилни, хомогени и нехомогени, рамнотежни положби со специфична структура и област на привлечност, во кои спрегнатиот систем може да западне под влијание на пертурбација или шум.

Реализацијата на феноменот на осцилаторно придружување е непожелно во голем број на технички и нетехнички системи во кои осцилациите се есенцијални за континуирана и соодветна работа. Токму затоа, откако откривме дека функциите на спрега се главни причинители на осцилаторно придружување, проектиравме управувачки пристап кој ќе детектира и истовремено ќе превенира осцилаторно придружување. Предложениот управувачки пристап се состои од две компоненти: Баесов естиматор и ПИ управувач. Двете компоненти работат во синергија со цел осцилаторниот процес во системот да остане непрекинат. Во примерот на кој ние го тестиравме управувачкиот пристап, покажавме дека во отсуство на управување осцилаторниот процес се придружува како резултат на стабилизацијата на хомогената рамнотежна положба на системот. Спротивно на ова, кога вклучивме управување осцилаторниот процес се одвиваше континуирано и остана незасегнат од временската промена на функцијата на спрега.

Анализата на спрегнатите системи беше направена со помош на програмскиот пакет MATLAB и софтверската алатка за решавање на комплексни нелинеарни системи XPPAUT [61]. Сите елаборирани теоретски резултати се поткрепени со анализа и во двата софтверски пакети.

Докторската дисертација содржински е поделена во 8 глави. Во втората глава, е

дадена неопходната теоретска подлога за класификација и анализа на динамичките системи, со осврт кон нелинеарните системи од втор ред. Во третата глава, се изложени и анализирани основните локални бифуркации кои може да се јават во континуалните нелинеарни системи од втор ред. Подоцна, во рамките на седмата глава тие се користат за бифуркациона анализа на разгледуваните спрегнати системи. Во четвртата глава, е даден преглед на концептот, теоријата и направена е карактеризација на временски променливите функции на спрега, со осврт кон состојбените функции на спрега. Во петтата глава, е изложен теоретскиот концепт на динамичкиот Баесов метод на инференција, со посебен осврт кон реконструкцијата на спрегнати динамички системи во просторот на состојбите. Во рамките на истоимената глава се изложени и анализирани резултатите од истражувањето кое го спроведовме на кардиореспираторната интеракција, над 20 млади и здрави субјекти, при надворешни пертурбации во фреквенцијата на дишење, кои се моделирани со четири различни протоколи на дишење. Во шестата глава, се изложени главните резултати и сознанија од анализата на ефектот на временски променливите функции на спрега врз настапувањето на осцилаторното придушување. Беше разгледувана специјална временска променливост на функцијата на спрега од интерес, воведена во [62], при која формата на функцијата на спрега се менува, а вкупното засилување на спрега е временски непроменливо. Со спроведената бифуркациона и нумеричка анализа на два спрегнати системи од два VDP и SL осцилатори, е покажано дека временски променливата форма на функцијата на спрега воведува серија од премини меѓу осцилаторна и осцилаторно придушена состојба. Исто така, во рамките на оваа глава е елабориран нов режим, кој е индуциран од периодичноста на избраната функција на спрега. Настапувањето на овој режим се карактеризира со манифестација на бесконечно многу нетривијални рамнотежни положби со различна стабилност, со своја структура и своја област на привлечност. Во седмата глава, е предложен управувачки пристап, составен од две компоненти: Баесов естиматор и ПИ управувач, чија главна намена е управување и одржување со осцилаторниот процес во спрегнатиот систем од два VDP осцилатори. Во спрегнатиот систем во отсуство на управување настапува осцилаторно придушување под влијание на временската променливост на функцијата на спрега. Спротивно на ова, после инкорпорирањето на предложениот управувачки пристап осцилациите во спрегнатиот систем опстојуваат независно од временската променливост на функцијата на спрега. На крај, во осмата глава, се резимирани набљудуваните резултати, изведени се заклучоци и дадени се насоки за идно истражување.

Глава 2

Нелинеарни системи - анализа

Со еволуцијата на времето сите нешта во природата се менуваат: животни и растенијата се раѓаат, живеат, стареат и умираат; планетите и ѕвездите постојано си ја менуваат својата позиција; океаните, реките и облаците постојано си ја менуваат својата состојба; кристали се формираат со тек на време; хемиските елементи во природата стапуваат во интеракција меѓусебе и со останати хемиски елементи; механичките компоненти кородираат, се абат и др. Дури и објектите кои ги сметаме за непроменливи како намештај, згради, скулптури и сл. си ја менуваат својата физичка состојба споро, над долг временски период. Заклучокот е дека промената која се одвива со еволуцијата на времето во природата се случува континуирано и е неминовна. Исклучок од овој заклучок прават одреден број на системи, присутни во природата, кои разгледувани над конечен временски период може да се сметаат за непроменливи. Па оттука се наметнува следното прашање: „Како во природата се случуваат овие промени?“. Наједноставниот одговор на ова прашање би бил дека промената на состојбата во системите се случува под влијание на повеќе едноставни и комплексни сили.

Во продолжение, се набројани примери на системи за кои е истакнат видот на доминантната сила која влијае во овие системи:

- нишало → инерцијална сила,
- планетарен систем → гравитациона сила,
- движење на полнежи → електромагнетна сила,
- статични полнежи → електростатска сила,
- атомско јадро → нуклеарна сила.

Еволуцијата на состојбата кај системите во природата зависи од видот и интензитетот на силите кои делуваат во, врз нив и врз нивната почетна состојба. Предвидливоста на еволуцијата на состојбата зависи од тоа дали силите кои делуваат во системот се линеарни и/или нелинеарни. Системите во кои делуваат само линеарни сили се дефинираат со линеарни модели на поведение и кај нив еволуцијата на состојбата е целосно предвидлива. Од друга страна, системите во кои делува барем една нелинеарна сила се дефинираат со нелинеарни модели на динамичко поведение, за кои е познато дека моделираат комплексни феномени кои во најголемиот број на случаи имаат комплексна и непредвидлива еволуција на состојбата.

2.1 Динамички системи: линеарни и нелинеарни сили

Основната градбена единка на математичките модели претставуваат Њутновите закони. Врз основа на овие закони може да се развијат соодветни математички формулации во форма на диференцијални (обични или парцијални) равенки, диферентни равенки, интегрални равенки или комбинација од сите овие. Ако се фокусираме на анализата на конзервативните системи, со конечен број на степени на слобода, при соодветно дефинирани почетни услови и позната природа на силите кои дејствуваат, тогаш нивната динамика може да биде опишана со еден од трите методи: Њутнова динамика, Лагранжова динамика или Хамилтонова динамика. Во табелата 2.1 со \mathbf{F}_i ,

Табела 2.1: Математички формализам за опишување на моделите на динамичко поведение.

Формулација на модел	Состојби	Релации	Модел
Њутнова динамика	позиција x_i , брзина \dot{x}_i	F_i	$m_i \ddot{x}_i = F_i$
Лагранжова динамика	генер. коорд. (q_i, \dot{q}_i)	$L = T - V$	$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$
Хамилтонова динамика	генер. коорд. и моменти (q_i, p_i)	$H = T + V$	$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$

V и T се означени силата, потенцијалната и кинетичката енергија, соодветно. Со L и H се означени Лагранжјанот и Хамилтонијанот, каде Лагранжјанот се изразува

преку генерализирани координати додека Хамилтонијанот се изразува преку генерализирани координати и моменти. Според математичкиот формализам даден во табелата, моделот на динамичко поведење на еден систем е детерминиран од обликот и природата на силите како и од енергијата кои тие ја генерираат. Некои проминентни примери на физички системи се:

- линеарен хармониски осцилатор,
- Кеплеровиот планетарен систем,
- човековото срце,
- математичко нишало и др.

Најгенералната поделба на силите кои ја обликуваат временската еволуција на состојбата на системите е на: линеарни и нелинеарни. Во продолжение се дадени некои карактеристични примери на линеарни и нелинеарни сили:

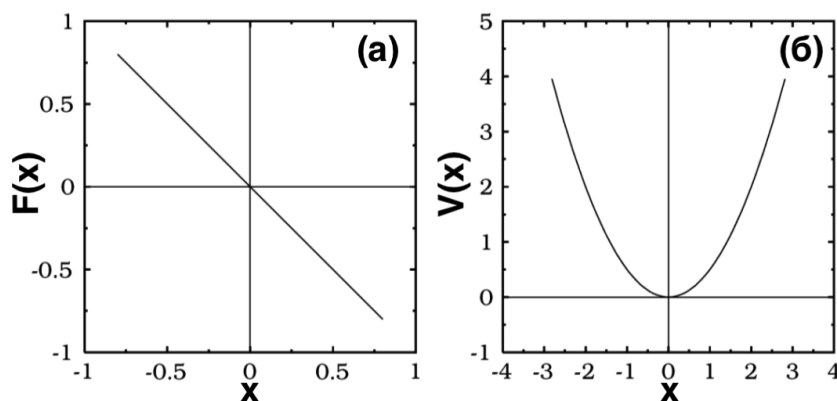
1) Линеарен хармониски осцилатор:

Кај линеарниот хармониски осцилатор еластичната сила F :

$$F = -kx, k = \text{const.} > 0, \quad (2.1)$$

е директно пропорционална на поместувањето x , односно силата F е линеарна функција од x . Оваа линеарна зависност е скицирана на сликата 2.1 (а). Од друга страна, потенцијалната енергија $V(x)$ (равенка (2.2)) е квадратна функција од поместувањето x , слика 2.1 (б),

$$V = - \int_0^x F dx' = \frac{1}{2} kx^2, \quad (2.2)$$



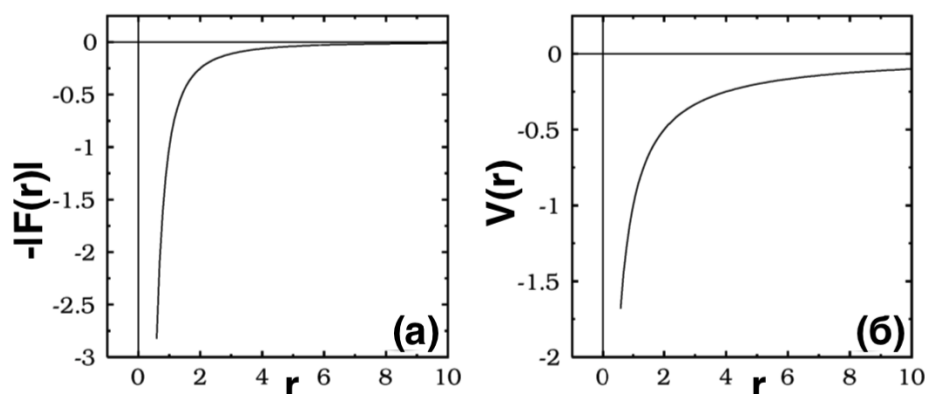
Слика 2.1: На сликата (а) е даден приказ на линеарната сила (2.1), додека на сликата (б) е дадена функцијата на потенцијална енергија $V(x)$.

2) Кеплеровиот проблем:

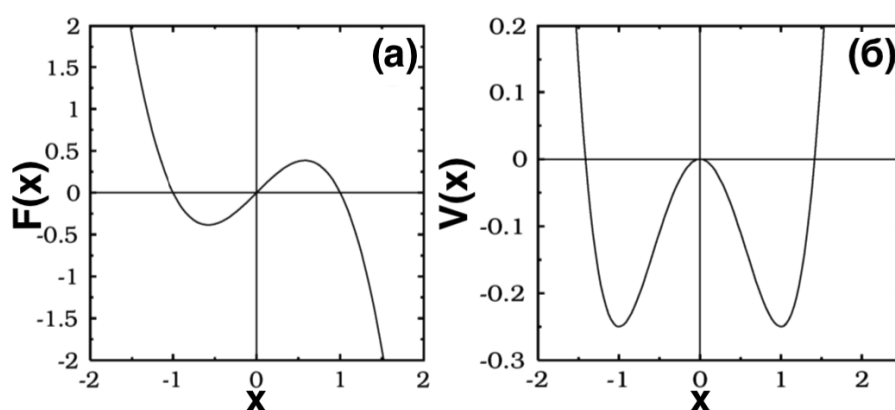
Ако го разгледаме Кеплеровиот проблем за движење на една планета околу сонцето и ја анализираме гравитационата сила \mathbf{F} дадена со:

$$\mathbf{F} = -\frac{k}{r^2}\hat{\mathbf{r}}, \quad (2.3)$$

каде r е радијалната координата и $\hat{\mathbf{r}}$ е радијалниот единечен вектор. Во овој случај разгледуваната сила е инверзно пропорционална на r , слика 2.2 (а). Според ова, силата \mathbf{F} не е линеарна функција од r . Потенцијалната енергија која се јавува како резултат на оваа сила е пропорционална на $1/r$, слика 2.2 (б).



Слика 2.2: На сликата (а) е даден приказ на нелинеарната сила (2.3), додека на сликата (б) е дадена функцијата на потенцијална енергија $V(r)$.



Слика 2.3: На сликата (а) е даден приказ на нелинеарната сила (2.4), додека на сликата (б) е дадена функцијата на потенцијална енергија $V(x)$. Вредностите на k и α се усвоени 1 и -1, соодветно.

3) Нехармониски осцилатор:

Следно нека го разгледаме кубниот нехармониски осцилатор во кој делува силата:

$$F = -kx - \alpha x^3. \quad (2.4)$$

Заради појавата на кубниот член x^3 во равенката на силата, лесно може да се заклучи дека станува збор за нелинеарна сила. Потенцијалната енергија предизвикана од оваа сила е функција зависна од четвртиот степен на поместувањето x и нејзината форма зависи од знаковната определеност на константите k и α . На сликите 2.3 (а) и (б) соодветно, се дадени обликот на силата $F(x)$ и обликот на функцијата на потенцијална енергија која оваа сила ја предизвикува $V(x)$, при $k = -1$ и $\alpha = 1$:

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{\alpha}{4}x^4. \quad (2.5)$$

Во продолжение нашиот фокус е поставен на проучување на влијанието на линеарните односно нелинеарните сили врз мноштвото феномени кои се јавуваат во динамичките системи. Ќе покажеме дека нелинеарните сили се одговорни за плејада на разновидни поведенија кај системите во природата.

2.2 Нелинеарности и нивни математички импликации

Според даденото во табелата 2.1, моделот на динамичко поведење на систем составен од N - честници со маси m_i и вектори на позиција \mathbf{x}_i , $i = 1, 2, \dots, N$, е дефиниран со Њутновите равенки за движење (исто така моделот може да се добие со Лагранжовите или Хамилтоновите равенки на движење),

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{x}_i}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_i, \frac{d\mathbf{x}_i}{dt}, t), i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.6)$$

при дадени почетни услови ($t = 0$) $\mathbf{x}_i(0)$ и $\dot{\mathbf{x}}_i(0)$. Во 3D, бројот на равенки со кој се опишува динамиката на N честници е $3N$ диференцијални равенки од втор ред. За дадено конкретно i , \mathbf{F}_i е функцијата со која е моделирана вкупната сила која дејствува врз i -тата честица. За моделот (2.6) се вели дека е детерминистички ако и само ако силите кои дејствуваат врз системот се детерминистички, односно можноста за појава на случајност во моделот е исклучена. Со решавање на овој систем од диференцијални равенки очекувано е да може да се предвиди идното поведење на системот со неопходната прецизност. Сепак оправданоста на ова очекување е ограничена од природата (линеарна/нелинеарна) на равенките од кои е изграден моделот (2.6). Дали

диференцијалните равенки на моделот ќе бидат линеарни или нелинеарни зависи од обликот на функционална зависност која е воспоставена меѓу силата \mathbf{F}_i со зависните променливи \mathbf{x}_i и нивните изводи $d\mathbf{x}_i/dt$. Последно кажаното не води до дефиницијата за линеарни и нелинеарни системи.

2.2.1 Линеарни и нелинеарни системи

(А) **Линеарни системи:** Ако сите сили \mathbf{F}_i се линеарно зависни од сите \mathbf{x}_i и $d\mathbf{x}_i/dt$, тогаш моделот на системот (2.6) е составен од линеарни диференцијални равенки.

Некои примери за системи чиј модел се состои од линеарни диференцијални равенки се:

(1) Линеарен хармониски осцилатор

Сила:

$$F = -kx. \quad (2.7)$$

Модел на динамичко поведение:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \quad (2.8)$$

(2) 3D изотропичен хармониски осцилатор

Сила:

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r}. \quad (2.9)$$

Модел на динамичко поведение:

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -k\mathbf{r}. \quad (2.10)$$

(3) Придушен хармониски осцилатор

Сила:

$$F = -b \frac{dx}{dt} - kx. \quad (2.11)$$

Модел на динамичко поведение:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} - kx. \quad (2.12)$$

(Б) Ако било која од силите \mathbf{F}_i не е линеарна функција од зависните променливи, позицијата \mathbf{x}_i и брзината $d\mathbf{x}_i/dt$, тогаш моделот (2.6) на динамичко поведение е претставен со систем од нелинеарни диференцијални равенки.

Некои примери за системи чиј модел се состои од нелинеарни диференцијални равенки се:

(1) Нехармониски осцилатор

Сила:

$$F = -kx - \lambda x^3. \quad (2.13)$$

Модел на динамичко поведение:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \lambda x^3. \quad (2.14)$$

(2) Кеплеровиот проблем

Сила:

$$\mathbf{F} = -\frac{k}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (2.15)$$

Модел на динамичко поведение:

$$mr^2 \frac{d\theta}{dt^2} = l = \text{const.}, \quad (2.16)$$

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{d}{dr} \left(-\frac{k}{r} + \frac{1}{2} \frac{l^2}{mr^2} \right). \quad (2.17)$$

Моделите (2.14), (2.16) и (2.17) се реализирани со нелинеарни диференцијални равенки. Нелинеарните модели на динамичко поведение се продукт од тоа што во системот делуваат една или повеќе нелинеарни сили. Генерално, системите кои се под влијание на линеарни сили ги нарекуваме линеарни динамички системи додека пак системите во кои дејствуваат нелинеарни сили (една или повеќе) ги нарекуваме нелинеарни динамички системи.

Воопштено, зависно од природата на силите кои дејствуваат во системот, моделот на динамичко поведение ќе биде претставен со линеарни или нелинеарни диференцијални равенки. Она што е вредно да се спомене е дека особините на нелинеарните диференцијални равенки се суштински поразлични од оние на линеарните диференцијални равенки. Оваа разлика се пренесува и во видовите на поведенија кои можат да се јават кај едните односно другите системи. За разлика од анализата на нелинеарните системи која не може да биде направена во целиот простор на решенија, освен во специјални случаи, анализата на линеарните системи е едноставна бидејќи постојат ефикасни математички апарати за нивно решавање и проучување.

2.2.2 Принцип на суперпозиција

Основниот принцип по однос на кој се разликуваат линеарните и нелинеарните системи е принципот на суперпозиција. Токму принципот на суперпозиција овозможува

линеарните диференцијални равенки, а со тоа и линеарните системи да се едноставни за анализа.

Принципот на суперпозиција искажан математички гласи:

Ако u_1 и u_2 се кои било две линеарно независни решенија за дадена хомогена диференцијална равенка:

$$Lu = 0, \quad (2.18)$$

тогаш линеарната комбинација (или линеарната суперпозиција):

$$u = au_1 + bu_2, \quad (2.19)$$

каде L е линеарен диференцијален оператор и a и b се слободни (комплексни) константи е исто така решение.

Доказ: Бидејќи $Lu = 0$, $Lu_1 = 0$, $Lu_2 = 0 \implies L(au_1 + bu_2) = a(Lu_1) + b(Lu_2) = 0$

Во генерален случај еден линеарен систем без надворешна влезна возбуда од n -ти ред е претставен со хомогена диференцијална равенка од n -ти ред од обликот:

$$\frac{d^n u}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x) \frac{du}{dx} + a_n(x)u = 0, \quad (2.20)$$

каде $a_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ се функции од x , а решението е дадено со линеарна суперпозиција на n линеарно независни решенија $u_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ од обликот:

$$u(x) = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x) + \cdots + C_n u_n(x), \quad (2.21)$$

каде C_1, C_2, \dots, C_n се произволни константи. Ако ги споредиме равенките (2.18) и (2.20), линеарниот диференцијален оператор е даден со:

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x) \frac{d}{dx} + a_n(x). \quad (2.22)$$

Од друга страна, еден линеарен систем од n -ти ред, во кој делува надворешна влезна возбуда е претставен со нехомогена диференцијална равенка од n -ти ред која врз основа на резултатот од равенките (2.20) и (2.22) може да се запише во компактна форма, на следниот начин:

$$Lu = f(x), \quad (2.23)$$

каде L е линеарниот диференцијален оператор даден со равенката (2.22) а $f(x)$ е влезната возбуда. Во овој случај решението на диференцијалната равенка е дадено

со:

$$u(x) = \alpha_1(x)u_1(x) + \alpha_2(x)u_2(x) + \cdots + \alpha_n u_n(x), \quad (2.24)$$

каде непознатите функции $\alpha_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, може да се определат со методот на варијација на коефициентите.

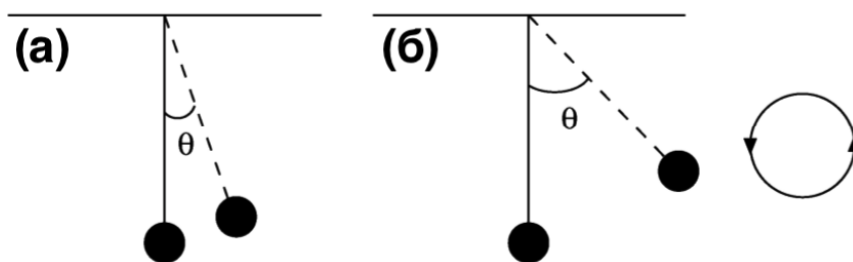
Воопштено, кај нелинеарните системи (нелинеарните диференцијални равенки) принципот на линеарна суперпозиција е суспендиран. Линеарна комбинација од две независни решенија не претставува решение на нелинеарниот систем. Како последица на ова динамиката на еден нелинеарен систем е детерминирана од изборот на почетни услови, што не е случај за еден линеарен систем.

Конечно, може да заклучиме дека степенот на зависно променливите и нивните изводи ($x^0, x^1, x^2, \dot{x}, \dot{x}^2, \dot{x}^3, \dots$) детерминираат дали еден систем е линеарен или нелинеарен. Со други зборови, ако во даден модел на динамичко поведење зависно променливите и нивните изводи се јавуваат на степен 1 или 0, тогаш станува збор за линеарен модел на динамичко поведење (линеарен систем). Ако од ова правило отстапува барем една од зависно променливите или некој од нивните изводи тогаш станува збор за нелинеарен модел на динамичко поведење (нелинеарен систем). Вредно е да се спомене дека експлицитната појава на независно променливата t во моделот на динамичко поведење влијае врз неговата стационарност а не врз неговата линеарност, односно нелинеарност.

2.3 Ефекти од присуството на суштинска нелинеарност во моделот на динамичко поведење

Линеарното поведење на динамичките системи подразбира дека временска еволуција која се случува во системот е постепена и глатка. Ваквиот вид на динамика може да се сретне во повеќе системи: кај математичко нишало за мали отстапувања од рамнотежната положба; во електричните кола при нормални работни услови; кај моторите при ниска моќност; кај хемиските реакции кои се одвиваат бавно и др. Спротивно на ова, динамиката на нелинеарните системи е многу побогата со различни феномени кои се резултат на повеќе фактори, меѓу кои спаѓаат: избор на различни почетни услови, постепена глатка промена на одреден внатрешен параметар во системот, воведување на периодична влезна возбуда и др.

Некои примери на динамички системи во кои се јавува карактеристично поведење како резултат на постоење на вродена нелинеарност се дадени во продолжение:



Слика 2.4: На сликата (а) е даден приказ на нишалко кое изведува транслаторно движење. На сликата (б) е даден приказ на нишалко кое изведува кружно движење.

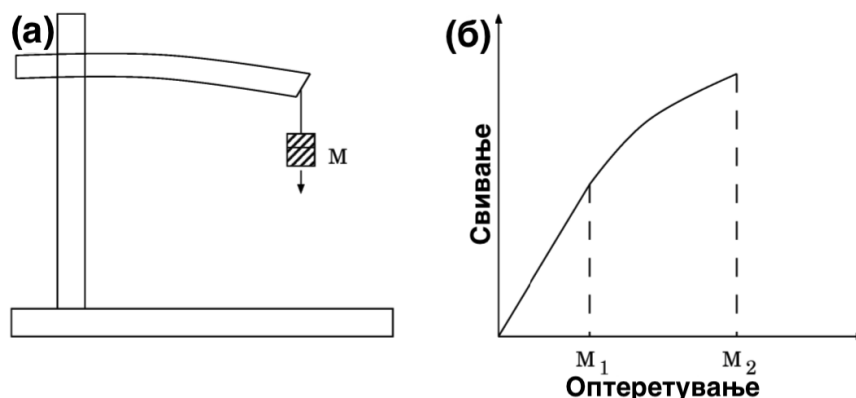
(1) Нека го разгледаме нишалото прикачено на цврста основа, слика 2.4 (а) и (б). Силата која делува во правец да го врати нишалото во неговата првобитна положба е пропорционална на $\sin(\theta)$. Како резултат на ова, моделот на динамичко поведење на нишалото е нелинеарен:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \alpha \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0, \quad (2.25)$$

каде α претставува коефициент на придушување (дефинира колкаво е влијанието на воздухот во придушување на осцилациите). За мали поместувања околу $\theta = 0$, нелинеарниот член се апроксимира со линеарен член $\sin(\theta) \approx \theta$. Според ова, нелинеарната диференцијална равенка преминува во линеарна на следниот начин:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \alpha \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \theta = 0. \quad (2.26)$$

Последната диференцијална равенка ја опишува динамиката на нишалото при мали отклони во однос на рамножната положба $\theta = 0$. Целосната динамика на нишалото, која е многу посложена од онаа претставена со линеарниот модел, е опишана со нелинеарниот модел на динамичко поведење. Во отсуство на надворешна возбуда, при мали отклони, нишалото ќе изведува осцилаторно движење кое има тенденција да си ја намалува својата амплитуда со тек на време, како резултат на отпорот на воздухот, за да во еден момент нишалото се врати во првобитната состојба $\theta = 0$. Од друга страна, ако нишалото е побудено со периодична влезна возбуда која се карактеризира со мала амплитуда (со вредност во околина на $\theta = 0$) и фиксна фреквенција нишалото ќе изведува кружно движење, со фреквенција колку на влезната возбуда, кое целосно е дефинирано со линеарниот модел (2.26). Спротивно на ова, ако периодичната влезна возбуда се карактеризира со голема амплитуда и фиксна фреквенција тогаш нишалото ќе изведува сложено периодично движење кое во целост е дефинирано со нелинеарниот модел (2.25).



Слика 2.5: На сликата (а) е даден приказ на прачка на чиј крај е закачен тег со маса M . На сликата (б) е дадена нелинеарната статичка карактеристика на виткање на прачката при различно оптоварување M .

(2) Кога на една метална прачка со фиксиран еден крај се постави тег со тежина M прачката се деформира. Деформацијата на прачката зависи од тежината на тегот и еластичноста k на материјалот од кој таа е изработена. При мала тежина на тегот металната прачка се деформира умерено, и штом се тргне тегот таа се враќа во првобитната состојба. Спротивно на ова, при голема тежина на тегот металната прачка ги губи своите еластични својства и може трајно да се свитка или во краен случај да се скрши. Од сликата 2.5 (б) може да се забележи дека за вредности на $M \in [0, M_1]$ деформацијата на прачката е линеарна, додека пак за големи вредности на $M \in [M_1, M_2]$ деформацијата на прачката е нелинеарна. Ако се надмине критичниот праг на деформација на прачката (кој не е претставен на сликата), таа ќе се деформира целосно или во краен случај ќе се скрши.

(3) Нека го анализираме можното поведение на честица со функција на потенцијална енергија од втор и четврти ред, слика 2.2 (б) и 2.3 (б), соодветно. Функцијата на потенцијална енергија од втор ред е предизвикана од линеарна сила. Според тоа, очекувано, поведението на честицата ќе е линеарно. Честицата ќе осцилира околу единствениот минимум на функцијата на потенцијална енергија. Од друга страна, функцијата на потенцијална енергија од четврти ред (слика 2.6) е предизвикана од кубна (нелинеарна) сила. Според тоа, очекувано, поведението на честицата ќе е нелинеарно и притоа ќе биде претставено со неколку можни динамички поведенија, и тоа:

- осцилаторно поведение во левиот минимум на функцијата на потенцијална енергија,

- осцилаторно поведение во десниот минимум на функцијата на потенцијална енергија,
- скок меѓу двата минимума на функцијата на потенцијална енергија.

Поведенијата од овој тип се својствени за системите во кои делуваат нелинеарни сили.



Слика 2.6: На оваа слика е даден приказ кој го опишува можното поведение на честица со функција на потенцијална енергија од четврти ред. Честицата со тек на време се наоѓа или во левиот или во десниот минимум на функцијата на потенцијална енергија, слика (а). На сликата (б), е опишана траекторијата на движење на честицата од еден енергетски минимум во друг.

(4) Пропагацијата на звучните бранови во воздух или вода се чини дека претставува линеарен феномен бидејќи овие бранови се моделираат со помош на линеарната равенка на бран. Но не е тешко да се создадат акустични ефекти со кларинет, труба или друг дувачки инструмент кои се апериодични или загадени со шум. Нелинеарните феномени кои се јавуваат при пропагацијата на звучните бранови се должат на повеќе фактори меѓу кои се: нелинеарностите во медиумот за пренос на звучниот бран, акустичниот генератор, рефлексивната и др.

(5) Во голем број на хемиски реакции се јавуваат нелинеарни феномени. На пример шеќерот ($C_{12}H_{22}O_{11}$) и водата (H_2O) во присуство на катализатор H^+ содејствуваат и крајниот резултат е глукоза. Равенката која ја опишува временската варијација на концентрацијата $x(t)$ на глукозата е дадена со равенката:

$$\frac{dx}{dt} = k(\alpha - x), \quad (2.27)$$

каде k е позитивна константа и α е почетната концентрација на шеќер. Оваа равенка претставува линеарен модел (линеарна диференцијална равенка). Од друга страна, постојат хемиски реакции кои покажуваат комплексна варијација на концентрациите на хемиските компонентни, што имплицира нивните модели да се опишат со нелинеарни диференцијални равенки. На пример азотниот оксид (NO) и кислорот (O_2)

содејствуваат и како краен резултат се добива азотен диоксид (NO_2). Равенката со која се моделира временската варијација $x(t)$ на концентрацијата на NO_2 е дадена во продолжение:

$$\frac{dx}{dt} = k(\alpha - x)^2(\beta - x), x(0) = 0, \quad (2.28)$$

каде k е позитивна константа а α и β се почетни концентрации на NO и кислород O_2 . Друг проминентен пример на хемиска реакција во која доаѓа до појава на нелинеарен феномен е познатата реакција на Belousov-Zhabotinsky [63]. Кај оваа реакција за определен опсег на температурата, концентрацијата на хемиските реактанти периодично осцилира. Подоцна, кога температурата ќе надмине некоја критична вредност се случуваат сложени варијации во концентрацијата на хемиските реактанти што укажува на комплексно нелинеарно поведење при оваа реакција.

(6) Други примери на системи во кои е очигледно постоењето на нелинеарност се: флукуациите на берзата, нерегуларно срцево биење, делбата на клетките, комплицираните популациски циклуси во природата, динамиката на ширење на вирусите, предвидувањето на временската прогноза и др.

2.4 Квалитативни карактеристики на нелинеарните системи

Анализата на нелинеарните системи започнува со определувањето на рамнотежните положби кои ги дефинираат состојбите на мирување на системот. Ако системот започне во која било од рамнотежните положби, без влијание на надворешни пертурбации, тој ќе остане во таа положба засекогаш. Во пракса, системите се под постојано влијание на пертурбации од различна природа, како резултат на кои системот може да премине од една во друга рамнотежна положба со различно квалитативно поведење. Следниот чекор при анализата на еден нелинеарен систем е да се заклучи за динамичко поведење на системот во околината на рамнотежните положби. Ако за мали пертурбации во околина на дадена рамнотежна положба траекторијата на системот останува во нејзина близина или конвергира кон неа, рамнотежна положба е стабилна. Во спротивно, ако траекторијата на системот се одалечува од рамнотежната положба станува збор за нестабилна рамнотежна положба. Нестабилната рамнотежна положба може да претставува, извор на нестабилност во системот, портал кој обезбедува премин од една стабилна во друга стабилна рамнотежна положба, или пак може да е иницијатор на појава на стабилно осцилаторно поведење во нелинеарниот систем.

За разлика од линеарните системи, кај кои осцилаторното поведење е предвидливо (пример линеарен хармониски осцилатор), кај нелинеарните системи, тоа најчесто е непредвидливо (пример: нерегуларно срцево биење) заради комплексната динамика на нелинеарните системи.

Во продолжение се дадени два карактеристични примери на нелинеарни системи за кои преку интуитивна анализа заклучуваме за нивните рамнотежни положби и нивната стабилност.

Пример 1: Нишалото од сликата 2.4 има две различни вертикални рамнотежни положби $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Ако во нишалото се внесе мигновна пертурбација со мал интензитет, во околина на $\theta = 0$, нишалото после извесен период ќе се врати во почетната положба. Од друга страна, ако нишалото се пушти од позиција $\theta = \pi$ нишалото ќе осцилира со амплитуда која под влијание на отпорот на воздухот има тенденција да се намалува со тек на време. После извесен период, нишалото ќе ја дисипира енергијата целосно и ќе застане во $\theta = 0$. Според оваа дискусија, рамнотежната положба $\theta = 0$ е стабилна, додека пак рамнотежната положба $\theta = \pi$ е нестабилна.

Пример 2: Системот со функција на потенцијална енергија од четврти степен (слика 2.6), поседува 3 рамнотежни положби од кои две се стабилни и една е нестабилна. Стабилните рамнотежни положби се претставени со локалните минимуми, додека нестабилната рамнотежна положба е претставена со локалниот максимум на функцијата на потенцијална енергија. Ако движењето на честицата започне за мали пертурбации, во десниот или левиот минимум, честицата ќе остане засекогаш во минимумот во кој започнала. Од друга страна, за доволно големи пертурбации честицата ќе минува од левиот во десниот минимум преку максимумот кој претставува неодржлива состојба.

2.4.1 Модели на нелинеарни системи

Ќе разгледуваме динамички системи кои се моделирани со конечен број на спрегнати диференцијални равенки од прв ред. Во продолжение е даден краток запис на нелинеарен систем од n -ти ред, претставен со n диференцијални равенки од прв ред:

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p); i = 1, \dots, n, \quad (2.29)$$

каде со \dot{x}_i е означен изводот на x_i по времето t и u_1, u_2, \dots, u_p се влезови во системот. Променливите x_1, x_2, \dots, x_n имаат посебно име, се нарекуваат состојбени променливи. Накусо, тие ја претставуваат внатрешната состојба на системот во секој момент од времето t . Со дуги зборови, состојбените променливи чуваат информација

за временската еволуција на внатрешната состојба на системот. Во продолжение системот (2.29) ќе го запишime во компактна форма. За таа цел, променливите кои го сочинуваат овој систем ќе ги претставиме во векторска форма:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}, f(t, x, u) = \begin{bmatrix} f_1(t, x, u) \\ f_2(t, x, u) \\ \vdots \\ f_n(t, x, u) \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Преку векторите (2.30), системот (2.29) може да се запише во компактна форма на следниот начин:

$$\dot{x} = f(t, x, u). \quad (2.31)$$

Равенката (2.31) претставува состојбена равенка, каде x и u ги претставуваат состојбените променливи и влезовите во системот, соодветно. Многу често кон равенката (2.31) се придружува следната равенка:

$$y = h(t, x, u), \quad (2.32)$$

која претставува вектор на излези со q димензии. Векторот на излези (2.32), се состои од променливите кои се од посебен интерес при анализа на системот. Најчесто, тоа се физичките величини кои се мерат во системот и сакаме да се однесуваат на некој однапред пропишан начин. Заедно, равенките (2.31) и (2.32) го сочинуваат таканаречениот модел во просторот на состојбите.

Во анализите кои ние ќе ги правиме, во рамките на оваа докторска дисертација, ќе разгледуваме неавтономни нестационарни динамички системи кај кои влезот нема експлицитно да се јавува во моделот на динамичко поведение на системот туку тој ќе биде имплицитно вклучен во моделот на динамичкиот систем. Соодветно на ова, ако го елиминираме влезот u од системот (2.31), тој ќе се сведе на равенката:

$$\dot{x} = f(t, x). \quad (2.33)$$

Сепак, од аспект на неавтономна анализа, влезот u во системот (2.33) може да се јави имплицитно како некоја произволна функција од времето $u = \gamma(t)$, како повратна врска по состојбите на системот $u = \gamma(x)$, или како комбинација од двете $u = \gamma(t, x)$. Може лесно да се заклучи дека системот (2.31) се сведува на неавтономниот нестационарен систем (2.33) со воведување на смената $u = \gamma(\cdot)$.

Ако од системот (2.33) се елиминира времето t тогаш оваа равенка се сведува на:

$$\dot{x} = f(x). \quad (2.34)$$

За системот (2.34) се вели дека е автономен и стационарен.

Квантитативните вредности на рамнотежните положби се определуваат така што изводите во системот (2.33) се изедначуваат на нула, $\dot{x} = 0$. Бројот на рамнотежни положби кај нелинеарните системи може да варира помеѓу една и бесконечно многу. За разлика од ова, кај линеарните системи постои само една рамнотежна положба и тоа е координатниот почеток (0,0).

Со цел да се направи јасна дистинкција меѓу автономни и неавтономни системи, во продолжение се дадени неколку примери на автономни и неавтономни системи:

А. Автономни системи:

(1) Придушен хармониски осцилатор:

$$d^2x/dt^2 + \alpha dx/dt + \omega_0^2 x = 0.$$

(2) Нелинеарен осцилатор (Duffing осцилатор):

$$d^2x/dt^2 + \alpha dx/dt + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0.$$

(3) Нелинеарен осцилатор (Van der Pol осцилатор):

$$d^2x/dt^2 - b(1 - x^2)dx/dt + \omega_0^2 x = 0.$$

Б. Неавтономни системи:

(1) Придушен хармониски осцилатор под влијание на периодична влезна возбуда:

$$d^2x/dt^2 + \alpha dx/dt + \omega_0^2 x = f \cos(\omega t).$$

(2) Нелинеарен осцилатор (Duffing осцилатор) под влијание на периодична влезна возбуда:

$$d^2x/dt^2 + \alpha dx/dt + \omega_0^2 x + \beta x^3 = f \sin(\omega t).$$

(3) Нелинеарен осцилатор (Van der Pol осцилатор) под влијание на временски променлива фреквенција на осцилирање $\omega_0(t)$:

$$d^2x/dt^2 - b(1 - x^2)dx/dt + \omega_0^2(t)x = 0.$$

Во одредени ситуации погодно е неавтономниот динамички систем да се запише во автономна форма преку воведување на вештачка променлива, т.е. преку воведување на нова зависна променлива. Ако го разгледаме нелинеарниот Duffing осцилатор:

$$d^2x/dt^2 + \alpha dx/dt + \omega_0^2 x + \beta x^3 = f \cos(\omega t),$$

тој еквивалентно може да се запише со две диференцијални равенки од прв ред,

$$\dot{x} = y,$$

$$\dot{y} = -\alpha y - \omega_0^2 x - \beta x^3 + f \cos(\omega t).$$

Овој неавтономен систем може да се запише како автономен систем преку воведување на нова зависна променлива $z = \omega t$ на следниот начин:

$$\dot{x} = y,$$

$$\dot{y} = -\alpha y - \omega_0^2 x - \beta x^3 + f \cos(z),$$

$$\dot{z} = \omega.$$

Кога се анализира вака добиениот автономен систем, потребно е да се поведе внимание на тоа што воведената состојбена променлива z е временски неограничена.

Поделбата на динамичките системи на автономни и неавтономни ни овозможува да детектираме две реални и различни физички ситуации, каде едната е резултат на внатрешната динамика на системот (автономен систем) а другата е резултат на надворешните влијанија кои доаѓаат во облик на надворешна возбуда или/и нестационарност на дел или цел систем (неавтономен систем).

2.4.2 Феноменолошки особини кај нелинеарните системи

Ако линеарните системи ги сметаме за специјален случај на нелинеарните системи, тогаш при запишувањето на моделот во просторот на состојби на еден линеарен систем, равенките (2.32) и (2.33) го добиваат следниот облик, соодветно:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad (2.35)$$

$$y = C(t)x + D(t)u. \quad (2.36)$$

Алатките кои се достапни за анализа на линеарните системи се темелат на принципот на суперпозиција (преносна функција, бодови дијаграми, најквистови дијаграми, геометриско место на корени и сл.) кој пак е суспендиран кај нелинеарните системи. Па така, алатките применети за анализа на линеарните системи е невозможно да се користат за анализа на нелинеарните системи без претходна линеаризација на нелинеарниот систем. Првиот инстинкт при анализата на даден нелинеарен систем е тој да се линеаризира во околина на некоја работна точка ($u \neq 0$) и да се проучи неговото поведение во блиска околина на таа работна точка. Во случајот на неавтономните нелинеарни системи под работна точка се подразбира комбинација од вредности на состојбата x и влезот u кои десната страна од равенките (2.31) и (2.32) ја сведуваат на нула. Во случајот на автономниот нелинеарен систем (2.34), под работна точка се подразбира која било од рамнотежните положби на системот.

Линеаризацијата претставува моќна алатка за анализа на нелинеарните системи, преку која карактеристичното поведение во околина на рамнотежните положби на нелинеарните системи се моделира со едноставни линеарни модели. Сепак, овој пристап има свои ограничувања, нелинеарните системи имаат исклучително сложена динамика која не може да се моделира со еден или повеќе линеарни модели. Добиените линеарни модели се ефикасни во опишување на поведението на нелинеарните системи само во околина на рамнотежните положби и нивната ефикасност драстично опаѓа со одалечувањето на почетните услови од рамнотежните положби.

Некои од најкарактеристичните феномени кои може да се манифестираат кај нелинеарните системи се дадени во продолжение:

- *Конечно време на дестабилизација* (анг. Finite time escape). Состојбата на нестабилен линеарен систем оди во бескрај при $t \rightarrow \infty$, за разлика од ова, кај нелинеарните системи состојбата може да отиде во бескрај за конечно време $t = t_f$.
- *Повеќе рамнотежни положби* (анг. Multiple isolated equilibria). Линеарните системи имаат само една рамнотежна положба, координатниот почеток. Кај нелинеарните системи може да постојат мноштво на рамнотежни положби во кои започа нелинеарниот систем зависно од изборот на почетни услови.
- *Гранични кругови* (анг. Limit cycles) Еден временски непроменлив линеарен систем осцилира ако поседува полови на имагинарната оска. Овој услов е неробустен бидејќи одржувањето на половите на имагинарната оска во присуство на пертурбации е практично невозможно. Хипотетички и да е успешно одржувањето на половите на имагинарната оска, амплитудата на воспоставените осцилации ќе зависи од почетната состојба на системот. Од друга страна, кај нелинеарните системи е можна појава на осцилации со сопствена амплитуда и фреквенција независно од почетната состојба. Овој вид на поведение е познато како граничен круг.
- *Субхармониски, хармониски или квази периодични осцилации* (анг. Subharmonic, harmonic, or almost-periodic oscillations). Кога еден стабилен линеарен систем е побуден од периодична влезна возбуда, неговиот одзив осцилира со фреквенцијата на влезната возбуда. Еден нелинеарен систем под влијание на периодичен влез може да осцилира со фреквенции кои се фактор од фреквенцијата на влезната возбуда. Исто така, постојат случаи во кои нелинеарниот систем продуцира квази периодични осцилации при периодична влезна возбуда.
- *Хаос* (анг. Chaos). Кај линеарните системи малите промени во почетните услови, какви што се на пример промените кои се јавуваат заради грешка при мерење или заради заокружување на вредностите при нумеричко сметање, нема да имаат никакво влијание врз крајната состојба на системот. Спротивно на ова, кај одредена класа на детерминистички нелинеарни системи, малите промени во почетните услови може да доведат до појава на уникатна еволуција на состојбата на системот која е непредвидлива со тек на време. Со други зборови, и

покрај детерминистичката природа на оваа класа системи, нивното поведење е непредвидливо. Реализацијата на ова поведење е познато како хаос.

- *Повеќе модови на поведење* (анг. Multiple modes of behavior). Не е редок случајот во кој еден нелинеарен систем манифестира повеќе модови на поведење зависно од промената на еден или повеќе негови параметри или под влијание на надворешна пертурбација. Еден автономен нелинеарен систем може да поседува повеќе гранични кругови и различни рамнотежни положби со различна стабилност кон кои траекториите на системот конвергираат зависно од изборот на почетните услови. Кај еден неавтономен систем зависно од амплитудата и фреквенцијата на влезната возбуда може да се јави феноменот резонантен скок или може да се набљудуваат хармониски, субхармониски и супрахармониски осцилации.

2.4.3 Нелинеарни системи од втор ред

Нелинеарните системи од втор ред завземаат важно место во анализата на нелинеарните системи бидејќи решенијата на оваа класа на системи може да бидат прикажани во рамнина. Ова овозможува лесна визуелизација на квалитативното поведење на овие системи. Кај овие системи може да се јават два вида на стабилно рамнотежно поведење и тоа: стабилна рамнотежна положба и стабилен граничен круг. Кај системите од повисок ред, покрај овие два вида на поведење, дополнително може да се јави квазипериодично и хаотично поведење.

Еден автономен нелинеарен систем од втор ред е претставен со следните две скаларни диференцијални равенки:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2).\end{aligned}\tag{2.37}$$

Нека $x(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T$ претставува решение на системот (2.37) кое започнува од почетниот вектор на состојба $x_0 = [x_{10}, x_{20}]^T$. Геометриското место на точки на решението $x(t)$ за $t \geq 0$ во рамнината $x_1 - x_2$ претставува крива која започнува од x_0 . Оваа крива се нарекува траекторија на системот, за дадениот почетен услов x_0 , а рамнината $x_1 - x_2$ се нарекува фазна рамнина. Фамилијата од траектории на системот добиени за голем број на почетни услови во фазната рамнина се нарекува фазен портрет. Фазниот портрет дава генерална слика за квалитативното поведење на системот во околина на рамнотежните положби.

2.4.4 Квалитативно поведение во близина на рамнотежните положби

Квалитативното поведение на еден нелинеарен систем во околина на рамнотежните положби може да се одреди преку линеаризација на нелинеарниот систем во околина на рамнотежните положби. Нека точката $p = (x_1^*, x_2^*)$ претставува рамнотежна положба на системот (2.37) и нека функциите f_1 и f_2 се диференцијабилни. Следно, десната страна од равенката (2.37) ќе ја развиеме со Тајлоров ред во околина на точката (x_1^*, x_2^*) . Ако се фокусираме само на непосредната околина на рамнотежната положба (x_1^*, x_2^*) , тогаш сите членови освен линеарните може да се занемарат. Според ова, се добиваат линеаризираните равенки на системот (2.37):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2,\end{aligned}\tag{2.38}$$

каде коефициентите,

$$\begin{aligned}a_{11} &= \left. \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right|_{x_1=x_1^*, x_2=x_2^*}, & a_{12} &= \left. \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|_{x_1=x_1^*, x_2=x_2^*}, \\ a_{21} &= \left. \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right|_{x_1=x_1^*, x_2=x_2^*}, & a_{22} &= \left. \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|_{x_1=x_1^*, x_2=x_2^*},\end{aligned}\tag{2.39}$$

се парцијалните изводи по состојбените променливи пресметани во рамнотежната положба. Аналогно, линеаризираниот систем може да се запише во компактна форма на следниот начин:

$$\dot{x} = Ax,\tag{2.40}$$

каде,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{array} \right] \Bigg|_{x=p} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=p}.\tag{2.41}$$

Матрицата $[\partial f / \partial x]$ се нарекува Јакобијан, а матрицата A е системската матрица која се добива со замена на (x_1^*, x_2^*) во Јакобијанот. Сопствените вредности на матрицата A го дефинираат рамнотежното поведение на нелинеарниот систем во околина на (x_1^*, x_2^*) .

2.4.5 Типизација на рамнотежното поведение

Стабилноста и типот на рамнотежно поведение во околина на рамнотежните положби може да се одреди врз основа сопствените вредности λ_1 и λ_2 на матрицата A , кои се одредуваат преку нејзиниот карактеристичен полином $a(\lambda)$, чиј општ облик

е дефиниран на следниот начин:

$$a(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (2.42)$$

За дадена рамнотежна положба се вели дека е стабилна ако и само ако сопствените вредности на системот добиен со линеаризација во нејзината околина се негативни (со негативен реален дел) и различни од 0. Од аспект на Хурвицовиот критериум за иследување на стабилност кај линеарните системи, линеарниот систем од втор ред со карактеристичен полином $a(\lambda)$ е стабилен ако и само ако коефициентите пред степените на λ и слободниот член имаат ист знак. Тополошки, типот на рамнотежно поведење, ако се иземат дегенеративните типови на поведење во кои барем една од сопствените вредности е 0, може да се дефинира со еден од 4-те типови на рамнотежно поведење кои се карактеризираат со соодветен фазен портрет.

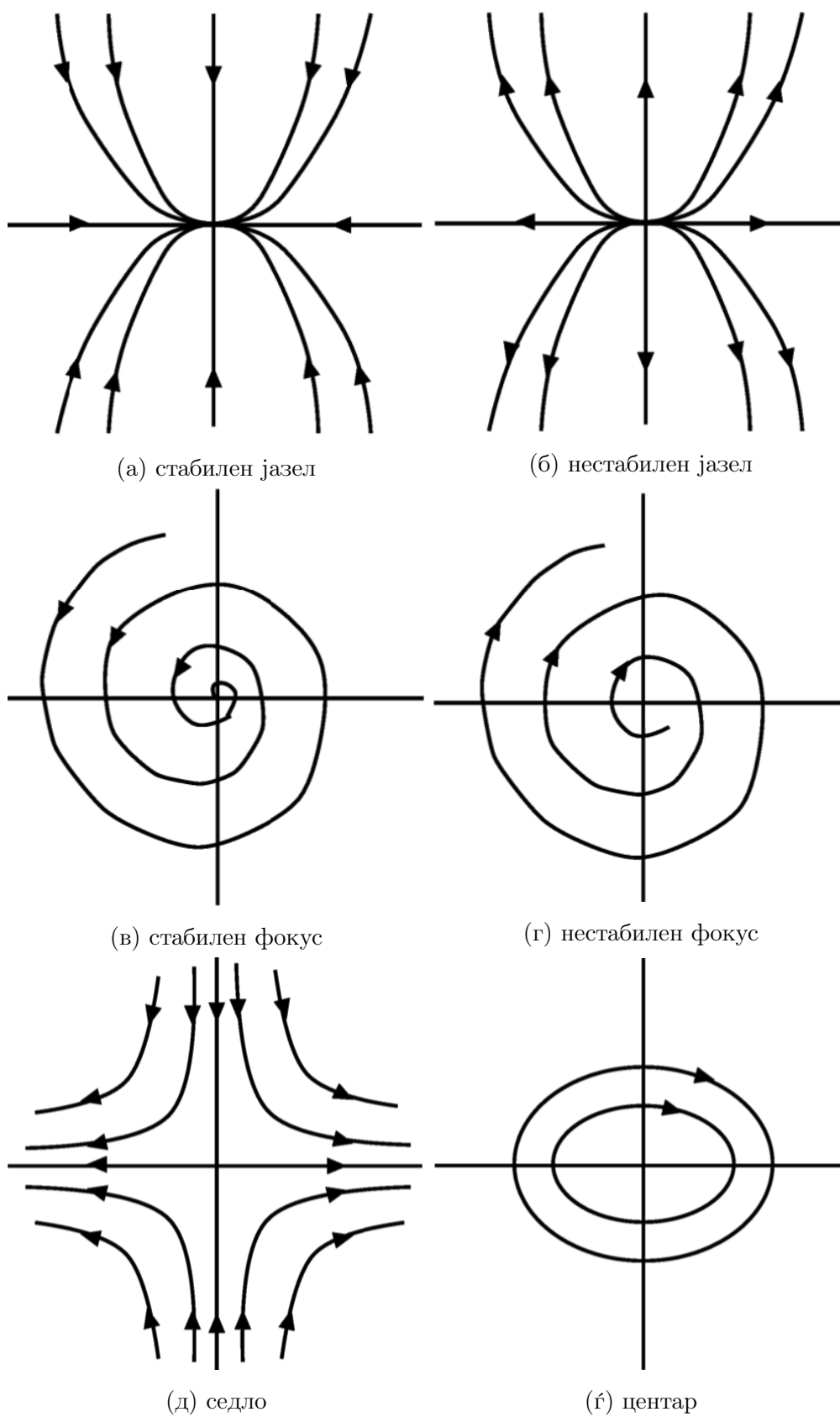
Во продолжение се дадени можните типови на рамнотежно поведење и нивните фазни портрети зависно од знакот и вредностите на сопствените вредности:

Јазел: сопствените вредности λ_1 и λ_2 се реални броеви со ист знак, за кои е исполнето $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$. Фазните портрети на овој тип на рамнотежно поведење за стабилна и нестабилна рамнотежна положба, стабилен и нестабилен јазел, се дадени на сликите 2.7 (а) и (б), соодветно. Овој тип на рамнотежно поведење отсликува аperiодично поведење.

Фокус: сопствените вредности λ_1 и λ_2 се комплексни броеви со еднакви реални делови различни од 0, односно $Re\lambda_1 = Re\lambda_2 \neq 0$. Фазните портрети на овој тип на рамнотежно поведење за стабилна и нестабилна рамнотежна положба, стабилен и нестабилен фокус, се дадени на сликите 2.7 (в) и (г), соодветно. Овој тип на рамнотежно поведење отсликува придрушено стабилно и нестабилно осцилаторно поведење.

Седло: сопствените вредности λ_1 и λ_2 се реални броеви со спротивен знак, и притоа е исполнето $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$. Фазниот портрет на овој тип на рамнотежно поведење е даден на сликата 2.7 (д). Овој тип на рамнотежно поведење отсликува нестабилно аperiодично поведење.

Центар: сопствените вредности λ_1 и λ_2 се имагинарни броеви, нивните реални делови се еднакви на 0, односно $Re\lambda_1 = Re\lambda_2 = 0$. Фазниот портрет на овој тип на рамнотежно поведење е даден на сликата 2.7 (ѓ). Овој тип на рамнотежно поведење отсликува непридрушено осцилаторно поведење.



Слика 2.7: Фазни портрети на различните типови на рамнотежно поведење.

2.4.6 Анализа на поведението на нелинеарниот систем непридушено нишало

Во продолжение е анализиран нелинеарниот систем непридушено нишало. Равенката на динамичко поведење на непридушено нишало се добива со усвојување на следните претпоставки $g = l$ и $\alpha = 0$ во равенката (2.25):

$$\ddot{\theta} + \sin(\theta) = 0.$$

Последната (нелинеарна) диференцијална равенка може да се запише како две диференцијални равенки од прв ред, преку воведување на следните состојбени променливи $x = \theta, y = \dot{\theta}$, на следниот начин:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\sin(x). \end{aligned}$$

Рамнотежните положби на вака добиениот систем од диференцијални равенки се добиваат со изнедачување на изводите од состојбените променливи на нула, $\dot{x} = \dot{y} = 0$. Во конкретниот случај, за рамнотежните положби на системот се добиваат:

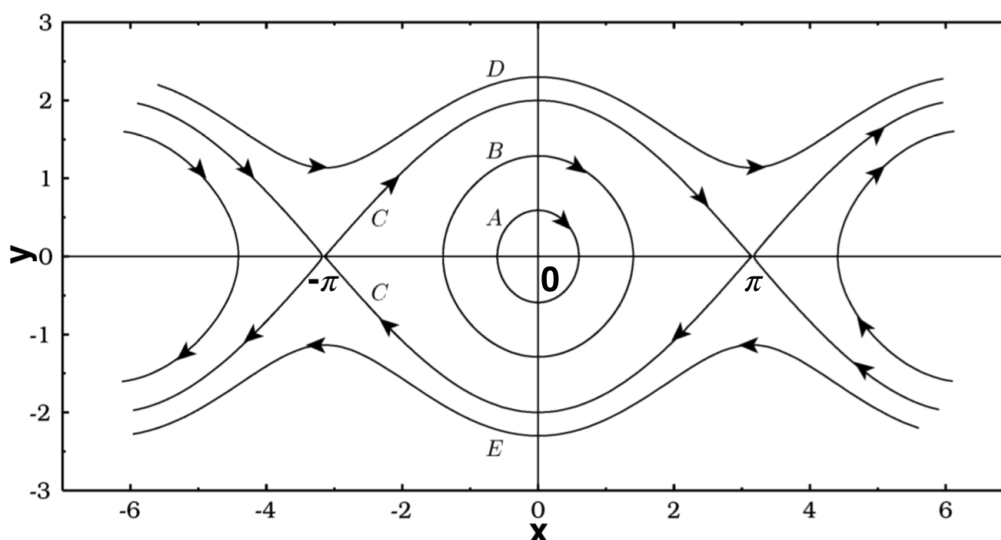
$$(x^*, y^*) = (n\pi, 0), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Може да се забележи дека системот има бесконечно многу рамнотежни положби над $-\infty < x < \infty$ и притоа 3 од нив се уникатни $(0, 0)$, $(\pi, 0)$ и $(-\pi, 0)$, а останатите периодично се повторуваат. Анализата на поведението на системот во околина на рамнотежните положби се прави така што, најпрво нелинеарниот систем се линеаризира а потоа се пресметува карактеристичниот полином, со чие решавање се одредуваат сопствените вредности. Конкретно, за сопствените вредности се добива:

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\cos(x^*)}.$$

Типот на рамнотежно поведење ќе зависи од парноста на n . За парни вредности на n сопствените вредности се чисто имагинарни $\lambda_{1,2} = \pm j$, а за непарни вредности на n сопствените вредности се реални и еднакви со спротивен знак $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Според ова, при парни вредности на n поведението на системот е од тип центар, додека за непарни вредности на n поведението е од тип седло. Рамнотежното поведење во околина на $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $(-\pi, 0)$ е дадено со фазниот портрет, даден на сликата 2.8. Зависно од изборот на почетната состојба кај непридушеното нишало може да се јават повеќе различни видови на поведење. Во околина на $(0, 0)$ поведението е периодично и се одвива по должината на затворените траектории A и B . Од друга страна, за почетни услови во близина на траекториите D и E поведението е аperiodично и неограничено. Осцилаторното (траектории A и B) и аperiodичното (траектории D и E) поведење се раздвоени преку специјална крива, карактеристична за нелинеарните системи, која се нарекува сепаратриса. Сепаратрисата претставува крива која ја дели фазната

рамнина на две различни поведенија. Во конкретниот случај, сепаратрисата ја дели фазната рамнина на осцилаторно и аperiодично поведение.



Слика 2.8: Фазен портрет на непридушено нишало.

2.4.7 Граничен круг

Граничен круг претставува изолирана затворена траекторија која се јавува кај нелинеарните динамички системи. Тополошки граничниот круг се разликува од соседните траектории кои по својата природа не се затворени. Во системите од втор ред зависно од стабилноста на граничниот круг траекториите на системот конвергираат кон или дивергираат од граничниот круг.

Нека разгледаме еден нелинеарен систем од втор ред запишан во компактна форма:

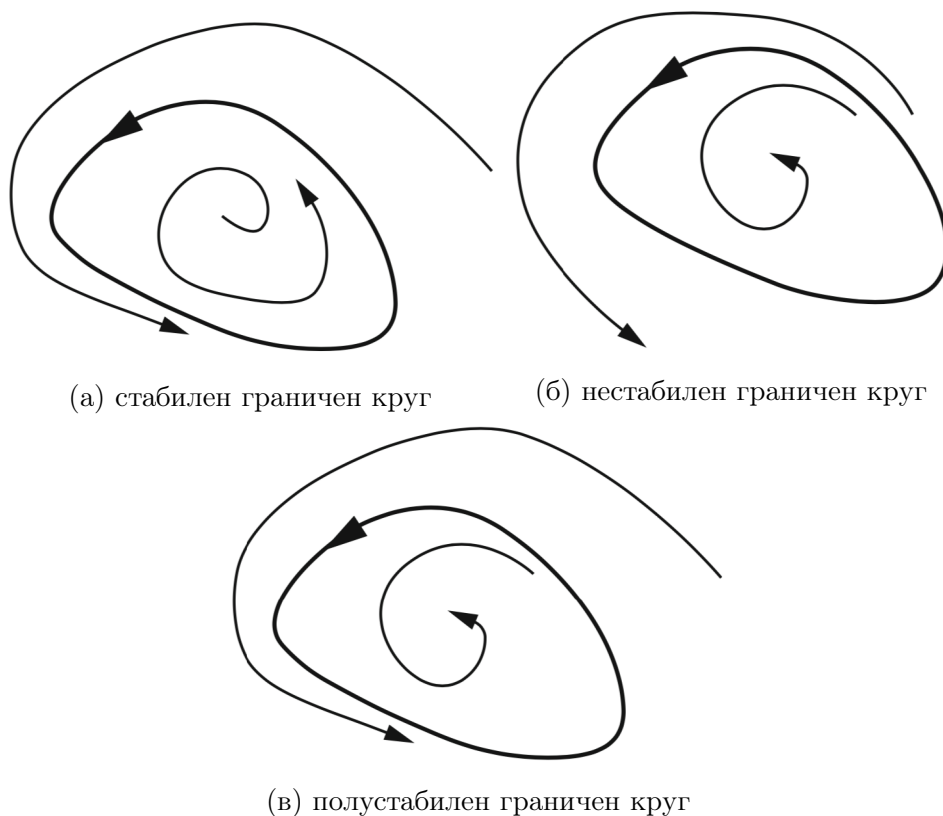
$$\dot{x}(t) = f(x), \quad (2.43)$$

каде $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ е диференцијабилна функција. Решението на овој систем е некоја траекторија $x(t) \in \mathbb{R}^2$ за која се вели дека претставува граничен круг ако постои период $T > 0$ за кој траекторијата се враќа во точката од која започнала, односно $x(t) = x(t + T), \forall t \geq 0$. Ако граничниот круг се разгледува од аспект на неговата стабилност, тогаш може да се дефинираат три видови на гранични кругови:

Стабилен граничен круг: За еден граничен круг се вели дека е стабилен ако сите траектории кои започнуваат од почетни услови близу до граничниот круг конвергираат кон него при $t \rightarrow \infty$. Еден стабилен граничен круг е прикажан на

сликата 2.9 (а), од која може да се забележи дека за почетни услови внатре во граничниот круг и надвор од него траекториите на системот конвергираат кон затворената траекторија. Од прикажаното може да се заклучи дека стабилниот граничен круг дефинира два вида на поведение зависно од изборот на почетните услови и тоа: нестабилно поведение внатре во граничниот круг и стабилно поведение надвор од граничниот круг.

Нестабилен граничен круг: За еден граничен круг се вели дека е нестабилен ако сите траектории кои започнуваат од почетни услови близу до граничниот круг дивергираат од него при $t \rightarrow \infty$. Нестабилен граничен круг е прикажан на сликата 2.9 (б), од која може да се забележи дека за почетни услови внатре во граничниот круг и надвор од него траекториите се оддалечуваат од граничниот круг. Со други зборови, овој вид на граничен круг се нарекува виртуелен граничен круг, бидејќи тој претставува портал кон друг стабилен граничен круг



Слика 2.9: Различни видови на граничен круг гледано од аспект на нивната стабилност.

или рамнотежна положба.

Полустабилен граничен круг: За еден граничен круг се вели дека е полустабилен ако траекториите кои почнуваат внатре (надвор) конвергираат кон граничниот круг, додека траекториите кои започнуваат надвор (внатре) дивергираат од него. Полустабилен граничен круг е прикажан на сликата 2.9 (в), од која може да се забележи дека траекториите кои започнуваат во граничниот круг дивергираат од него, додека траекториите кои започнуваат надвор од граничниот круг конвергираат кон него.

2.4.8 Теорема на Poincaré - Bendixon

Теоремата на Poincaré - Bendixon е особено важна во испитување на егзистенцијата на граничен круг и други видови на поведенија во системите од втор ред. Без да навлегуваме во технички детали на оваа теорема, таа може да се искаже на следниот начин [64]:

Нека го разгледаме системот (2.43) и нека M е затворено и ограничено подмножество во фазната рамнина за кое е исполнето:

- M не содржи рамнотежна положба, или содржи само една рамнотежна положба така што сопствените вредности на Јакобијанот во таа точка, се позитивни реални броеви (нестабилан јазел) или коњугирано комплексни броеви со позитивен реален дел (нестабилан фокус),
- Секоја траекторија која започнува во M останува во M за секое t .

Тогаш во M постои затворена траекторија (граничен круг).

Постои и друга теорема од Bendixon која ги дефинира условите при кои со сигурност не постои граничен круг во даден нелинеарен систем од втор ред. Оваа теорема може да биде искажана на следниот начин [64]:

Ако над регионот D во фазната рамнина, изразот $s = \partial f_1 / \partial x_1 + \partial f_2 / \partial x_2$ не е нула и не го менува знакот, тогаш во системот (2.43) нема да се јави граничен круг.

2.4.9 Егзистенција на граничен круг во парадигмичните Stuart Landau и Van der Pol осцилатори

Овде ќе го анализираме поведението на парадигмичните осцилатори Van der Pol и Stuart Landau. Ќе се фокусираме подетално на проучување на локалната динамика на овие два нелинеарни системи и условите при кои се јавува граничен круг во нив. Подоцна во докторската дисертација ќе ги анализираме физички манифестираните состојби кои се продукт од спрегнувањето на овие два осцилатори поединечно (2 x Stuart Landau и 2 x Van der Pol) со периодична функција на спрега.

A. Stuart-Landau осцилатор:

Станува збор за осцилатор чие динамичко поведение е опишано во комплексен домен а неговиот динамички модел е:

$$\dot{z} = (\mu + j\omega - |z|^2)z, \quad (2.44)$$

каде μ е реална вредност и со неа е претставен коефициентот на придрушување, ω е природната фреквенција на осцилирање и z е комплексен број $z = x + jy$. Со замена на $z = x + jy$ во горната равенка, моделот на динамичко поведение може да се запише во картезиов домен ($x - y$ координатен систем), на следниот начин:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega y + x(\mu - x^2 - y^2), \\ \dot{y} &= \omega x + y(\mu - x^2 - y^2). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Овој систем поседува една рамнотежна положба $(0, 0)$ која се определува од условот $\dot{x} = \dot{y} = 0$. Типот на рамнотежно поведение во околина на рамнотежната положба може да се определи со линеаризирање на нелинеарните динамички равенки. Јакоби-јанот на системот е:

$$A = \begin{bmatrix} \mu - 3x^2 - y^2 & -\omega - 2xy \\ \omega - 2xy & \mu - x^2 - 3y^2 \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

Со замена на $(0, 0)$ во матрицата A и со примена на равенката $a(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ се определува карактеристичната равенка на линеаризираниот систем:

$$a(\lambda) = \lambda^2 - 2\mu\lambda + \mu^2 + \omega^2. \quad (2.47)$$

Со решавање на равенката (2.47) се определуваат сопствените вредности кои го дефинираат типот на рамнотежно поведение во околина на $(0, 0)$. Во конкретниот случај за сопствените вредности се добива:

$$\lambda_{1,2} = \mu \pm j\omega. \quad (2.48)$$

Од равенката (2.48) може да се заклучи дека сопствените вредности се коњугирано комплексни броеви чиј реален дел е дефиниран со вредноста на μ . Зависно од изборот на μ локалното рамнотежно поведење може да биде: стабилен фокус ($\mu < 0$), нестабилен фокус ($\mu > 0$) и центар ($\mu = 0$). Постепената промена на параметарот μ од негативна кон позитивна вредност предизвикува локалното рамнотежно поведење квалитативно да се промени. Критичната транзиција се случува за $\mu = 0$ кога сопствените вредности преминуваат од левата комплексна рамнина во десната. Оваа шема на премин на половите од левата во десната комплексна полурамнина претставува темел на раѓањето на осцилации во системите.

Откако заклучивме за локалното поведење на системот, следно се фокусираме на глобалното динамичко поведење на системот. За таа цел, со помош на теоремата на Bendixon ја испитавме можноста за појава на граничен круг во системот. За изразот s од теоремата на Bendixon се добива:

$$s = \partial f_1 / \partial x + \partial f_2 / \partial y = 2\mu - 4(x^2 + y^2). \quad (2.49)$$

Може да се забележи дека изразот s менува знак и не е идентички еднаков на 0. Тоа укажува на можност од постоење на граничен круг. За да се потврди постоењето на граничен круг во системот е потребна посеопфатна анализа во целиот простор на состојби. Во конкретниот случај, анализата на системот ја спроведовме со трансформација на системот во поларни координати $(r - \phi)$. Со примена на равенствата $x = r \cos(\phi)$, $y = r \sin(\phi)$ и $x^2 + y^2 = r^2$ системот (2.45) се трансформира во поларни координати на следниот начин:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(\mu - r^2), \\ \dot{\phi} &= \omega, \end{aligned} \quad (2.50)$$

каде првата равенка ја дефинира измената на радиус векторот $r \geq 0$, а втората равенка ја дефинира измената на фазата ϕ . Фазата на системот се менува како линеарна функција $\phi = \omega t + \phi_0$ со тек на времето. Од друга страна, бројот на рамнотежните положби зависи од знакот на μ . Повикувајќи се на теоремата на Poincaré - Bendixon, граничен круг може да се јави ако и само ако рамнотежната положба која е опфатена од граничниот круг е од тип нестабилен фокус или нестабилен јазел. Од равенката (2.48) заклучивме дека рамнотежното поведење е нестабилен фокус при $\mu > 0$. Усвојувајќи $\mu > 0$ ја продолжуваме анализата на системот даден во поларни координати. Рамнотежните положби во поларни координати се добиваат со изедначување на $\dot{r} = 0$. Системот поседува две рамнотежни положби во поларни координати и тоа $r = 0$ и $r = \sqrt{\mu}$, каде $r = 0$ ја дефинира рамнотежната положба $(0, 0)$, а $r = \sqrt{\mu}$ дефинира

кружница со радиус $\sqrt{\mu}$ во Картезиов координатен систем. Следно ќе испитаме дали кружницата $x^2 + y^2 = \sqrt{\mu}^2$ претставува стабилен граничен круг преку испитување на нараснувањето односно намалувањето на \dot{r} за почетни услови во и надвор од кружницата. За почетни услови во кружницата $0 < r < \sqrt{\mu}$ радиус векторот нараснува $\dot{r} > 0$, додека, при почетни услови надвор од кружницата $r > \sqrt{\mu}$ радиус векторот се намалува $\dot{r} < 0$. Ова укажува на две различни поведенија во околина на кружницата, нестабилно за почетни услови внатре во кружницата и стабилно надвор од кружницата. Со други зборови, кружницата $x^2 + y^2 = \sqrt{\mu}^2$ ги привлекува траекториите кон себе, па според тоа, таа претставува стабилен граничен круг. На сликата 2.10 (а) е прикажан граничниот круг кој се реализира во Stuart Landau осцилаторот при $\mu = 1, \omega = 1$

Б. Van der Pol осцилатор:

Моделот на динамичко поведение на Van der Pol осцилаторот е даден со следните нелинеарни диференцијални равенки:

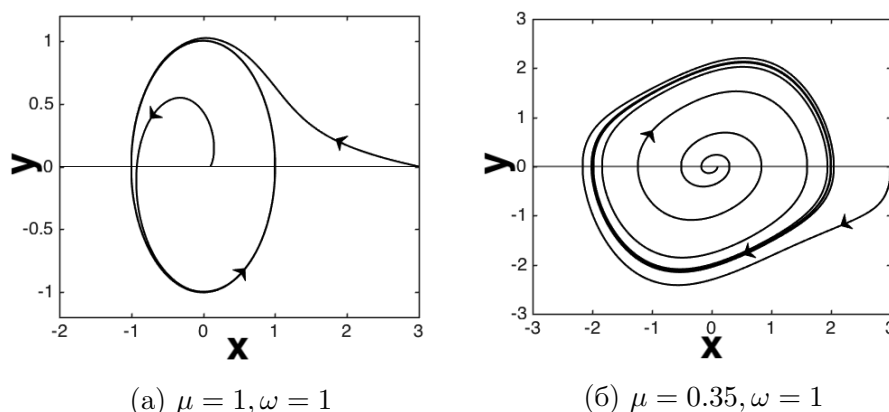
$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \mu(1 - x^2)y - \omega^2 x.\end{aligned}\tag{2.51}$$

Каде со $\mu(1 - x^2)$ е претставено нелинеарното придушвање при $\mu \in \mathbb{R}$, а ω е природната фреквенција на осцилаторот. За поедноставна анализа нека усвоиме дека $\omega = 1$. Овој систем поседува единствена рамнотежна положба, тривијалната $(0, 0)$. Собствените вредности, кои се добиваат со линеаризација во околина на рамнотежната положба, се дадени со:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}[\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}].\tag{2.52}$$

Зависно од изборот на вредности за μ собствените вредности си ја менуваат локацијата во комплексната рамнина, како резултат на што, се реализираат различни видови на рамнотежно поведение во околина на рамнотежната положба. Овде нашата анализа е фокусирана на испитување на можноста за егзистенција на граничен круг во системот. Соодветно на ова, ако се повикаме на теоремата на Poincaré - Bendixon, граничен круг може да се јави ако и само ако рамнотежната положба која е опфатена од граничниот круг е од тип нестабилен фокус или нестабилен јазел. Во конкретниот случај рамнотежното поведение на системот ќе биде од тип нестабилен фокус или нестабилен јазел ако $\mu \in (0, \infty)$. Попрецизно, за вредности на $\mu \in (0, 2]$ рамнотежното поведение е од тип нестабилен фокус, додека за $\mu \in (2, \infty)$ рамнотежното поведение е од тип нестабилен јазел.

Дополнително, појавата на граничен круг може да биде разгледана од аспект на постигнување на енергетски баланс во системот. Во оваа насока, енергетскиот



Слика 2.10: Приказ на граничните кругови кои се реализираат кај парадигмичните Stuart Landau и Van der Pol осцилатори, слики (а) и (б) соодветно. За почетни услови се усвоени $x(0) = 0.1, 3, y(0) = 0$.

потенцијал на системот од аспект на генерирање/дисипирање на енергија ќе го разгледаме преку користење на мерката $s = \partial f_1 / \partial x + \partial f_2 / \partial y$ која воедно е дел и од теоремата на Bendixon. За дадениот систем $s = \mu(1 - x^2)$, што означува дека енергетскиот потенцијал на системот зависи од знакот на нелинеарното придушвање. Имено, за вредности на $|x| > 1, s < 0$ и за $|x| < 1, s > 0$. Со други зборови за почетни услови во околина на рамнотежната положба $|x| < 1$ системот генерира енергија (неговото поведење е нестабилно), од друга страна, за почетни услови подалеку од рамнотежната положба за $|x| > 1$ системот дисипира енергија (неговото поведење е стабилно). На база на ова дискусија не е тешко да се заклучи дека со тек на време траекториите на системот кои отпочнуваат од почетни услови во околина на рамнотежната положба нема да дивергираат кон бескрај бидејќи за $|x| > 1$ системот ќе дисипира енергија и како резултат ќе се воспостави енергетски баланс (вкупната генерирана и дисипирана енергија се исти). Како резултат на воспоставувањето на енергетскиот баланс во системот доаѓа до појава на стабилен граничен круг. На сликата 2.10 (б) е прикажан граничниот круг кој се реализира во Van der Pol осцилаторот при $\mu = 0.35, \omega = 1$.

Глава 3

Бифуркации

Во овој дел ќе ги анализираме основните локални бифуркации кои се јавуваат во нелинеарните системи од втор ред. Анализата ќе ја спроведеме од аспект на промената во динамичкото поведење на нелинеарен систем од втор ред при постепен глатка промена на одреден системски параметар. Во пракса, промената на овој параметар ја дефинира еволуцијата на состојбата на системот која е предизвикана од влијанието на околината. Променливиот параметар има физичко значење и тој може да ја претставува промената на: силината на нелинеарноста, амплитудата на надворешната влезна возбуда, фреквенцијата на осцилирање, коефициентите на спрега и др. Феноменот на квалитативна промена во динамичкото поведење на системот за дадена критична вредност на некој параметар се нарекува бифуркација а параметарот кој ја предизвикува бифуркацијата се нарекува бифуркационен параметар. Генерално, под поимот бифуркација се подразбира: промена во стабилноста на рамнотежните положби (граничните кругови) на системот или/и промена во нивниот број со промена на некој бифуркационен параметар.

Од аспект на влијанието на бифуркациите, кое може да е локално или глобално, корисно е тие да се класифицираат во две основни категории:

- Локални бифуркации: овие бифуркации може да се детектираат и анализираат преку проучување на промената во локалното поведење на рамнотежните положби со промена на некој параметар (може и повеќе да се). Нивното настапување се карактеризира со промена во бројот и стабилноста на рамнотежните положби (граничните кругови).
- Глобални бифуркации: овие бифуркации не можат да се откријат преку анализа на локалното поведење на рамнотежните положби, бидејќи тие настапуваат

при судар на гранични кругови или на граничен круг со рамнотежна положба. Анализата на овие бифуркации се прави во софтверски пакети.

За да ги откриеме механизмите кои водат до квалитативна промена во динамичкото поведење на даден систем и за да извршиме нивна класификација ќе се фокусираме на проучување на локалните бифуркации кои се јавуваат кај континуалните системи од втор ред. Врз основа на оваа анализа, ќе составиме каталог од бифуркации кој подоцна ќе го искористиме при бифуркационата анализа на системи од повисок ред. Каталогот од најкарактеристични бифуркации кај системите од втор ред го сочинуваат следните бифуркации:

- (1) седло-јазел бифуркација (SN),
- (2) суперкритична (PB) и субкритична вила бифуркација (PBS),
- (3) транскритична бифуркација (TB),
- (4) субкритична и суперкритична хопфова бифуркација (HB).

На сличен начин, овие бифуркации може да се јават и анализираат кај дискретните нелинеарни системи од втор ред.

3.1 Седло-јазел бифуркација

Настапувањето на оваа бифуркацијата ќе го разгледаме од аспект на следниот нелинеарен систем од втор ред:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu - x^2, \\ \dot{y} &= -y, \end{aligned} \tag{3.1}$$

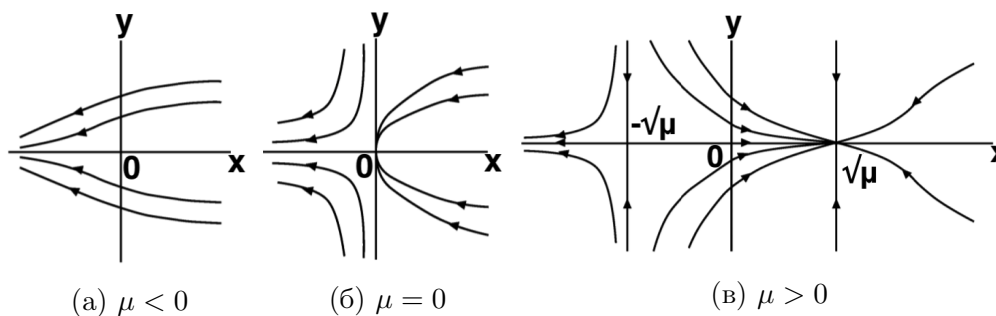
каде $\mu \in \mathbb{R}$ е реален променлив параметар. Рамнотежните положби на овој систем се:

- 1) $(x^*, y^*) = (\sqrt{\mu}, 0)$,
- 2) $(x^*, y^*) = (-\sqrt{\mu}, 0)$.

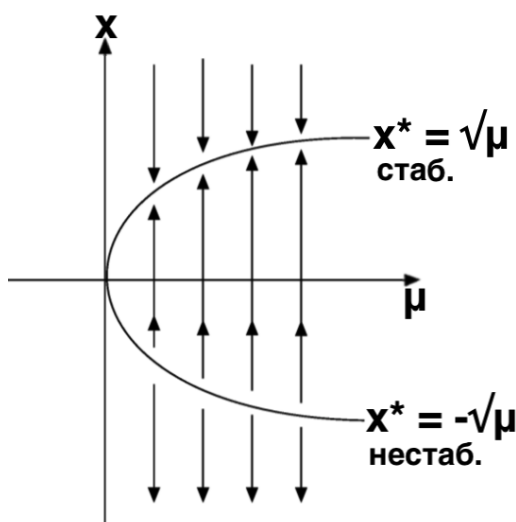
Ако се анализираат рамнотежните положби на системот може да се заклучи дека нивниот број ќе варира зависно од вредноста на μ . Имено, за вредности $\mu < 0$ системот не поседува рамнотежни положби, следно, ако се усвои $\mu = 0$ системот има една рамнотежна положба и тоа тривијалната $(0, 0)$. За вредности на $\mu > 0$ системот поседува две рамнотежни положби, рамнотежните положби 1) и 2) дадени погоре. Типот на рамнотежно поведење се открива преку линеаризација на системот во околина на рамнотежните положби. Со линеаризација на системот и со решавање на карактеристичната равенка за сопствените вредности се добива:

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2x^*. \tag{3.2}$$

Врз основа на одредените сопствени вредности може да се заклучи дека типот на рамнотежно поведење во околина на рамнотежните положби ќе зависи од втората сопствена вредност λ_2 . При $\mu > 0$, типот на рамнотежното поведење кај првата и втората рамнотежна положба е 1) и 2) е стабилен јазел и седло соодветно, слика 3.1 (в). Од друга страна, фазните портрети при $\mu < 0$ и $\mu = 0$ се дадени на сликите 3.1 (а) и 3.1 (б), соодветно.



Слика 3.1: Фазни портрети на системот при промена на параметарот μ кај седло-јазел бифуркацијата.



Слика 3.2: Бифуркационен дијаграм кај седло-јазел бифуркацијата. Стрелките потенцираат дали станува збор за стабилна (стрелките се насочени едни кон други) или нестабилна рамнотежна положба (стрелките се насочени во спротивни насоки).

Ако го разгледаме бифуркациониот дијаграм даден на сликата 3.2, кој дава информација за квалитативната промена во бројот и стабилноста на рамнотежните положби

(гранични кругови) со промена на параметарот μ , може да се заклучи дека бифуркација настапува при критичната вредност на $\mu = 0$. Лево од оваа вредност не постојат рамнотежни положби, додека десно од неа постојат две рамнотежни положби $x^* = \sqrt{\mu}$ и $x^* = -\sqrt{\mu}$ со различна стабилност.

3.2 Вила бифуркација

Постојат два вида на оваа бифуркација: суперкритична и субкритична вила бифуркација. Во продолжение ќе ги разгледаме двата вида на оваа бифуркација:

А) Суперкритична вила бифуркација:

Нека го разгледаме следниот нелинеарен систем од втор ред:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - x^3, \\ \dot{y} &= -y,\end{aligned}\tag{3.3}$$

каде $\mu \in \mathbb{R}$. Рамнотежните положби на овој систем се:

- 1) $(x^*, y^*) = (0, 0)$,
- 2) $(x^*, y^*) = (-\sqrt{\mu}, 0)$,
- 3) $(x^*, y^*) = (\sqrt{\mu}, 0)$.

Бројот на рамнотежните положби на системот ќе варира зависно од вредноста на μ . Имено, за вредности $\mu \leq 0$ системот поседува една рамнотежна положба и тоа тривијалната рамнотежна положба 1). За вредности на $\mu > 0$ системот поседува три рамнотежни положби и тоа 1), 2) и 3). Стабилноста на рамнотежните положби и нивниот тип зависи од вредностите и знаковната определеност на сопствените вредности:

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3x^{*2} + \mu.\tag{3.4}$$

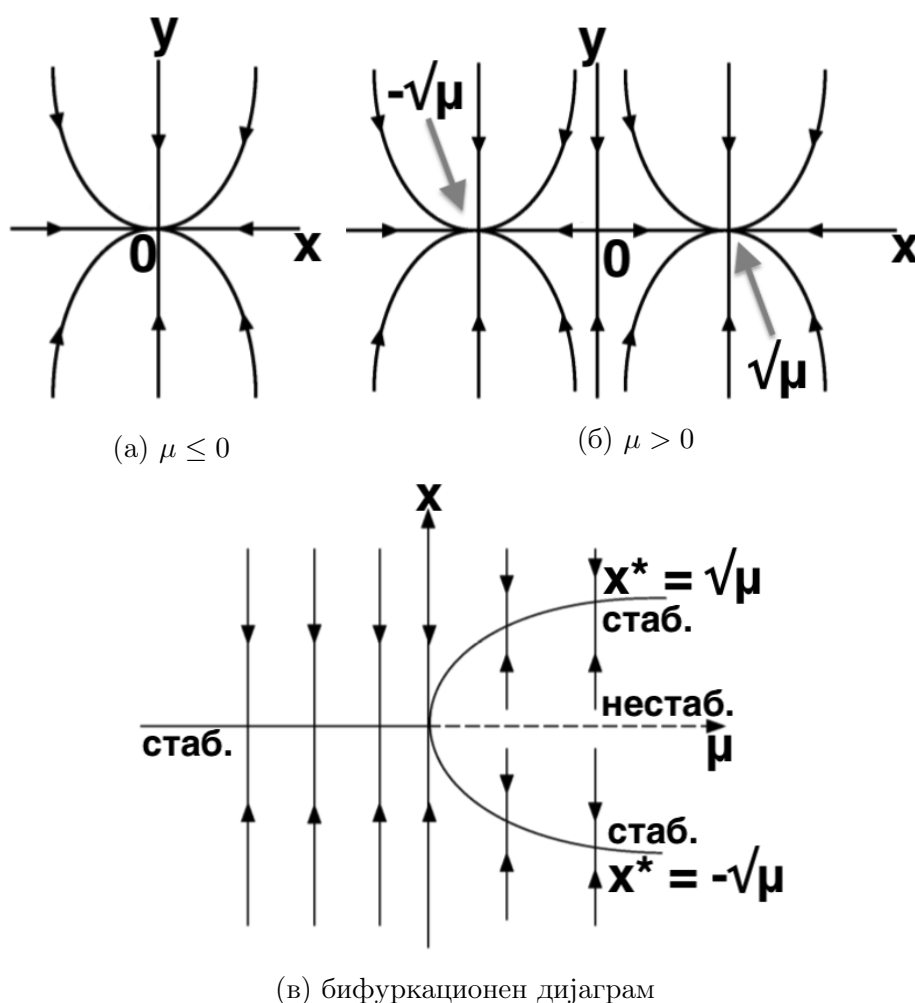
Врз основа на равенката (3.4) може да се заклучи дека при $\mu \leq 0$ типот на рамнотежно поведење во околина на рамнотежната положба 1) е стабилен јазел. За вредности на $\mu > 0$, ако се пресметаат сопствените вредности поединечно за секоја од рамнотежните положби 1), 2) и 3) ќе се заклучи дека типот на рамнотежно поведење во околина на рамнотежните положби е: стабилен јазел, седло и стабилен јазел, соодветно. Фазните портрети на системот при $\mu \leq 0$ и $\mu > 0$ се дадени на сликите 3.3 (а) и 3.3 (б), соодветно.

Б) Субкритична вила бифрукација:

Нека сега го разгледаме нелинеарниот систем:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x + x^3, \\ \dot{y} &= -y. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Анализата на субкритичната вила бифуркација е аналогна на анализата која што ја направивме кај суперкритичната вила бифуркација. Разликата меѓу суперкритич-



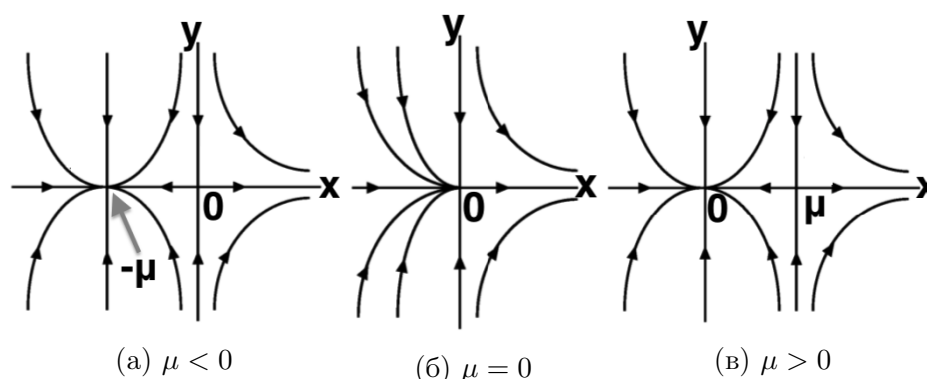
Слика 3.3: На сликите (а) и (б) се дадени фазните портрети на системот при различни вредности μ , додека на сликата (в) е даден бифуркациониот дијаграм на системот кај суперкритичната вила бифуркација.

чната и субкритичната вила бифуркација се состои во тоа што зависно од μ , бројот на рамнотежните положби и нивната стабилност е огледално пресликана кај двете

параметар μ стабилната рамнотежна положба (граничен круг) станува нестабилна при критичната вредност на $\mu = 0$. Промената во стабилноста на рамнотежната положба предизвикува раѓање на две нови стабилни рамнотежни положби (гранични кругови). Од друга страна, кај субкритичната вила бифуркација со промена на бифуркациониот параметар μ нестабилната рамнотежна положба (граничен круг) се стабилизира при критичната вредност на $\mu = 0$. Во овој случај промената во стабилноста на рамнотежната положба предизвикува раѓање на две нови нестабилни рамнотежни положби (гранични кругови).

3.3 Транскритична бифуркација

За разлика од претходно разгледаните бифуркации, кај кои доаѓаше до промена во бројот и во стабилноста на рамнотежните положби, пред и по настапувањето на транскритичната бифуркација бројот на рамнотежните положби останува ист, со тоа што нивната стабилност се менува кога бифуркациониот параметар минува низ критичната вредност.



Слика 3.5: Фазни портрети на системот при промена на параметарот μ кај транскритичната бифуркација.

За да го илустрираме настапувањето на оваа бифуркација, нека го разгледаме следниот нелинеарен динамички систем:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\mu x + x^2, \\ \dot{y} &= -y, \end{aligned} \tag{3.6}$$

каде $\mu \in \mathbb{R}$. Рамнотежните положби на овој систем се:

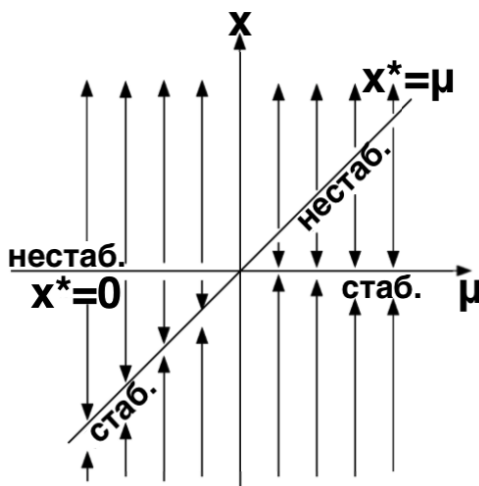
$$1) (x^*, y^*) = (0, 0),$$

$$2) (x^*, y^*) = (\mu, 0).$$

Сопствените вредности на овој систем се:

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2x^* - \mu. \quad (3.7)$$

Од сопствените вредности може да се открие дека рамнотежната положба 1) е нестабилна за $\mu < 0$ и стабилна за $\mu > 0$. Од друга страна, рамнотежната положба 2) е стабилна за $\mu < 0$ и нестабилна за $\mu > 0$. Соодветно на ова, при $\mu < 0$ рамнотежната положба 2) е стабилна додека пак рамнотежната положба 1) е нестабилна. Спротивно на ова, при $\mu > 0$ рамнотежната положба 2) е нестабилна додека пак рамнотежната положба 1) е стабилна. Со други зборови, стабилноста на рамнотежните положби се менува кога бифуркациониот параметар минува низ критичната вредност $\mu = 0$, слика 3.5. Ако го разгледаме бифуркациониот дијаграм, даден на сликата 3.6, може



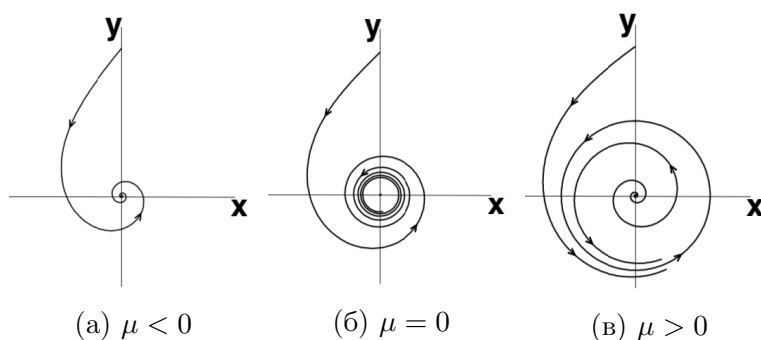
Слика 3.6: Бифуркационен дијаграм кај транскритичната бифуркација.

да се забележи дека за разлика од претходните бифуркации кои ги разгледувавме (седло-јазел и вила бифуркација) кај транскритичната бифуркација нема промена во бројот на рамнотежни положби. Тука, постоечките рамнотежни положби само си ја менуваат нивната стабилност.

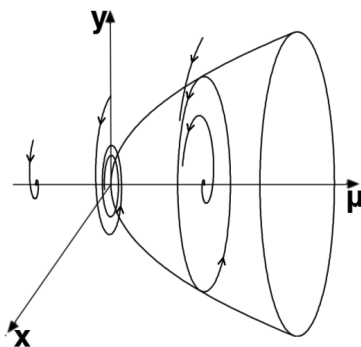
3.4 Хопфова бифуркација

Оваа бифуркација се карактеризира со тоа што промената на стабилноста на тривијалната рамнотежна положба под влијание на μ , резултира во појава на стабилен или нестабилен граничен круг. При настапувањето на хопфовата бифуркација, за

критичната вредност на променливиот параметар μ , доаѓа до премин на комплексните сопствени вредности од левата во десната комплексна полурамнина во случајот на суперкритичната верзија, и премин на комплексните сопствени вредности од десната во левата комплексна полурамнина во случајот на субкритичната верзија на оваа бифуркација. Настапувањето на суперкритичната хопфова бифуркација резултира со раѓање на стабилен граничен. Спротивно на ова, настапувањето на субкритичната хопфова бифуркација резултира во раѓање на нестабилен граничен круг.



Слика 3.7: Фазни портрети на системот при промена на параметарот μ кај суперкритичната хопфова бифуркација.

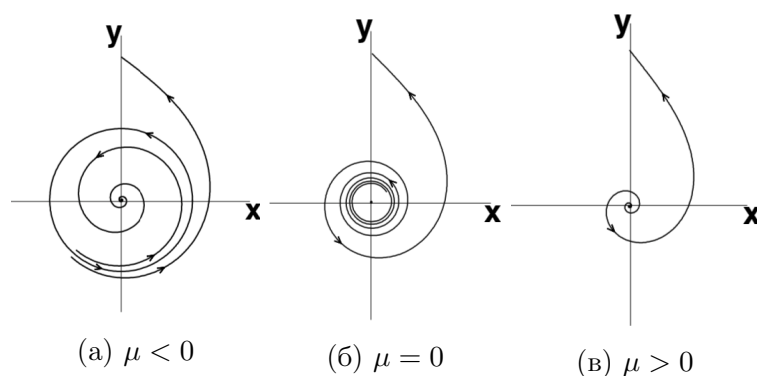


Слика 3.8: Бифуркационен дијаграм кај суперкритичната хопфова бифуркација.

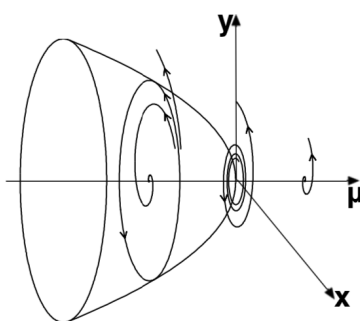
На сликата 3.7, е даден приказ за тоа како се менува фазниот портрет на системот во околина на тривијалната рамнотежна положба, кога во системот се јавува суперкритична хопфова бифуркација. Очигледно е дека со нараснување на променливиот параметар μ поведението на системот квалитативно се менува од стабилен фокус $\mu < 0$ во центар $\mu = 0$, за да потоа при $\mu > 0$ се промени во нестабилен фокус. Доколку, во фазната рамнина се додаде трета димензија, промената на параметарот μ , појавата на суперкритичната хопфова бифуркација е илустрирана на сликата 3.8.

Од сликата може да се забележи дека со зголемување на параметарот μ амплитудата на стабилен граничен круг се зголемува.

При појава на субкритичната хопфова бифуркација системот минува низ серија од квалитативни состојби зависно од променливиот параметар μ , слика 3.9. Очигледно е дека, при $\mu < 0$ во системот постои нестабилен граничен круг и притоа рамнотежната положба $(0, 0)$ е стабилна и е од тип фокус. Подоцна за $\mu = 0$ поведението на рамнотежната положба се менува во центар за да на крај при $\mu > 0$ поведението се промени во нестабилен фокус. Слично како и претходно, ако во фазната рамнина се додаде трета димензија, промената на параметарот μ , појавата на субкритичната хопфова бифуркација е илустрирана на сликата 3.10. Од сликата може да се забележи дека со зголемување на параметарот μ амплитудата на нестабилен граничен круг се намалува.



Слика 3.9: Фазни портрети на системот при промена на параметарот μ кај субкритичната хопфова бифуркација.



Слика 3.10: Бифуркационен дијаграм кај субкритичната хопфова бифуркација.

Ако се прisetиме на анализата со која покажавме дека во парадигмичните осцилатори Van der Pol и Stuart Landau се реализира граничен круг, можеме да заклучиме

дека појавата на граничниот круг и кај двата осцилатори се реализира според искажаната шема на премин на сопствените вредности од левата во десната комплексна полурамнина, која е карактеристична за суперкритичната хопфова бифуркација.

Глава 4

Временско променливи функции на спрега

Интеракциите во кои стапуваат динамичките системи во природата, главно се дефинирани од два аспекта, нивната структура и нивната функција. Првиот аспект, структурниот, ги одредува врските помеѓу системите и нивната меѓусебна комуникација, додека вториот аспект, функционалниот, го одредува законот по однос на кој интеракцијата меѓу системите еволуира. Функционалните механизми може да бидат иницијатори на квалитативни промени во системите, како резултат на кои во системите се јавуваат различни состојби, феномени и физички ефекти, како што се: синхронизација, осцилаторно придрушување, раѓање на осцилации, фрактални димензии и др. Еден од начините на опишување на функционалните механизми е со користење на функции на спрега. Функциите на спрега ги опишуваат физичките законитости со кои се опишува интеракцијата меѓу системите. Познавањето на функциите на спрега може да се искористи за детекција и предвидување на некој физички ефект кој има реперкусија врз биолошките системи. Ова е од интерес особено кај медицинските науки од аспект на подлабоко разбирање на различните физиолошки состојби и болести (на пример во кардио-респираторниот и невролошкиот систем).

Историски гледано, функциите на спрега се воведени при проучување на појави кои се последица на колективна динамика, како што се синхронизација, осцилаторно придрушување и осцилаторно раѓање. Природата на интеракцијата меѓу елементите на спрегнатите системи, опишано преку функциите на спрега, може да доведе до специфична колективна динамика и однесување на системот, дури и кога поединечните елементи се релативно едноставни. Така на пример, синхронизацијата во спрегнатите системи настапува како резултат на слабата интеракција меѓу индивидуалните

осцилатори. Оваа интеракција може да се опише со соодветни функции на спрега кои се карактеризираат со одредена форма и сила на спрегнување. Проучувањето на спрегнатите системи составени од голем број индивидуални елементи доведува и до значајни практични апликации, во кои функциите на спрега ја дефинираат временската еволуција на состојбата кај спрегнатите системи. Еден таков пример е примената на функциите на спрега за воспоставување сигурна комуникација [65]. Примената на функциите на спрега е распространета низ плејада на различни научни области, и не е исклучиво ограничена само на колективната динамика. Во актуелните апликации во литературата, функциите на спрега наоѓаат примена во хемијата, неврологијата, физиологијата, микробиологијата, механиката, климатските науки, електроинженерството, па дури и во општествените науки.

Интеракцијата меѓу системите во основа е резултат на структурна врска преку која се разменува каузална информација, материја и енергија од еден систем на друг. Во голем број на случаи, колективното поведение на динамичките системи не е одредено толку од природата на одделните делови на системот, колку што е одредено од тоа како деловите од системот стапуваат во интеракција. Самиот систем може да има различна природа, да биде нединамички или динамички, да има осцилаторни, неавтономни, хаотични или стохастички карактеристики. Меѓусебната интеракција на деловите од системот може да биде одговорна за серија на премини на системот во и вон, синхронизација, осцилаторно придружување, квазисинхронизирани состојби и др.

Појавата на одреден физички ефект во спрегнатиот систем е условено од постоењето на стабилна состојба во спрегнатиот систем. Стабилноста на спрегнатиот систем, покрај со класичните методи за иследување на стабилност, често се испитува преку динамика со редуцирана димензионалност, на пример, динамика на фазната разлика. Преку проучување на стабилноста на редуцираната динамика може да се изведуваат заклучоци за колективното поведение на системот. Во такви случаи функциите на спрега опишуваат како се постигнува стабилната состојба и кои се потребните услови за спрегнатиот систем да се стабилизира, или обратно, да се дестабилизира. При достапност на податоци за колективното поведение на одреден спрегнат систем, манифестацијата на некој физички ефект се детектира преку мерки кои директно или индиректно ги квантификуваат статистичките карактеристики на разгледуваната состојба.

Многу често, при настапувањето на одреден физички ефект индивидуалните осцилатори конвергираат кон тополошко множество како што е граничниот круг. Дури и по конвергенцијата, спрегнатите динамички системи можат да ја задржат сопствена динамика. Еден таков физички феномен, кој е меѓу најпроучуваните во литерату-

рата, е синхронизацијата. Друг значаен феномен кој е последица на заемнодејствата и може да доведе до раскинување на осцилаторниот процес, е осцилаторното придрушување. Токму функциите на спрега претставуваат платформа преку која интеракциите доведуваат до овие феномени. Во литературата, функциите на спрега често не се споменуваат, ниту се евалуираат, бидејќи најчесто фокусот на истражувањето се поставува на прашањето, дали физичкиот феномен настапува, а не како овој феномен се манифестира. Одговорот на прашањето за тоа како феномените во спрегнатите системи се манифестираат, го даваат функциите на спрега.

Правилата по однос на кои се одвиваат интеракциите се дефинирани од функциите на спрега. Тие се претставени со функционални зависимости, и нивната цел не е да се открие дали постои интеракција меѓу системите, туку како интеракциите се манифестираат и на кој начин ја менуваат состојбата на спрегнатиот систем со тек на време. Така на пример, при разгледување на два спрегнати осцилатори, силината на фазната функција на спрега директно влијае на осцилаторната фреквенција и опишува како се забрзува или забавува едниот од осцилаторите под влијание на другиот. Слично, ако се разгледува состојбената динамика на динамичките системи кои се во интеракција, силината на функцијата на спрега ќе опишува како вредностите на состојбените променливи се зголемуваат или намалуваат под влијание на нивната интеракција.

4.1 Концепт на функциите на спрега

Функцијата на спрега може да биде опишана преку нејзината силина и преку нејзината форма. Силината на спрегнување го опишува интензитетот и опсегот на спрегата, додека формата на функцијата на спрега воведува дополнителна димензија која произлегува од механизмот на интеракцијата. Механизмот на интеракција е опишан со формата на функцијата која ги дава законитоста и начинот како од влезните величини се доаѓа до излезните величини, т.е. како влезното влијание од едниот систем се трансформира во излезен ефект врз вториот систем од спрегата. На таков начин, функцијата на спрега ги опишува квалитативните премини помеѓу различните состојби на системот, на пример премин во и вон синхронизација. Знаејќи ја формата на функцијата на спрега и влезните величини, може да се предвиди, управува или влијае на преминот од една состојба во друга. Преку декомпозиција на функцијата на спрега, може да се утврдат и опишат функционалните придонеси на секој од подсистемите во рамките на спрегнатиот систем. Поради тоа познавањето на функцијата на спрега во суштина означува осознавање на механизмите кои лежат во основа на интеракциите

помеѓу деловите од системот.

Главниот проблем при настапување на одреден физички феномен во спрегнатите динамички системи е како тој феномен може да биде претставен со математички модел кој недвозначно ја раздвојува индивидуалната динамика на системите од динамиката на нивната интеракција. Во општ случај, динамичките системи кои се во взаемна интеракција, се опишани со следниот генерален динамички систем:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + q_1(x, y), \\ \dot{y} &= g(y) + q_2(x, y),\end{aligned}\tag{4.1}$$

каде што функциите f и g се векторските полиња кои ја опишуваат индивидуалната динамика на спрегнатите системи, додека функциите q_1 и q_2 се функциите на спрега кои ја моделираат еволуцијата на взаемната интеракција меѓу системите.

Често пати во литературата се среќава и поинаков запис на равенката (4.1) претставен на следниот начин:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y),\end{aligned}\tag{4.2}$$

каде што функциите f и g дадени на овој начин во себе ја имаат блендирано вкупната динамика, таа на индивидуалните системи и на функциите на спрега. Ова е практичен начин на запишување на спрегнатите системи при проучување на мрежи од спрегнати системи или при развој во целосен Фуриеов ред, при инференција на функциите на спрега од мерени податоци.

4.1.1 Силина и насоченост на спрегата

Силината на спрегнувањето претставува квалитативна мерка на протокот на информации помеѓу спрегнатите системи. Во информациско теориски контекст, таа е дефинирана како пренос на информации помеѓу променливите во даден процес. При теориските разгледувања, силината на спрегнување е претставена со параметар кој врши скалирање на функцијата на спрега. Поради големиот интерес за евалуирање на силината на спрегата, развиени се повеќе методи за таа намена [16, 66, 67]. Доминантната насока на влијание, односно насоката на посланата спрега, соодветствува на насоченоста на заемнодејството. Постојат неколку методи [66, 68] кои од мерењата на релативните големини на заемнодејствата, преку детектирање на заедничка информација, ја евалуираат насоката на спрегата, но не и физичката силина на спрегата. Евалуацијата на силината на спрегата и нејзината доминантна насока се користат

за утврдување дали воопшто постои интеракција и дали навистина системите кои се проучуваат се поврзани или не.

Кога функцијата на спрега е составена од повеќе компоненти, нејзината вкупна сила се проценува преку Евклидова норма од коефициентите на спрега на одделните компоненти. Преку групирање на одделни компоненти, на пример на Фуриеовите компонентни кај периодичните фазни динамики, може да се евалуира силината на спрега на одредена функционална група од интерес. Таа може да ги вклучува коефициентите на спрега од едниот систем, од вториот или од двата. На таков начин може да се процени силината на сопствената компонента на спрегата, силината на компонентата која потекнува од другиот осцилатор или силината на заедничката компонента, како и кривата која го опишува фазното поведење. Ваквите концепти може да се генерализираат и за спреги со повеќе променливи во мрежи на системи кои се во взаемна интеракција.

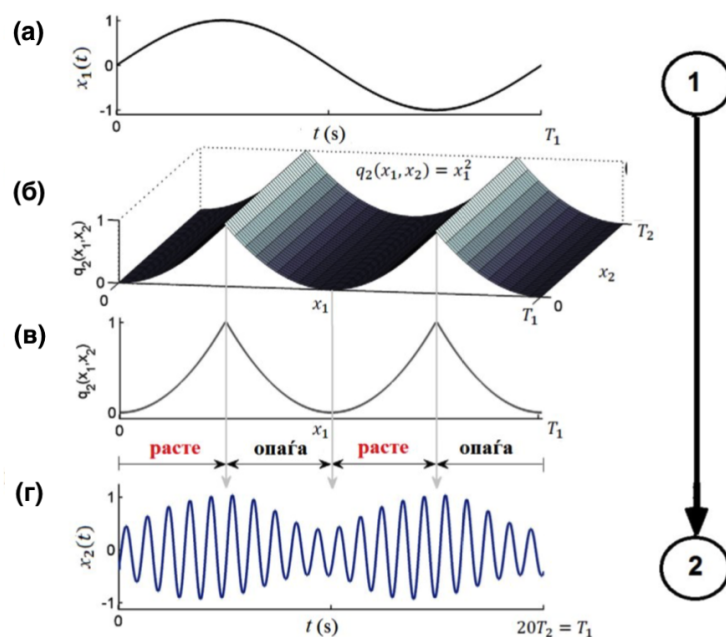
Од практичен аспект, вредно е да се спомене дека дури и кога се инферираат спреги од целосно неспрегнати или слабо спрегнати системи, достапните методи во литературата вообичаено даваат силини на спреги различни од нула. Ова е последица на статистичките карактеристики на користените сигнали. Затоа, потребно е да се процени дали детектираните силини на спрега се вистински или се само резултат на методот на инферирање. Еден начин за надминување на ваквата потешкотија е преку спроведување на тестирање на сурогати, кое генерира независни, неспрегнати сигнали кои имаат исти статистички карактеристики како и оригиналните сигнали. Добиената сила на спрега од ваквите сурогат сигнали треба да се смета за нулто ниво со кое треба да се нормализира добиениот сигнал. Ваквото сурогат тестирање е потребно и за детектирање на функциите на спрега, за да се утврди дали спрегата е вистинска или не.

4.1.2 Состојбени функции на спрега

Проучувањето на динамичките системи преку состојбената динамика изгледа природно на прв поглед, бидејќи во реалните експерименти состојбената динамика може директно да се мери, за разлика од фазната динамика која треба да се изведе од мерењата со извесни трансформации. Проблемот при проучувањето на состојбената динамика е димензионалноста на системите, односно фактот дека проучувањето на повеќе димензионален систем преку ниско димензионалниот простор на мерењата не секогаш ќе овозможи откривање на скриените карактеристики на повеќе димензионалниот систем. За реконструкција на повеќедимензионални динамички системи

од мерењата се користи теоремата на одложено вметнување на Такенс [69], но во практичните апликации со неавтономни и нестационарни динамики теоремата често не ги дава посакуваните резултати. И покрај тоа, проучувањата на земнодејствата во состојбениот домен е широко распространето, особено при проучување на хаотични системи, силни спрега, системи со големи нелинеарности и др.

Состојбените функции на спрега влијаат на динамиката на индивидуалните системи кои стапуваат во интеракција, преку зголемување или намалување на вредностите на состојбените променливи. Состојбената функција на спрега може да биде дефинирана преку најразлични форми. Меѓу нив најчесто застапени се полиномните и дифузните (разлика меѓу состојбите) форми на состојбена функција на спрега. За цели на изложување на состојбените функции на спрега ќе разгледаме пример на спрегнат систем од два Рoіnсаге осцилатори во кои е воспоставен граничен круг. Во изостанок на спрегнување меѓу осцилаторите, тие осцилираат со сопствена амплитуда и фреквенција. Откако ќе се воведо (полиномна) квадратна функција на спрега $q_2(x_1, x_2) = x_1^2$,



Слика 4.1: Илустрација на влијанието на квадратна состојбена функција на спрега при насоченост на спрегата од првиот (1) кон вториот (2) осцилатор. На сликата (а) е дадена состојбата x_1 за еден период T_1 . На сликата (б) е дадена 3D илустрација на функцијата на спрега $q(x_1, x_2)$. На сликата (в) е дадена 2D проекција на функцијата на спрега по x_2 . На последната слика (г) е дадена состојбата x_2 на вториот осцилатор за време од еден период на првиот осцилатор.

првиот осцилатор:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (1 - \sqrt{x_1^2 + y_1^2})x_1 - \omega_1 y_1, \\ \dot{y}_1 &= (1 - \sqrt{x_1^2 + y_1^2})y_1 + \omega_1 x_1,\end{aligned}\tag{4.3}$$

влијае на состојбата x_2 на вториот осцилатор:

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= (1 - \sqrt{x_2^2 + y_2^2})x_2 - \omega_2 y_2 + \xi x_1^2, \\ \dot{y}_2 &= (1 - \sqrt{x_2^2 + y_2^2})y_2 + \omega_2 x_2.\end{aligned}\tag{4.4}$$

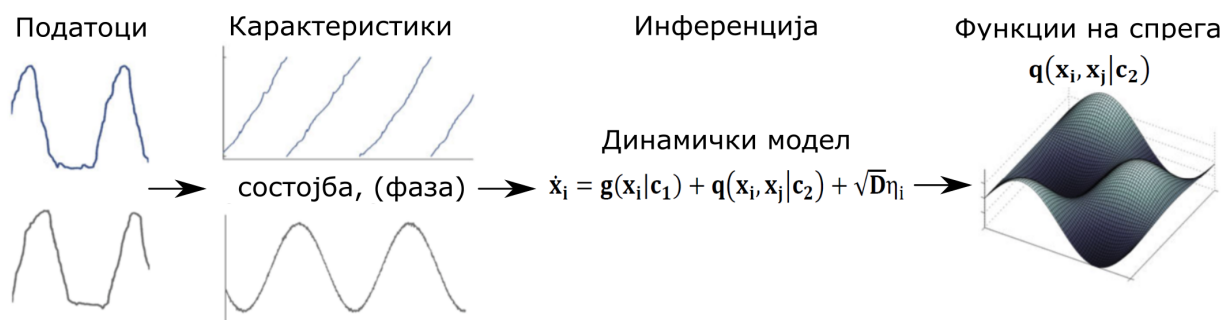
Анализата на влијанието на првиот осцилатор врз состојбата x_2 на вториот осцилатор е направено преку нумеричка анализа на спрегнатите осцилатори, притоа усвојуваќи дека првиот осцилатор е 20 пати побрз од вториот ($\omega_2/\omega_1 = 20$) и вредноста на силината на спрегата е $\xi = 5$, слика 4.1.

Формата на разгледуваната функција на спрега е квадратна и се менува само по должината на оската x_1 , што е прикажано на сликите 4.1 (б) и (в). На сликата 4.1 (г) е прикажано како првиот осцилатор влијае на вториот со тек на времето преку функцијата на спрега. Може да се забележи дека, кога квадратната функција на спрега $q_2(x_1, x_2)$ расте, тогаш и вредноста на состојбата x_2 на вториот осцилатор расте. Аналогно, кога функцијата на спрега $q_2(x_1, x_2)$ опаѓа, тогаш и вредноста на состојбата на вториот осцилатор опаѓа.

Глава 5

Инференција на параметри на модел со позната структура

Инференцијата на функциите на спрега подразбира анализа на временската историја на состојбата на спрегнатите системи, со цел да се спроведе реконструкција на динамички модел кој ја опишува вкупната динамика која е сочинета од индивидуалната динамика на спрегнатите системи и функцијата на спрега. Главниот столб на процедурата на определување на динамички модел на спрегнатиот систем, е методот на динамичка инференција (еквивалентно: динамичко моделирање, динамичка естимација или динамичко филтрирање).



Слика 5.1: Шематски приказ на процедурата на идентификација на спрегнат динамички систем.

Процедурата на определување на динамички модел за спрегнатите системи започнува со прибирање на податоци. Следно, од податоците се вадат карактеристики кои најверно ја опишуваат динамиката на системот. Временската историја на динамичката еволуција на спрегнатиот систем се крие во состојбениот вектор (или фазниот). По-

натаму, со користење на метод за инференција се инферира динамички модел од кој се добива индивидуалната динамика $\mathbf{g}(\mathbf{x}_i|\mathbf{c}_1)$ на спрегнатите системи и функцијата на спрега $\mathbf{q}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j|\mathbf{c}_2)$. Многу често е потребно претпроцесирање на податоците пред воопшто да се реконструираат временските серии на состојбените променливи. Така, на пример, ако системите имаат осцилаторна природа, од податоците се извршува проценка на фазите на периодичните сигнали. Постојат случаи во кои е потребно да се изврши дополнително претпроцесирање, како на пример, филтирање на податоците, отстранување на артефакти, потиснување на шумот, филтрирање на фреквенцијата на градската напонска мрежа, и др. После обработката на податоците и добивање на временските серии на состојбените променливи, тие се користат од методот на инференција, преку кој се определува динамичкиот модел.

Целта на методот на инференција е да се реконструира модел кој го опишува динамичкиот систем. Генерално, постојат два вида методи на инференција. Кај првите методи моделот е црна кутија, дадени се само влезно-излезните податоци, на база на кои се мапира влезно-излезна функција која најверодостојно ги опишува податоците. Кај вторите методи, структурата на моделот е позната (моделот е сива кутија) но не се познати параметрите на моделот, па во таков случај методот за инференција врши реконструкција на параметрите на воспоставениот модел.

Ние во рамките на оваа дисертација ќе користиме метод на инференција при кој структурата на моделот е однапред позната и останува само да се естимираат неговите параметри. Методот за кој ќе стане збор во продолжение е динамичкиот Баесов метод на инференција (ДБИ) [24]. Кај овој метод целта е да се определат параметрите на даден модел опишан со обични или стохастички (при шум) диференцијални равенки. Притоа, кај ДБИ динамиката на системот се моделира со множество на базни функции кои се линеарно независни. Базните функции најчесто се полиномни функции или некои други нелинеарни функции ако се врши реконструкција на состојбата, или пак се Фуриеови серии ако се врши реконструкција на фазата. Генерално, базните функции може да се линеарни или нелинеарни и вообичаено се одредуваат директно од претпоставениот модел на динамичко поведење. Комбинациите на базните функции, соодветно параметризирани преку непознатите параметри \mathbf{c} , ги даваат функциите на индивидуалните спрегнати системи и функциите на спрега.

Како и во останатите методи на инференција базирани на позната структура на моделот, така и кај ДБИ, изборот на вистинската структура на моделот е една од главните потешкотии. Наивниот пристап при изборот на модел би бил да се состави големо множество на потенцијални базни функции и да се остави на избраниот метод на инференција да одлучи кои од нив се значајни. Овој пристап генерално може да

доведе до појава на два сериозни проблеми и тоа: 1) методот никогаш да не конвергира кон вистинските вредности на \mathbf{c} , 2) методот ќе определи погрешен модел бидејќи во множеството не се застапени вистинските базни функции или постојат линеарно зависни базни функции.

Во контекстот на анализата која ние ќе ја спроведеме, структурата на моделот ќе ни биде позната. Притоа, ДБИ методот ќе се користи да врши итеративно инферирање на множеството на непознати параметри на моделот \mathbf{c} врз основа на лизгачки прозорец со фиксна големина од минати вредности на состојбата. Понатаму, една од тековно реконструираниите вредности на параметрите на функцијата на спрега, ќе се користи како влез во управувачот кој ќе продуцира вредности преку кои последователно ќе врши модулација на правилото по однос на кое се одвива интеракцијата меѓу системите, се со цел да не се дозволи системот да премине од осцилаторна во состојба на мирување.

5.1 Имплементација на динамичкиот Баесов метод за инференција

Процедурата на инферирање на множеството параметри \mathbf{c} започнува од временските серии загадени со шум на два M -димензионални спрегнати системи кои се опишани со следната стохастичка диференцијална равенка:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j | \mathbf{c}) + \sqrt{\mathbf{D}}\eta_i = \mathbf{g}(\mathbf{x}_i | \mathbf{c}_1) + \mathbf{q}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j | \mathbf{c}_2) + \sqrt{\mathbf{D}}\eta_i, \quad (5.1)$$

каде $i \neq j = 1, 2$, \mathbf{c} е векторот од непознати параметри и $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j | \mathbf{c})$ се базните функции кои ја опишуваат индивидуалната динамика на спрегнатите системи $\mathbf{g}(\mathbf{x}_i)$ и функциите на спрега $\mathbf{q}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$. За шумот се претпоставува дека е бел Гаусов и притоа е параметризиран со матрицата на дифузија \mathbf{D} .

Целта на овој метод е да се изврши инференција на моделот (5.1). Притоа, инференцијата се прави во просторот на состојбите, па така базните функции $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j | \mathbf{c})$ се состојат од базните функции на спрегнатите системи $\mathbf{g}(\mathbf{x}_i)$ и функциите на спрега $\mathbf{q}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ кои се однапред познати. Вообичаено, методите за инференција се користат за решавање на физички проблеми во кои моделот на динамичко поведење не е однапред познат. Спротивно на ова, во рамките на нашата анализа, моделот е однапред познат а со тоа и базните функции.

Ако $2 \times M$ временски серии $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_n \equiv \mathbf{x}(t_n)\}$ ($t_n = nh$) се донесат на влез на ДБИ методот за инференција, главната задача на овој метод [24, 70] е да изврши

реконструкција на непознатите параметри $\mathcal{M} = \{\mathbf{c}, \mathbf{D}\}$. Процесот на инференција се заснова на примената на Баесовата теорема која се користи за да се пресмета таканаречената постериорна густина на веројатност $p_{\mathcal{X}}(\mathcal{M}|\mathcal{X})$ на непознатите параметри \mathcal{M} , која се одредува на база на априорната густина на веројатност $p_{\text{prior}}(\mathcal{M})$ која ги опфаќа сите априорни информации за непознатите параметри базирани на претходни набљудувања, и функцијата на веројатност $\ell(\mathcal{X}|\mathcal{M})$ која претставува условна густина на веројатност да се набљудуваат податоците \mathcal{X} во случај на познати параметри \mathcal{M} на динамичкиот систем:

$$p_{\mathcal{X}}(\mathcal{M}|\mathcal{X}) = \frac{\ell(\mathcal{X}|\mathcal{M}) p_{\text{prior}}(\mathcal{M})}{\int \ell(\mathcal{X}|\mathcal{M}) p_{\text{prior}}(\mathcal{M}) d\mathcal{M}}.$$

При доволно мала вредност на чекорот на интеграција h , може да се изврши прецизна дискретизација на моделот (5.1) со помош на Хеуновата постапка при која изводите се апроксимираат со $\mathbf{x}_n^* = (\mathbf{x}_{n+1} + \mathbf{x}_n)/2$. Дискретизирианиот модел добиен со оваа постапка е даден во продолжение:

$$\mathbf{x}_{i,n+1} = \mathbf{x}_{i,n} + hf(\mathbf{x}_{i,n}^*, \mathbf{x}_{j,n}^*|\mathbf{c}) + h\sqrt{\mathbf{D}}\mathbf{z}_n, \quad (5.2)$$

каде $\mathbf{z}_n \equiv \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{z}(t) dt$ е стохастичкиот интеграл на шумот во времето помеѓу два чекори на интеграција.

Разгледуваниот шум \mathbf{z}_n е статистички независен и веројатноста е дадена со производот на веројатноста за набљудување на \mathbf{x}_{n+1} во секој временски момент, за сите вредности на n . Според тоа, заедничката густина на веројатноста \mathbf{z}_n се користи за да се најде заедничката густина на веројатноста на процесот во однос на $\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n$ преку воведување на $P(\mathbf{x}_{n+1}) = \det(J_{\xi}^{\mathbf{x}})P(\xi^i)$, каде $J_{\xi}^{\mathbf{x}}$ е Јакобијан (матрица од први парцијални изводи) од трансформираниите променливи кои може да се пресметаат од познатите полиномни базни функции. За мали вредности на чекорот на интеграција ($h \rightarrow 0$) детерминанта на Јакобијанот може да биде соодветно апроксимирана преку производот од нејзините дијагонални членови: $\det(J_{\xi_k(t_n)}^{\mathbf{x}_k(t_n)}) \approx \prod_l \frac{\partial \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_{\cdot,n})}{\partial \mathbf{x}}$. Во продолжение субиндексот точка во \mathbf{x} . го претставува релевантниот индекс i или j . Притоа, базните функции се параметризирани како $\mathbf{f}(\mathbf{x}|\mathbf{c}) = \mathbf{c}\mathbf{f}(\mathbf{x}.)$.

Тогаш негативната логаритамска веројатност $S = -\ln \ell(\mathcal{X}|\mathcal{M})$ може да се изрази како:

$$S = \frac{N}{2} \ln |\mathbf{D}| + \frac{h}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\mathbf{c}_k \frac{\partial \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_{\cdot,n})}{\partial \mathbf{x}} + [\dot{\mathbf{x}}_n - \mathbf{c}_k \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_{\cdot,n}^*)]^T (\mathbf{D}^{-1}) [\dot{\mathbf{x}}_n - \mathbf{c}_k \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_{\cdot,n}^*)] \right), \quad (5.3)$$

каде што изводот е апроксимиран од прибраните податоци за состојбата преку $\dot{\mathbf{x}}_n = (\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n)/h$.

Ако се дадени повеќевеличинска нормална распределба за априорната веројатност на параметрите \mathbf{c} , со средна вредност $\bar{\mathbf{c}}$ и коваријансната матрица $\Sigma_{\text{prior}} \equiv \Xi_{\text{prior}}^{-1}$, тогаш минимумот на S се пресметува рекурзивно од следните равенки:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{h}{N} (\dot{\mathbf{x}}_n - \mathbf{c}_k \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_{*,n}^*))^T (\dot{\mathbf{x}}_n - \mathbf{c}_k \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_{*,n}^*)), \\ \mathbf{c}_k &= (\Xi^{-1})_{kw} \mathbf{r}_w, \\ \mathbf{r}_w &= (\Xi_{\text{prior}})_{kw} \mathbf{c}_w + h \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_{*,n}^*) (\mathbf{D}^{-1}) \dot{\mathbf{x}}_n + \\ &\quad - \frac{h}{2} \frac{\partial \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_{*,n})}{\partial \mathbf{x}}, \\ \Xi_{kw} &= (\Xi_{\text{prior}})_{kw} + h \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_{*,n}^*) (\mathbf{D}^{-1}) \mathbf{f}_w(\mathbf{x}_{*,n}^*), \end{aligned} \tag{5.4}$$

каде сумацијата над $n = 1, \dots, N$ се подразбира а индексите k and w означуваат имплицитна сумација (сумација внатре во самите равенки). За почетната априорна веројатност се препоставува дека е неинформативна $\Xi_{\text{prior}} = 0$ и притоа $\bar{\mathbf{c}}_{\text{prior}} = 0$. За даден блок од податоци \mathcal{X} , се аплицира (5.4) со цел да се одреди постериорната повеќевеличинска веројатност $\mathcal{N}_{\mathcal{X}}(\mathbf{c}|\bar{\mathbf{c}}, \Xi)$, која експлицитно ја дефинира густината на веројатност на секој параметар во моделот (5.1).

Кога секвенцијалните податоци доаѓаат од низа мерења во форма на повеќе последователни блокови на информација, тогаш (5.4) се применува на секој од тие блокови, во поединечни временски прозорци. Ако за системот се знае дека е стационарен, тогаш постериорната густина на секој блок се зема како априорна за секој следен. На тој начин, неизвесностите во параметрите на системот постепено се намалуваат со текот на времето, така што се повеќе и повеќе податоци се вклучени во тековните пресметки.

Но, доколку системот е временски променлив, тогаш методот мора да ја следи временската еволуција на параметрите \mathbf{c} и истовремено да спроведува раздвојување на временско променливата динамика на параметрите од таа на шумот. Ова се постигнува така што се изменува процедурата за пропација меѓу коваријансата на тековната постериорна $\Sigma_{\text{prior}}^{n+1}$ и следната априорна веројатност Σ_{post}^n [24]. За таа цел, се дефинира квадратна, симтерична позитивно дефинитна матрица Σ_{diff} која детерминира колку секој од параметрите дифузира. Па така, следната априорна веројатност на параметрите е конволуција од двете тековни нормални повеќевеличински распределби, Σ_{post} и Σ_{diff} : $\Sigma_{\text{prior}}^{n+1} = \Sigma_{\text{post}}^n + \Sigma_{\text{diff}}^n$. Матрицата која ја детерминира дифузијата на параметрите е изразена преку $(\Sigma_{\text{diff}})_{i,j} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$, каде σ_i е стандардната девијација на дифузијата на параметарот c_i над временскиот прозорец t_w и ρ_{ij} ја претставува корелацијата помеѓу

промените во параметрите c_i и c_j .

На сличен начин, ДБИ методот може да се аплицира за инферирање на фазната динамика на некој природно осцилаторен спрегнат динамички систем. Според теоријата за сведување на динамичките системи од просторот на состојбите во просторот на фазите, кога интеракцијата помеѓу осцилаторите е доволно слаба, нивното поведе-ние може да биде опишано преку нивната фазна динамика [3, 71]. Генералниот фазен модел на еден спрегнат динамички систем е даден со следниот систем од диференцијални равенки:

$$\dot{\phi}_i = \omega_i + f_i(\phi_i) + q_i(\phi_i, \phi_j) + \sqrt{\mathbf{D}}\eta_i, \quad (5.5)$$

каде ϕ_i е фазата на i -тиот осцилатор, ω_i е неговата фреквенција а $f(\phi_i)$ е неговата динамика. Со $q_{i,j}$ е дадена функцијата на спрега која го опишува влијанието на j -тиот осцилатор врз i -тиот осцилатор. За шумот, како и во случајот на состојбена инференција, се претпоставува дека е бел Гаусов и притоа е параметризиран со матрицата на дифузија \mathbf{D} .

Заради периодичната природа на системот, функцијата на спрега може да се претстави со развој во Фуриеов ред:

$$q_{i,j}(\phi_i, \phi_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} c_{i;k,s} e^{i2pk\phi_i} e^{i2ps\phi_j}. \quad (5.6)$$

Претпоставувајќи дека динамиката на системот е соодветно опишана со конечен број K на Фуриеови членови, фазната динамика на системот (5.5) може да се презапише како конечна сума од базни функции:

$$\dot{\phi}_i = \sum_{k=-K}^K c_k^i \Phi_{i,k}(\phi_i, \phi_j) + \sqrt{\mathbf{D}}\eta_i(t), \quad (5.7)$$

каде $i = \{1, 2\}$, $\Phi_{1,0} = \Phi_{2,0} = 1$, $c_0^i = \omega_i$, и останатите $\Phi_{i,k}$ и c_k^i се K -те најважни Фуриеови компоненти.

Непознатите параметри c_k^i во равенката (5.7) може да се определат со помош на алгоритамот опишан погоре со равенките (5.4) и (5.3), со таа разлика што овие равенки, за инференција во просторот на состојбите, треба да се прилагодат соодветно, за да се спроведе инференција во просторот на фазите.

Понатамошни технички детали за имплементацијата на ДБИ методот за инференција како на состојбената така и на фазната динамика и негова реална примена во апликации може да се најдат во [72].

5.1.1 Карактеризација на интеракциите

Целта на претходно дискутираниот метод на инференција е опишување на интеракциите меѓу осцилаторите во динамичка околина која е предмет на надворешни детерминистички и стохастички пертурбации. Интеракциите ја дефинираат внатрешната врска меѓу неколку или голема група на осцилатори, и притоа претставуваат темел на теоријата со која се опишуваат феноменлошките состојби (синхронизација и др.) и протокот на информацијата.

Природата на интеракциите зависи од физичките особини на осцилаторните системи, нивната функционалност и како тие реагираат на пертурбации. Централната идеја е користејќи ги инферираните параметри од $\mathcal{N}_{\mathcal{X}}(c|\bar{c}, \Xi)$ да се изврши карактеризација на интеракциите. Според равенката (5.5), динамиката на поединечните осцилатори се инферира независно од динамиката на нивната интеракција. Па така, за карактеризирање на интеракцијата меѓу осцилаторите може да се користат, од вкупниот број на инферирани параметри, само оние параметри кои се однесуваат на содејството меѓу осцилаторите.

Генерално, интеракциите меѓу системите се карактеризираат од аспект на повеќе мерки, меѓу кои: силина и насоченост на спрега и сличност на формите на функциите на спрега. Зависно од тоа дали спрегнувањето е во една или двете насоки, може да дефинираме еднонасочно или двонасочно спрегнување, соодветно.

Мерката за силина на спрегнување врши квантификација на влијанието меѓу осцилаторите во некоја насока. Силината на спрегнување се пресметува со помош на Евклидова норма:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{21} &= \sqrt{c_1^2 + c_3^2 + \dots}, \\ \varepsilon_{12} &= \sqrt{c_2^2 + c_4^2 + \dots},\end{aligned}\tag{5.8}$$

каде со непарните коефициенти на спрега $c_1^2 + c_3^2 + \dots$ е дефинирано спрегнувањето од вториот кон првиот осцилатор, а силината на спрегнување е дадена со ε_{21} , додека со парните коефициенти на спрега $c_2^2 + c_4^2 + \dots$ е дефинирано спрегнувањето од првиот кон вториот осцилатор, а силината на спрегнување е дадена со ε_{12} .

Мерката за насоченост на спрегнувањето дава корисни информации за доминантната насока во која се одвива интеркацијата. Таа се дефинира така што се пресметува нормализираната вредност на доминантната силина на спрегнување:

$$D = \frac{\varepsilon_{12} - \varepsilon_{21}}{\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}}.\tag{5.9}$$

Ако $D \in (0, 1]$ тогаш доминантната насока на спрегнување е од првиот кон вториот осцилатор ($1 \rightarrow 2$), или спротивно, ако $D \in [-1, 0)$ тогаш доминантната насока на спрегнување е од вториот кон првиот осцилатор ($2 \rightarrow 1$).

Во пракса, при анализа на осцилаторни сигнали, може да се инферира позитивна сила на спрегнување иако осцилаторите се распрегнати (не се во интеракција). Затоа, неопходно е да се воспостави ниво на значајност, кое ќе дефинира дали инферираната сила на спрега е вистинска и се јавува како резултат на феноменот кој настапува во спрегнатиот систем. Најчесто, нивото на значајност се одредува со пресметување на рандомизирани сурогати од оригиналните сигнали, на база на кои се пресметува силината на спрегнување. Ако вредноста на силината на спрега се наоѓа над сурогат прагот, средна вредност плус две стандардни девиации, тогаш инферираната сила на спрегнување е вистинска.

Функцијата на спрега q_i може да се опише преку вкупната сила на спрегнување и нејзината форма. Вкупната сила на спрегнување се проценува со Евклидова норма, додека мерката која ја квантифицира формата на функцијата на спрега е индексот на сличност ρ . Овој индекс е мерка за сличноста меѓу две функции на спрега q_1 и q_2 , независно од вкупната сила на спрегнување. Тој е дефиниран како корелационен коефициент:

$$\rho = \frac{\langle \tilde{q}_1 \tilde{q}_2 \rangle}{\|\tilde{q}_1\| \|\tilde{q}_2\|}, \quad (5.10)$$

каде $\langle q \rangle$ означува усреднување по однос на двете фази $0 \leq \phi_1, \phi_2 \leq 2\pi$, притоа $\tilde{q} = q - \langle q \rangle$ и $\|q\| = \langle qq \rangle^{1/2}$.

5.1.2 Детекција на синхронизација

Способноста на ДБИ методот да ја инферира временската еволуција на параметрите на системот, е од големо значење за да се набљудува транзицијата во и вон синхронизација со тек на време. По спроведената инференција на параметрите на моделот (5.5), дадени со повеќе величинската нормална распределба $\mathcal{N}_{\mathcal{X}}(c|\bar{c}, \Xi)$, може да се детектира дали динамиката на системот за инферираните параметри прави транзиција во и вон синхронизација.

За секое множество на инферирани параметри, со тек на време, може да се провери дали припаѓа на параметарскиот простор на синхронизација (Арнолдов јазик). Критериумот за одредување дали во системот настапува синхронизација е детерминиран преку семплирање (пресметување за голем број на множества на инферирани параметри) на постериорната веројатност, и проверка на нејзиното препокривање со

границата на параметарскиот простор на синхронизација:

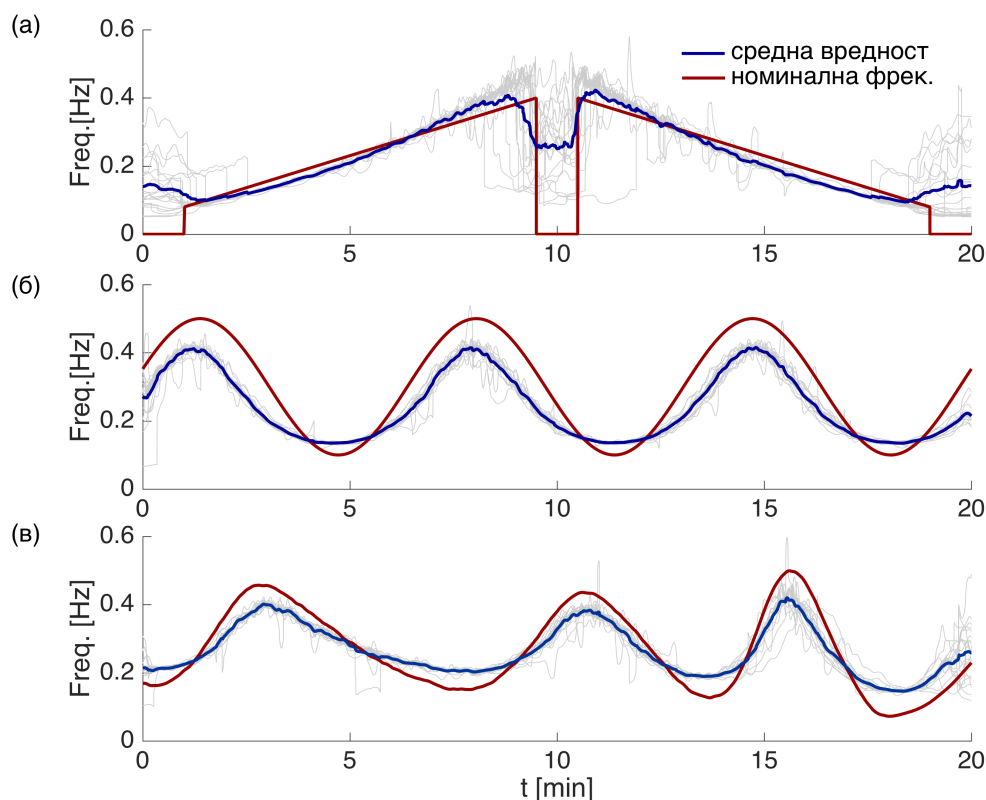
$$p_{sync} = p_{\mathcal{X}}(s = 1) = \int s(c) \mathcal{N}_{\mathcal{X}}(c | \bar{c}, \Xi) dc, \quad (5.11)$$

каде $s(c) = \{1, 0\}$ дефинира дали множеството од инферирани параметри c се наоѓа во $s(c) = 1$ или вон $s(c) = 0$ параметарскиот регион на синхронизација. Со други зборови, ако $s(c) = 1$ тогаш спрегнатиот систем е синхронизиран, и спротивно, ако $s(c) = 0$ тогаш системот не е синхронизиран. Одредувањето на коефициентот $s(c)$ се прави нумерички, преку анализа на решението на динамичкиот систем над дводимензионален торус. Сеопфатно, алгоритмот за одредување на $s(c)$ е даден во [24, 73].

5.1.3 Анализа на кардиореспираторната интеракција

Како и многу други биолошки термодинамички отворени системи, така и кардиореспираторниот систем е подложен на пертурбации (варијации) кои влијаат на еволуцијата на состојбата во овој систем. Ова главно се должи на неизолираноста на срцето и белите дробови, кои разменуваат материја, електрични импулси и топлина меѓусебе, со останатите органи и со околината. Најчесто проучуваната варијација во кардиоваскуларниот систем е срцевата, и нејзината поврзаност со респираторната синус аритмија (РСА) [74], која пак претставува важен биомаркер кој го опишува влијанието на фреквенцијата на дишење врз варијацијата на фреквенцијата во срцевите осцилации [75, 76]. Покрај срцевата варијација, постојат и други форми на варијации кои имаат влијание врз неколку аспекти од кардиоваскуларниот систем. Влијанието на тие варијации може да се детектира преку анализа на кардиореспираторната интеракција. Од претходно, е познато дека кардиореспираторната интеракција се моделира со функција на спrega која е со временски променлива форма, за која е покажано дека претставува главен причинител на појавата на транзицијата во и вон синхронизација меѓу кардио и респираторниот систем [24, 73].

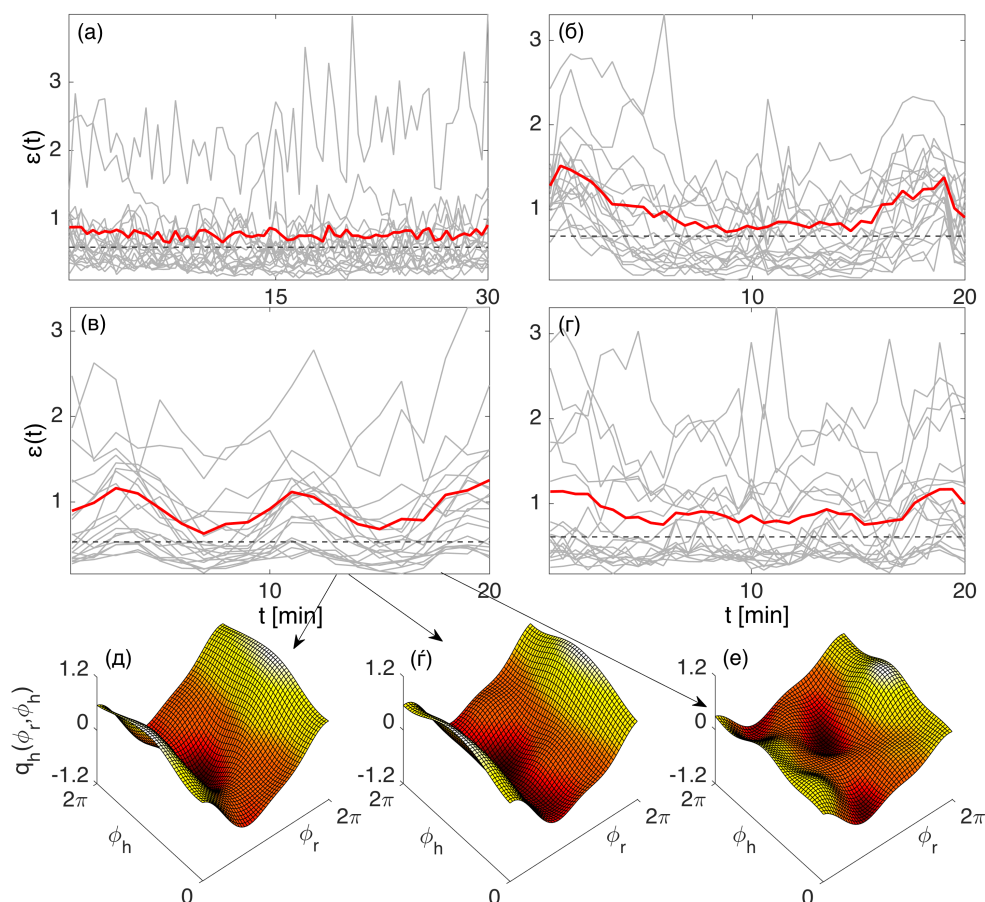
Неодамна, во студијата која ја спроведовме над 20 млади и здрави субјекти, ги проучивме различните типови на варијации во кардиореспираторните интеракции како резултат на четири предефинирани протоколи на дишење. Специфично се фокусиравме на проучување на ефектите во кардиореспираторните спрегнувачки функции кои се предизвикани од спонтаното (слободно) дишење и три други временски променливи протоколи (пертурбации) на дишење во кои фреквенцијата на дишење се менува како: (1) линеарна функција, (2) синусна функција, (3) апериодична (хаотична) функција, слика 5.2. Со цел да ги проучиме временските промени во кардиореспираторните интеракции при усвоените протоколи на дишење, беа усвоени соодветни методи



Слика 5.2: На сликата е дадена споредба меѓу симулираните, реалните и усреднетите фреквенции на дишење кај трите протоколи на дишење (1), (2) и (3), кои се дадени на сликите (а), (б) и (в), соодветно. Протоколите на дишење се дадени со црвени линии, со сиви линии се дадени фреквенциите на дишење на различните субјекти и со сини линии се дадени усреднетите фреквенции по субјекти.

за анализа на временски променливата осцилаторна динамика на интеракцијата меѓу кардио и респираторниот систем. Најпрво, за одредување на временски променливата фреквенција на осцилирање кај срцето и белите дробови, која е неопходна за дефинирање на фазната динамика, употребивме време-фреквенција Вејвлет трансформација [77, 78]. Потоа, за реконструкција на кардиореспираторната функција на спрега, го користевме адаптивниот динамички Баесов метод [24, 78], кој се адаптира на временската промена на осцилациите така што детермира оптимален временски прозорец за инференција [79]. Реконструираната кардиореспираторна функција на спрега претставува силна алатка при анализа на механизмите со кои респираторните осцилации ги забрзуваат и успоруваат срцевите осцилации.

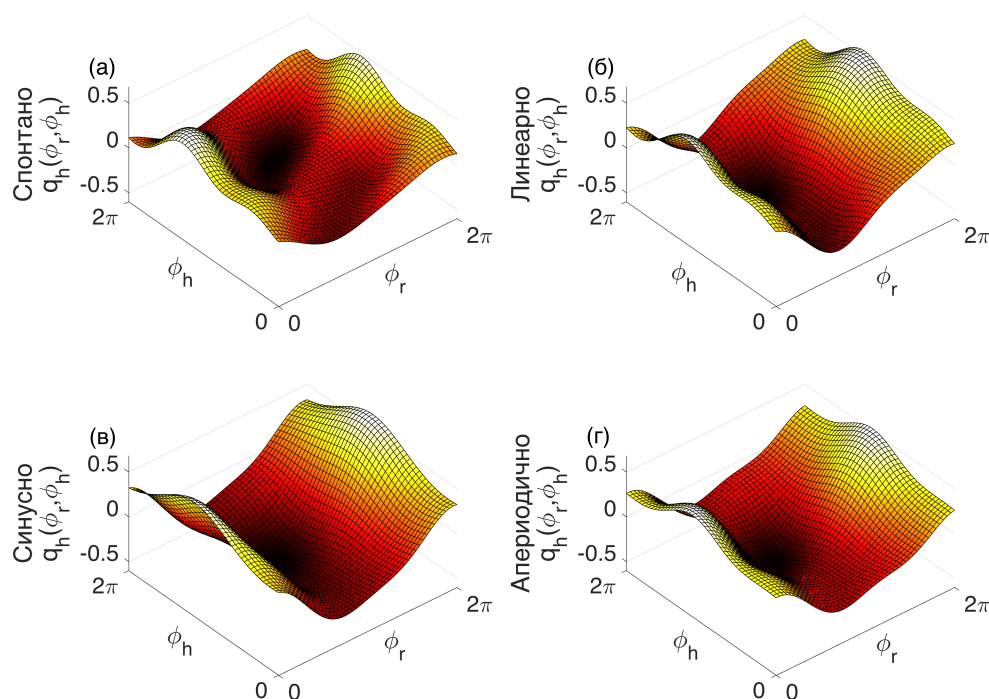
Осцилаторните интеракции меѓу кардио и респираторниот систем ги анализиравме од аспект на силината на спрегнување меѓу овие два системи. Од сликата 5.3 може



Слика 5.3: Кардиореспираторна интеракција и нејзината временска променливост според четирите протоколи на дишење: (а) спонтано, (б) линеарно, (в) синусно и (г) апериодично. Сивите линии ја претставуваат силината на спрегата за различните субјекти, додека црвените линии ги претставуваат усреднетите вредности на засилувањето на спрега. Испрекинатите линии го претставуваат сурогат нивото на сигнификантност на спрегата. Трите графички (д), (р) и (е) прикажуваат усреднети функции на спрега по субјекти при синусно дишење во три временски моменти индицирани со стрелките.

да се забележи дека естимираното засилување на спрега, во избраната насока на спрегнување, од белите дробови кон срцето, има различна временска еволуција кај сите четири различни режими на дишење. Пред воопшто да направиме квалитативна евалуација на резултатите дадени на сликата, нека забележиме дека усреднетите засилувања на спрега (црвени линии) се наоѓаат над соодветните сурогат нивоа (хоризонталните испрекинати линии). Со други зборови, тоа што усреднетите засилувања

на спрега се наоѓаат близу до нивото на сурогатите, но секогаш над него, укажува на тоа дека во просек, кардиореспираторната спрега е статистички сигнификантна во однос на сурогат сигналите. Сепак, ако се фокусираме на поединечните субјекти, чии силини на спрегнувања се дадени со сиви линии, може да се забележи дека за некои субјекти естимираната сила на спрегнување над одреден временски период се наоѓа под нивото на сурогатите. Ова укажува на тоа дека кардиореспираторното засилување на спрега не само што се зголемува и намалува по амплитуда, тоа дополнително минува низ фази во кои е и не е статистички сигнификантно. Овој резултат води до интересно сознание, а тоа е дека доаѓа до појава и губење на спрегата меѓу кардио и респираторниот систем. Набљудувајќи ги усреднетите засилувања на спр-



Слика 5.4: Усреднети кардиореспираторни функции на спрега по субјекти и време за четирите различни протоколи на дишење. Претставените функции на спрега ја дефинираат интеракцијата во насока од белите дробови кон срцето.

ега, може да се забележи дека во текот на спонтаното дишење слика 5.3 (а) силината на спрегнувањето е скоро инваријантна без некои големи варијации. При дишењето според линеарна функција слика 5.3 (б) силината на спрегнувањето го следи протоколот на дишење во смисла дека, додека фреквенцијата на дишење се наголемува силината на спрега се намалува и обратно. Несомнено, засилувањето на спрега најдобро го следи синусниот протокол на дишење слика 5.3 (в). При аperiodичниот протокол

на дишење слика 5.3 (г), кој воедно се покажа како најтежок за следење од страна на субјектите, очигледно е дека засилувањето на спрега е со зголемена варијација и не е слично на воведениот протокол на дишење, слика 5.2. Генералниот заклучок е дека, усреднетите засилувања на спрега во сите четири протоколи на дишење, во помала или поголема мера, ги следат воведените временски варијации во фреквенцијата на дишење.

Следно, ги анализираваме кардиореспираторните функции на спрега кои носат информација за тоа како респирацијата влијае врз срцевите осцилации. Во анализата која ја спроведовме, набљудувавме временска променливост во формата на функцијата на спрега при усвоените протоколи на дишење. Оваа временска променливост ја детектиравме во време и меѓу различните субјекти. На сликата 5.3 (д), (ѓ) и (е) е покажано како усреднетите функции на спрега по субјектите еволуираат во време. За споредба, може да се забележи дека функциите на спрега добиени за два последователни временски моменти слика 5.3 (д) и (ѓ) имаат слична форма, додека функцијата на спрега дадена на сликата 5.3 (е) добиена подоцна во време, е со изразита променливост во формата за разлика од претходните две функции на спрега.

Подоцна, кога ги усреднивме по време и по субјекти функциите на спрега откривме дека кај сите протоколи на дишење формите на функцијата на спрега се многу слични, слика 5.4 (а)-(г), со тоа што функцијата на спрега добиена за спонтаното дишење слика 5.4 (а) е за нијанса со поголема варијабилност во однос на останатите три функции на спрега. Ова означува дека временската варијација која се јавува кај индивидуалните субјекти во формата на функцијата на спрега е усреднета. Специфичните форми на функциите на спрега прикажани на сликата 5.4 (а)-(г) го откриваат механизмот на интеракција во детали. Имено, од формата на функциите на спрега може да се забележи дека доминантната улога во спрегата меѓу кардио и респираторниот систем ја има респираторниот систем. Важно е да се воочи дека со зголемување или намалување на функцијата на спрега по должина на респираторната оска q_r , срцевите осцилации (види срцева оска q_h) се забрзуваат или се успоруваат.

Од спроведената анализа на кардиореспираторната интеракција при усвоените протоколи на дишење, заклучивме дека функцијата на спрега е временски променлива како резултат на пертурбациите што ги внесуваме со режимите на дишење, слика 5.3. Ова не е новина и е веќе покажано во [24, 73], каде дополнително е покажано дека под влијание на временски променливата функција на спрега респираторниот и кардио системот минуваат во фази во кои постои и не постои синхронизација. Она што е индикативно во нашето истражување е тоа што, кога временски ги усреднивме функциите на спрега, формите на функциите на спрега станаа квалитативно многу

слични кај сите четири режими на дишење, слика 5.4. Ова индицира дека во отсуство на пертурбации, во просек, механизмот на интеракција меѓу кардио и респираторниот систем е скоро инваријантен. Нека забележиме овде, дека овој заклучок се темели на студија во која сите субјекти се млади и здрави. Ако хипотезираме дека ова поведење е карактеристично и кај субјекти со одредени срцеви и респираторни заболувања, тогаш влијанието на надворешните пертурбации во вид на алтерирање на фреквенцијата на дишење може да доведе до детриментална состојба при која субјектот може да доживее срцев инфаркт.

Со анализата од претходно покажавме дека функциите на спрега претставуваат силна алатка во анализа на разните физиолошки состојби кои настапуваат во кардио и респираторниот систем. Во оваа насока, вредно е да се спомене дека во [25, 73] е анализирана кардиореспираторната функција на спрега со тек на човековото стареење. Од резултатите анализирани таму е заклучено дека со тек на годините слабее силината на спрега меѓу кардио и респираторниот систем и се намалува варијацијата во функцијата на спрега. Употребата на функциите на спрега за длабоко разбирање на физиолошките состојби во човековото тело не е ограничено само на кардио и респираторниот систем. Исто така, функциите на спрега успешно се применети за анализа на делта-алфа осцилациите во мозокот [80].

Глава 6

Временско променливи функции на спрега: настапување на осцилаторно придушување

Од аспект на теоријата на функциите на спрега, кои се ефективна и популарна парадигма за анализа на интеракцијата меѓу осцилаторните процеси, интеракцијата меѓу осцилаторните процеси може да резултира со синхронизација или некое друго посложено ритмично поведење. Дополнително, интеракцијата меѓу осцилаторните процеси може да е одговорна и за настапување на осцилаторно придушување. Настапувањето на осцилаторно придушена состојба, т.е на неосцилаторна состојба, се карактеризира со целосен прекин на осцилациите во спрегнатите системи. За главни причинители на транзицијата од осцилаторна во осцилаторно придушена состојба [9], се сметаат: динамиката на поединечните осцилатори (пример: модулацијата на нивната фреквенција и амплитуда, воведување на временско доцнење, различни осцилатори и др.), силината на спрегнувањето и изборот на самата функција на спрега.

Неодамна во [24], е откриено дека во спрегнатите (биолошки) осцилаторни системи покрај фреквенцијата и силината на спрега, временски променлив процес претставува и формата на функцијата на спрега. Во истоимениот труд, е откриено дека функцијата на спрега која ја опишува интеракцијата меѓу кардио и респираторниот систем, е временски променлива, а резултатот од тоа е премин во или вон синхронизација на овие осцилаторни процеси. Според ова, од голем интерес е продлабочување на разбирањето на ефектите кои ги имаат временски променливите функции на спрега врз исходот од интеракциите меѓу термодинамички отворените биолошки системи. Во [62], е дискутирано дека временската променливост на биолошките фун-

кции на спрега може да зависи од одредена физиолошка состојба или болест. Таму се наведени два примери од литературата. Во првиот дискутиран пример е откриено дека варијацијата и силината на кардиореспираторната интеракција се намалува со тек на годините. Во другиот наведен пример, откриено е дека анестезијата го намалува интензитетот на промена на делта-алфа невронската интеракција.

Резултатите за временските променливи функции на спрега презентирани во [24], се дополнително проширени во [62]. Имено, во овој труд е покажано дека силината на спрегнување и функцијата на спрега се два механизми кои независно еден од друг може да влијаат на исходот од интеракциите меѓу спрегнатите системи. Во теоретскиот случај разработен таму е покажано дека временски променливите функции на спрега во разгледуваниот специјален случај на непроменлива вредност на вкупното засилување, предизвикуваат транзиција во состојба на синхронизација само како резултат на промената на формата на функцијата на спрега. Во дискусијата започната таму се навестува можноста временски променливите функции на спрега да се причинител за транзицијата меѓу осцилаторна и неосцилаторна состојба.

Фокалната точка на целокупната анализа изложена во продолжение е проучување на исходот од интеракциите кога функцијата на спрега е временски променлива. Притоа, го разгледуваме специјалниот вид на временски променлива функција на спрега, во која се менува формата додека вкупната сила на спрега е константна.

6.1 Сфери на појава: синхронизација и придушување на осцилации

Кај слабо спрегнатите нелинеарни осцилаторни процеси доаѓа до прилагодување на нивните ритми, независно од нивната природна фреквенција на осцилирање. Ваквиот вид на поведение е претставено со феноменот синхронизација, кој претставува универзален нелинеарен феномен чие манифестирање е присутно во скоро сите сфери од човековото живеење [4, 81, 82]. Така на пример, откриено е дека синхронизацијата игра клучна улога во патогенезата на одредени невролошки болести како што се Паркинсоновата болест и непрекинатото треперење [37, 83–86]. Понатаму, во [24] е покажано дека феноменот синхронизација се јавува меѓу кардио и респираторниот систем под влијание на временски променливата кардиореспираторна функција.

Друг фундаментален феномен кој се јавува во спрегнатите динамички системи е феноменот на **осцилаторно придушување/Oscillation Quench (OQ)** (еквивалентно: умирање на осцилациите, уништување на осцилациите, прекин на осцилациите, осци-

латорна смрт, дегенерирање на осцилациите), т.е. настапување на неосцилаторна состојба. Важноста на овој феномен може да биде претставена преку следните аспекти: (1) неосцилаторната состојба е релевантна во патолошките случаи на невронски нарушувања како што се Алцхајмеровата и Паркинсоновата болест; (2) овој феномен може да служи како управувачки механизам во динамичките системи, на пример, тој води до стабилизација на системот од спрегнати ласери [87, 88]. Станува збор за поведение кое се манифестира и во техничките и во нетехничките спрегнати системи. Некои реални примери во кои може да се сретне овој тип на поведение се: климатските системи [89], ласерите [87, 88, 90], електронските кола [91, 92], системите со хаотична динамика [51, 93], хемиските системи [94, 95], невроните [96, 97], биолошките мрежи од осцилатори [52, 98, 99] и др.

Со оглед на тоа што настапувањето на феноменот на синхронизација под влијание на временско променливи функции на спрега е веќе истражен во литературата, во продолжение, нема да се задржуваме на неговата анализа, туку ќе се фокусираме на анализата на феноменот на осцилаторно придушување, кој досега е неистражен од аспект на временски променливите функции на спрега.

6.1.1 Типизација на различните состојби при настапување на осцилаторно придушување

При појавата на феноменот осцилаторно придушување разликуваме два вида на состојби кои се разликуваат по однос на механизмот кој води до нивна појава и начинот на нивно манифестирање. Имено, двата вида на состојби кои означуваат целосен прекин на осцилациите се: **амплитудно придушување/Amplitude Death (AD)** и **осцилаторно придушување/Oscillation Death (OD)**. За да не дојде до погрешна интерпретација на овие две различни состојби при нивниот превод на македонски јазик и за нивно поедноставно препознавање во понатамошниот дел од текстот ќе ги користиме англиските скратеници за да ја потенцираме нивната појава. Во продолжение е даден генерален вовед во овие феномени.

Ќе се фокусираме на проучување на спрегнати системи составени од два осцилатори од втор ред. За таа цел, дефинираме систем од два спрегнати осцилатори од втор ред во кои е воспоставен стабилен граничен круг во отсуство на спрега ($q_i = 0$):

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x_i, y_i, \mu_i, \omega_i) + q_i(x_i, x_j, c_1, c_2), \\ \dot{y}_i &= g_i(x_i, y_i, \mu_i, \omega_i), \end{aligned} \tag{6.1}$$

каде, со i е означен редниот број на осцилаторот и притоа $i, j = 1, 2$ и $i \neq j$. Со

(x_i, y_i) се означени состојбите а со f_i и g_i се означени векторските полиња на i -от осцилатор. Параметрите μ_i и ω_i ја карактеризираат динамиката на индивидуалните осцилатори во спрегнатиот систем. Воспоставената спрега е по однос на нивните x состојби, и притоа функцијата на спрега е моделирана со q_i , каде со c_1 и c_2 се дадени коефициентите на сила на спрегнување. Дефиницијата на функцијата на спрега во системот (6.1) може да биде соодветно видоизменета со цел да се инкорпорира поинаква интеракција меѓу осцилаторите. Во продолжение на оваа дискусија секоја од функциите f_i, g_i, q_i ќе добијат конкретни облици.

Под претпоставка дека q_i е соодветно избрана да воведо осцилаторно придрушување, почетно воспоставената осцилаторната динамика на спрегнатиот систем ќе опстои се додека не се надмине некоја критична вредност на засилувањата c_1 и c_2 на функцијата на спрега. После таа критична вредност настапува неосцилаторна состојба. Оваа квалитативна промена од осцилаторна во неосцилаторна состојба може да резултира во два вида на поведење [AD](#) или [OD](#).

Кај [AD](#) состојбата, како резултат на силината на интеракцијата меѓу осцилаторите, дисипацијата на енергија во спрегнатиот систем се зголемува до таа мера што во даден момент фазниот простор колабира, а епилогот од тоа е стабилизација на осцилаторите во стабилна хомогена состојба. Со други зборови, осцилаторите под влијание на нивната интеракција се присилени да ги напуштат своите осцилаторни состојби и да се стабилизираат на хомогена рамнотежна положба. Хомогената рамнотежна положба може да биде тривијалната или некоја нова нетривијална хомогена рамнотежна положба која е плод на функцијата на спрега. Според ова, при настапувањето на [AD](#) состојбата во системот (6.1) потенцијално би се јавила:

- тривијална рамнотежна положба: $(x_1, y_1, x_2, y_2) = (0, 0, 0, 0)$,
- [нетривијална хомогена рамнотежна положба/Non-Trivial Homogeneous Steady State](#): $x_1 = x_2 = x, y_1 = y_2 = y$, или (x, y, x, y) .

Од друга страна, состојбата [OD](#) се карактеризира со различна структура од таа на [AD](#). Оваа рамнотежна положба се манифестира преку разбивање на симетријата на хомогената рамнотежна положба, кое конечно резултира во појава на [нехомогена рамнотежна положба/Inhomogeneous Steady State \(IHSS\)](#) со сопствена област на привлечност на која двата осцилатори се стабилизираат. Во случајот на два идентични осцилатори (идентични равенки, фреквенции и параметри) ова поведење се манифестира со две исти рамнотежни положби со спротивен знак, односно: $x_1 = -x_2, y_1 = -y_2$ или $(x, y, -x, -y)$.

Во литературата, пред публикацијата на трудовите [9, 50], состојбите AD и OD се маскирани зад користењето на генералниот термин осцилаторно придушување (OQ). Во истоимените трудови е направена јасна дистинкција меѓу овие две суштински различни состојби, кои се разликуваат не само по однос на механизмите кои ги предизвикуваат, туку и по начинот на нивното манифестирање.

Од аспект на управување на динамички системи и двата вида на неосцилаторна состојба овозможуваат појава на два целосно различни стабилни динамички режими со различно влијание и значење. Имено, состојбата OD е основата на добропознатиот феномен кај невроните „winner-takes-all” [97]. Таа исто така може да биде поврзана со делбата на клетките [100, 101], додека AD состојбата главно служи за придушување на осцилациите во техничките и нетехничките динамички системи [87, 88, 102].

6.2 Транзиција меѓу осцилаторна и неосцилаторна состојба како резултат на временско променливи функции на спрега

Функцијата на спрега е дефинирана преку нејзината силина и форма. Со оглед на тоа што, влијанието на силината на спрега во настапувањето на осцилаторно придушување е веќе сеопфатно истражено во литературата, овде акцентот ќе го поставиме на анализа на влијанието кое формата на функцијата на спрега го има во процесот на осцилаторното придушување.

Резултатите презентирани во [9, 24, 50, 62], претставуваат темел на истражувањето кое ќе го спроведеме за ефектот што го имаат временски променливите функции на спрега врз квалитативната транзиција меѓу физичките феномени: осцилации и осцилаторно придушување (AD и OD). За да покажеме дека временски променливите функции на спрега претставуваат генерален механизам кој предизвикува транзиција на спрегнатиот систем меѓу осцилаторна и неосцилаторна состојба ја усвоивме следната непарна периодична функција на спрега која ја инкорпориравме во спрегнатиот систем (6.1):

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(x_1(t), x_2(t), c_1(t), c_2(t), t), \\ q_i &= -c_2 \sin(1.8x_i(t)) + c_1 \sin(1.8x_j(t)), \\ i, j &= 1, 2; i \neq j, \end{aligned} \tag{6.2}$$

каде $c_1(t) \sin(1.8x_j)$ и $c_2(t) \sin(1.8x_i)$ се периодични компоненти на функцијата на спрега, а $c_1(t)$ и $c_2(t)$ се временски променливи скалирачки коефициенти (коефициенти

на силина на спрегнување) на компонентите на функцијата на спрега.

Овде, со цел да се из земе влијанието на силината на функцијата на спрега во процесот на осцилаторното придружување, го разгледуваме специјалниот случај на временска променливост, предочен во [62], во кој формата на поединечните компоненти се менува со тек на време додека вкупната измена на коефициентите на спрега е константна. Вкупното засилување на спрега се пресметува како Евклидова норма од коефициентите на спрега. Конкретно, во случајот на два спрегнати осцилатори (равенка (6.1)) вкупното засилување на спрега е дадено со: $\varepsilon(t) = \sqrt{c_1^2(t) + c_2^2(t)}$.

Влијанието на временски променливите функции на спрега во преминот меѓу осцилаторна и неосцилаторна состојба, во продолжение, е анализирано кај два спрегнати системи составени од два: Van Der Pol и Stuart Landau, осцилатори чии анализи се дадени во софтверските пакети MATLAB и XPPAUT [61]. Нумеричката анализа на спрегнатите системи во MATLAB е направена со Хеуновата методата усвојувајќи чекор на интеграција од $h = 0.01[s]$.

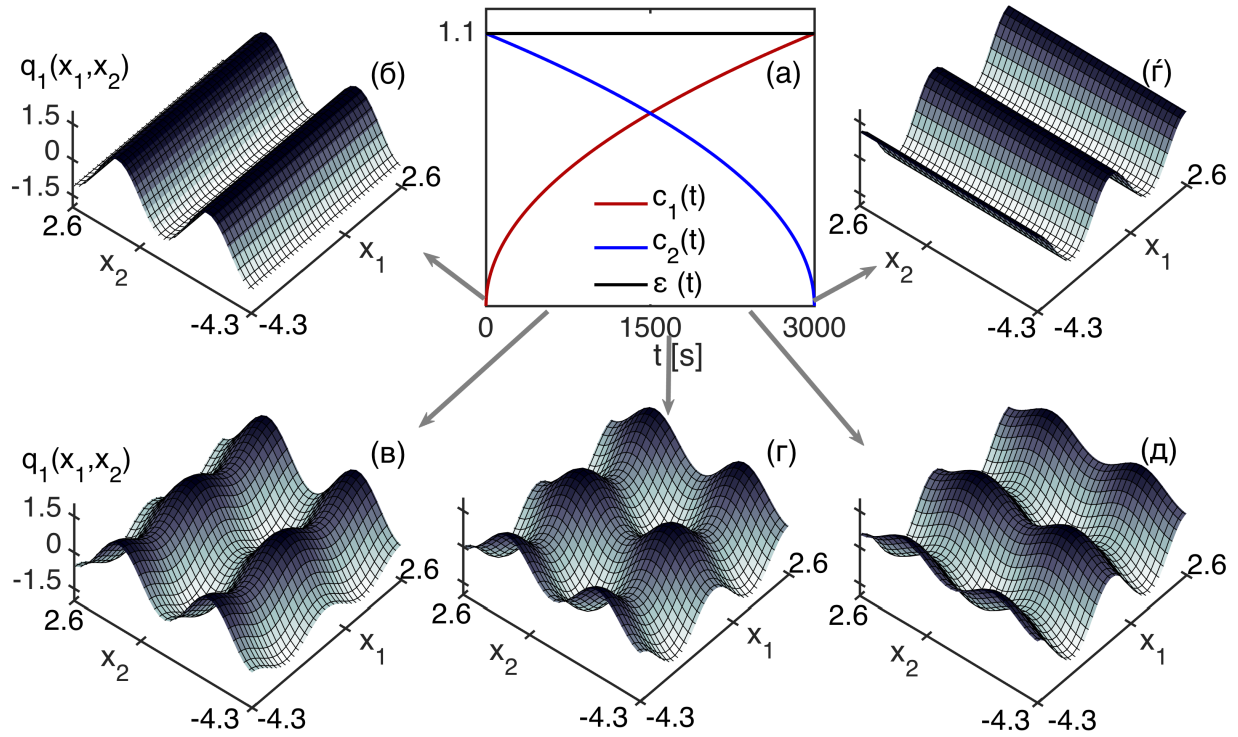
6.2.1 Настапување на осцилаторно придружување во спрегнатиот систем од два спрегнати Van Der Pol осцилатори

Во овој дел ќе го анализираме влијанието на временски променливата функција на спрега (6.2) во транзицијата меѓу осцилаторна и неосцилаторна состојба, кај спрегнатиот систем составен од два спрегнати Van Der Pol (VDP) осцилатори, кој е претставен со следниот математички модел:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= y_i(t) - c_2^i \sin(1.8x_i(t)) + c_1^i \sin(1.8x_j(t)) \\ \dot{y}_i(t) &= \mu(1 - x_i^2(t))y_i(t) - \omega_i^2 x_i(t) \\ i, j &= 1, 2; i \neq j \end{aligned} \quad (6.3)$$

каде вредностите на параметрите на индивидуалните осцилатори се усвоени така што силината на нелинеарното придружување кај осцилаторите е $\mu = 0.35$, додека нивните природни фреквенции на осцилирање се $\omega_1 = \sqrt{0.71}$ и $\omega_2 = \sqrt{0.97}$. Во индивидуалните осцилатори во отсуство на спрегнување, при $c_1^i = c_2^i = 0$, за усвоените параметри се реализира стабилен граничен круг со сопствена амплитуда и фреквенција ω_i .

Генерално, интеракцијата меѓу системите во природата се одвива преку неуниформни механизми на интеракција. Ова гледано од од аспект на функции на спрега означува дека функциите на спрега се различни меѓусебе, $q_1 \neq q_2$. Во оваа насока, со цел да се отслика реално сценарио кое се случува во природата, воведовме неуниформна интеракција така што коефициентите на спрега на првиот осцилатор ги



Слика 6.1: Еволуција на формата на функцијата на спрега q_i (равенка (6.2)) со тек на време при временски променливи коефициенти на спрега $c_1(t)$ и $c_2(t)$ и константно вкупно засилување $\varepsilon(t)$, слика (a). На сликите (б)-(f) е дадена формата на функцијата на спрега во временските моменти потенцирани со сивите стрелки.

фиксиравме $c_1^1(t) = 0.3$ и $c_2^1(t) = 0.9$, додека коефициентите на спрега на вториот осцилатор $c_1^2(t)$ и $c_2^2(t)$ усвоивме дека се менуваат со тек на време според одредена математичка закономерност. Врз основа на оваа претпоставка доминантната насока на спрегнување е од вториот кон првиот осцилатор.

Интеракцијата меѓу осцилаторите во усвоената насока, од вториот кон првиот, ја разгледувавме од аспект на временската промена на коефициентите на спрега на вториот осцилатор $c_1^2(t)$ и $c_2^2(t)$. За да не се воведо дополнителна комплексност во запишувањето на коефициентите на спрега, во продолжение индексот над коефициентите е испуштен. За коефициентите на спрегнување $c_1(t)$ и $c_2(t)$ е усвоено дека се менуваат на следниот начин:

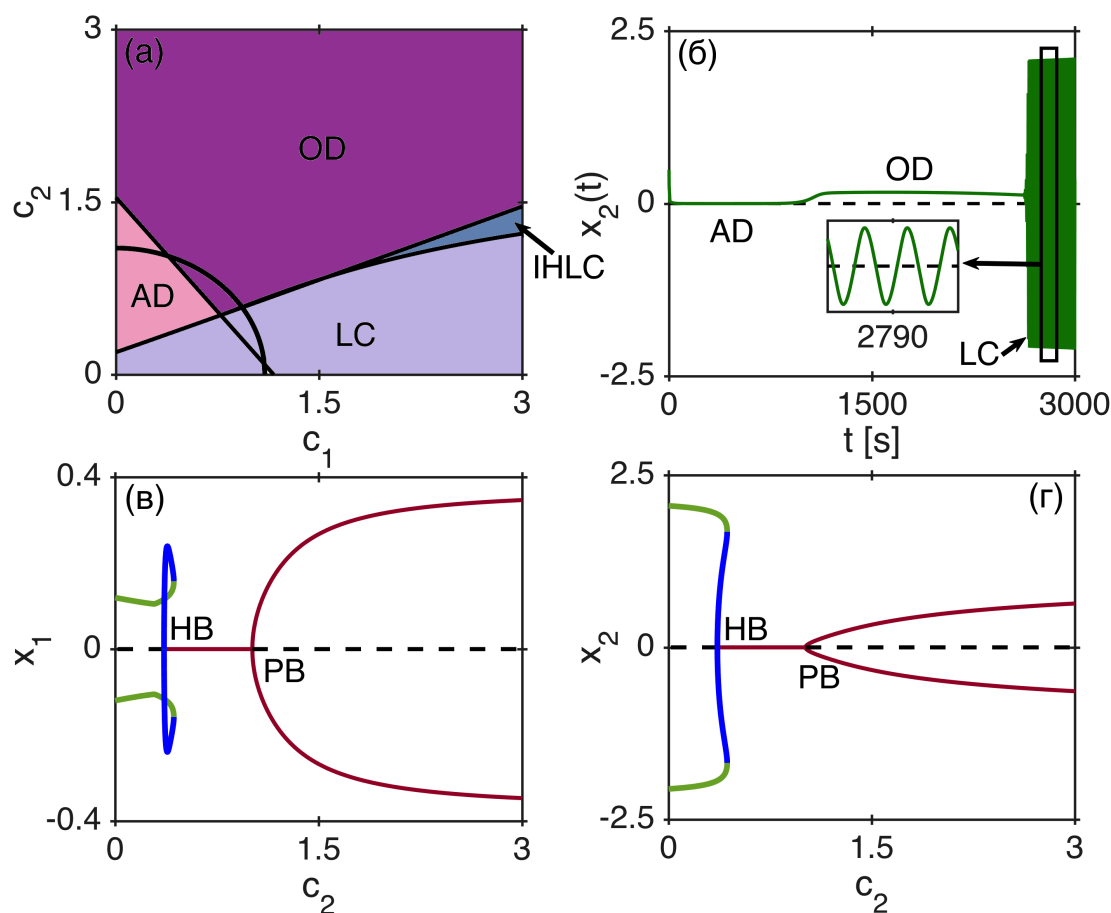
$$c_1(t) = 1.1\sqrt{t/T}, c_2(t) = 1.1\sqrt{(T-t)/T}, \quad (6.4)$$

каде времето се менува како $t = 0 \rightarrow T$ и T е интервалот на симулација на спрегнатиот систем. Според усвоениот начин на варијација на коефициентите на спрега,

коэффициентот $c_1(t)$ ќе нараснува над интервалот $[0, 1.1]$ а коэффициентот $c_2(t)$ ќе опаѓа над интервалот $[1.1, 0]$, додека вкупното засилување на спрега $\varepsilon(t)$ ќе е константно со тек на време и ќе изнесува 1.1.

На сликата 6.1 (а), е претставена промената на коефициентите на спрега $c_1(t)$ и $c_2(t)$ со црвена и сина боја соодветно, при константно вкупно засилување $\varepsilon(t)$ илустрирано со црна боја. Важниот дел, кој треба да се забележи тука, е промената на формата на функцијата на спрега при временската еволуција на коефициентите на спрега, слика 6.1 (б)-(ѓ). Индикативно е тоа што, од почетниот момент $t = 0$ до моментот $t = 1500$ доминатна улога во обликувањето на формата на функцијата на спрега ја има компонентата $c_1(t) \sin(1.8x_2)$, за да потоа доминантната улога во дефинирање на формата на функцијата на спрега ја преземе компонентата $c_2(t) \sin(1.8x_1)$. Конечно, за $t = 3000$ добиената функција на спрега, дадена на сликата 6.1 (ѓ), претставува ротирани верзија на функцијата на спрега дадена на сликата 6.1 (а) за $\pi/2$ радијани.

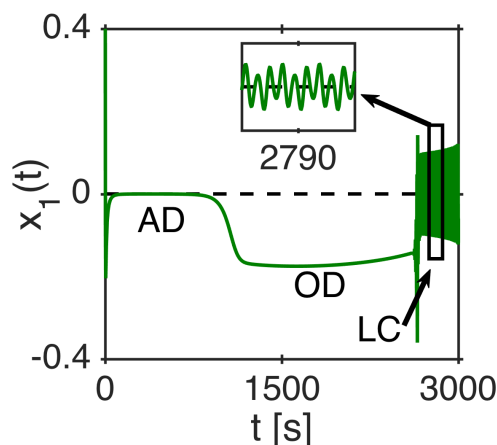
Следно, анализираме како промената на формата на функцијата на спрега, при усвоената временска променливост на коефициентите на спрега, влијае врз транзицијата меѓу осцилаторна и неосцилаторна состојба во спрегнатите системи. На сликата 6.2 е дадена бифуркациона и нумеричка анализа на спрегнатиот систем во XPPAUT и MATLAB соодветно. Притоа, на сликата 6.2 (а) е претставен двопараметарскиот бифуркационен дијаграм (во рамнината $c_1 - c_2$) добиен со детална бифуркациона анализа на спрегнатиот систем при $c_1, c_2 \in [0, 3]$. Секој од регионите означен со различна боја дефинира различен вид на квалитативно поведение. Имено, со скратениците **граничен круг/Limit Cycle (LC)** и **нехомоген граничен круг/Inhomogeneous Limit Cycle (IHLC)** се означени регионите во кои постојат осцилации во системот, каде со **LC** е означен регион во кој се јавува стабилен граничен круг како резултат на дестабилизацијата на тривијалната рамнотежна положба, додека со **IHLC** е претставен регион во кој се јавува стабилен нехомоген граничен круг како резултат на дестабилизацијата на **OD** состојбата [9]. Со **AD** и **OD** се означени регионите во кои не постојат осцилации во спрегнатиот систем. Кога коефициентите на спрега запаѓаат во **AD** регионот индивидуалните осцилатори се стабилизираат на тривијалната рамнотежна положба. Од друга страна, кога коефициентите на спрега запаѓаат во **OD** регионот индивидуалните осцилатори населуваат стабилни нехомогени рамнотежни положби. Ако извршиме проекција на промената на коефициентите $c_1(t)$ и $c_2(t)$ со тек на време во рамнината на двопараметарскиот бифуркационен дијаграм, тогаш се добива $1/4$ од круг со радиус $\varepsilon(t) = 1.1$, слика 6.2 (а). Проекцијата на коефициентите ја претставува нивната промена од почетната точка $(0, 1.1)$ до крајната точка $(1.1, 0)$. Притоа, лакот што го образуваат коефициентите на спрега со тек на време минува последователно



Слика 6.2: Бифуркациона и нумеричка анализа, во XPPAUT и MATLAB, на спрегнатиот систем (6.3) при временски променлива форма на функцијата на спрега q_i (равенка (6.2)) и временски инваријантно вкупно засилување на спрега $\varepsilon(t)$, слика 6.1. На сликите од (a) до (г) се претставени: (a) двопараметарски бифуркационен дијаграм при $c_1, c_2 \in [0, 3]$, (б) одсвот на состојбата $x_2(t)$ на вториот осцилатор, (в) и (г) бифуркациони дијаграми за состојбите x_1 и x_2 на првиот и вториот осцилатор при $c_2 \in [0, 3]$, каде со зелена (сина) боја е претставен стабилен (нестабилен) граничен круг, а со црвена (црна) боја се претставени стабилни (нестабилни) рамнотежни положби.

низ регионите AD, OD и LC. Со други зборови, движејќи се по проекцијата на параметрите, во почетниот момент осцилаторите се во состојба на мирување (AD), потоа вредностите на спрегнувачките коефициенти навлегуваат во состојба OD, во која осцилаторите се населуваат на две рамнотежни положби со спротивен знак, кои не се симетрични заради неидентичните осцилатори ($\omega_1 \neq \omega_2$) и функции на спрега,

слика 6.2 (б) и слика 6.3. На крај, преку дестабилизација на **OD** состојбата се раѓа стабилен граничен круг (режим на стабилни осцилации) (**LC**). Во разгледаниот случај, ја набљудувавме транзицијата на спрегнатиот систем од неосцилаторна во осцилаторна состојба, каде индивидуалните осцилатори минуваат низ состојбите **AD** \rightarrow **OD** \rightarrow **LC**.

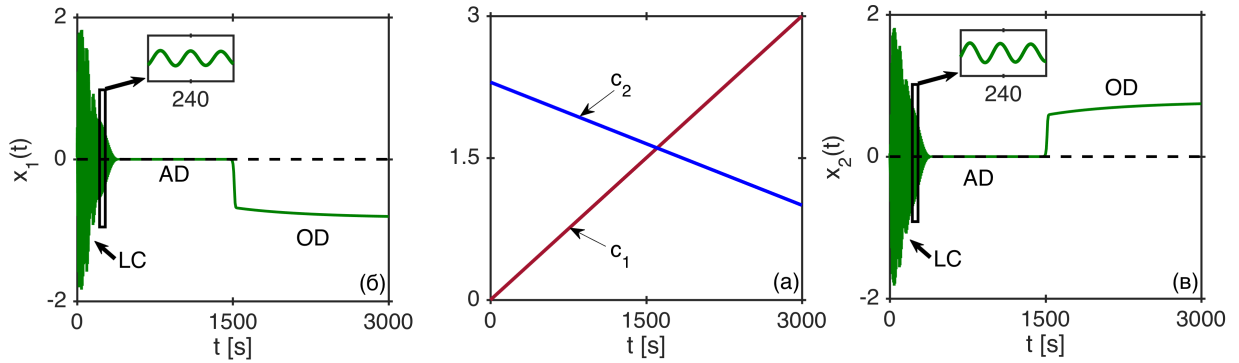


Слика 6.3: Одсив на состојбата $x_1(t)$ на првиот осцилатор.

Анализата ја продолживме во ХРРАУТ, каде го проверивме квантитативното манифестирање на состојбите **AD**, **OD** и **LC**. За таа цел, ги генериравме бифуркационите дијаграми (слика 6.2 (в) и (г)), кои во ХРРАУТ се добиваат така што, додека едниот коефициент на спрега се усвојува константен за другиот се претпоставува дека линеарно се менува над одреден интервал од интерес. Во конкретниот случај за да се генерираат бифуркационите дијаграми е усвоено дека $c_1(t) = 0.4$ и $c_2(t)$ се менува како линеарна функција над интервалот $[0, 3]$. Вака усвоената варијација на коефициентите во рамнината на двопараметарскиот бифуркационен дијаграм (слика 6.2 (а)) ќе биде претставена со константна права (не е прикажана) која ќе започне во $(0.4, 0)$ и ќе заврши во $(0.4, 3)$. При менувањето на коефициентите на спрега долж оваа права ХРРАУТ детектира стабилна (нестабилна) осцилаторна состојба (**LC**) означена со зелена (сина) боја, стабилна хомогена состојба (**AD**) означена со црвена боја и стабилна нехомогена состојба (**OD**) означена со црвена боја. Од сликите 6.2 (в) и (г) е очигледно дека состојбите x_1 и x_2 на индивидуалните осцилатори минуваат низ истите квалитативни состојби, притоа, од почетниот момент до $c_{2,HB} \approx 0.36$ во двата осцилатори постојат стабилни осцилации (**LC**), кои се прекинуваат како резултат на стабилизацијата на тривијалната рамнотежна положба (**AD**) преку **хопфова бифуркација/Hopf Bifurcation** (**HB**). Стабилната **AD** состојба опстојува до критичната вре-

дност $c_{2,PB} \approx 1.01$ при која доѓа до промена на стабилноста на **AD** состојбата, како резултат на што се раѓаат две стабилни гранки на нехомогени рамнотежни положби (**OD**) преку **суперкритична вила бифуркација/Pitchfork Bifurcation (PB)**. Транзицијата меѓу **AD** и **OD** состојбата разгледана овде, се реализира преку бифуркацијата на Turing опишана во [50].

Во анализираниот пример на два спрегнати VDP осцилатори со временски променлива функција на спрега, го проучивме специјалниот случај во кој формата на поединечните компоненти од функцијата на спрега се менува, додека вкупното засилување е константно. Од набљудуваните резултати може да заклучиме дека временски променливата форма на функцијата на спрега, во отсуство на варијација во параметрите на системот, игра клучна улога во транзицијата меѓу осцилаторна и неосцилаторна состојба. За да извршиме генерализација на набљудуваните резултати, следно, покажавме дека и временски променливото дифузно спрегнување претставува главен двигател на транзицијата меѓу квалитативните состојби. На тој начин ја бетониравме улогата на временски променливите функции на спрега на генерален механизам кој води до транзиција меѓу осцилаторна и неосцилаторна состојба.



Слика 6.4: Анализа на импликацијата на временски променливата дифузна функција на спрега врз транзицијата меѓу различните квалитативни состојби **LC**, **AD** и **OD**. На сликата (а) е претставена еволуцијата на коефициентите на спрега $c_1(t)$ и $c_2(t)$ со тек на време. На сликите (б) и (в) се дадени одзивите на состојбите $x_1(t)$ и $x_2(t)$ на двата осцилатори, соодветно.

Сликата 6.4, е добиена така што вредностите на параметрите на индивидуалните осцилатори се усвоени исти како во претходно разгледуваниот случај: $\mu = 0.35$, $\omega_1 = \sqrt{0.71}$ и $\omega_2 = \sqrt{0.97}$, но функцијата на спрега е променета во дифузна функција на спрега [9, 103]. Математички, функцијата на спрега е дадена со:

$$q_i = c_1(t)(x_j(t) - c_2(t)x_i(t)); i, j = 1, 2; i \neq j, \quad (6.5)$$

каде за коефициентите на спрега $c_1(t)$ и $c_2(t)$ усвоивме дека се менуваат како линеарни функции со тек на време, и го имаат следниот облик:

$$c_1(t) = 3 \cdot (t/T), c_2(t) = -(1.3/T) \cdot (t - 1.5) + 2.3, \quad (6.6)$$

притоа времето се менува како $t = 0 \rightarrow T$ и T е интервалот на симулација на спрегнатиот систем. На овој начин, додека коефициентот на спрега $c_1(t)$ линеарно нараснува во интервалот $[0, 3]$, коефициентот $c_2(t)$ линеарно опаѓа над интервалот $[2.3, 1]$. Од сликата 6.4 е очигледно дека со временското варирање на коефициентите на спрега, а со тоа и на функцијата на спрега, спрегнатиот систем минува од осцилаторна во неосцилаторна состојба преку последователно посетување на квалитативните состојби **AD**, **OD** и **LC**, во следниот редослед $LC \rightarrow AD \rightarrow OD$.

Од претходно приложеното може да се заклучи дека, временски променливите функции на спрега претставуваат генератор на транзицијата меѓу осцилаторна и неосцилаторна состојба. Со ова дадовме одговор на отвореното прашање во [62], со кое се инсинуира дека временски променливите функции на спрега, покрај тоа што индуцираат транзиција во и вон синхронизација, тие дополнително може да се двигател на преминот меѓу осцилаторна и неосцилаторна состојба.

6.2.2 Настапување на осцилаторно придрушување во спрегнатиот систем од два спрегнати Stuart Landau осцилатори

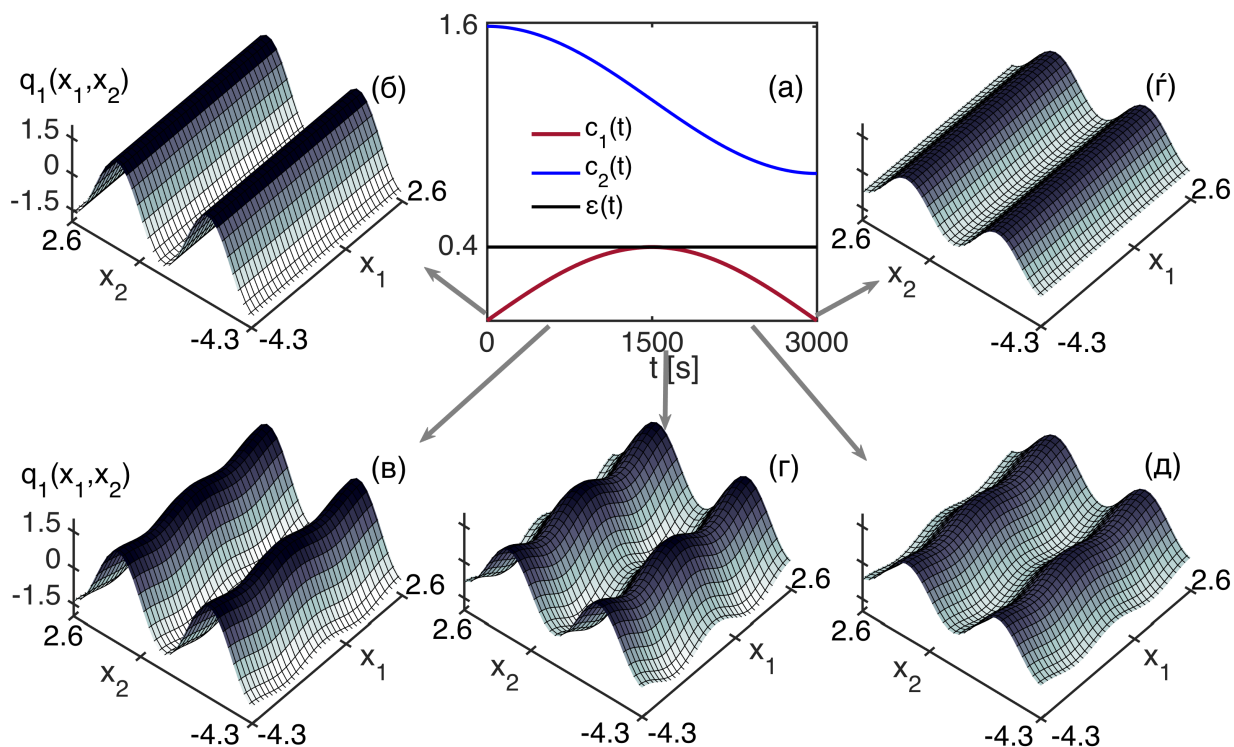
За да покажеме дека набљудуваните резултати и изнесените заклучоци кај спрегнатиот систем од два VDP осцилатори не се последица од среќен избор на специфичен осцилатор, туку се генерални, во продолжение ќе го анализираме ефектот кој временски променливата функција на спрега q_i (равенка (6.2)) го има врз транзицијата меѓу осцилаторна и неосцилаторна состојба во системот од два спрегнати Stuart Landau (SL) осцилатори. Притоа, повторно се разгледува специјалниот случај на временска променливост, при која, формата на функцијата на спрега се менува со тек на време додека вкупното засилување на спрега е временски инваријантно.

Преку анализата на системот од два SL осцилатори, ќе ја генерализираме дискусијата за влијанието на временски променливите функции на спрега врз квалитативните транзиции во системот. Во продолжение, ќе покажеме дека, слично, како во случајот на спрегнатиот систем од два спрегнати VDP осцилатори, временски променливата форма на функцијата на спрега при константно вкупно засилување на спрега претставува механизам кој во системот предизвикува транзиција меѓу осцилаторна и осцилаторно придрушена состојба.

Моделот на динамичко поведение на спрегнатиот систем соствен од два Stuart Landau осцилатори е даден со:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= x_i(t)P_i - \omega_i y_i(t) - c_2^i(t) \sin(1.8x_i(t)) + c_1^i(t) \sin(1.8x_j(t)), \\ \dot{y}_i(t) &= y_i(t)P_i + \omega_i x_i(t), \\ P_i &= \mu - x_i^2(t) - y_i^2(t), \\ i, j &= 1, 2; i \neq j, \end{aligned} \quad (6.7)$$

каде за параметрите, кои се со истоветно значење како и кај VDP осцилаторот, на индивидуалните осцилатори се усвоени следните вредности: $\mu = 1, \omega_1 = 1.2, \omega_2 = 5.53$. За вака усвоените вредности на параметрите, во отсуство на спрегнување, во индивидуалните осцилатори се реализира граничен круг со сопствена амплитуда 1 и фреквенција ω_i .



Слика 6.5: Еволуција на формата на функцијата на спрега q_i (равенка (6.2)) со тек на време при временски променливи коефициенти на спрега $c_1(t)$ и $c_2(t)$ и константно вкупно засилување $\epsilon(t)$, слика (а). На сликите (б)-(ж) е дадена формата на функцијата на спрега во временските моменти потенцирани со сивите стрелки.

При анализата на спрегнатиот систем, равенка (6.7), е усвоено дека механизмите на интеракција (функциите на спрега) се идентични кај двата осцилатори, односно

во равенката (6.7) е исполнето $c_1^1(t) = c_1^2(t) = c_1(t)$ и $c_2^1(t) = c_2^2(t) = c_2(t)$. За да се воведи временски променлива форма на функцијата на спрега и константно вкупно засилување на спрега, коефициентите на спрега беа усвоени на следниот начин:

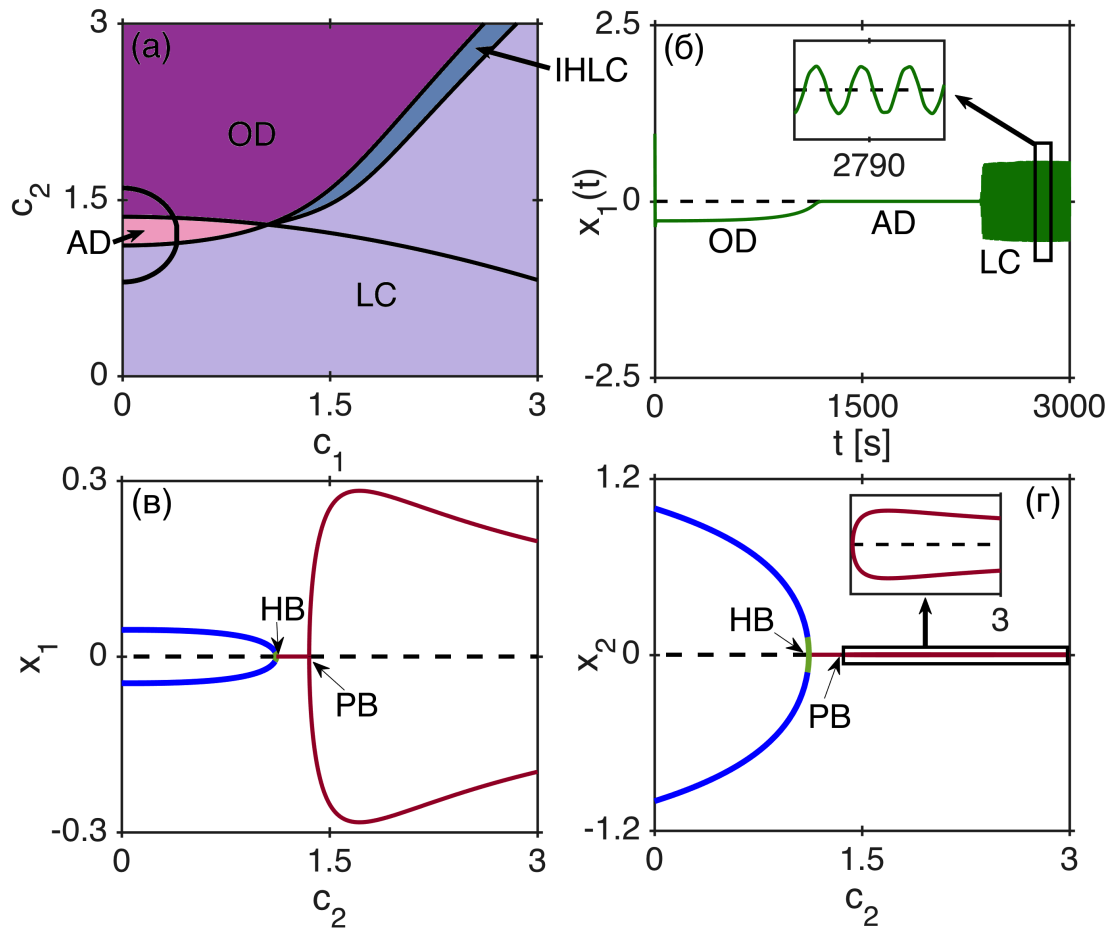
$$c_1(t) = 0.4 \sin(\pi t/T), c_2(t) = 0.4 \cos(\pi t/T) + 1.2, \quad (6.8)$$

каде времето се менува како $t = 0 \rightarrow T$ и T е интервалот на симулација на спрегнатиот систем. Параметарот $c_1(t)$ се менува над интервалот $[0, 0.4]$ додека $c_2(t)$ се менува над интервалот $[1.6, 1.2]$. Вкупното засилување на спрега $\varepsilon(t)$ е константно со тек на време и изнесува 0.4. Во конкретниот случај, вредноста на вкупното засилување се добива на следниот начин:

$$c_1(t) = 0.4 \sin(\pi t/T), c_2(t) - 1.2 = 0.4 \cos(\pi t/T) \rightarrow \varepsilon(t) = \sqrt{c_1^2(t) + (c_2 - 1.2)^2} = 0.4, \quad (6.9)$$

За разлика од разгледуваната временска варијација на параметрите кај спрегнатиот систем од два VDP осцилатори, каде беше усвоено дека, едниот коефициент се наголемува додека другиот се намалува, овде варијацијата на параметрите се одвива така што, параметарот $c_2(t)$ постојано опаѓа над интервалот $[1.6, 1.2]$, додека $c_1(t)$ расте до моментот $t = 1500$, при кој ја достигнува максималната вредност 0.4, и понатаму до крајот на разгледуваниот интервал опаѓа до 0.

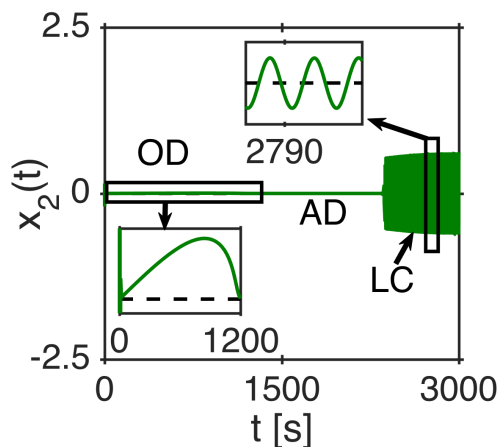
На сликата 6.5 (а), е претставена промената на коефициентите на спрега $c_1(t)$ и $c_2(t)$ со црвена и сина боја соодветно, при константно вкупно засилување $\varepsilon(t)$ илустрирано со црна боја. Важниот дел овде е промената на формата на функцијата на спрега при временската еволуција на коефициентите на спрега, слики 6.1 (б)-(ѓ). Овде се истакнува тоа што над целиот временски интервал $t = 0 \rightarrow T$, формата на функцијата на спрега е диригирана од компонентата $c_2(t) \sin(1.8x_1(t))$. Влијанието врз формата на функцијата на спрега од страна на компонентата $c_1(t) \sin(1.8x_2(t))$ е релативно мало и истото може да биде забележано на сликите 6.1 (б)-(ѓ). Од сликите 6.1 (а) и (ѓ), може да се забележи дека, во почетниот $t = 0$ и во крајниот $t = 3000$ момент формата на функцијата на спрега е исклучиво дефинирана од $c_2(t) \sin(1.8x_1(t))$, бидејќи во тие моменти $c_2(t) \sin(1.8x_1(t)) = 0$. Претходната анализа е очигледна ако се има предвид дека скалирачките коефициенти на компонентите на функцијата на спрега значително се разликуваат во нивните максимални (за 4 пати) и минимални вредности. Со вака разгледуваната временска променливост на функцијата на спрега е илустрирана интересна ситуација која може да се очекува и кај интеракцијата во реалните системи (разгледуваме за два осцилатори овде). Додека едната од



Слика 6.6: Бифуркациона и нумеричка анализа, во XPPAUT и MATLAB, на спрегнатиот систем (6.7) при временски променлива форма на функцијата на спрега q_i (равенка (6.2)) и временски инваријантно вкупно засилување на спрега $\varepsilon(t)$, слика 6.5. На сликите од (а) до (г) се претставени: (а) двопараметарски бифуркационен дијаграм при $c_1, c_2 \in [0, 3]$, (б) одсивот на состојбата $x_2(t)$ на вториот осцилатор, (в) и (г) бифуркациони дијаграми за состојбите x_1 и x_2 на првиот и вториот осцилатор при $c_2 \in [0, 3]$, каде со зелена (сина) боја е претставен стабилен (нестабилан) граничен круг, а со црвена (црна) боја се претставени стабилни (нестабилни) рамнотежни положби.

компонентите на функцијата на спрега ја има главната улога во обликување на функцијата на спрега, другата компонента се јавува сезонски (ја нема, ја има, ја нема) и е со значително помало влијание врз формата. Тоа значи дека во специјалниот случај кој ние го разгледуваме варијацијата на формата на функцијата на спрега може да биде распределена низ повеќе компоненти (овде се две, генерално може да се повеќе)

кои се со различно влијание, така што вкупното засилување на функцијата на спрега е константно. Во продолжение ќе го анализираме поведението на спрегнатиот систем



Слика 6.7: Одсив на состојбата $x_2(t)$ на вториот осцилатор.

во случајот кога варијацијата на формата на функцијата на спрега предизвикана од двете компоненти е така распределена да една од компонентите е со силно изразено влијание за разлика од другата која има мало влијание и е со сезонска улога, слика 6.6. Проекцијата на временски променливите коефициенти $c_1(t)$ и $c_2(t)$ во рамнината на двопараметарскиот бифуркационен дијаграм (слика 6.6 (a)) е дадена со $1/2$ од круг кој е со центар во точката $(0, 1.2)$ и има радиус 0.4. Полукругот кој се образува со временската промена на коефициентите започнува од точката $(1.6, 0)$ и завршува во точката $(1.2, 0)$, и притоа лежи во три региони на различно динамичко поведение. Лакот кој што го изминуваат параметрите од почетната до крајната точка минува низ регионите: $OD \rightarrow AD \rightarrow LC$, редоследно. Еволуцијата на состојбите $x_1(t)$ и $x_2(t)$ на двата осцилатори која е последица од промената на параметрите по должината на полукругот може да се воочи на сликите 6.6 (б) и 6.7. Состојбите на двата осцилатори, минуваат низ различни квалитативни поведенија. Во почетниот момент е воспоставена нехомогена рамнотежна положба (OD) во системот која се манифестира со две гранки, кои се разликуваат значително по однос на своите амплитуди заради големата разлика во избраните фреквенции на поединечните осцилатори. Во следната фаза, состојбите $x_1(t)$ и $x_2(t)$ се стабилизираат во AD состојба и опстојуваат во нејзе се додека лакот не навлезе во регионот LC, при што настапува дестабилизација на хомогената рамнотежна положба и доаѓа до појава на стабилен граничен круг. Може да се заклучи дека со промената на коефициентите на спрега, според закономерноста дадена со равенката (6.8), во спрегнатиот систем се случува транзиција од неосцила-

торна во осцилаторна состојба и притоа системот минува низ квалитативните состојби: $OD \rightarrow AD \rightarrow LC$, редоследно.

Анализата ја продолживме во ХРРАУТ, каде го проверивме квантитативното манифестирање на состојбите AD , OD и LC . За таа цел, ги генериравме бифуркационите дијаграми слика 6.6 (в) и (г), кои се добиени претпоставувајќи дека $c_1(t) = 0.2$ и $c_2(t)$ се менува како линеарна функција над интервалот $[0, 3]$. Од бифуркационите дијаграми може да се забележи дека ХРРАУТ детектира нестабилна осцилаторна состојба (LC) означена со сина боја, стабилна хомогена состојба (AD) означена со црвена боја и стабилна нехомогена состојба (OD) означена со црвена боја. Во прв момент, резултатите за нестабилна осцилаторна состојба во ХРРАУТ укажуваат на тоа дека не постои корелација меѓу набљудуваните резултати во МАТЛАБ и ХРРАУТ. Имено, стабилната осцилаторна состојба која што ја набљудувавме кај состојбите $x_1(t)$ и $x_2(t)$, се чини дека ХРРАУТ не ја потврдува. Со директни нумерички симулации на спрегнатиот систем во МАТЛАБ за мноштво на случајни почетни услови од интервалот $[-10, 10]$ при $c_1(t) = 0.2$ и фиксна вредност на $c_2(t)$ избрана во регионот LC (слика 6.6 (а)) покажавме дека во системот постои единствена стабилна осцилаторна состојба која се реализира за кој било од почетните услови избран во разгледуваниот интервал. Почетно воспоставената осцилаторна состојба во спрегнатиот систем се придрушува преку HB бифуркација при $c_{2,HB} \approx 1.12$, која ја стабилизира хомогената рамнотежна положба (AD). Подоцна, при $c_{2,PB} \approx 1.35$ во системот доаѓа до раскинување на симетријата на хомогената рамнотежна положба преку PB бифуркација, и како резултат доаѓа до појава на стабилна (OD) состојба која кај првиот осцилатор е со значително поголема амплитуда во однос на вториот осцилатор.

Со анализираниот спрегнат систем од два SL , ја генерализиравме дискусијата за влијанието на временски променливите функции на спрега врз квалитативните транзиции во системот. Слично, како и во случајот на спрегнатиот систем од два спрегнати VDP осцилатори, временски променливата форма на функција на спрега при константно вкупно засилување на спрега претставува механизам кој во системот предизвикува премин меѓу квалитативните состојби: $OD \rightarrow AD \rightarrow LC$, редоследно.

6.3 Режим на бесконечно многу нетривијални рамнотежни положби

При индивидуалната нумеричка анализа на претходно дискутираните спрегнати системи откривме дека за различни почетни услови во системот не само што се

реализираат нетривијални (различни од 0) рамнотежни положби (**NHSS** и **IHSS**) во нивната изворна и позната форма туку и дека нивниот број е непреброив. Ова не наведе да спроведеме аналитичка анализа на рамнотежните положби на спрегнатите системи. Оваа анализа покажа дека во спрегнатите системи се реализираат бесконечно многу нетривијални рамнотежни положби, како резултат на периодичноста на функцијата на спрега q_i (равенка (6.2)), чии вредности зависат од почетните услови и коефициентите на спрегнување. Овој вид на поведение во спрегнатите системи излегува надвор од рамките на актуелните сознанија изложени во литературата [9] за манифестацијата на овие состојби. Од досегашните сознанија е познато дека од интеракцијата на два осцилатори под влијание на силината на спрегнување може да се јават единствени **NHSS** и **IHSS** рамнотежни положби. Од друга страна, нашата анализа покажа дека под влијание на функцијата на спрега се реализираат бесконечно многу нетривијални рамнотежни положби, стабилни и нестабилни, кои се манифестираат со три различни структури и сопствена област на привлечност.

Огромниот број на рамнотежни положби сериозно ја зголемува чувствителноста на спрегнатиот систем на варијација во почетните услови која може да е предизвикана од надворешна пертурбација или шум. Со други зборови, како резултат на надворешна пертурбација или шум спрегнатиот систем многу лесно може да си ја промени својата состојба од осцилаторна во неосцилаторна и обратно, или да изврши премин меѓу различни стабилни осцилаторни или неосцилаторни состојби.

Режимот при кој се реализираат бесконечно многу рамнотежни положби ќе го изложиме преку аналитичка и нумеричка анализа (семи-аналитичка анализа) на системот од два спрегнати VDP осцилатори (равенка (6.3)) за кои е исполнето: $\mu = 0.35, \omega_1 = \omega_2 = \omega = \sqrt{0.71}, c_1^1(t) = c_1^2(t) = c_1(t), c_2^1(t) = c_2^2(t) = c_2(t)$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= y_1(t) - c_2(t) \sin(1.8x_1(t)) + c_1(t) \sin(1.8x_2(t)), \\ \dot{y}_1(t) &= \mu(1 - x_1^2(t))y_1(t) - \omega^2 x_1(t), \\ \dot{x}_2(t) &= y_2(t) - c_2(t) \sin(1.8x_2(t)) + c_1(t) \sin(1.8x_1(t)), \\ \dot{y}_2(t) &= \mu(1 - x_2^2(t))y_2(t) - \omega^2 x_2(t). \end{aligned} \tag{6.10}$$

Спрегнатиот систем покрај хомогената рамнотежна положба $(0,0,0,0)$, поседува и бесконечно многу нетривијални рамнотежни положби $(x_1, y_1, x_2, y_2) \neq (0, 0, 0, 0)$, кои се манифестираат со три различни структури и тоа:

A) Нетривијални хомогени рамнотежни положби (NHSS**)** (x, y, x, y) : кај овие рамнотежни положби состојбите на двата осцилатори x_1, x_2 и y_1, y_2 населуваат исти

вредности за рамнотежна положба: $x_1 = x_2 = x, y_1 = y_2 = y$.

Б) **Нехомогени рамнотежни положби (IHSS) од тип 1** $(x, y, -x, -y)$: кај овие рамнотежни положби состојбите на индивидуалните осцилатори населуваат исти рамнотежни положби спротивни по знак $|x_1| = |x_2| = |x|, |y_1| = |y_2| = |y|$.

В) **Нехомогени рамнотежни положби (IHSS) од тип 2** (x_1, y_1, x_2, y_2) : кај овие рамнотежни положби секоја од состојбите на индивидуалните осцилатори населува различна вредност $x_1 \neq y_1 \neq x_2 \neq y_2$.

Рамнотежните положби се одредуваат со решавање на хомогениот систем алгебарски равенки кој се добива со изедначување на првите изводи на состојбените променливи на 0, односно $(\dot{x}_1(t), \dot{y}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{y}_2(t)) = (0, 0, 0, 0)$ и притоа времето t се елиминира од променливите.

$$\begin{aligned} 0 &= y_1 - c_2 \sin(1.8x_1) + c_1 \sin(1.8x_2), \\ 0 &= \mu(1 - x_1^2)y_1 - \omega^2 x_1, \\ 0 &= y_2 - c_2 \sin(1.8x_2) + c_1 \sin(1.8x_1), \\ 0 &= \mu(1 - x_2^2)y_2 - \omega^2 x_2, \end{aligned} \tag{6.11}$$

Станува збор за систем од 4 нелинеарни алгебарски равенки со 6 степени на слобода (6 непознати: $x_1, y_1, x_2, y_2, c_1, c_2$). Ако за момент ги испуштиме синусните компоненти во системот $(\sin(1.8x_{1,2}) \rightarrow x_{1,2})$, тогаш може да се заклучи дека вредностите на рамнотежните положби ќе зависат од вредностите на c_1 и c_2 .

Од друга страна, ако усвоиме дека коефициентите на спрега се фиксни тогаш проблемот на одредување на рамнотежните положби се сведува на решавање на систем од 4 равенки по непознатите (x_1, y_1, x_2, y_2) . Овој систем поседува бесконечно многу решенија (рамнотежни положби) како резултат на периодичноста на функцијата на спрега (на синусните компоненти). Може да се заклучи дека за секоја различна реализација на коефициентите на спрега c_1 и c_2 постојат бесконечно многу комбинации $(x_1, y_1, x_2, y_2) \neq \mathbf{0}$ кои претставуваат решение на системот (6.11).

Анализата на условите при кои се јавуваат трите претходно дефинирани нетривијални рамнотежни положби ќе биде направена за конкретни вредности на c_1 и c_2 . Ова ќе обезбеди решавањето на системот да се одвива во четири наместо во шест димензии (6 непознати). Ако во системот (6.11) се фиксираат вредностите на c_1 и c_2 и се решат

првата и третата равенката по однос на y_1 и y_2 ќе се добие:

$$\begin{aligned} y_1 = -q_1 &= c_2 \sin(1.8x_1) - c_1 \sin(1.8x_2), \\ y_2 = -q_2 &= c_2 \sin(1.8x_2) - c_1 \sin(1.8x_1). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Потоа, ако така добиените y_1 и y_2 се заменат во втората и четвртата равенка соодветно, тогаш оргиналниот систем ќе се сведе на две равенки со две непознати:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, c_1, c_2) = 0 &= \mu(1 - x_1^2)[c_2 \sin(1.8x_1) - c_1 \sin(1.8x_2)] - \omega^2 x_1, \\ f_2(x_1, x_2, c_1, c_2) = 0 &= \mu(1 - x_2^2)[c_2 \sin(1.8x_2) - c_1 \sin(1.8x_1)] - \omega^2 x_2. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Врз основа на системот (6.13) ќе направиме поединечна анализа на трите видови на нетривијални рамнотежни положби како и на условите при кои тие се манифестираат.

Нека најпрво ги разгледаме условите при кои доаѓа до појава на **NHSS** рамнотежните положби погоре опишани под А). За таа цел, во равенките (6.12) и (6.13) ќе ја воведеме смената: $x_1 = x_2 = x, y_1 = y_2 = y$. Оваа смена ги сведува равенките (6.12) и (6.13) на две уникатни равенки, $y_1 = y_2 = y$ и $f_1 = f_2 = f$. Според ова, системот (6.13) го добива следниот облик:

$$f(x, c_1, c_2) = 0 = \mu(1 - x^2)[(c_2 - c_1) \sin(1.8x)] - \omega^2 x. \quad (6.14)$$

При $c_1 \neq c_2$ ќе постојат бесконечно многу решенија (x, y) заради периодичноста на синусната функција која произлегува од функцијата на спрега. Решенијата на равенката (6.14) може да се одредат нумерички преку барање на пресекот на функцијата (6.14) со апсисната оска. Алтернативно, тие може да се одредат со барање на пресеците на функциите од двете страни на равенката (6.15).

$$[c_2 - c_1] \sin(1.8x) = \frac{\omega^2}{\mu} \frac{x}{(1 - x^2)}. \quad (6.15)$$

Вредностите на y се добиваат со замена на x во равенката $y = (c_2 - c_1) \sin(1.8x)$.

Ако при анализата на последната равенка (6.15) се из земе од предвид тривијалното решение, тогаш левата и десната страна на равенката ќе бидат исти ако и само ако следните три услови се исполнети:

- $c_1 \neq c_2$,
- $\sin(1.8x) \neq 0 \rightarrow x = k\pi/1.8, k = \pm 1, \pm 2, \dots$,
- $x \neq \pm 1$.

Следно, нека ги анализираме условите за појава на **IHSS** рамнотежните положби од тип 1, погоре опишани под Б). За таа цел, во системот ќе ја воведеме смената $(x_1, y_1, x_2, y_2) = (x, y, -x, -y)$. Усвојуваќи го истото резонирање од претходно, системот (6.11) ќе се сведе на равенката:

$$f(x, c_1, c_2) = 0 = \mu(1 - x^2)[(c_2 + c_1) \sin(1.8x)] - \omega^2 x_2, \quad (6.16)$$

кое може да се презапише на следниот начин:

$$[c_2 + c_1] \sin(1.8x) = \frac{\omega^2}{\mu} \frac{x}{(1 - x^2)}. \quad (6.17)$$

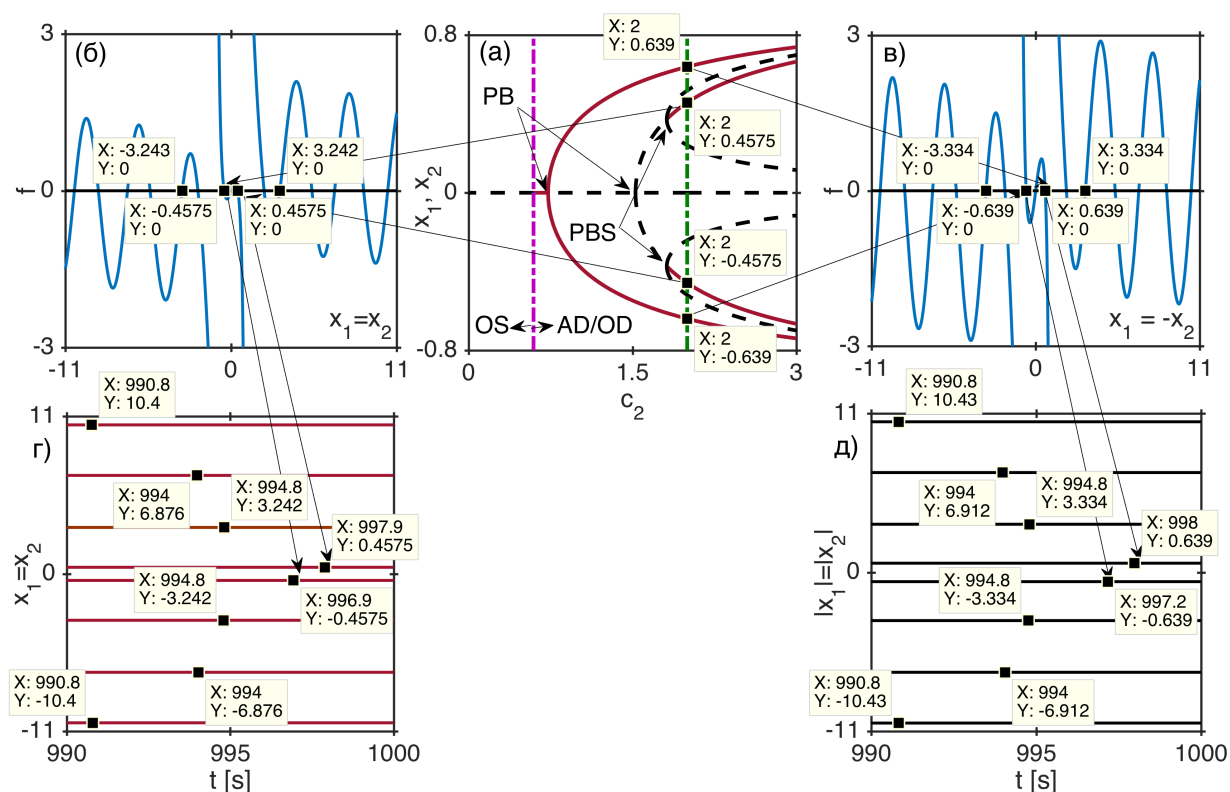
Решенијата на равенката (6.17) се во пресеците на функциите од двете страни на знакот за еднаквост или еквивалентно во пресекот на функцијата (6.16) со апсисната оска. Вредностите на y се добиваат со замена на x во равенката $y = (c_2 + c_1) \sin(1.8x)$. Слично како во претходно анализираниот случај, ако се из земе тривијалното решение $(0, 0)$, тогаш левата и десната страна на равенката (6.17) ќе бидат исти ако и само ако следните три услови се исполнети:

- $c_1 = c_2 \neq 0$,
- $\sin(1.8x) \neq 0 \rightarrow x = k\pi/1.8, k = \pm 1, \pm 2, \dots$,
- $x \neq \pm 1$.

На крај, нека ги анализираме условите за појава на **IHSS** рамнотежните положби од тип 2, погоре опишани под В). Овие рамнотежни положби ќе се јават во системот за комбинација од вредности $(x_1, y_1, x_2, y_2) \neq \mathbf{0}$ кои едновременно го сведуваат системот (6.13) на 0, односно $f_1 = f_2 = 0$. Лесно може да се покаже дека ако (x_1, y_1, x_2, y_2) е решение, тогаш и (x_2, y_2, x_1, y_1) , $(-x_1, -y_1, -x_2, -y_2)$, $(-x_2, -y_2, -x_1, -y_1)$ претставуваат решенија на системот. Решението (x_2, y_2, x_1, y_1) е резултат на идентичните спрегнати осцилатори и тоа нема да се јави доколку $\omega_1 \neq \omega_2$. Остантите две негативни решенија се резултат на непарноста на функцијата на спрега и тие нема да се јават доколку функцијата на спрега е парна или ниту парна ниту непарна функција. Примери на парна и ниту парна ниту непарна функции на спрега, слични на овде разгледуваната функција на спрега (6.2), се:

- парна функција: $q_{1,2} = -c_2(t) \cos(1.8x_{1,2}(t)) + c_1(t) \cos(1.8x_{2,1}(t))$,
- ниту парна ниту непарна: $q_{1,2} = -c_2(t) \cos(1.8x_{1,2}(t)) + c_1(t) \sin(1.8x_{2,1}(t))$.

Иако влијанието на парноста на функцијата на спрега нема да го анализираме овде, сепак е вредно да се спомене дека парноста на функцијата на спрега може да претставува релевантен фактор кој ги диктира вредностите на нетривијалните рамнотежни положби А), Б) и В).



Слика 6.8: Корелациона анализа меѓу квантитативните вредности на нетривијалните рамнотежни положби од тип А) и Б) набљудувани во MATLAB и XPPAUT. На сликата (а) е даден бифуркациониот дијаграм на системот даден со равенката (6.10), каде со црвена (црна) боја се дадени стабилни (нестабилни) рамнотежни положби. На сликите (б) и (в), во MATLAB, се дадени нумеричките решенија над интервалот $x \in [-11, 11]$ на равенките (6.14) и (6.16) соодветно, при $(c_1, c_2) = (0.4, 2)$. На сликите (г) и (д), во MATLAB, се дадени нетривијалните рамнотежни положби од тип А) и Б) кои се реализираат во системот за 5000 случајни почетни услови над интервалот $[-10, 10]$.

Со претходната анализа покажавме дека бесконечно многуте нетривијални рамнотежни положби се реалност во спрегнатиот систем. Заради комплексноста на равенките кои треба да се решат, одредувањето на нетривијалните рамнотежни положби во затворен аналитички облик е невозможно. Па така, појавата на овие рамнотежни положби ја проучивме преку нумеричка анализа на спрегнатиот систем (6.10)

при $c_1 = 0.4$ и $c_2 = 2$, во ХРРАУТ и МАТЛАВ. Најпрво беше проучена појавата на рамнотежните положби од тип А) и Б) (слика 6.8), а подоцна и на тие од тип В) (слика 6.9).

На сликата 6.8 е дадена корелационата анализа на квантитативните вредности на нетривијалните рамнотежни положби од тип А) и Б) добиени во ХРРАУТ и МАТЛАВ. Најпрво, го генериравме бифуркациониот дијаграм на системот при $c_1 = 0.4$ и $c_2 \in [0, 3]$ (слика 6.9 (а)). Заради непроброивоста на рамнотежните положби на бифуркациониот дијаграм се прикажани само рамнотежните положби кои се јавуваат како резултат на разбивање на симетријата на тривијалната рамнотежна положба $(0, 0, 0, 0)$. Бифуркациониот дијаграм е поделен на два дела преку розовата испрекинатата линија, лево од нејзе во спрегнатиот систем постои **осцилаторна состојба/Oscillatory State (OS)**, додека десно од нејзе настапува неосцилаторната состојба (**AD** и **OD**). Состојбата **AD** се јавува како резултат на стабилизирање на тривијалната рамнотежна положба преку **HB** бифуркација при $c_{2,HB} \approx 0.59$. За $c_2 > (\approx 0.73)$ оваа состојба исчезнува и доаѓа до појава на стабилни и нестабилни нетривијални рамнотежни положби од тип А) и Б). Во конкретниот случај рамнотежните положби од тип А) се јавуваат преку **субкритична вила бифуркација/Subcritical PB (PBS)** која се случува за $c_{2,PBS} \approx 1.81$ додека пак рамнотежните положби од тип Б) се јавуваат преку **суперкритична вила бифуркација (PB)** која настанува за $c_{2,PB} \approx 0.73$

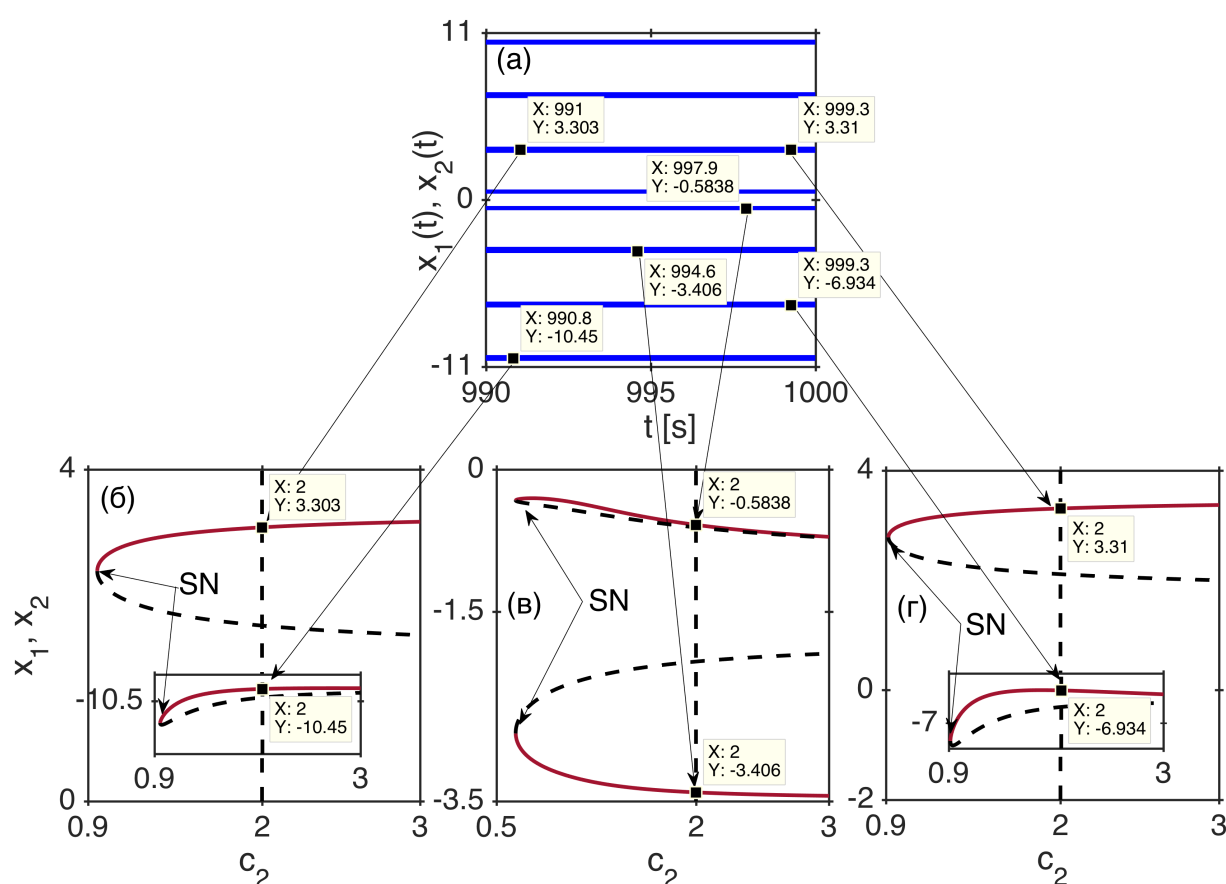
Ние ги разгледувавме стабилните рамнотежни положби (слика 6.8 (а)) кои се јавуваат во пресекот на гранките означени со црвена боја на бифуркациониот дијаграм и испрекинатата зелена линија добиена за $c_2 = 2$. Вредностите на рамнотежните положби заокружени до четврта децимала се:

- тип А): $(x_1, x_2) = (\pm 0.4575, \pm 0.4575)$,
- тип Б): $(x_1, x_2) = (\pm 0.639, \mp 0.639)$.

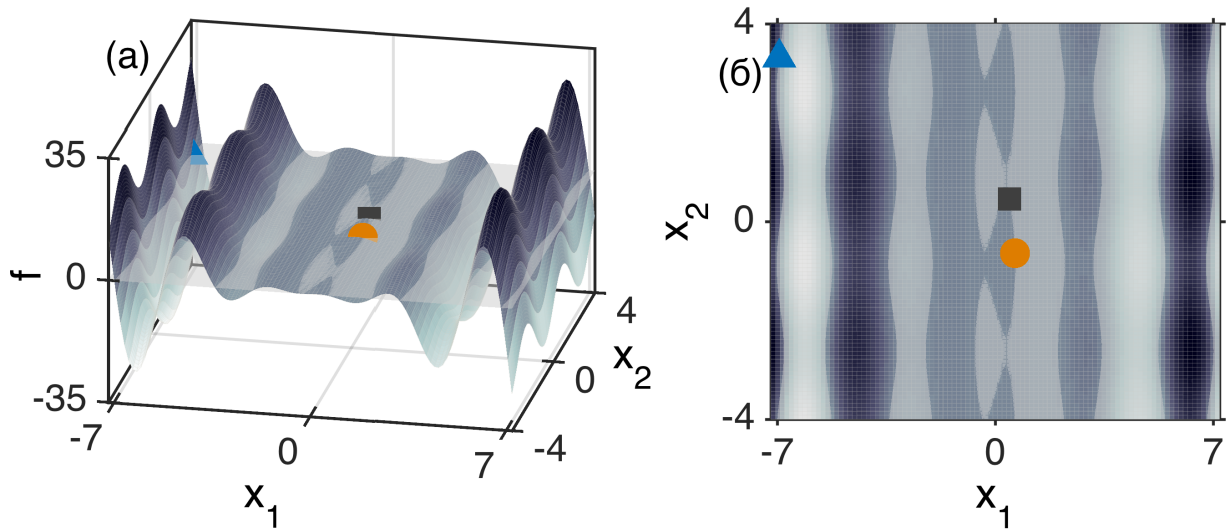
Ако го следиме текот на стрелките и ги набљудуваме вредностите на рамнотежните положби дадени во правоаголниците може да се забележи дека истите вредности што се набљудуваат во ХРРАУТ се добиваат и при нумеричкото решавање на равенките (6.14) и (6.16) во МАТЛАВ (слика 6.8 (б) и (в)) и на крај истите рамнотежни положби се реализираат во одзивот на состојбите во МАТЛАВ (слика 6.9 (в) и (г)). Ова укажува на тоа дека постои 1:1 корелација меѓу вредностите на рамнотежните положби одредени во двата софтвери.

Следно се фокусираме на квантитативна анализа на нетривијалните рамнотежни положби од тип В) добиени во МАТЛАВ и ХРРАУТ, слика 6.9. На сликата 6.9 (а)

е дадена реализацијата на овие рамнотежни положби во одсивот на состојбите на осцилаторите при различни почетни услови. На сликите 6.9 (б)-(г) се дадени бифуркациони дијаграми со кои се претставени три реализации на рамнотежните положби од тип В). Во сите три случаи, овие рамнотежни положби се манифестираат во системот преку **седло-јазел бифуркација/Saddle-Node Bifurcation (SN)**. Во други случаи, рамнотежните положби од тип В) може да се реализираат во системот и преку транзиција од стабилен нехомоген граничен круг (**IHLC**) во стабилна нехомогена рамнотежна положба преку **НВ бифуркација**. На сликите 6.9 (б)-(г) ги набљудуваме вредностите на стабилните рамнотежни положби кои се добиваат во пресеците на црвените



Слика 6.9: Корелациона анализа меѓу квантитативните вредности на нетривијалните рамнотежни положби од тип В) набљудувани во MATLAB и XPPAUT. На сликата (а), во MATLAB, се дадени рамнотежните положби од тип В) кои се реализираат за 5000 случајни почетни услови над интервалот $[-10, 10]$. На сликите (б)-(г) се дадени бифуркационите дијаграми на системот при $c_1 = 0.4$ и $c_2 \in [0, 3]$, каде со црвена (црна) боја се дадени стабилни (нестабилни) рамнотежни положби.



Слика 6.10: На сликите (а) и (б) е дадена анализа на влијанието на функцијата на спрега во генерирањето на нетривијалните рамнотежни положби при $(c_1, c_2) = (0.4, 2)$. На сликата (а) е дадена 3D претстава на пресеците на функцијата f_1 (f на сликата) од равенката (6.13) со рамнината $z = 0$. На сликата (б) е дадена птичја перспектива на сликата (а). Со маркерите во боја се дадени по една рамнотежна положба од тип А), Б) и В), означени со круг, правоаголник и триаголник, чии вредности се $(0.4575, 0.4575)$, $(0.639, -0.639)$ и $(3.31, -6.934)$, соодветно.

линии и испрекинтите црни вертикални линии добиени за $c_2 = 2$. Апроксимативно, рамнотежните положби се: $(x_1, x_2) \in \{(3.303, -10.45), (-0.5838, -3.406), (3.31, -6.934)\}$. Согласно со дискусијата од претходно, за манифестирањето на рамнотежните положби од тип В), заради усвојувањето на идентични осцилатори, рамнотежни положби на спрегнатиот систем претставуваат и пермутираните вредности на горните рамнотежни положби: $(x_1, x_2) \in \{(-10.45, 3.303), (-3.406, -0.5838), (-6.934, 3.31)\}$. Следно ако се фокусираме на текот на стрелките од сликата 6.9 (а) кон сликите 6.9 (б)-(г) може да се забележи дека постои 1:1 корелација меѓу вредностите на рамнотежните положби одредени во двата софтвери.

Во продолжение направивме анализа на областа на привлечност на секој од трите типови на рамнотежни положби А), Б) и В). За таа цел спрегнатиот систем (6.10) го симулиравме во MATLAB за 5000 случајни почетни услови избрани од интервалот $[-10, 10]$ при $(c_1, c_2) = (0.4, 2)$. Нетривијалните рамнотежни положби од тип А), Б) и В) на кои се стабилизираат состојбите $x_1(t)$ и $x_2(t)$ се дадени на сликите 6.8 (г), (д) и 6.9 (а), соодветно. Од вкупниот број на почетни услови за кои беше симулиран сп-

регнатиот систем со најголема фреквенција спрегнатиот систем се стабилизираше на рамнотежните положби од тип В) вкупно 3148 пати, додека на останатите рамнотежни положби од тип А) и Б) спрегнатиот систем се стабилизираше по 894 и 958 пати, соодветно. Вкупниот број на уникатни (различни по вредност) нетривијални рамнотежни положби на кои се стабилизираа осцилаторите е 64, од кои 48 се од тип В) и по 8 се од тип А) и Б). Од приложената анализа може да се заклучи дека најголема област на привлечност имаат рамнотежните положби од тип В). Овој заклучок е очекуван доколку се земе предвид дека бројот на рамнотежни положби од тип В) е за 4 пати поголем во однос на вкупниот број на рамнотежни положби од тип А) и Б).

На крај, го разгледаваме импактот од функцијата на спрега врз бројот на нетривијалните рамнотежни положби кои се реализираат во системот, слика 6.10. За таа цел е дадена 3D (слика 6.10 (а)) и 2D (слика 6.10 (б)) претстава на нумеричките решенија добиени во MATLAB на функцијата f_1 (6.13) (f на сликата) со рамнината $z = 0$ при $(c_1, c_2) = (0.4, 2)$. Од сликата 6.10 (а) е очигледно дека како резултат на брановидноста на f , која е предизвикана од функцијата на спрега (синусните компоненти) постојат бесконечно многу вредности (x_1, x_2) во кои се блендирани тривијалната и остантите три видови на нетривијални рамнотежни положби А), Б) и В).

Вредностите (x_1, x_2) лежат на рабовите од потоците и езерцата кои се формираат при пресекот на f со рамнината $z = 0$. Потврда за ова е дадено со три конкретни нетривијални рамнотежни положби означени со маркери во различна боја (види слика 6.10). Уште појасна визуелизација на рабовите кои ги претставуваат рамнотежните положби е дадена со сликата 6.10 (б) која претставува птичја перспектива од сликата 6.10 (а).

Глава 7

Управување и одржување на непречен осцилаторен процес

Осцилациите се сеприсутен феномен во техничките и нетехничките системи и нивното непречено опстојување е клучно за нормалното функционирање на голем број на системи во индустријата и природата. Некои проминентни примери за нетехнички и технички системи во кои е неопходно постоење на непречен и робустен осцилаторен процес се: осцилациите во океанот и атмосферата [104], мозочните бранови во невронауката [105], генераторите на електрична енергија [106], кардиореспираторниот синус ритам [107], кардиоваскуларниот систем [108] и др. Прекилот на осцилациите во овие системи може да настапи под влијание на временски променливата околина во која се наоѓаат или нивната интеракција со други системи. Тоа како резултат може да доведе до непоправливи аномалии во нивното работење, па дури и до прекин на животот во биолошките системи.

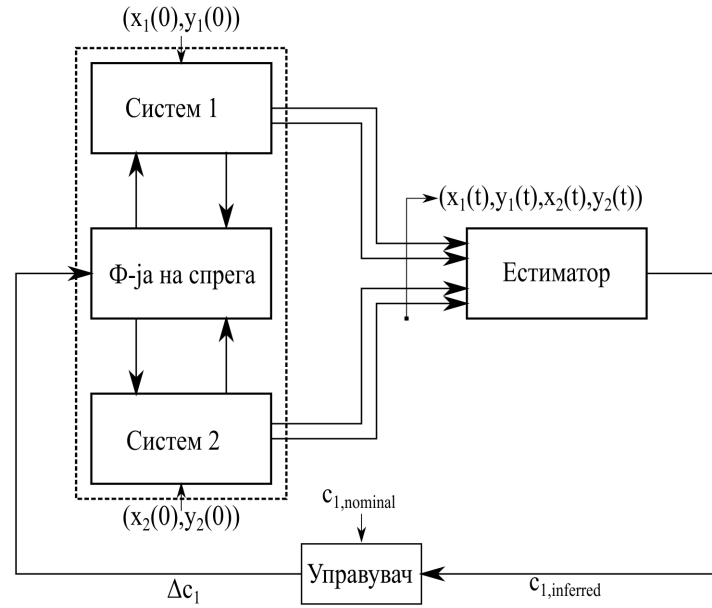
Претходно во деловите 6.2.1 и 6.2.2 покажавме дека временски променливите функции на спрега претставуваат поттикнувачи на транзицијата меѓу осцилаторна и неосцилаторна состојба во спрегнатите системи. Значењето и влијанието на временски променливите функции на спрега врз транзицијата меѓу различните квалитативни состојби дополнително го продлабочивме во делот 6.3, каде покажавме дека временски променливите функции на спрега воведуваат бесконечно многу нетривијални рамнотежни положби во спрегнатиот систем со различно квалитативно поведење. Според ова, може да се заклучи дека временската променливост на интеракцијата меѓу осцилаторите може да претставува генератор на премин меѓу различно квалитативно поведење. Со други зборови, временската променливост на интеракциите воведува дегенеративна димензија во природно осцилаторните системи со тек на време.

Имено, ако го анализираме кардиоваскуларниот систем кој е проминентен пример на природно осцилаторен систем, врз основа на резултатите анализирани во претходната глава, може да хипотезираме дека временски променливите функции на спрега претставуваат механизам кој потенцијално може да доведе до осцилаторно придушување во некои од осцилаторните процеси (вкупно се 5) кои природно опстојуваат во овој систем. Ова како резултат може да доведе до аномалија во работата на срцевиот мускул или во најлош случај до инфаркт. Во [52], на моделот на кардиоваскуларен систем составен од пет осцилатори, преку нумеричка и аналогна симулација е покажано дека, под влијание на силината на спрегнување, модулацијата на фреквенцијата и амплитудата на осцилаторите, во моделот на кардиоваскуларниот систем се индуцира осцилаторно придушување, кое што се манифестира така што еден или повеќе осцилатори населуваат неосцилаторна состојба.

7.1 Проектирање и имплементација на управувачки пристап за управување и одржување на непречен осцилаторен процес

Имајќи го на ум претходно кажаното, очигледна е неопходноста од управувачки пристап кој ќе детектира можна транзиција од осцилаторна во неосцилаторна состојба и притоа ќе ја превенира преку генерирање на соодветна управувачка акција. Во рамките на овој дел, за прв пат во литературата посветена на спрегнувачките функции, е предложен управувачки пристап, кој со интервенција во механизмот на интеракција, конкретно преку управување на коефициентот на спрега $c_1(t)$ во q_i (равенка 6.2), ќе превенира спрегнатите системи да преминат од осцилаторна во неосцилаторна состојба. Идејата е управувачкиот систем преку управување на $c_1(t)$ да врши модулација на физичкото правило, според кое природно се одвива интеракцијата во спрегнатиот систем, и на тој начин да влијае врз исходот од самата интеракција. За разлика од стандардните управувачки пристапи каде повратната врска е по однос на еволуцијата на состојбите, во предложениот управувачки пристап (слика 7.1) повратната врска е по однос на коефициентот на спрега $c_1(t)$ а временската еволуција на состојбите се користи за негова естимација. Управувачкиот пристап се состои од две компоненти: 1) Баесов естиматор и 2) ПИ управувач.

За цели на управување се користи стандардната паралелна форма на дискретен ПИ управувач [109]. Наместо вообичаениот ПИД управувач, се користи ПИ управувач,



Слика 7.1: Структурна блок шема на управувачкиот пристап составен од Естиматор и Управувач. Спрегнатиот систем е составен од два автономни системи и е претставен со правоаголник со испрекинати линии каде функцијата на спрега се наоѓа меѓу двата спрегнати системи. Естиматорот ја естимира вредноста на $c_1(t)$. Управувачот, естимираната вредност $c_{1,inferred}$ ја споредува со некоја номинална вредност $c_{1,ref}$ и продуцира управувачка вредност Δc_1 која се аплицира во функцијата на спрега.

бидејќи динамиката на промена на управуваниот коефициент на спрега е очекувано да е контаминирана со шум, а тоа може да предизвика диференцирачката компонента од ПИД управувачот да генерира непосакувани моментални високи амплитуди во управувачката вредност, кои може да ја загрозат нумеричката стабилност на Баесовиот алгоритам. Употребениот ПИ управувач е дефиниран на следниот начин:

$$\Delta c_1(j) = K_p c_{1,diff.}(j) + K_i \sum_{k=1}^j c_{1,diff.}(k)h, \quad (7.1)$$

каде Δc_1 е управувачката вредност која се пресметува на база на тековни и минати вредности на управувачката грешка $c_{1,diff.}$, која е дефинирана како разлика помеѓу саканата $c_{1,ref}$ и естимираната вредност на коефициентот на спрега $c_{1,inferred}$. Преку K_p и K_i се нагодува ПИ управувачот, т.е. преку овие коефициенти се дефинира влијанието на пропорционалната, односно интегрирачката компонента во управувачката вредност. Со h е даден чекорот на интеграција (семплирање).

Во продолжение управувачкиот пристап е изложен преку псевдо-кодот, Algorithm 1. Улогата на естиматорот во управувачкиот пристап е да врши континуирана естимација на коефициентот на спрега $c_1(t)$ при лизгачки временски прозорец t_W од минати вредности на состојбите на спрегнатите системи. Откако естиматорот ќе ја пресмета естимираната вредност $c_{1,inferred}$ (линија: 8), таа се споредува со зададена номинална (референтна) вредност $c_{1,ref.}$ (линија: 9). Номинална траекторија $c_{1,ref.}$ ја претставува

Algorithm 1 Псевдо-код на управувачкиот алгоритам составен од ПИ управувач и Баесов естиматор

```

1: req.:  $\mu, \omega_1, \omega_2, c_1, c_2, c_{1,ref.}, t_W, T, h.$ 
2: init.:  $\mathbf{x}(1), N_h = 50, c_{1,inferred} = 0, \Delta c_{1,N_h} = \emptyset, BayesON = False, Simulation = False, c_{1,diff.} = \emptyset.$ 
3: while  $\neg Simulation$  do
4:   if  $(i == t_W/h)$  then
5:      $BayesON = True;$  ▷ вклучи го Bayes штом  $t = t_W$ 
6:   end if
7:   if  $(BayesON == True)$  and  $(\text{mod}(i, N_h) == 0)$  then
8:      $c_{1,inferred} \leftarrow Bayes(\mathbf{x}(:, i - (t_W/h) + 1 : i), W, h);$ 
9:      $c_{1,diff.}(j) \leftarrow c_{1,ref.}(i) - c_{1,inferred};$ 
10:     $\Delta c_{1,N_h}(1, i : i + N_h - 1) \leftarrow 0.5c_{1,diff.}(j) + 0.045N_h \sum_{k=1}^j c_{1,diff.}(k)h;$ 
11:     $j \leftarrow j + 1;$ 
12:   end if
13:    $\mathbf{x}(:, i + 1) \leftarrow System(\mathbf{x}(:, i), c_1(i) + \Delta c_{1,N_h}(i), c_2(i), h);$ 
14:   if  $(i == T/h - 1)$  then
15:      $Simulation = True;$ 
16:   end if ▷ прекини ја симулацијата штом  $t = T$ 
17:    $i \leftarrow i + 1;$ 
18: end while

```

посакуваната динамика на коефициентот $c_1(t)$ која обезбедува непречен осцилаторен процес. Вредноста на споредбената променлива $c_{1,diff.}$ детерминира колку близу или далеку е системот од номиналната вредност на $c_{1,ref.}$. Соодветно на вредноста $c_{1,diff.}$ емпириски наогдениот ПИ управувач пресметува корегирачка вредност Δc_1 која се аплицира во спрегнатиот систем во наредните N_h интегрирачки чекори h (линија: 10 и линија: 13). Идејата да се воведат уште еден параметар N_h , кој емпириски се нагодува, е да се редуцира фреквенцијата на пресметување на $c_{1,inferred}$ и на тој начин

да се намали компјутационата комплексност што ја воведува Баесовиот естиматор. Во периодот од N_h интегрирачки чекори помеѓу две последователно естимирани вредности, управувачката променлива Δc_1 се држи константна и еднаква на последно пресметаната вредност. Потенцијален проблем од воведувањето на N_h може да се јави доколку природната динамика на менување на $c_1(t)$ е побрза од времето на естимација hN_h и притоа е обременета со големи флукуации во неговата вредност. Во таков случај, заради пролонгираната естимација, за N_h чекори, управувачот нема да се спротистави на таа промена бидејќи нема да ја детектира. Сепак треба да се напомене дека, во пракса, промената на коефициентот се очекува да е глатка и постепена без драстични флукуации во неговата амплитуда.

Ефикасноста на предложениот управувачки пристап ја анализираваме на спрегнатиот систем составен од два спрегнати VDP осцилатори (6.3) за кои е усвоено: $\mu = 0.35$, $\omega_1 = \sqrt{0.71}$, $\omega_2 = \sqrt{0.97}$, $c_1^1(t) = c_1^2(t) = c_1(t)$, $c_2^1(t) = c_2^2(t) = c_2(t)$. Со цел директно да се интервенира во вредноста на $c_1(t)$, спрегнатиот систем (6.3) е модификуван преку инкорпорирање на компонентата $\Delta c_1 \sin(1.8x_j)$ во функцијата на спрега:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= y_i(t) - c_2(t) \sin(1.8x_i(t)) + c_1(t) \sin(1.8x_j(t)) + \Delta c_1 \sin(1.8x_j(t)), \\ \dot{y}_i(t) &= \mu(1 - x_i^2(t))y_i(t) - \omega_i^2 x_i(t), \\ i, j &= 1, 2; i \neq j. \end{aligned} \quad (7.2)$$

За коефициентите на спрега е усвоено дека $c_2(t)$ е константна вредност а $c_1(t)$ се менува како синусна функција над $[0.2, 1.2]$ со фреквенција $2\pi/T$, каде T е временскиот интервал над кој се анализира спрегнатиот систем. Конкретниот облик на коефициентите на спрега е даден со:

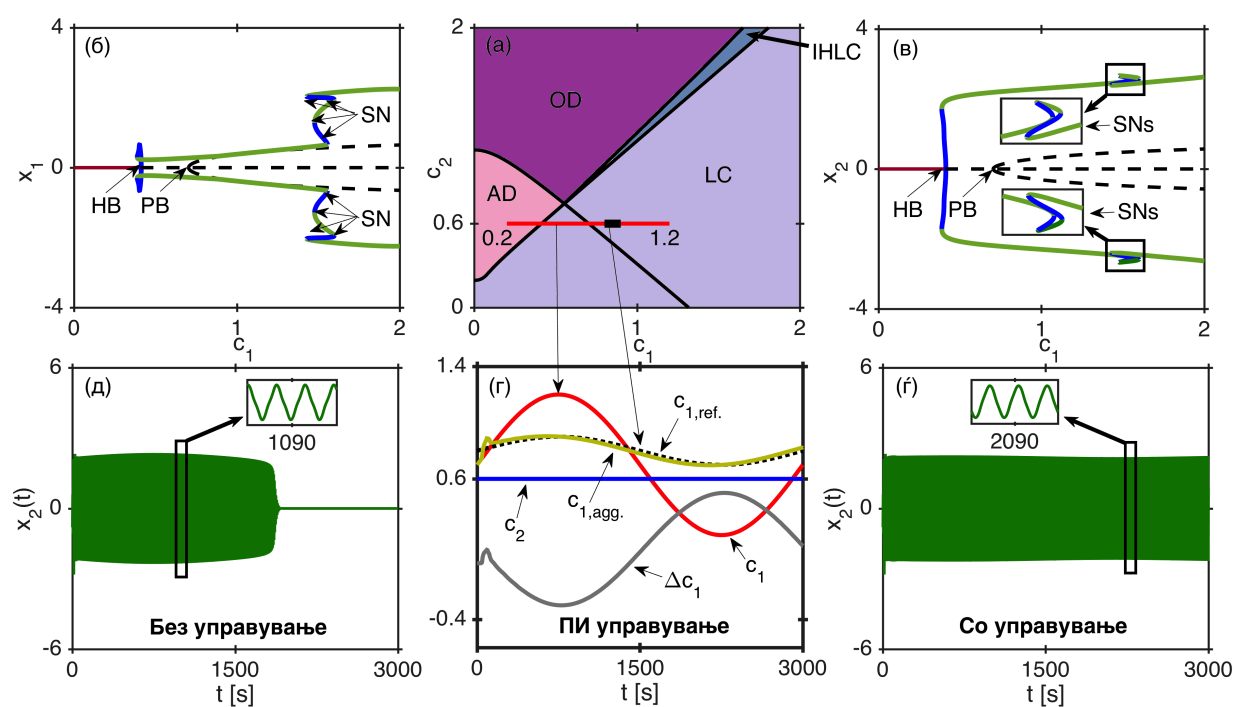
$$c_1(t) = 0.5 \sin((2\pi/T)t) + 0.7, c_2(t) = 0.6. \quad (7.3)$$

За номиналната вредност $c_{1,ref.}$ е усвоено дека се менува како синусна функција со фреквенција $2\pi/T$ над $[0.8, 0.9]$:

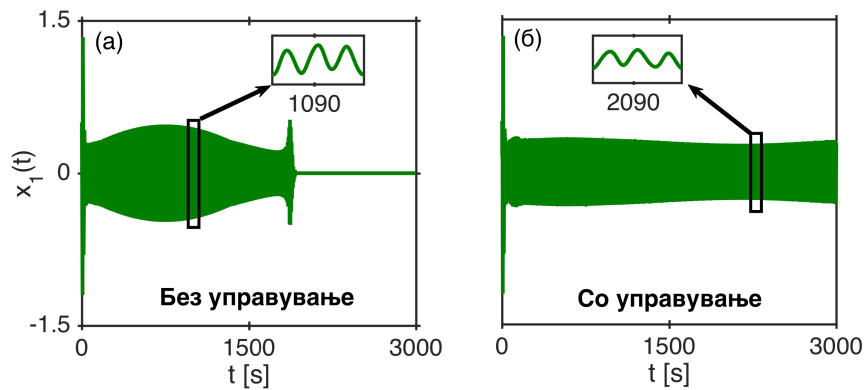
$$c_{1,ref.}(t) = 0.1 \sin((2\pi/T)t) + 0.8. \quad (7.4)$$

Проекцијата на параметрите (7.3) и (7.4) во рамнината $c_1 - c_2$ на бифуркациониот дијаграм (слика 7.2 (а)) е дадена со црвена и црна линија, соодветно. Со црвената линија е дадена природната динамика на еволуција на параметарот $c_1(t)$, додека со црната линија е дадено саканото поведење на $c_1(t)$. При временската еволуција на коефициентите (7.3) (црвената линија, слика 7.2 (а)), која се карактеризира со фиксно c_2 и c_1 кое се менува според синусен закон, системот минува низ транзицијата од стабилна

осцилаторна состојба (LC) во стабилна хомогена состојба (AD), слики 7.2 (д) и 7.3 (а). При $\Delta c_1 = 0$ во ХРРАУТ го потврдивме квантитативното манифестирање на AD и LC состојбите во двата осцилатори x_1 и x_2 така што ги генериравме бифуркационите дијаграми (слика 7.2 (б) и (в)) за $c_1 \in [0, 2]$ и $c_2 = 0.6$. Од бифуркационите дијаграми може да се забележи дека состојбата на системот минува низ транзицијата од стабилна (AD) во стабилна (LC) состојба (транзиција $AD \rightarrow LC$) преку HB бифуркација за $c_1 \approx 0.4$, која предизвикува појава на стабилна осцилаторна состојба која опстојува над целиот интервал на разгледување на c_1 . Следно, за $c_1 > 0.4$ постои нестабилна хомогена рамнотежна положба која преминува во нестабилна нехомогена



Слика 7.2: Анализа на ефективната на предложениот управувачки пристап кога тој е аплициран на системот (7.2). На сликите (а), (б) и (в) се дадени двопараметарскиот бифуркационен дијаграм (слика (а)) за $c_1, c_2 \in [0, 2]$ и еднопараметарските бифуркациони дијаграми за состојбите x_1 и x_2 на двата осцилатори при $c_1 \in [0, 2]$ и $c_2 = 0.6$ (слики (б) и (в)), при $\Delta c_1 = 0$, каде со зелена (сина) боја е претставен стабилан (нестабилан) граничен круг, а со црвена (црна) боја се претставени стабилни (нестабилни) рамнотежни положби. На сликата (г) е дадено поведението на вкупниот коефициент на спрега $c_{1,agg.} = c_1 + \Delta c_1$ при ПИ управување. Одзивот на состојбата $x_2(t)$ пред и по воведувањето на управувачкиот алгоритам е даден на сликите (д) и (ѓ), соодветно.



Слика 7.3: Одсивот на состојбата $x_1(t)$ на првиот осцилатор пред и по воведувањето на управувачкиот пристап.

рамнотежна положба преку суперкритична (PB) бифуркација за $c_1 \approx 0.7$. При $c_1 \approx 1.5$ постојат неколку SN бифуркации на гранични кругови.

Следно во MATLAB го анализиравме поведението на спрегнатиот систем кога во системот е воведен управувачкиот пристап составен од Баесов естиматор и ПИ управувач. Идејата е емпириски нагодениот ПИ управувач ($K_P = 0.5$, $K_I = 0.045$ и $N_h = 50$) преку естиматорот $c_{1,inferred}$, кој што го добива од Баесовиот алгоритам да ја корегира вредноста на коефициентот $c_1(t)$, така што додека овој коефициент варира по должината на црвената линија (види слика 7.2 (а)) управувачот ќе пресметува управувачка вредност Δc_1 која ќе го присили вкупниот коефициент $c_{1,agg.}(t) = c_1 + \Delta c_1$ да е близу до црната линија. На овој начин управувачот ќе обезбеди вредноста на $c_{1,agg.}(t) = c_1 + \Delta c_1$ да остане во регионот на стабилни осцилации (LC) и со тоа нема да дозволи спрегнатиот систем да премине од осцилаторна во неосцилаторна состојба. Од сликата 7.2 (г) може да се забележи дека вкупниот коефициент $c_{1,agg.}(t)$ (жолта линија) успешно ја следи номиналната вредност $c_{1,ref.}$ (црна испрекината линија). Ова се постигнува како резултат на примената на управувачкиот пристап кој врши едновременно, прецизна естимација и задоволително управување на параметарот $c_1(t)$. Баесовиот естиматор врз основа на временски прозорец од $t_W = 50[s]$ на минати вредности на состојбата на осцилаторите ($x_1(t)$, $y_1(t)$, $x_2(t)$, $y_2(t)$) врши континуирана естимација на параметарот $c_1(t)$. Понатаму, ПИ управувачот соодветно на естимираната вредност го наведува вкупниот коефициент $c_{1,agg.}(t) = c_1 + \Delta c_1$ (жолта линија) кон номиналната вредност $c_{1,ref.}$ (испрекината црна линија) преку пресметаната управувачка вредност Δc_1 (сива линија). Од сликите 7.2 (д) и 7.3 (а) може да се забележи дека, пред да се воведат управувачкиот алгоритам состојбите на осцилаторите $x_1(t)$ и $x_2(t)$ минуваат низ транзицијата од осцилаторна во неосцилаторна состојба. За разлика од

ова, кога во системот ќе се воведат управувачкиот алгоритам (слики 7.2 (г) и 7.3 (б)) осцилаторната состојба останува непрекината над целиот интервал на симулација T .

Глава 8

Заклучок и насоки за идно истражување

Во докторскиот труд е направено проширување и продлабочување на резултатите и сознанијата познати во литературата за временски променливите функции на спрега. Во трудот е покажано дека временски променливите функции на спрега претставуваат главен двигател на транзиции меѓу различни квалитативни состојби во отсуство на варијација во параметрите на индивидуалните спрегнати системи.

Опстојувањето на непрекинат осцилаторен процес е неопходност во огромен број на технички и нетехнички системи. Па затоа, ние главно се фокусиравме на проучување и превенирање на транзицијата од режим на стабилни осцилации во режим на придрушени осцилации. Од спроведената бифуркациона и нумеричка анализа на два различни спрегнати системи, спрегнати преку периодична функција на спрега, заклучивме дека промената на формата на функцијата на спрега е одговорна за колабрирање на осцилаторниот процес во спрегнатите системи и настапувањето на осцилаторно придрушена состојба. Притоа, специјална временска променливост на функцијата на спрега беше разгледувана, при која, формата на функцијата на спрега се менува додека вкупното засилување на спрега е константно.

Дополнително, од анализата на спрегнатите системи произлезе нов режим на динамичко поведење во спрегнатите системи кој е индуциран од страна на разгледуваната временски променлива функција на спрега. Имено, настапувањето на овој режим во спрегнатиот систем се карактеризира со појава на бесконечно многу нетривијални, хомогени и нехомогени, рамнотежни положби кои имаат различни динамички карактеристики, специфична структура и сопствена област на привлечност. Покажавме дека, под влијание на пертурбации во почетната состојба на спрегнатиот систем,

тој многу лесно ја менува својата нетривијална состојба. Исто така, не е исклучена можноста за премин меѓу различните нетривијални состојби под влијание на шум кога спрегнатиот систем се наоѓа на граница да премине од една во друга рамнотежна состојба. Генерално, настапувањето на овој режим е непожелно во спрегнатите системи кај кои е потребен непрекинат осцилаторен процес, затоа што, под влијание на надворешни пертурбации системот може многу лесно да ја промени својата состојба во неосцилаторна или во друга осцилаторна состојба која е со поразлични динамички карактеристики.

Откако го проучивме исходот од интеракциите, при усвоената временски променлива функција на спрега, следно проектиравме управувачки пристап кој детектира и превенира премин од осцилаторна во неосцилаторна состојба. Овој управувачки алгоритам се состои од две компоненти: динамички Баесов естиматор и ПИ управувач. Овие две компоненти работат заедно така што, Баесовиот естиматор врши последователна реконструкција на временската еволуција на параметрите на функциите на спрега и на индивидуалните системи. Понатаму, естиматорот за еден од параметрите на функцијата на спрега се користи од страна на ПИ управувачот кој врз основа на неговата вредност детектира колку далеку е системот од неосцилаторна состојба и соодветно на тоа пресметува управувачка вредност која влијае на исходот од интеракциите на тој начин што не дозволува тие да бидат прекинати. Предложениот управувачки пристап успешно го одржува осцилаторниот процес во систем кој нормално, под влијание на воспоставениот механизам на интеракција, си ја менува состојбата од осцилаторна во неосцилаторна.

Во иднина, ќе се фокусираме на проучување на тука дискутираните феномени во случај кога е вбризан шум во состојбените променливи на спрегнатиот систем. Шумот кој е сеприсутен во системите може да одигра клучна улога во транзицијата меѓу различните квалитативни состојби, особено кога системот е на граница да премине од една во друга состојба. Интересно ќе биде да се анализира поведението на спрегнатите системи во ситуација во која состојбите се загадени со шум, со посилен интензитет, и притоа е потребно да се управува со осцилаторната состојба во системот. Во оваа ситуација, очекувано би било комбинацијата од Баесовиот метод на инференција и ПИ управувачот, да се испостави како ефикасна во одржување на осцилаторниот процес во системот.

Во управувачкиот пристап предложен овде се управува само со (формата на) едната компонента од функцијата на спрега. Сознанието дека со управување на само една од компонентите на функцијата на спрега може да се влијае врз квалитативната состојба на спрегнатиот систем е од исклучителна важност ако се има предвид дека

во реалноста функциите на спрега може да се составени од голем број на компоненти кои имаат различен удел во формата на функцијата на спрега.

Во продолжение од истражувањето, ќе се фокусираме на имплементирање на управувачко решение кое ќе ги управува двете компоненти од функцијата на спрега разгледувана овде. Ваквиот вид на управувачко решение, може да хипотетизираме дека ќе резултира со управувачка функција на спрега, која ќе врши модулација на целокупната форма на функцијата на спрега и на тој начин ќе ги диктира квалитативните состојби кои настапуваат во спрегнатиот систем.

Анализата и резултатите од оваа докторска дисертација претставуваат додадена вредност во областа на временски променливите функции на спрега кои во последно време се особено популарна и пропулзивна парадигма за проучување на временски променливите механизми на интеракција кај комплексните биолошки системи (пример: кардиреспираторниот и невролошкиот систем). Продлабочувањето на сознанијата во оваа област и разбирањето на ефектите имплицирани од временско променливата интеракција може да се од голем бенефит во иднина, бидејќи феномените кои се плод од овие интеракции имаат свое влијание и значење во реални ситуации во медицината. Токму затоа, си даваме за право да хипотезираме дека новите сознанија елаборирани во рамките на оваа докторска дисертација еден ден ќе најдат примена во детекцијата и превенцијата на одредени здравствени состојби кај луѓето.

Библиографија

- [1] A. T. Winfree, *The Geometry of Biological Time*. New York: Springer-Verlag, 1980.
- [2] H. Haken, “Cooperative phenomena in systems far from thermal equilibrium and in nonphysical systems,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 47, pp. 67–121, 1975.
- [3] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
- [4] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization – A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- [5] S. H. Strogatz, *Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order*. New York: Hyperion, 2003.
- [6] K. Lehnertz and C. E. Elger, “Can epileptic seizures be predicted? Evidence from nonlinear time series analysis of brain electrical activity,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 80, no. 22, p. 5019, 1998.
- [7] J. A. Acebrón, L. L. Bonilla, C. J. Pérez Vicente, F. Ritort, and R. Spigler, “The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 77, pp. 137–185, 2005.
- [8] M. Kapitaniak, K. Czolczynski, P. Perlikowski, A. Stefanski, and T. Kapitaniak, “Synchronization of clocks,” *Phys. Rep.*, vol. 517, no. 1, pp. 1–69, 2012.
- [9] A. Koseska, E. Volkov, and J. Kurths, “Oscillation quenching mechanisms: Amplitude vs. oscillation death,” *Phys. Rep.*, vol. 531, no. 4, pp. 173–199, 2013.
- [10] G. Saxena, A. Prasad, and R. Ramaswamy, “Amplitude death: The emergence of stationarity in coupled nonlinear systems,” *Phys. Rep.*, vol. 521, no. 5, pp. 205–228, 2012.

- [11] S. Smale, “A mathematical model of two cells via turing equation,” in *The Hopf bifurcation and its applications*, pp. 354–367, Springer, 1976.
- [12] A. Pogromsky, T. Glad, and H. Nijmeijer, “On diffusion driven oscillations in coupled dynamical systems,” *Int. J. Bifur. Chaos*, vol. 9, no. 04, pp. 629–644, 1999.
- [13] G. Keller, M. Künzle, and T. Nowicki, “Some phase transitions in coupled map lattices,” *Physica D*, vol. 59, no. 1, pp. 39–51, 1992.
- [14] J. Aguirre, R. L. Viana, and M. A. F. Sanjuán, “Fractal structures in nonlinear dynamics,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 81, no. 1, p. 333, 2009.
- [15] A. Stefanovska and M. Bračič, “Physics of the human cardiovascular system,” *Contemp. Phys.*, vol. 40, no. 1, pp. 31–55, 1999.
- [16] M. G. Rosenblum and A. S. Pikovsky, “Detecting direction of coupling in interacting oscillators,” *Phys. Rev. E.*, vol. 64, no. 4, p. 045202, 2001.
- [17] K. Hlaváčkováá-Schindler, M. Paluš, M. Vejmelka, and J. Bhattacharya, “Causality detection based on information-theoretic approaches in time series analysis,” *Phys. Rep.*, vol. 441, no. 1, pp. 1–46, 2007.
- [18] J. Miyazaki and S. Kinoshita, “Determination of a coupling function in multicoupled oscillators,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 96, p. 194101, May 2006.
- [19] I. Z. Kiss, C. G. Rusin, H. Kori, and J. L. Hudson, “Engineering complex dynamical structures: Sequential patterns and desynchronization,” *Science*, vol. 316, no. 5833, pp. 1886–1889, 2007.
- [20] K. A. Blaha, A. Pikovsky, M. Rosenblum, M. T. Clark, C. G. Rusin, and J. L. Hudson, “Reconstruction of two-dimensional phase dynamics from experiments on coupled oscillators,” *Phys. Rev. E*, vol. 84, no. 4, p. 046201, 2011.
- [21] H. Kori, Y. Kuramoto, S. Jain, I. Z. Kiss, and J. L. Hudson, “Clustering in globally coupled oscillators near a Hopf bifurcation: Theory and experiments,” *Phys. Rev. E*, vol. 89, no. 6, p. 062906, 2014.
- [22] T. Stankovski, V. Ticcinelli, P. V. E. McClintock, and A. Stefanovska, “Coupling functions in networks of oscillators,” *New J. Phys.*, vol. 17, no. 3, p. 035002, 2015.

-
- [23] B. Kralemann, A. Pikovsky, and M. Rosenblum, “Detecting triplet locking by triplet synchronization indices,” *Phys. Rev. E*, vol. 87, p. 052904, May 2013.
- [24] T. Stankovski, A. Duggento, P. V. E. McClintock, and A. Stefanovska, “Inference of time-evolving coupled dynamical systems in the presence of noise,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 109, p. 024101, 2012.
- [25] D. Iatsenko, A. Bernjak, T. Stankovski, Y. Shiogai, P. J. Owen-Lynch, P. B. M. Clarkson, P. V. E. McClintock, and A. Stefanovska, “Evolution of cardio-respiratory interactions with age,” *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, vol. 371, no. 1997, p. 20110622, 2013.
- [26] J. T. C. Schwabedal and H. Kantz, “Optimal extraction of collective oscillations from unreliable measurements,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 116, no. 10, p. 104101, 2016.
- [27] S. Ranganathan, V. Spaiser, R. P. Mann, and D. J. T. Sumpter, “Bayesian dynamical systems modelling in the social sciences,” *PLoS ONE*, vol. 9, no. 1, p. e86468, 2014.
- [28] B. Kralemann, L. Cimponeriu, M. Rosenblum, A. Pikovsky, and R. Mrowka, “Phase dynamics of coupled oscillators reconstructed from data,” *Phys. Rev. E*, vol. 77, no. 6, Part 2, p. 066205, 2008.
- [29] B. Kralemann, M. Frühwirth, A. Pikovsky, M. Rosenblum, T. Kenner, J. Schaefer, and M. Moser, “In vivo cardiac phase response curve elucidates human respiratory heart rate variability,” *Nat. Commun.*, vol. 4, p. 2418, 2013.
- [30] H.-J. Park and K. Friston, “Structural and functional brain networks: from connections to cognition,” *Science*, vol. 342, no. 6158, p. 1238411, 2013.
- [31] T. Kenner, H. Passenhofer, and G. Schwabberger, “Method for the analysis of the entrainment between heart rate and ventilation rate,” *Pflügers Archiv.*, vol. 363, pp. 263–265, 1976.
- [32] J. T. Schwabedal and A. Pikovsky, “Effective phase dynamics of noise-induced oscillations in excitable systems,” *Phys. Rev. E*, vol. 81, no. 4, p. 046218, 2010.
- [33] M. Timme, “Revealing network connectivity from response dynamics,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 98, no. 22, p. 224101, 2007.
- [34] K. J. Friston, “Functional and effective connectivity: a review,” *Brain. Connect.*, vol. 1, no. 1, pp. 13–36, 2011.

- [35] C. Schäfer, M. G. Rosenblum, J. Kurths, and H. H. Abel, “Heartbeat synchronised with ventilation,” *Nature*, vol. 392, no. 6673, pp. 239–240, 1998.
- [36] A. Stefanovska, H. Haken, P. V. E. McClintock, M. Hožič, F. Bajrović, and S. Ribarič, “Reversible transitions between synchronization states of the cardiorespiratory system,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 85, no. 22, pp. 4831–4834, 2000.
- [37] P. Tass, M. G. Rosenblum, J. Weule, J. Kurths, A. Pikovsky, J. Volkmann, A. Schnitzler, and H.-J. Freund, “Detection of $n:m$ phase locking from noisy data: Application to magnetoencephalography,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 81, no. 15, pp. 3291–3294, 1998.
- [38] J. Buck and E. Buck, “Mechanism of rhythmic synchronous flashing of fireflies fireflies of Southeast Asia may use anticipatory time-measuring in synchronizing their flashing,” *Science*, vol. 159, no. 3821, pp. 1319–1327, 1968.
- [39] R. Mirollo and S. H. Strogatz, “The spectrum of the partially locked state for the Kuramoto model,” *J. Nonlinear Sci.*, vol. 17, no. 4, pp. 309–347, 2007.
- [40] B. Blasius, A. Huppert, and L. Stone, “Complex dynamics and phase synchronization in spatially extended ecological systems,” *Nature*, vol. 399, no. 6734, pp. 354–359, 1999.
- [41] D. Eroglu, J. Lamb, and T. Pereira, “Synchronization of chaos,” *arXiv preprint arXiv:1703.08296*, 2017.
- [42] L. M. Pecora and T. L. Carroll, “Synchronization in chaotic systems,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 64, pp. 821–824, Feb 1990.
- [43] N. F. Rulkov, M. M. Sushchik, L. S. Tsimring, and H. D. I. Abarbanel, “Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems,” *Phys. Rev. E*, vol. 51, no. 2, pp. 980–994, 1995.
- [44] L. Kocarev and U. Parlitz, “Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 76, pp. 1816–1819, Mar 1996.
- [45] M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, and J. Kurths, “Phase synchronization of chaotic oscillators,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 76, no. 11, pp. 1804–1807, 1996.

-
- [46] J. Arnhold, P. Grassberger, K. Lehnertz, and C. E. Elger, “A robust method for detecting interdependences: Application to intracranially recorded EEG,” *Physica D*, vol. 134, no. 4, pp. 419–430, 1999.
- [47] R. Brown and L. Kocarev, “A unifying definition of synchronization for dynamical systems,” *Chaos*, vol. 10, no. 2, pp. 344–349, 2000.
- [48] B. Blasius, E. Montbrió, and J. Kurths, “Anomalous phase synchronization in populations of nonidentical oscillators,” *Phys. Rev. E*, vol. 67, no. 3, p. 035204, 2003.
- [49] K. Bar-Eli, “On the stability of coupled chemical oscillators,” *Physica D*, vol. 14, no. 2, pp. 242–252, 1985.
- [50] A. Koseska, E. Volkov, and J. Kurths, “Transition from amplitude to oscillation death via Turing bifurcation,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 111, no. 2, p. 024103, 2013.
- [51] A. Prasad, “Amplitude death in coupled chaotic oscillators,” *Phys. Rev. E*, vol. 72, no. 5, p. 056204, 2005.
- [52] J. J. Suárez-Vargas, J. A. González, A. Stefanovska, and P. V. E. McClintock, “Diverse routes to oscillation death in a coupled-oscillator system,” *EPL*, vol. 85, no. 3, p. 38008, 2009.
- [53] A. Zakharova, I. Schneider, Y. N. Kyrychko, K. B. Blyuss, A. Koseska, B. Fiedler, and E. Schöll, “Time delay control of symmetry-breaking primary and secondary oscillation death,” *EPL (Europhys. Lett.)*, vol. 104, no. 5, p. 50004, 2013.
- [54] I. Schneider, M. Kapeller, S. Loos, A. Zakharova, B. Fiedler, and E. Schöll, “Stable and transient multicluster oscillation death in nonlocally coupled networks,” *Phys. Rev. E*, vol. 92, no. 5, p. 052915, 2015.
- [55] Y. Zhai, I. Z. Kiss, and J. L. Hudson, “Amplitude death through a Hopf bifurcation in coupled electrochemical oscillators: Experiments and simulations,” *Phys. Rev. E*, vol. 69, no. 2, p. 026208, 2004.
- [56] R. E. Mirollo and S. H. Strogatz, “Synchronization of pulse-coupled biological oscillators,” *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 50, no. 6, pp. 1645–1662, 1990.
- [57] R. Karnatak, R. Ramaswamy, and A. Prasad, “Amplitude death in the absence of time delays in identical coupled oscillators,” *Phys. Rev. E*, vol. 76, no. 3, p. 035201, 2007.

- [58] A. Prasad, M. Dhamala, B. M. Adhikari, and R. Ramaswamy, “Amplitude death in nonlinear oscillators with nonlinear coupling,” *Phys. Rev. E*, vol. 81, no. 2, p. 027201, 2010.
- [59] C. R. Hens, O. I. Olusola, P. Pal, and S. K. Dana, “Oscillation death in diffusively coupled oscillators by local repulsive link,” *Phys. Rev. E*, vol. 88, no. 3, p. 034902, 2013.
- [60] V. Resmi, G. Ambika, and R. E. Amritkar, “General mechanism for amplitude death in coupled systems,” *Phys. Rev. E*, vol. 84, no. 4, p. 046212, 2011.
- [61] B. Ermentrout, *Simulating, analyzing, and animating dynamical systems: a guide to XPPAUT for researchers and students*. SIAM, 2002.
- [62] T. Stankovski, “Time-varying coupling functions: Dynamical inference and cause of synchronization transitions,” *Phys. Rev. E*, vol. 95, no. 2, p. 022206, 2017.
- [63] M. Lakshmanan and S. Rajaseekar, *Nonlinear dynamics: integrability, chaos and patterns*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [64] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, vol. 42. Springer Science & Business Media, 2013.
- [65] T. Stankovski, P. V. E. McClintock, and A. Stefanovska, “Coupling functions enable secure communications,” *Phys. Rev. X*, vol. 4, p. 011026, 2014.
- [66] M. Paluš and A. Stefanovska, “Direction of coupling from phases of interacting oscillators: An information-theoretic approach,” *Phys. Rev. E*, vol. 67, p. 055201(R), 2003.
- [67] L. Faes, G. Nollo, and A. Porta, “Information-based detection of nonlinear Granger causality in multivariate processes via a nonuniform embedding technique,” *Phys. Rev. E*, vol. 83, no. 5, p. 051112, 2011.
- [68] M. Staniek and K. Lehnertz, “Symbolic transfer entropy,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 100, p. 158101, 2008.
- [69] F. Takens, “Detecting strange attractors in turbulence,” in *Lecture Notes in Mathematics* (D. A. Rand and L. S. Young, eds.), vol. 898, pp. 366–381, New York: Springer-Verlag, 1981.

-
- [70] V. N. Smelyanskiy, D. G. Luchinsky, A. Stefanovska, and P. V. E. McClintock, “Inference of a nonlinear stochastic model of the cardiorespiratory interaction,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 94, no. 9, p. 098101, 2005.
- [71] H. Nakao, T. Yanagita, and Y. Kawamura, “Phase-reduction approach to synchronization of spatiotemporal rhythms in reaction-diffusion systems,” *Phys. Rev. X*, vol. 4, no. 2, p. 021032, 2014.
- [72] T. Stankovski, A. Duggento, P. V. E. McClintock, and A. Stefanovska, “A tutorial on time-evolving dynamical Bayesian inference,” *Eur. Phys. J. Special Topics*, vol. 223, no. 13, pp. 2685–2703, 2014.
- [73] T. Stankovski, *Tackling the Inverse Problem for Non-Autonomous Systems: Application to the Life Sciences*. PhD thesis, Lancaster University, 2012.
- [74] J. A. Hirsch and B. Bishop, “Respiratory sinus arrhythmia in humans – How breathing pattern modulates heart rate,” *Am. J. Physiol.*, vol. 241, no. 4, pp. H620–H629, 1981.
- [75] A. Voss, S. Schulz, R. Schroeder, M. Baumert, and P. Caminal, “Methods derived from nonlinear dynamics for analysing heart rate variability,” *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 367, no. 1887, pp. 277–296, 2008.
- [76] M. B. Lotrič and A. Stefanovska, “Synchronization and modulation in the human cardiorespiratory system,” *Physica A*, vol. 283, no. 3-4, pp. 451–461, 2000.
- [77] G. Kaiser, *A Friendly Guide to Wavelets*. Boston: Birkhäuser, 1994.
- [78] A. Stefanovska, M. Bračič, and H. D. Kvernmo, “Wavelet analysis of oscillations in the peripheral blood circulation measured by laser Doppler technique,” *IEEE Trans. Bio. Med. Eng.*, vol. 46, no. 10, pp. 1230–1239, 1999.
- [79] D. Lukarski, M. Ginovska, H. Spasevska, and T. Stankovski, “Time window determination for inference of time-varying dynamics: application to cardiorespiratory interaction,” *Frontiers in physiology*, vol. 11, 2020.
- [80] T. Stankovski, V. Ticcinelli, P. V. E. McClintock, and A. Stefanovska, “Neural cross-frequency coupling functions,” *Front. Syst. Neurosci.*, vol. 11, no. 33, p. 10.3389/fnsys.2017.00033, 2017.

- [81] S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D. L. Valladares, and C. S. Zhou, “The synchronization of chaotic systems,” *Phys. Rep.*, vol. 366, no. 1-2, pp. 1–101, 2002.
- [82] A. Arenas, A. Díaz-Guilera, J. Kurths, Y. Moreno, and C. Zhou, “Synchronization in complex networks,” *Phys. Rep.*, vol. 469, no. 3, pp. 93–153, 2008.
- [83] P. A. Tass, *Phase Resetting in Medicine and Biology*. Berlin: Springer, 1999.
- [84] G. Buzsáki and A. Draguhn, “Neuronal oscillations in cortical networks,” *Science*, vol. 304, pp. 1926–1929, 2004.
- [85] H. Bergman, A. Feingold, A. Nini, A. Raz, H. Slovín, M. Abeles, and E. Vaadia, “Physiological aspects of information processing in the basal ganglia of normal and parkinsonian primates,” *Trends in neurosciences*, vol. 21, no. 1, pp. 32–38, 1998.
- [86] J. Sarnthein, A. Morel, A. Von Stein, and D. Jeanmonod, “Thalamic theta field potentials and eeg: high thalamocortical coherence in patients with neurogenic pain, epilepsy and movement disorders,” *Thalamus & Related Systems*, vol. 2, no. 3, pp. 231–238, 2003.
- [87] M.-Y. Kim, R. Roy, J. L. Aron, T. W. Carr, and I. B. Schwartz, “Scaling behavior of laser population dynamics with time-delayed coupling: theory and experiment,” *Physical review letters*, vol. 94, no. 8, p. 088101, 2005.
- [88] P. Kumar, A. Prasad, and R. Ghosh, “Stable phase-locking of an external-cavity diode laser subjected to external optical injection,” *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, vol. 41, no. 13, p. 135402, 2008.
- [89] B. Gallego and P. Cessi, “Decadal variability of two oceans and an atmosphere,” *Journal of Climate*, vol. 14, no. 13, pp. 2815–2832, 2001.
- [90] B. Kuntsevich and A. Pisarchik, “Synchronization effects in a dual-wavelength class-b laser with modulated losses,” *Physical Review E*, vol. 64, no. 4, p. 046221, 2001.
- [91] D. Ruwisch, M. Bode, D. Volkov, and E. Volkov, “Collective modes of three coupled relaxation oscillators: the influence of detuning,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 9, no. 10, pp. 1969–1981, 1999.
- [92] M. Heinrich, T. Dahms, V. Flunkert, S. W. Teitworth, and E. Schöll, “Symmetry-breaking transitions in networks of nonlinear circuit elements,” *New Journal of Physics*, vol. 12, no. 11, p. 113030, 2010.

-
- [93] W. Liu, E. Volkov, J. Xiao, W. Zou, M. Zhan, and J. Yang, “Inhomogeneous stationary and oscillatory regimes in coupled chaotic oscillators,” *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 22, no. 3, p. 033144, 2012.
- [94] M. F. Crowley and I. R. Epstein, “Experimental and theoretical studies of a coupled chemical oscillator: phase death, multistability and in-phase and out-of-phase entrainment,” *The Journal of Physical Chemistry*, vol. 93, no. 6, pp. 2496–2502, 1989.
- [95] M. Dolnik and M. Marek, “Extinction of oscillations in forced and coupled reaction cells,” *The Journal of Physical Chemistry*, vol. 92, no. 9, pp. 2452–2455, 1988.
- [96] G. B. Ermentrout, “Oscillator death in populations of “all to all” coupled nonlinear oscillators,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 41, no. 2, pp. 219–231, 1990.
- [97] R. Curtu, “Singular hopf bifurcations and mixed-mode oscillations in a two-cell inhibitory neural network,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 239, no. 9, pp. 504–514, 2010.
- [98] A. Kuznetsov, M. Kærn, and N. Kopell, “Synchrony in a population of hysteresis-based genetic oscillators,” *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 65, no. 2, pp. 392–425, 2004.
- [99] A. Koseska, E. Volkov, A. Zaikin, and J. Kurths, “Inherent multistability in arrays of autoinducer coupled genetic oscillators,” *Physical Review E*, vol. 75, no. 3, p. 031916, 2007.
- [100] A. Koseska, E. Ullner, E. Volkov, J. Kurths, and J. García-Ojalvo, “Cooperative differentiation through clustering in multicellular populations,” *Journal of theoretical biology*, vol. 263, no. 2, pp. 189–202, 2010.
- [101] N. Suzuki, C. Furusawa, and K. Kaneko, “Oscillatory protein expression dynamics endows stem cells with robust differentiation potential,” *PloS one*, vol. 6, no. 11, p. e27232, 2011.
- [102] G. Ermentrout and N. Kopell, “Oscillator death in systems of coupled neural oscillators,” *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 50, no. 1, pp. 125–146, 1990.
- [103] T. Stankovski, T. Pereira, P. V. E. McClintock, and A. Stefanovska, “Coupling functions: Universal insights into dynamical interaction mechanisms,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 89, no. 33, p. 045001, 2017.

- [104] I. Boutle, R. H. Taylor, and R. A. Römer, “El niño and the delayed action oscillator,” *American Journal of Physics*, vol. 75, no. 1, pp. 15–24, 2007.
- [105] J. Lisman and G. Buzsáki, “A neural coding scheme formed by the combined function of gamma and theta oscillations,” *Schizophrenia bulletin*, vol. 34, no. 5, pp. 974–980, 2008.
- [106] P. J. Menck, J. Heitzig, J. Kurths, and H. J. Schellnhuber, “How dead ends undermine power grid stability,” *Nature communications*, vol. 5, no. 1, pp. 1–8, 2014.
- [107] J. Jalife, R. A. Gray, G. E. Morley, and J. M. Davidenko, “Self-organization and the dynamical nature of ventricular fibrillation,” *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 8, no. 1, pp. 79–93, 1998.
- [108] A. Stefanovska, M. Bračič Lotrič, S. Strle, and H. Haken, “The cardiovascular system as coupled oscillators?,” *Physiol. Meas.*, vol. 22, no. 3, pp. 535–550, 2001.
- [109] D. Stavrov, G. Nadzinski, S. Deskovski, and M. Stankovski, “Quadratic model-based dynamically updated pid control of cstr system with varying parameters,” *Algorithms*, vol. 14, no. 2, p. 31, 2021.