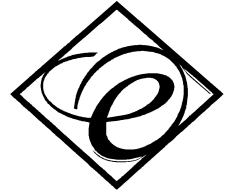




УНИВЕРЗИТЕТ „СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ“ - СКОПЈЕ

ФАКУЛТЕТ ЗА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА И
ИНФОРМАЦИСКИ ТЕХНОЛОГИИ



м-р Благоја Марковски

**ЕФИКАСЕН ЕЛЕКТРОМАГНЕТЕН МОДЕЛ ЗА АНАЛИЗА
НА ПРЕОДНИ ПОЈАВИ КАЈ ГОЛЕМИ ЗАЗЕМЈУВАЧКИ
СИСТЕМИ ВО СЛОЕВИТА ЗЕМЈА**

- ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА-

Скопје, 2019 година

Ментор: **Академик проф. д-р Леонид Грчев**
Универзитет “Св. Кирил и Методиј” – Скопје
Факултет за електротехника и информациски технологии

Членови на комисијата: **Претседател: Проф. д-р Марија Кацарска**
Универзитет “Св. Кирил и Методиј” – Скопје
Факултет за електротехника и информациски технологии

Проф. д-р Весна Арнаутовски-Тошева
Универзитет “Св. Кирил и Методиј” – Скопје
Факултет за електротехника и информациски технологии

Проф. д-р Владимир Димчев
Универзитет “Св. Кирил и Методиј” – Скопје
Факултет за електротехника и информациски технологии

Проф. д-р Митко Костов
Универзитет “Св. Климент Охридски” – Битола
Технички факултет - Битола

Дата на одбрана: 02.09.2019

Дата на промоција: _____

Научна област: Електротехника

БЛАГОЈА Љ. МАРКОВСКИ

**ЕФИКАСЕН ЕЛЕКТРОМАГНЕТЕН МОДЕЛ ЗА АНАЛИЗА НА
ПРЕОДНИ ПОЈАВИ КАЈ ГОЛЕМИ ЗАЗЕМЈУВАЧКИ СИСТЕМИ
ВО СЛОЕВИТА ЗЕМЈА**

АПСТРАКТ:

Електромагнетниот модел кој се базира врз интегралната равенка за електрично поле со мешани потенцијали и примена на метод на моменти, е еден од најточните и најпопуларни модели за анализа на преодни појави кај заземјувачки системи, посебно во случај на атмосферски празнења. Неговата практична примена е отежната поради долгото време за нумеричко решавање на Сомерфелдови интегрални, кои се во јадрото на овој точен модел. Овие интегрални се сингуларни, осцилаторни и бавно конвергираат, па од тие причини, анализите на големи заземјувачки системи вообичаено се вршат со примена на приближни методи, базирани на теорија на ликови. Потребата од точен модел за пресметка на брзи преодни процеси при атмосферски празнења е зголемена со се поголемата потреба за заштита на електронската опрема која е во јадрото на модерните критични инсталации, кои се пак основа на модерното општество.

Во оваа дисертација се презентирани неколку пристапи кон подобрување на ефикасноста на електромагнетниот модел и проширување на неговиот домен на примена за прецизни анализи на високофреквентни и преодни појави кај големи заземјувачки системи, со сложени конфигурации на електроди, кои се наоѓаат во хомогена или повеќеслојна земја. Точноста на моделот е верифицирана со споредба со публикувани нумерички и експериментални резултати. Моделот за прв пат овозможи параметарска анализа на индуцирани преодни напони во голем мрежест заземјувачки систем во слоевата земја, при атмосферски празнења. Анализата укажа и на случаи кога приближните методи не можат да се применат поради голема непрецизност.

КЛУЧНИ ЗБОРОВИ:

Гринова функција, електромагнетен модел, заземјувачи, интегрална равенка со мешани потенцијали, интерполација, сингуларитети, Сомерфелдови интегрални.

BLAGOJA Lj. MARKOVSKI

**EFFICIENT ELECTROMAGNETIC MODEL FOR TRANSIENT
ANALYSIS OF LARGE GROUNDING SYSTEMS IN LAYERED EARTH**

ABSTRACT:

The electromagnetic model, which is based on the method of moments solution of the mixed potentials electric field integral equation, is one of the most accurate and popular models for transient analysis of grounding systems, especially in the case of atmospheric discharges. Its practical application has been hampered by the large amount of computer time required for numerical integration of the Sommerfeld integrals, which are at the core of this exact model. These integrals are singular, oscillatory and slowly converge, therefore, analysis of large grounding systems are usually performed using approximate methods based on the image theory. The need for an accurate model, for the calculation of transients related to atmospheric discharges, has been increased by the increasing need for protection of electronic equipment that is at the core of modern critical installations, and such installations are fundamental for the modern society.

This dissertation presents several approaches for improving the efficiency of the electromagnetic model and extending its application domain for precise analysis of high frequency and transient phenomena in large grounding systems, with complex electrode configurations, in a homogeneous or multilayer earth. The accuracy of the model is verified by comparison with published numerical and experimental results. For the first time, a parametric analysis of induced transient voltages in a large grounding system in layered earth, due to atmospheric discharges, has been performed by this model. The analysis also showed cases where approximate methods cannot be applied due to high imprecision.

KEY WORDS:

Electromagnetic model, Green's function, grounding system, interpolation, mixed potentials integral equation, singularities, Sommerfeld integrals.

Посветено на моето семејство.

СОДРЖИНА

ЛИСТА НА СИМБОЛИ.....	V
ЛИСТА НА СЛИКИ.....	VII
ЛИСТА НА ТАБЕЛИ.....	XI
ГЛАВА 1 ВОВЕД	12
1.1 ФОРМУЛАЦИЈА НА ПРОБЛЕМОТ.....	13
1.2 ПРЕГЛЕД НА ДОСЕГАШНИ ИСТРАЖУВАЊА ВО ОБЛАСТА	14
1.3 ПРЕДМЕТ НА ИСТРАЖУВАЊЕТО	18
1.4 ЦЕЛИ НА ИСТРАЖУВАЊЕТО.....	19
1.5 СТРУКТУРА НА ДОКТОРСКАТА ДИСЕРТАЦИЈА	19
ГЛАВА 2 ИНТЕГРАЛНА РАВЕНКА ЗА ЕЛЕКТРИЧНО ПОЛЕ СО МЕШАНИ ПОТЕНЦИЈАЛИ	22
2.1 ОСНОВНИ РАВЕНКИ, КОНСТИТУТИВНИ РЕЛАЦИИ И ГРАНИЧНИ УСЛОВИ	22
2.2 ИНТЕГРАЛНА РАВЕНКА ЗА ЕЛЕКТРИЧНО ПОЛЕ СО МЕШАНИ ПОТЕНЦИЈАЛИ	24
ГЛАВА 3 РЕШАВАЊЕ НА МАТЕМАТИЧКИОТ МОДЕЛ СО ПРИМЕНА НА МЕТОДОТ НА МОМЕНТИ	27
3.1 ГЕНЕРАЛЕН ОПИС НА МЕТОД НА МОМЕНТИ	28
3.2 ПРИМЕНА НА МРИЕ И МОМ ЗА ОПРЕДЕЛУВАЊЕ НА НЕПОЗНАТИТЕ ЛОНГИТУДИНАЛНИ СТРУИ ВО ЗАЗЕМЈУВАЧОТ	30
3.3 МОДЕЛИРАЊЕ НА ПОБУДА НА ЗАЗЕМЈУВАЧОТ	37
3.3.1 Побуда со паралелни генератори.....	37
3.3.2 Побуда со сериски генератори.....	39
3.4 ПРЕСМЕТКА НА ЕЛЕКТРИЧНО ПОЛЕ, НАПОНИ, ПОТЕНЦИЈАЛИ ВО ОКОЛИНА НА ЗАЗЕМЈУВАЧОТ И ИМПЕДАНСА НА ЗАЗЕМЈУВАЧОТ КОН ЗЕМЈА	41
3.4.1 Определување на компоненти на векторот на јачина на електрично поле во Декартов координатен систем.....	41
3.4.2 Пресметување напон помеѓу две точки во околина на заземјувачот.....	42
3.4.3 Пресметување на импеданса на заземјувачот кон земја	43
ГЛАВА 4 ГРИНОВИ ФУНКЦИИ ЗА ПОТЕНЦИЈАЛИ ВО СЛОЕВИТА СРЕДИНА	44

4.1	ПАРАМЕТРИ СО КОИ СЕ ОПИШУВА ПРОСТИРАЊЕ НА ЕЛЕКТРОМАГНЕТНИ БРАНОВИ ВО СЛОЕВИТА СРЕДИНА	46
4.2	Гринови функции за потенцијали во МРІЕ за слоевита средина	52
4.2.1	Формулации базирани на Сомерфелдов избор на потенцијали	52
4.2.2	Формулации во МРІЕ базирани на избор на потенцијали од Ертеза и Парк	57
4.3	Гринови функции за потенцијали во хомоген полу-простор	63
4.3.1	Гринови функции за традиционалната формулација на потенцијали	63
4.3.2	Модифицирани Гринови функции за магнетен вектор потенцијал во С формулација	64
4.3.3	Гринови функции за потенцијали во А и В формулација	64
4.4	Нумеричко интегрирање на Сомерфелдовите интеграли	65
4.5	Анализа на формулации на Гринови функции во МРІЕ од аспект на нивна примена во анализи на заземјувачи	67

ГЛАВА 5 НИСКОФРЕКВЕНТНИ АПРОКСИМАЦИИ НА ГРИНОВИТЕ ФУНКЦИИ ЗА ПОТЕНЦИЈАЛИ ВО МРІЕ ЗА ДВОСЛОЈНА И ХОМОГЕНА ЗЕМЈА 69

5.1	Основни претпоставки во развојот на нискофреквентните апроксимации	70
5.2	Постапка за изведување на нискофреквентна апроксимација на Гринови функции за двослојна и хомогена земја	72
5.2.1	Нискофреквентни апроксимации на Гринови функции за извор и точка на набљудување во ист слој	72
5.2.2	Нискофреквентни апроксимации на Гринови функции за извор и точка на набљудување во различни слоеви	80
5.3	Толкување на членовите во нискофреквентните апроксимации на Гриновите функции	93
5.4	Анализа на точност на нискофреквентните апроксимации	95

ГЛАВА 6 ЕФИКАСНО МОДЕЛИРАЊЕ НА ЗАЗЕМЈУВАЧКИ СИСТЕМИ ВО СЛОЕВИТА СРЕДИНА 99

6.1	Подобрување на конвергенцијата и решенијата на Гриновите функции преку извлекување на сингуларитети	101
6.1.1	Извлекување на сингуларитети за извор и точка на набљудување во ист слој ($m = i$)	102

6.1.2	Извлекување на сингуларитети за извор и точка на набљудување во различни слоеви ($m \neq i$).....	105
6.1.3	Извлекување на сингуларитети за извор и точка на набљудување во хомоген полу-простор.....	107
6.2	ИНТЕРПОЛАЦИЈА НА ГРИНОВИТЕ ФУНКЦИИ.....	109
6.3	АНАЛИЗА НА ПРИДОБИВКИТЕ ОД ИЗВЛЕКУВАЊЕТО НА СИНГУЛАРИТЕТИ ОД ИНТЕГРАЛНИТЕ РАВЕНКИ ВО ГРИНОВИТЕ ФУНКЦИИ	113
6.4	АНАЛИЗА НА ЕФИКАСНОСТ И ТОЧНОСТ НА ПРЕТСТАВЕНАТА ПОСТАПКА ЗА РЕШАВАЊЕ НА ГРИНОВИТЕ ФУНКЦИИ	116
6.4.1	Анализа на постигнатата ефикасност и точност со постапките за прилагодување и дводимензионална интерполација на интегралните равенки за анализи во хомогена земја.....	116
6.4.2	Анализа на постигнатата ефикасност со постапките за прилагодување и тридимензионална интерполација на интегралните равенки за анализи во двослојна земја.....	118
ГЛАВА 7 ВЕРИФИКАЦИЈА НА МОДЕЛОТ		121
7.1	ВЕРИФИКАЦИЈА СО МОДЕЛ ЗА АНАЛИЗА НА ЗАЗЕМЈУВАЧИ БАЗИРАН НА АЛТЕРНАТИВЕН ПРИСТАП ВО МОМ	122
7.2	ВЕРИФИКАЦИЈА СО ПРОФЕСИОНАЛЕН СОФТВЕР ФЕКО ЗА АНАЛИЗА НА АНТЕНИ....	124
7.3	ВЕРИФИКАЦИЈА СО ПУБЛИКУВАНИ НУМЕРИЧКИ РЕЗУЛТАТИ	128
7.3.1	Верификации со нумерички резултати во доменот на статика	128
7.3.2	Верификации со нумерички резултати во доменот на високите фреквенции	132
7.4	ВЕРИФИКАЦИЈА СО ПУБЛИКУВАНИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛНИ РЕЗУЛТАТИ.....	135
7.4.1	Верификација со експериментални резултати во хомогена земја.....	135
7.4.2	Верификација со експериментални резултати во двослојна земја.....	136
ГЛАВА 8 ПРИМЕНА НА ЕЛЕКТРОМАГНЕТНИОТ МОДЕЛ ВО АНАЛИЗА НА ГОЛЕМИ ЗАЗЕМЈУВАЧИ.....		138
8.1	АНАЛИЗА НА ВЛИЈАНИЕТО НА КАРАКТЕРИСТИКИТЕ НА ДВОСЛОЈНА ЗЕМЈА ВРЗ ПРЕСМЕТАНАТА ИМПЕДАНСА НА ЗАЗЕМЈУВАЧОТ КОН ЗЕМЈА	140
8.2	АНАЛИЗА НА ВЛИЈАНИЕТО НА КАРАКТЕРИСТИКИТЕ НА ДВОСЛОЈНА ЗЕМЈА ВРЗ ПРЕСМЕТАНИОТ ПРЕОДЕН ПОТЕНЦИЈАЛ ВО МЕСТОТО НА ПОБУДА	142
8.3	АНАЛИЗА НА НАПОН МЕЃУ КРАЈНИ ТОЧКИ НА ПРОФИЛ	143
ГЛАВА 9 ЗАКЛУЧОК.....		151

9.1 Придонеси во областа на истражување	152
9.2 Насоки за идна истражувачка работа	153
ДОДАТОК А ИЗВЕДУВАЊЕ НА ГРИНОВИ ФУНКЦИИ ВО СПЕКТРАЛЕН И ВО ПРОСТОРЕН ДОМЕН	155
ДОДАТОК Б ИЗВЕДУВАЊЕ НА ГРИНОВИ ФУНКЦИИ ЗА ФОРМУЛАЦИЈА С ПРЕКУ ТРАДИЦИОНАЛНАТА ФОРМУЛАЦИЈА И ЛОРЕНЦОВ УСЛОВ	160
ДОДАТОК В ИЗРАЗУВАЊЕ НА ИНТЕГРАЛНИ РАВЕНКИ ОД СОМЕРФЕЛДОВ ТИП ВО АНАЛИТИЧКИ ОБЛИК	163
В.1 Постапка за изведување на интегралните равенки од Сомерфелдов тип во аналитички облик	164
В.2 Третман на сингуларитети во аналитичките изрази.....	164
ДОДАТОК Г ГРИНОВИ ФУНКЦИИ ЗА МАГНЕТНИ ВЕКТОР ПОТЕНЦИЈАЛИ ВО ХОМОГЕНА ЗЕМЈА ПРИ 0 Hz	166
ДОДАТОК Д ИЗВЕДУВАЊЕ НА НИСКОФРЕКВЕНТНА АПРОКСИМАЦИЈА НА ГРИНОВА ФУНКЦИЈА ЗА ЕЛЕКТРИЧЕН СКАЛАР ПОТЕНЦИЈАЛ ВО ДВОСЛОЈНА ЗЕМЈА	168
ДОДАТОК Ѓ МАТЕМАТИЧКИ ОПИС НА ПОСТАПКА ЗА ТРОДИМЕНЗИОНАЛНА КУБНА ИНТЕРПОЛАЦИЈА	172
ЛИСТА НА ОБЈАВЕНИ ТРУДОВИ ОД НАЈТЕСНАТА ОБЛАСТ НА ДОКТОРСКАТА ДИСЕРТАЦИЈА	174
Трудови во списанија.....	174
Рецензирани статии и реферати во зборници.....	175
КОРИСТЕНА ЛИТЕРАТУРА.....	177

Листа на симболи

Ознака	Значење
f, ω	Фреквенција и кружна фреквенција
$\rho_v, \rho_s, \rho_l,$ $\vec{J}, \vec{J}_s, I(\ell')$	Волуменска, површинска и линиска густина на полнеж, вектор на густина на струја, вектор на површинска густина на струја и линиска густина на струја
z', z, ρ	Вертикални позиции на точки со извор и точка на набљудување (во однос на генерален координатен систем чија z -оска започнува од површина на земја и е ориентирана нагоре) и нивна радијална оддалеченост
d_n, h_n, z_n	Дебелина на слој со индекс n , вертикална оддалеченост и длабочина на долна разделна површина на слој со индекс n во однос на површина на земја (разделна површина со воздух)
$\sigma_n, \epsilon_n, \mu_n$	Специфична спроводност, пермитивност и пермеабилност на средина/слој со индекс n
$\underline{\sigma}_n, \underline{\epsilon}_n$	Комплексна спроводност и комплексна пермитивност на средина/слој со индекс n
$k_n, k_{n,u}$	Бранов број и u -компонента бранов број на средина/слој со индекс n , каде што $u = x, y, z$ или ρ
λ_n	Бранова должина во средина/слој со индекс n
$\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{B}$	Вектори на јачина на електрично поле, магнетно поле, диелектрично поместување и магнетна индукција
\vec{A}, Φ	Магнетен вектор и електричен скалар потенцијал
$\vec{G}_A, G_A^{uv}, G_\Phi$	Дијадична Гринова функција за магнетен вектор потенцијал, Гринова функција за u -компонента на магнетен вектор потенцијал од v -ориентиран извор, Гринова функција за електричен скалар потенцијал (сите во просторен домен)

K_A^{uv}, K_ϕ	Модифицирана Гринава функција за u - компонента на магнетен вектор потенцијал од v - ориентиран извор, модифицирана Гринава функција за електричен скалар потенцијал (сите во просторен домен, присутни кај А, В и С формулација во МРІЕ)
g, \check{g}, \hat{g}	Гринови функции кои можат да се изразат во аналитичка форма
$R_{m,m\pm 1}, \tilde{R}_{m,m\pm 1}^{TE, TM}$	Френелов коефициент на рефлексија, генерализиран коефициент на рефлексија на бранови со ТЕ или ТМ поларизација, насочен од слој со индекс m кон слој со индекс $m\pm 1$
$A_m^{TE/TM}, B_m^{TE/TM}, C_m^{TE/TM}, D_m^{TE/TM}$	Амплитуди на нагорно и надолно насочени бранови со ТЕ и ТМ поларизација, во Гринови функции за извор и точка на набљудување во ист слој со индекс m
$\tilde{A}_{i,m}^{TE/TM}, \tilde{C}_{i,m}^{TE/TM}$	Амплитуди на пропуштени бранови со ТЕ и ТМ поларизација во Гринови функции за извор во слој i и точка на набљудување во слој m
N_s, N_L, N_p	Вкупен број на сегменти на кои е дискретизиран заземјувачот, вкупен број на слоеви во слоевита средина, вкупен број на сегменти на кои е поделен профил по кој се пресметува напон.
$F\{ \}, F^{-1}\{ \}$	Фуриеова и инверзна Фуриеова трансформација

Листа на слики

Слика 2.1 Приказ на разделна површина меѓу две средини (превземена од [Wan91]).	23
Слика 2.2 Приказ на волуменски распределени извори и точка на набљудување во која се пресметува електрично поле (превземена од [Pop89]).	25
Слика 3.1 Основна геометрија на два сегменти кои се дел од заземјувачки систем (превземена од [Grc18a]).	31
Слика 3.2 Сегментација и апроксимација на лонгитудиналната струја и полнеж (превземена од [Grc18a]).	33
Слика 3.3 Приказ на извори и точки на набљудување на два сегменти	33
Слика 3.4 Два основни начини на побуда на заземјувачи (превземена од [Grc18b])	37
Слика 3.5 Паралелна побуда на заземјувач со идеален струен или напонски генератор.	37
Слика 3.6 Сериска побуда на заземјувач со идеален струен или напонски генератор	39
Слика 3.7 Приказ на изворен и тест сегмент при пресметка на електрично поле	41
Слика 4.1 Компоненти на магнетен вектор потенцијал од електричен дипол	45
Слика 4.2 Компоненти на магнетен вектор потенцијал од ХЕД и ВЕД за различни формулации на потенцијали во МПЕ: а) Традиционална б) А, в) В, г) С формулација.	45
Слика 4.3 Приказ на параметри преку кои се опишува слоевата средина.	48
Слика 4.4 Приказ на повеќекратни рефлексии (прилагодена според [Kin05]).	49
Слика 4.5 Точки и линии на гранање (превземена од [Agu16]) шематски приказ (лево) и приказ на решенија со примена на техника за боење на домен на подинтегралната функција (десно).	66
Слика 4.6 Патеки на интегрирање на Сомерфелдов интеграл (превземена од [Mic89]): а) патека 1 е ефикасна за $h > \rho$, б) патека 2 е ефикасна за мали вредности на $\rho \operatorname{Im}\{k_\rho\}$, в) патека 3 е ефикасна за $\rho \gg h$ и за $h \rightarrow 0$, г) патека 4 е ефикасна за многу големо ρ .	66
Слика 5.1 Позиција на ликови за извор и точка на набљудување во ист и различен слој за двослоен модел на земја.	94
Слика 5.2 ϵ_{RMS} грешка на пресметани струи во 10 m централно напојувана електрода.	96

Слика 5.3 ϵ_{RMS} грешка на пресметани струи во пасивна 5 m долга хоризонтална електрода која е паралелна со напојуваната електрода.	97
Слика 5.4 ϵ_{RMS} грешка на пресметани струи во пасивна 5 m долга хоризонтална електрода која е нормална на напојуваната електрода.	97
Слика 5.5 ϵ_{RMS} грешка на пресметани струи во пасивна 1.5 m долга вертикална електрода која се наоѓа во близина на напојуваната хоризонтална електрода.	98
Слика 6.1 Илустрација на директен бран и примарни рефлексии од најблиските разделни површини за извор и точка на набљудување во ист слој.	102
Слика 6.2 Илустрација на пропуштен директен бран низ разделната површина меѓу два соседни слоја во кои се наоѓаат изворот и точката на набљудување. ...	105
Слика 6.3 Илустрација на рефлектиран бран од горна разделна површина.	107
Слика 6.4 Приказ на повеќе z - z' рамнини во кои се табелирани решенија на модифицираната Гринова функција за електричен скалар потенцијал G_{ϕ}	110
Слика 6.5 Исполнетост на таблица за дводимензионална интерполација при анализа во хомогена земја на а) хоризонтален мрежест заземјувач, б) сложен 3Д заземјувач	111
Слика 6.6 Шематски дијаграм со кој се прикажува принципот на тродимензионална кубна интерполација на решавање на интеграл $I(z, z', \rho)$, преку три последователни едnodимензионални кубни интерполации.	112
Слика 6.7 Табелирани решенија и број на итерации до постигнување конвергенција на интегралната равенка во G_{ϕ} , пред извлекување сингуларни компоненти.	113
Слика 6.8 Табелирани решенија и број на итерации до постигнување конвергенција на интегралната равенка во G_{ϕ} , после извлекување сингуларни компоненти.	113
Слика 6.9 Табелирани решенија и број на итерации до постигнување конвергенција на интегралната равенка во G_{ϕ} , пред извлекување сингуларни компоненти.	115
Слика 6.10 Табелирани решенија и број на итерации до постигнување конвергенција на интегралната равенка во G_{ϕ} , после извлекување сингуларни компоненти.	115
Слика 6.11 Анализа на ефикасност и точност на применета постапка за дводимензионална интерполација за пресметка на лонгитудинални струи во заземјувачи во хомогена земја [Mar18b].	117

Слика 6.12 Времетраење на пресметка на лонгитудинални струи во хоризонтална и коса електрода во функција од бројот на сегменти на кои се поделени електродите.	119
Слика 7.1 Споредба на импеданси кон земја за 10 m хоризонтална електрода.	123
Слика 7.2 Споредба на импеданси кон земја за 100 m хоризонтална електрода.	124
Слика 7.3 Споредба на импеданси со кои е оптоварен напонскиот генератор.	126
Слика 7.4 Споредба на лонгитудинални струи во хоризонтална електрода.	126
Слика 7.5 Споредба на лонгитудинални струи во вертикални електроди.	127
Слика 7.6 Анализа на ϵ_{RMS} грешка за лонгитудинални струи пресметани со двата програми усвојувајќи ги резултатите од FEKO како референтни.	128
Слика 7.7 Струи на истекување од 30 m × 30 m мрежест заземјувач со едно окно во двослојна земја, претставени во функција од коефициентот на рефлексија K [Daw79a].	129
Слика 7.8 Струи на истекување од 30 m × 30 m мрежест заземјувач со четири окна во двослојна земја, претставени во функција од коефициентот на рефлексија K и дебелината на горниот слој на земја [Daw79a].	130
Слика 7.9 Струи на истекување од вертикална електрода во двослојна земја, претставени во функција од коефициентот на рефлексија K [Daw79b].	130
Слика 7.10 Струи на истекување од електрода на 20 x 20 m мрежест заземјувач во земја со три слоја, претставени во функција од длабочината Z на заземјувачот [Daw94].	131
Слика 7.11 Струи на истекување од електрода на 20 x 20 m мрежест заземјувач во земја со шест слоја, претставени во функција од длабочината Z на заземјувачот [Daw94].	131
Слика 7.12 Подолжни струи во вертикален спроводник кој продира во земја [Bur83]. (полна линија - реална вредност, испрекинатата линија – имагинарна вредност)	132
Слика 7.13 Кос тенок спроводник кој продира во земја [Mic89].	133
Слика 7.14 Лонгитудинални струи во кос спроводник кој продира во земја [Mic89]. (полна линија - реална вредност, испрекинатата линија – имагинарна вредност)	133
Слика 7.15 Нормализирана вредност на x - компонента на електрично поле од хоризонтална електрода во слоевита земја со три слоја [Kar17]	134
Слика 7.16 Нормализирана вредност на x - компонента на електрично поле од коса електрода во слоевита земја со три слоја [Kar17]	134

Слика 7.17 Приказ на мерно коло за анализираниот експеримент [Ols15].	135
Слика 7.18 Споредба на пресметани со измерени вредности на напон.	135
Слика 7.19 Приказ на конфигурација на анализиран заземјувач [Sto98].	136
Слика 7.20 Измерени и пресметани вредности за струја и напон во точка на побуда [Sto98].	137
Слика 8.1 Приказ на геометрија, профили и место на побуда на анализираниот мрежест заземјувач.	139
Слика 8.2 Импеданса кон земја на мрежест заземјувач во функција од фреквенцијата и од карактеристиките на двослојна земја.	141
Слика 8.3 Преоден потенцијал од прв удар на гром со амплитуда од 1 А пресметан со егзактна и апроксимативна форма на Гринови функции.	142
Слика 8.4 Преоден потенцијал од последователен удар на гром со амплитуда од 1 А пресметан со егзактна и апроксимативна форма на Гринови функции.	143
Слика 8.5 Напони во фреквенциски домен, пресметани меѓу крајни точки на профил со егзактна форма и нискофреквентна апроксимација на Гриновите функции.	145
Слика 8.6 Напони при прв удар на гром, пресметани меѓу крајни точки на профил со егзактна форма и нискофреквентна апроксимација на Гриновите функции.	146
Слика 8.7 Напони при последователен удар на гром, пресметани меѓу крајни точки на профил со егзактна форма и нискофреквентна апроксимација на Гриновите функции.	147
Слика 8.8 Напони во фреквенциски домен, пресметани меѓу точки А и В по две различни патеки ℓ_1 и ℓ_2 .	148
Слика 8.9 Напони при прв удар на гром, пресметани меѓу точки А и В по две различни патеки ℓ_1 и ℓ_2 .	149
Слика 8.10 Напони при последователен удар на гром, пресметани меѓу точки А и В по две различни патеки ℓ_1 и ℓ_2 .	150

Листа на табели

Табела 6.1 Сингуларни членови кои се одземаат од Сомерфелдовите интеграл и се враќаат во аналитички облик во Гриновите функции за формулација С, за извор и точка на набљудување во ист слој	104
Табела 6.2 Сингуларни членови кои се одземаат од Сомерфелдовите интеграл и се враќаат во аналитички облик во Гриновите функции за формулација С, за извор и точка на набљудување во различен слој ($m < i$)	106
Табела 6.3 Сингуларни членови кои се одземаат од Сомерфелдовите интеграл и се враќаат во аналитички облик во Гриновите функции за формулација С, за извор и точка на набљудување во различен слој и ($m > i$)	106
Табела 6.4 Сингуларни членови кои се одземаат од Сомерфелдовите интеграл и се враќаат во аналитички облик во Гриновите функции за формулација С, за извор и точка на набљудување во хомогена земја	108
Табела 8.1 Параметри со кои се опишува струен импулс за прв и последователен удар на гром преку двојно експоненцијална функција.....	140
Табела Г.1 Компоненти на вектор на магнетна индукција од ХЕД и ВЕД изразени преку различни формулации на Гринови функции.....	167

Глава 1

Вовед

Заземјувачите се важен дел на електроенергетските, информациските, комуникациските и контролните системи, како и на електронските уреди и опрема. Нивната улога може да се подели на функционална и заштитна. Функционална улога е во обезбедување на референтен потенцијал за сите електрични и електронски уреди во системот при нормални работни услови, а можат да служат и како повратна патека за електронските сигнали. Заштитната функција е клучна за безбедноста на луѓето и живите суштества, како и за заштита на опремата од прекумерни напони и струи кои можат да се воспостават при абнормални услови и појави на кои е изложен системот.

Однесувањето на заземјувачите при побуда со струи со индустриска фреквенција е добро познато, методите за анализа и нивно проектирање се стандардизирани, а заштитата која тие ја обезбедуваат најчесто се базира на концептот на воспоставување еднаков потенцијал на електродите на заземјувачот и поврзаните спроводни површини, како и на обликување потенцијали на тлото над заземјувачот. Но ситуацијата е битно различна при побуда со високо фреквентни или импулсни струи, кои се карактеристични при манипулации во електроенергетските системи или при удар на гром. При простирање на брзо променливи струи со голем интензитет низ заземјувачките системи, истите веќе не се еквипотенцијални, па можна е појава на опасни напони помеѓу различни точки на заземјувачот, а со тоа и помеѓу поврзаните системи и опрема. При вакви околности може да настане пробив на електричната изолација, трајно оштетување на опремата, како и повреди или смрт на луѓето и живите суштества кои се изложени на овие напони.

Заземјувачите претставуваат заедничка точка во која се поврзуваат системите во рамки на една електроенергетска или индустриска постројка, а со тоа стануваат преносници на влијанија помеѓу различни системи. Меѓутоа преносници на влијанија можат да бидат и екрани на кабли, заштитни јажиња или други метални структури кои се поврзани или пак се водат во непосредна близина со заземјувачите, а преку кои е можно одведување струи и потенцијали надвор од постројките, кон други системи кои не се имуни на овие влијанија. Во поново време, овие проблеми стануваат поизразени како резултат на интегрирањето на чувствителна електронска опрема во системите, со се пониски нивоа на сигнали, со што системите стануваат се почувствителни на влијанија со пониски нивоа.

Прецизно утврдување на нивоата на воспоставените напони и струи, како и нивната временска и просторна распределба во рамки на една постројка но и пошироко е од клучна важност за овозможување заштита на луѓето и опремата, како и за обезбедување

непрекинатост и сигурност во функционирањето на системите. Но нивно утврдување врз база на база на мерења е речиси невозможно, пред се поради комплексноста на системите и појавите кои се предмет на анализа, нивната зачестеност, варијации во обликот или местото на побуда, карактеристиките на средината, пристапноста до системите, како и големиот број на непознати големини во практични ситуации. Од друга страна, можните ризици од изложување на прекумерни напони и струи треба да бидат однапред утврдени, бидејќи мерките на заштита се конципираат и имплементираат во фазата на проектирање и изведба на системите кои или се извор на влијание или пак се под електромагнетно влијание, а понатамошни интервенции за заштита можат да бидат многу сложени за изведба или оневозможени.

Поради наведените причини, се наметнува потребата за моделирање и симулација на електромагнетни појави кај заземјувачи, а со цел да се овозможи подлабоко познавање на нивните карактеристики и правилно конципирање на заштитата, при различни услови на побуда и различни услови на нивното опкружување.

1.1 Формулација на проблемот

Мерките на заштита на луѓе и опрема вообичаено се базираат на ограничување на напони кои можат да се воспостават помеѓу различни точки во рамки на анализираниот систем или кон други системи во непосредна близина. По дефиниција, напонот се определува преку интегрирање на векторот на јачина на електричното поле по однапред дефинирана патека која ги поврзува точките меѓу кои се пресметува напонот, а тоа ја наметнува потребата од познавање на електромагнетното поле во просторот околу анализираниот систем. Во анализите на заземјувачки системи, извори на електромагнетно поле вообичаено се струите кои се водат низ електродите на заземјувачот и струите кои истекуваат кон земја, што значи дека определувањето на напоните налага претходно познавање на распределбите на струја во заземјувачот.

Струите во заземјувачот зависат од местото и обликот на побудата, неговата геометрија, карактеристиките на средината во која се наоѓа, близината на други спроводни структури во околината итн. Пресметувањето на струите и напоните не е едноставна задача, особено доколку се земе предвид сложеноста на електромагнетните процеси во слоевита средина која најчесто е со нехомогена структура, а при одредени услови и со фреквентно зависни и нелинеарни карактеристики. Со цел да се олесни моделирање на електромагнетните процеси за реални услови, се врши поедноставување на физичкиот модел преку апроксимација на анализираниот заземјувач, средината во која тој се наоѓа, неговото опкружување итн. Врз база на воведените апроксимации во физичкиот модел, се воспоставува математички модел со кој се моделираат електромагнетните процеси во системот, кој исто така може да подлежи на одредени апроксимации пред сè поради комплексноста на равенките со кои се опишуваат електромагнетните појави. На крај се пристапува кон нумеричко решавање на

математичкиот модел, каде повторно се воведуваат одредени апроксимации со цел да се олесни постапката за негово решавање. Класификацијата на моделите за анализа на заземјувачи е директно поврзана со степенот на применетите апроксимации, кои воедно влијаат на комплексноста, точноста и ефикасноста на моделот.

Предмет на анализа и унапредување во оваа докторска дисертација е електромагнетниот модел за анализа на заземјувачи, кој се базира на следните упростувања и пристапи кон негово нумеричко решавање:

- заземјувачот се третира како структура формирана од тенки жици,
- земјата се третира како спроводна слоевита средина, со хомогени, линеарни и фреквенциски независни карактеристики на слоевите, кои се меѓусебно разделени со рамни хоризонтални разделни површини,
- се занемарува присуството на други надземни или подземни структури во околината на заземјувачот, освен ако истите не се дел од анализата,
- математичкиот модел се базира на интегрална равенка на електрично поле со мешани потенцијали (применета во егзактна или апроксимативна форма), а се решава нумерички со примена на метод на моменти,
- пресметките најпрво се спроведуваат во фреквенциски домен, а анализа на преодни процеси во временски домен се врши со примена на инверзна Фуриеова трансформација.

Применетите упростувања во физичкиот модел и во нумеричките постапки можат да се сметаат за минимални, па според тоа, електромагнетниот модел кој се базира на примена на егзактен математички модел може да се смета за егзактен.

1.2 Преглед на досегашни истражувања во областа

Моделирањето на електромагнетни појави кај спроводници во спроводна слоевита средина, во опсег на фреквенции од 0 Hz до десетици MHz, е од особен интерес за анализа на проблеми поврзани со заземјување и преодни појави во енергетски системи [Mel88], [He13], [Ame15], електромагнетна компатибилност [Tes97], [Jof11], заштита од атмосферски празнења [Bab16], [Has93], итн. Параметри од интерес во овие анализи најчесто се распределби на струи или напони кои може да се воспостават помеѓу елементи во анализираниот систем или кон други системи во неговото опкружување.

Проблемите можат да се разликуваат геометриски (по облик и димензии), фреквенциски (ограничени во доменот на ниски фреквенции или во широк фреквенциски опсег), карактеристики на средината во која се анализираат (хомогена или слоевита средина) итн. Од тие причини, не постои не постои едноставен, а истовремено пресметковно-ефикасен модел кој би ги опфатил сите случаи, па развиени се голем број модели кои се оптимизирани за специфични случаи. Според најопшта класификација, можат да се поделат на: модели базирани на теорија на електрични кола

(со сконцентрирани или дистрибуирани параметри) [Men94], [Ger99], [Ote99], [Nix99], [Gon99], [Cid00], [Liu01] и електромагнетни модели (кои нумерички се решаваат со примена на моментни методи, метод на конечни разлики во временски домен, метод на конечни елементи итн.) [Grc90], [Grc96a], [Kun93], [Taf00], [Jin93], [Nek95], [Tan01]. Помеѓу споменатите, електромагнетниот модел кој се базира на интегрална равенка за електрично поле со мешани потенцијали [Mic85] и примена метод на моменти [Har93] е префериран избор за анализи на заземјувачи [Hei97], [Bak08], [She14], [Pop15]. Истиот е предмет на анализа и унапредување во рамки на оваа докторска дисертација.

Електромагнетниот модел за анализа на заземјувачи е претставен во [Grc86], [Grc90] за анализи на заземјувачи во хомогена земја, а истиот е базиран на егзактна електромагнетна теорија која е применета во анализи на антени [Bur84], [Ada73], [Har67]. Подоцна, неговиот домен на примена е проширен за анализи на хоризонтални конфигурации на електроди во двослојна земја [Arn04a], [Arn04b], како и за вертикални конфигурации на електроди кои продираат низ слоеви во двослојна земја [Arn11b], а неодамна е претставен и модел за анализа на праволиниски електроди со произволна ориентација кои се ограничени во еден слој од повеќеслојна земја [Kar17]. Електромагнетниот модел овозможува анализи со висока точност во широк фреквенциски опсег, од 0 Hz до десетици MHz, која е потврдена преку споредба со бројни нумерички и експериментални резултати [Grc98], [Grc09a], [Grc09b], [Arn05], [Arn11b], [Ols15].

Во егзактниот електромагнетен модел се применуваат математички егзактни равенки со кои се опишува електричното поле во просторот. Овие равенки содржат сингуларни и осцилаторни интегрални од т.н. Сомерфелдов тип (познати и како Сомерфелдови интегрални) кои бавно конвергираат и за кои не постои егзактно решение во аналитички облик. Потребата од сложени алгоритми за нумеричко решавање на овие интегрални како и долгото време на извршување на пресметките, особено ако заземјувачот е сложен и со големи димензии, го чини електромагнетниот модел неефикасен за практични инженерски анализи на големи и сложени заземјувачки системи. Како резултат на сето тоа, во литературата можат да се најдат само пресметки кои се однесуваат на помали системи [Arn04a], [For09], [Kar17].

Еден начин да се олесни примената на електромагнетниот модел за анализи на големи и сложени заземјувачи е преку подобрување на ефикасноста на нумеричкото решавање на Сомерфелдовите интегрални. На оваа тема, која е сè уште актуелна, се објавени голем број на публикации, но најчесто во областа на моделирање на антени, или печатени антени и кола, главно во доменот високи фреквенции од ред на MHz и GHz и во слоевити диелектрични средини [Tan05], [Hu06], [Alp08], [Alp10], [Pin11], [Din13], [Mic16]. Како такви, постапките за ефикасно решавање на овие интегрални не се предвидени и оптимизирани за примена во анализи за ниски фреквенции и за спроводна слоевита средина како што е земјата. Меѓутоа со оглед на природата на електромагнетниот модел, кој е изведен од теорија на антени, дел од овие постапки би

можеле да се прилагодат за зголемување на ефикасноста и на електромагнетниот модел за анализа на заземјувачи. Иако постапките на ефикасно нумеричко решавање можат значително да се разликуваат во зависност од анализираниот проблем, сепак главните чекори на извршување на постапката во генерален случај се сведуваат на: кондиционирање на Сомерфелдовите интегрални од аспект на подобрување на нивната конвергенција и нивниот сингуларен карактер [Bur81b], [Sim06], избор на оптимална патека за интегрирање во комплексна рамнина [Lyt74], [Mic89], [Mic16], нумеричко пресметување на Сомерфелдовите интегрални со помош на интерполација од мал број однапред пресметани решенија на кондиционираната интегрална равенка [Bri77], [Che00], [Atk10], [Fra11], [Bia16], [Bia18]. Овие постапки се применуваат и во професионални програми за моделирање на електромагнетни појави како што се NEC [Bur81a] и FEKO [Fek09].

Апроксимирање на Сомерфелдовите интегрални со нивно приближно аналитичко решение е еден од начините да се заобиколи гореспоменатата комплексност на моделот и воедно да се добие поефикасен, поедноставен и инженерски поприватлив метод за анализа на големи заземјувачки системи [Hei97], [Bak08], [She14], [Pop15], [Grc96a], [Mar15], [Mar17]. На овој начин, пресметките се извршуваат за многу пократко време (споредено со постапката базирана на директно нумеричко интегрирање), но на сметка на тоа се воведува одреден степен на грешка која е наметната од применетите упростувања. Апроксимациите базирани на концептот на ликови [Arn10a], [Arn11], [Arn16], кои се изведуваат како ниско-фреквентна апроксимација на Гриновите функции, имаат честа примена во електромагнетно моделирање на заземјувачи од причина што овозможуваат анализа на произволно сложени и големи заземјувачи, а истовремено даваат речиси егзактно решение за параметрите од интерес при индустриска фреквенција. Воведената грешка во анализи на повисоки фреквенции е предмет на многу досегашни анализи за заземјувачи во хомогена и слоевита земја [Ols96], [Arn10b], [Arn11], [Arn12]. Сепак, како што беше претходно истакнато, поради недостаток на пресметковно-ефикасен електромагнетен модел, анализите вообичаено се ограничени на едноставни геометрии (на пример хоризонтални електроди, вертикални сонди) или мрежести заземјувачи со помали димензии. Во литературата не можат да се сретнат податоци кои покажуваат до кој степен применетите апроксимации влијаат врз точноста на пресметките во анализи на големи заземјувачи со реални димензии. Тоа особено важи за анализи на преодни појави, каде воспоставените напони и струи можат значително да се разликуваат зависно од фреквенцискиот состав и местото на побуда. Со тоа дополнително се истакнува потребата од егзактен и пресметковно-ефикасен електромагнетен модел, со кој би се утврдила точноста на апроксимативните методи во анализи на големи заземјувачки системи.

Најпопуларната форма на електромагнетниот модел за анализа на заземјувачи се базира на примена на интегралната равенка за електрично поле со мешани потенцијали (MPIE - Mixed Potential Integral Equation) во која придонесите на магнетниот вектор и

електричниот скалар потенцијал се третираат раздвоено [Mic85]. Меѓутоа, потенцијалите во МРІЕ не се еднозначно дефинирани и постојат повеќе формулации од кои четири овозможуваат наједноставно изразување на електричното поле во слоевита средина [Mic90a], тоа се: традиционалната и С формулација, кои се базираат на т.н. Сомерфелдов избор на вектор потенцијали во слоевита средина [Som49]; и А и В формулација кои се базираат на изборот на вектор потенцијали предложен од Ертеза и Парк [Ert69]. Во постојниот електромагнетен модел и неговите апроксимации е применета традиционалната формулација на потенцијали. Оваа формулација се карактеризира со минимален број на Гринови функции за компонентите на магнетниот вектор потенцијал (кои произлегуваат од директна примена на Сомерфелдовиот избор на потенцијали) и со две различни Гринови функции за електричен скалар потенцијал потенцијали од хоризонтален (ХЕД) и вертикален (ВЕД) електричен дипол во слоевита средина. Нејзината примена во електромагнетниот модел овозможува наједноставно моделирање на заземјувачи составени од хоризонтални или вертикални електроди, меѓутоа различните Гринови функции за електричен скалар потенцијал, ја прават оваа формулација помалку практична за анализа на структури со произволен облик, каде се присутни хоризонтални и вертикални или коси спроводници [Gay97], [Dur95], што е вообичаен случај кај заземјувачите. Примената на традиционалната формулација е отежната и при моделирање на продор на електроди низ различни слоеви, како резултат на Гриновата функција за електричен скалар потенцијал од ВЕД која е дисконтинуирана при премин на изворите на поле од еден во друг слој [Mic90a]. За разлика од традиционалната, формулациите А и С во МРІЕ овозможуваат поедноставна примена во анализи на структури со хоризонтални, вертикални и коси електроди, како и структури што продираат низ повеќе слоја. Меѓу нив, формулација С е префериран избор за анализа на ваков тип проблеми [Mic90a]. Сепак според сознанијата на авторот, овие формулации досега не се применети во електромагнетен модел кој овозможува анализи на големи заземјувачи, со сложени конфигурации на електроди.

По извршениот преглед на литература, накратко може да се резимираат следните достигнувања во областа на анализите на заземјувачи, од кои произлегува и мотивацијата за истражувањата спроведени во оваа докторска дисертација:

- Помеѓу постојните модели за анализи на заземјувачи, електромагнетниот модел кој се базира на интегрална равенка за електрично поле со мешани потенцијали и примена метод на моменти е префериран избор за моделирање на заземјувачи;
- Егзактниот електромагнетен модел се применува во анализи на мали и едноставни конфигурации на заземјувачи или електроди во хомогена и повеќеслојна земја.
- Неефикасниот пристап кон нумеричкото решавање на Сомерфелдовите интегрални е главен ограничувачки фактор за анализи на големи и сложени заземјувачи со примена на егзактен електромагнетен модел.

- Методи за поефикасно решавање на Сомерфелдовите интегрални се применуваат во анализи на печатени кола и антени, а истите би можеле да се прилагодат и применат во електромагнетниот модел, кој е изведен од теорија на антени.
- Поради недостаток на егзактен и пресметковно-ефикасен електромагнетен модел, анализите на големи заземјувачи вообичаено се вршат со примена на апроксимации на електромагнетниот модел, базирани на концептот на ликови. Точноста на овие апроксимации е анализирана кај мали и едноставни конфигурации на заземјувачи или електроди, но нема публикувани резултати за нивната точност во анализи на големи заземјувачи со реални димензии.
- Потребата од ефикасен егзактен електромагнетен модел за анализи на заземјувачи во слоевита земја, произлегува од потребата за тестирање на точноста на апроксимациите, но и за анализа на ситуации каде што постоечкиот егзактен електромагнетен модел и неговите апроксимации не задоволуваат.

1.3 Предмет на истражувањето

Истражувањето во рамките на оваа дисертација е во насока на подобрување на ефикасноста на електромагнетниот модел и проширување на неговиот домен на примена за прецизни анализи на високофреквентни и преодни појави кај големи заземјувачи со сложени конфигурации на електроди, кои се наоѓаат во слоевита земја.

Во таа насока е развиен егзактен математички модел за анализа на заземјувачи, во кој покрај традиционалната, се воведени и Гринови функции за т.н. А, В и С формулација на потенцијали во МРПЕ. Гриновите функции се изведени во просторен домен, за извори и точки на набљудување во ист или различен слој. За нивно решавање е применета ефикасна постапка, базирана на интерполација од мал број на табелирани решенија, кои пак се пресметуваат со директно нумеричко интегрирање на интегрални равенки од Сомерфелдов тип. Математичкиот модел се решава нумерички, со примена на метод на моменти.

Освен кон подобрување на егзактниот математички модел, истражувањето е насочено кон подобрување на неговите апроксимации. Во таа насока се изведени апроксимации на Гриновите функции, кои се базираат на изборот на вектор потенцијали кој е предложен од Ертеза и Парк.

Посебен акцент е ставен на верификацијата во сите фази на развојот на моделот, на неговата имплементација како и на добиените резултати. Точноста на моделот е потврдена преку верификации со публикувани нумерички и експериментални резултати како и преку споредби со програми за електромагнетно моделирање на заземјувачи и антени во слоевита средина, а можностите на моделот се демонстрирани преку параметарска анализа на голем заземјувач.

1.4 Цели на истражувањето

Поставените цели во рамките на оваа докторска дисертација можат да се резимираат во следните точки:

- Воспоставување егзактен математички модел за анализа на заземјувачи со сложени конфигурации на електроди во повеќеслојна земја, преку воведување на т.н. А, В и С формулација на потенцијали во МРПЕ.
- Подобрување на ефикасноста на електромагнетниот модел со редуцирање на бројот на Сомерфелдови интеграли кои се решаваат нумерички, преку примена на интерполација.
- Изведување на поточни апроксимации на Гриновите функции за потенцијали, за хомогена и двослојна земја, и анализа на нивниот домен на примена во анализи на заземјувачи.
- Имплементација на предложениот математички модел и постапките за негово поефикасно решавање во компјутерска програма за анализа на заземјувачи.
- Верификација на моделот преку споредба со публикувани нумерички и експериментални резултати, како и со резултати од други програми за анализа на електромагнетни проблеми кај заземјувачи или антени.
- Примена на предложениот електромагнетен модел во параметарска анализа на голем мрежест заземјувач во слоевита земја.
- Параметарска анализа на воведената грешка со примена на нискофреквентни апроксимации на Гриновите функции во електромагнетниот модел, при анализа на голем мрежест заземјувач во слоевита земја.

1.5 Структура на докторската дисертација

Оваа докторска дисертација е составена од 9 глави, кои го следат развојот на математичкиот модел и постапките за негово ефикасно решавање, поаѓајќи од основните равенки и принципи во електромагнетна теорија, па се до примена на електромагнетниот модел во анализа на големи и комплексни системи.

Првата глава претставува вовед во проблемите кои се третираат во рамки на оваа докторска дисертација, а се состои од преглед на досегашните достигнувања во областа на анализа на заземјувачки системи, но и пошироко во анализа на електромагнетни проблеми во слоевита средина.

Во втората глава се дадени основните равенки и принципи во електромагнетна теорија. Посебен акцент е ставен на формулацијата на векторот на јачина на електричното поле преку интегрална равенка со мешани потенцијали која ги содржи

магнетниот вектор потенцијал и електричниот скалар потенцијал, а која претставува основа во развојот на математичкиот модел.

Во третата глава е опишана постапката за решавање на математичкиот модел со помош на методот на моменти (MoM – Method of Moments), притоа користејќи константна базична функција и тестирање на решенијата со подесување во точка. Методот MoM е нумеричка постапка која интегралните равенки, со кои се моделираат електромагнетните процеси во заземјувачот, ги доведува во систем од линеарни равенки кои се решаваат во матрична форма. Во оваа глава се претставени неколку пристапи кон моделирање на побуда на заземјувачот, како и неколку пристапи кон определување на параметри кои го карактеризираат однесувањето на заземјувачот.

Во четвртата глава се дефинирани параметрите со кои се опишува простирањето на електромагнетни бранови во слоевита средина. Врз база на овие параметри се изразени Гриновите функции во просторен домен за четири карактеристични формулации за потенцијали во МРПЕ (традиционалната, како и т.н. А, В и С формулација) кои се воведени во математичкиот модел, а нивната примена во анализи на заземјувачи е предмет на анализа во понатамошниот текст од докторската дисертација. Во оваа глава се анализирани неколку пристапи и проблеми кои се среќаваат при нумеричко интегрирање на интегралните равенки од Сомерфелдов тип, кои се карактеризираат со осцилаторна природа, сингуларен карактер и бавна конвергенција, а кои се составен дел на Гриновите функции.

Во петтата глава е претставена постапката за изведување на постоечките нискофреквентни апроксимации на Гриновите функции за двослојна и хомогена земја, кои се базираат на Сомерфелдовиот избор на вектор потенцијали, а потоа се предложени и нискофреквентни апроксимации кои се базираат на изборот на вектор потенцијали предложен од Ертеза и Парк. Предностите на предложените апроксимации се демонстрирани преку споредбени параметарски анализи со постоечките апроксимации. Претставените нискофреквентни апроксимации исто така претставуваат основа за понатамошно подобрување на ефикасноста на егзактниот електромагнетен модел.

Во шестата глава е предложена постапка за подобрување на ефикасноста на анализите на заземјувачи во хомогена и слоевита земја. Постапката се состои во прилагодување на интегралните равенки од аспект на намалување на нивната сингуларност и подобрување на нивната конвергенција, а потоа се применува интерполација на нивните решенија. Проценка на ефикасноста и точноста на предложениот пристап за ефикасно решавање на математичкиот модел е направена преку параметарски анализи за хомогена и слоевита земја.

Точноста на предложениот електромагнетен модел како и неговиот домен на примена се потврдени во седмата глава, преку верификација со публикувани

нумерички и експериментални резултати, како и со резултати од професионален софтвер за анализа на електромагнетни појави во слоевата средина.

Во осмата глава се демонстрирани можностите на предложениот егзактен и пресметковно-ефикасен електромагнетен модел, преку параметарска анализа на преодни појави кај големи заземјувачи во слоевата земја. Анализите се извршени во фреквенциски и временски домен, а се однесуваат на влијанието на карактеристиките на слоевата земја врз пресметаните потенцијали и напони во заземјувачот и неговата околина. Анализирани се и грешката која се воведува со примена на постојната нискофреквентна апроксимација на Гриновите функции, кои се базираат на традиционалната формулација на потенцијали во МРПЕ.

Во деветтата глава се резимирани заклучоците и придонесите од докторската дисертација, и дадени се насоки за идните истражувања.

Глава 2

Интегрална равенка за електрично поле со мешани потенцијали

2.1 Основни равенки, конститутивни релации и гранични услови

Максвеловите равенки претставуваат фундаментални равенки со кои се опишуваат релациите помеѓу електричното и магнетното поле во присуство на извори на поле [Мах91]. Воедно тие се основни равенки на кои се базираат сите пресметковни модели за анализа на електромагнетни проблеми. За изотропна средина со константна пермитивност ϵ , пермеабилност μ и специфична спроводност σ , под претпоставка дека не постојат магнетни извори, во фреквенциски опсег и диференцијален облик, Максвеловите равенки се изразени како:

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\vec{D} + \vec{J} \quad \text{Амперов закон} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\vec{B} \quad \text{Фарадеев закон} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v \quad \text{Гаусов закон} \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{Закон за одржување магнетен флуks} \quad (2.4)$$

Елементите во изразите (2.1) - (2.4) го имаат следното значење: $j = \sqrt{-1}$, ω - кружна фреквенција, \vec{E} - вектор на јачина на електрично поле, \vec{H} - вектор на јачина на магнетно поле, \vec{D} - вектор на диелектрично поместување, \vec{B} - вектор на магнетна индукција, \vec{J} - вектор на густина на струја и ρ_v - волуменска густина на електричен полнеж. За линеарна средина важат следните релации:

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E} \quad (2.5)$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \quad (2.6)$$

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \quad (2.7)$$

На разделна површина меѓу средини со различни електрични или магнетни карактеристики, или во случај кога на разделната површина постојат распределени

извори, се јавува дисконтинуитет на електричното и магнетното поле. Во генерален случај и во отсуство на магнетни извори однесувањето на нормалните и тангенцијалните компоненти на електричното и магнетно поле на разделната површина меѓу две средини со индекси i и $i+1$ е определено со следните гранични услови [Wan91]:

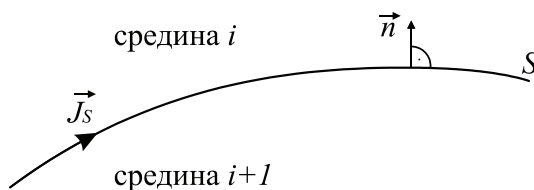
$$\vec{n} \times (\vec{E}_i - \vec{E}_{i+1}) = 0 \quad (2.8)$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_i - \vec{H}_{i+1}) = \vec{J}_s \quad (2.9)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_i - \vec{D}_{i+1}) = \rho_s \quad (2.10)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_i - \vec{B}_{i+1}) = 0 \quad (2.11)$$

каде што \vec{n} претставува нормала на разделната површина S , насочена од средината со индекс $i+1$ кон средината со индекс i , како што е илустрирано на Слика 2.1, а \vec{J}_s и ρ_s претставуваат површински густини на струја и полнеж на разделната површина, соодветно.



Слика 2.1 Приказ на разделна површина меѓу две средини (превземена од [Wan91]).

Од овде произлегуваат два специјални случаи кои се од интерес за понатамошниот развој на моделот:

- доколку на разделната површина меѓу средини со различни карактеристики нема распределени извори (на пример кај разделна површина меѓу два слоја во слоевата средина), тогаш:

$$\vec{n} \times (\vec{E}_i - \vec{E}_{i+1}) = 0 \quad (2.12)$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_i - \vec{H}_{i+1}) = 0 \quad (2.13)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_i - \vec{D}_{i+1}) = 0 \quad (2.14)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_i - \vec{B}_{i+1}) = 0 \quad (2.15)$$

- доколку за средината со индекс $i+1$ се усвоени карактеристики на идеален спроводник (на пример на површината на електрода од идеален електричен спроводник), тогаш:

$$\vec{n} \times \vec{E}_i = 0 \quad (2.16)$$

$$\vec{n} \times \vec{H}_i = \vec{J}_s \quad (2.17)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{D}_i = \rho_s \quad (2.18)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{B}_i = 0 \quad (2.19)$$

2.2 Интегрална равенка за електрично поле со мешани потенцијали

Поради едноставност на презентираната методологија, интегралната равенка за електрично поле со мешани потенцијали во ова поглавје е изведена за линеарна и хомогена спроводна средина, а во понатамошниот текст методологијата е проширена и за слоевита линеарна средина со планарна симетрија.

Од законот за одржување на магнетниот флуks, изразен преку Максвеловата равенка (2.4) притоа земајќи го предвид векторскиот идентитет $\nabla \cdot \nabla \times \vec{F} = 0$, векторот на магнетна индукција може да се изрази преку ротор на векторско поле:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) \quad (2.20)$$

каде што $\vec{A}(\vec{r})$ претставува магнетен вектор потенцијал во точка со позиција \vec{r} .

Со замена на изразот (2.20) во Максвеловата равенка (2.2), која го изразува Фарадеевиот закон, и со негово преуредување, се добива:

$$\nabla \times (\vec{E}(\vec{r}) + j\omega \vec{A}(\vec{r})) = 0 \quad (2.21)$$

Бидејќи безвртложното векторско поле може да се изрази како градиент од скаларна функција, со помош на векторскиот идентитет $\nabla \times \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F} = -\nabla \psi$, каде што ψ претставува скаларната функција, се изразува врската на векторот на јачина на електрично поле \vec{E} со магнетниот вектор потенцијал \vec{A} и електричниот скалар потенцијал Φ :

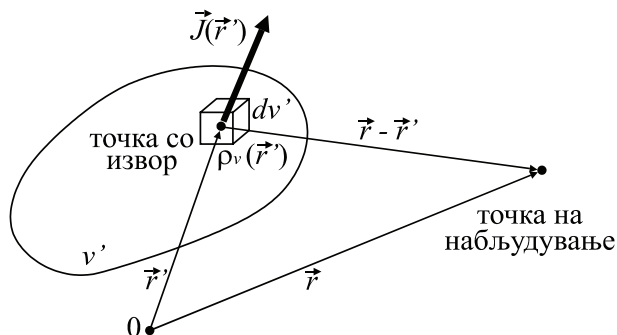
$$\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega \vec{A}(\vec{r}) - \nabla \Phi(\vec{r}) \quad (2.22)$$

Интегралните равенки со кои се дефинира магнетниот вектор и електричниот скалар потенцијал во позиција \vec{r} , од извори распределени во волумен v' се изразени како:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_{v'} \vec{J}(\vec{r}') \bar{\bar{G}}_A(\vec{r}, \vec{r}') dv' \quad (2.23)$$

$$\Phi(\vec{r}) = \int_{v'} \rho_v(\vec{r}') G_\phi(\vec{r}, \vec{r}') dv' \quad (2.24)$$

каде што \vec{J} и ρ_v се вектор на густина на струја и волуменска густина на полнеж во точка со позиција \vec{r}' , соодветно, во однос на глобален координатен систем претставен на Слика 2.2. Со $\bar{\bar{G}}_A(\vec{r}, \vec{r}')$ и $G_\phi(\vec{r}, \vec{r}')$ се изразени дијадичната Гринава функција за магнетен вектор потенцијал и Гриновата функција за електричен скалар потенцијал, соодветно, кои всушност ги претставуваат потенцијалите во точка на набљудување со позиција \vec{r} , како резултат на единечен точкаст извор во позиција \vec{r}' .



Слика 2.2 Приказ на волуменски распределени извори и точка на набљудување во која се пресметува електрично поле (превземена од [Por89]).

Во хомогена средина, $\bar{\bar{G}}_A(\vec{r}, \vec{r}')$ и $G_\phi(\vec{r}, \vec{r}')$ се изразуваат преку скаларната Гринава функција $g(\vec{r}, \vec{r}')$ со која е опишано простирањето на сферен бран во неограничен хомоген простор:

$$\bar{\bar{G}}_A(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{\mu}{4\pi} g(\vec{r}, \vec{r}'), \quad G_\phi(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{j\omega}{4\pi\sigma} g(\vec{r}, \vec{r}') \quad (2.25)$$

$$g(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-jkR}}{R}, \quad R = |\vec{r} - \vec{r}'|, \quad \sigma = \sigma + j\omega\varepsilon, \quad k = \sqrt{-j\omega\mu\sigma}$$

а истите се поврзани преку релацијата:

$$\frac{j\omega}{k^2} \nabla \cdot \bar{\bar{G}}_A = \frac{1}{j\omega} \nabla' G_\phi \quad (2.26)$$

Со замена на изразите (2.23) и (2.24) во (2.22) се добива интегралната равенка за електрично поле со мешани потенцијали, изведена за вектори на густина на струја и волуменска густина на полнеж кои се распределени во целиот волумен v' :

$$\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega \int_{v'} \vec{J}(\vec{r}') \vec{G}_A(\vec{r}, \vec{r}') dv' - \nabla \int_{v'} \rho_v(\vec{r}') G_\phi(\vec{r}, \vec{r}') dv' \quad (2.27)$$

За понатамошниот развој на моделот од интерес е електрично поле генерирано од линиски распределби на струи и полнежи, во тенки спроводници за кои е воведена т.н. “тенкожичана апроксимација” [Ada74]. Во тој случај, интегралната равенка за електрично поле генерирано од линиски густини на струја $I(\ell')$ и полнеж $\rho_l(\ell')$, кои се распределени по оската на тенок праволиниски спроводник со должина ℓ' и насока \vec{i}' , го добива следниот облик:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega \int_{\ell'} I(\ell') \vec{i}' \vec{G}_A(\vec{r}, \vec{r}') d\ell' - \nabla \int_{\ell'} \rho_l(\ell') G_\phi(\vec{r}, \vec{r}') d\ell' \quad (2.28)$$

Замената на волуменски интеграл во (2.27) со линиски интеграл во (2.28) резултира со значително поедноставување на постапката за определување на векторот на јачина на електричното поле од тенки спроводници низ кои се води струја, какви што се електродите на заземјувачот. Равенката (2.28) претставува основа за понатамошниот развој на математичкиот модел.

Глава 3

Решавање на математичкиот модел со примена на методот на моменти

Анализата на електромагнетни појави кај заземјувачи во практични случаи е речиси невозможна без примена на компјутер. Постојат повеќе нумерички методи кои се применуваат во електромагнетно моделирање на заземјувачи (метод на моменти, метод на конечни елементи, метод на конечни разлики во временски домен итн.). Меѓу нив, примената на моментните методи е префериран избор во анализи на произволно големи и сложени заземјувачки системи. Примената на МоМ налага дискретизација на структурата (електродите) во која се распределени изворите на поле (струите во електродите). Ваквиот пристап е поефикасен од аспект на пресметковно време и мемориски потреби, во однос на другите методи, при анализа на системи кои се наоѓаат во неограничен простор (во случајот околната земја), што воедно е една од главните предности на примената на МоМ во анализи на заземјувачи. Како за споредба, методот на конечни разлики во временски домен и методот на конечни елементи, налагаат дискретизација на целиот простор во кој е ограничена анализата на проблемот како и дефинирање соодветни гранични услови на границите на анализираниот простор, поради што пресметките стануваат подолги и има потреба од големи мемориски ресурси, особено при анализи на големи структури.

Методот МоМ е нумеричка постапка која интегралните равенки, со кои се моделираат електромагнетните процеси во заземјувачот, ги доведува во систем од линеарни равенки кои се изразени во матрична форма. Потоа непознатите струи во заземјувачот, при позната побуда, се определуваат со примена на стандардни операции за решавање на матрици, а преку пресметаните струи можат да се определат сите параметри од интерес во анализи на заземјувачи, како што се: импеданси кон земја и преносни импеданси, струи кои истекуваат во земја, електрично поле, потенцијали и напони на самата структура или во нејзина близина, во фреквенциски домен или во временски домен со примена на инверзна Фуриеова трансформација [Grc88], [Grc90].

Во оваа глава се претставени постапки за определување на наведените параметри. Постапките се генерални и можат да се применат за хомогена и слоевита средина, како и за различни формулации на Гринови функции и за нивните апроксимации. Меѓутоа треба да се нагласи дека примената на интегралната равенка за електрично поле со мешани потенцијали е клучна за развојот на изложениот математички модел и за постапките за негово решавање. Постапките за решавање на математичкиот модел, кои се претставени во оваа глава се однесуваат на примена на МоМ со константна базична функција и тестирање на решенијата со подесување во точка [Har67], [Bew76].

3.1 Генерален опис на метод на моменти

Моментни методи се користат за решавање на интегрални равенки, кои може да се напишат во облик на линеарен оператор:

$$L(f) = g \quad (3.1)$$

каде што g е позната функција, f е непозната функција, а L е линеарен оператор со кој е опишана врската меѓу двете функции.

Непознатата функција f ќе биде апроксимирана преку сума од N познати функции f_n , наречени базични функции, кои се линеарно независни во доменот на операторот L :

$$f \approx \sum_{n=1}^N a_n f_n \quad (3.2)$$

каде што со a_n се означени непознатите коефициенти кои треба да се определат. Изборот на базичните функции може да биде произволен (Дираков импулс, правоаголен импулс, триаголна, синусна или косинусна функција), но тенденцијата е да се избере базична функција која ќе овозможи најблиска апроксимација на функцијата f преку најмал број на елементи N во сумата (3.2).

Со замена на (3.2) во (3.1) и земајќи ја предвид линеарноста на операторот L , се добива следната релација:

$$\sum_{n=1}^N a_n L(f_n) \approx g \quad (3.3)$$

Равенката (3.4) ја изразува разликата која е резултат на применетата апроксимација за непознатата функција f во (3.2):

$$R = g - \sum_{n=1}^N a_n L(f_n) \quad (3.4)$$

Следен чекор во постапката е да се минимизира овој остаток, односно R да се изедначи со нула, во дискретен број точки или во смисла на средна вредност во доменот на линеарниот оператор L . За таа цел двете страни на равенката (3.3) ќе се помножат со позната функција w_m , наречена тест функција, притоа земајќи го предвид следниот внатрешен продукт (изразен во општа форма за две функции u и v):

$$\langle u, v \rangle = \int_I u v d\ell \quad (3.5)$$

а потоа се форсира изедначување на остатокот R со нула на следниот начин:

$$\sum_{n=1}^N a_n \langle w_m, L(f_n) \rangle = \langle w_m, g \rangle, \quad m = 1, \dots, N \quad (3.6)$$

Равенката (3.6) резултира со систем од N линеарни равенки со N непознати:

$$\begin{bmatrix} \langle w_1, L(f_1) \rangle & \langle w_1, L(f_2) \rangle & \cdots & \langle w_1, L(f_N) \rangle \\ \langle w_2, L(f_1) \rangle & \langle w_2, L(f_2) \rangle & \cdots & \langle w_2, L(f_N) \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle w_N, L(f_1) \rangle & \langle w_N, L(f_2) \rangle & \cdots & \langle w_N, L(f_N) \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle w_1, g \rangle \\ \langle w_2, g \rangle \\ \vdots \\ \langle w_N, g \rangle \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

или во компактен облик изразени како:

$$Z_{(N \times N)} a_{(N)} = b_{(N)} \quad (3.8)$$

каде што $Z_{m,n} = \langle w_m, L(f_n) \rangle$ и $b_m = \langle w_m, g \rangle$ се со познати вредности, а како непознати фигурираат коефициентите a_n . Доколку матрицата $Z_{(N \times N)}$ не е сингуларна, непознатите коефициенти a_n се добиваат преку стандардни постапки за инверзија на матрици:

$$a_{(N)} = Z_{(N \times N)}^{-1} b_{(N)} \quad (3.9)$$

а со нивна замена во (3.2) може да се реконструира непознатата функција f .

Изборот на тест функција е исто така произволен, но тенденцијата е да се постигне најмала разлика помеѓу двете страни на равенката (3.6). Доколку $f_n = w_n$, односно базичната и тест функцијата имаат ист облик, тогаш методот се нарекува Галеркинов метод при што матрицата Z станува симетрична во однос на главната дијагонала односно $z_{m,n} = z_{n,m}$. Сепак покрај воведената грешка, при изборот на базична и тест функција најчесто се зема предвид комплексноста на нумеричката постапка и времетраењето на пресметките кои произлегуваат од нивниот избор.

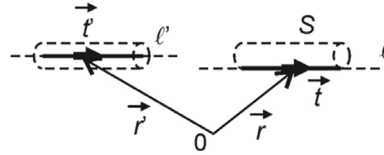
3.2 Примена на МРІЕ и МоМ за определување на непознатите лонгитудинални струи во заземјувачот

Определување на непознатите лонгитудинални струи во заземјувачот е изведено преку нумеричко решавање на интегралната равенка за електрично поле формулирана со МРІЕ, а со помош на МоМ чии чекори на имплементација беа опишани во претходното поглавје. Со цел да се поедностави нумеричката постапка за пресметка на непознатите струи во структурата како и самата имплементација на МРІЕ и МоМ, неопходно е воведување одредени апроксимации кои се од клучно значење за применетата постапка:

- заземјувачот се третира како систем од меѓусебно поврзани или неповрзани долги и тенки цилиндрични електроди од идеално спроводен материјал, кои се наоѓаат под земја, а за кои е воведена т.н. тенкожичана апроксимација [Ada74];
- земјата се третира како спроводна слоевита средина со паралелни хоризонтални слоеви, каде секој слој со индекс i се карактеризира со спроводност σ_i , пермитивност ϵ_i и пермеабилност μ_i ;
- заземјувачот се дискретизира на N_S праволиниски цилиндрични сегменти, чија должина $\Delta \ell_n$ согласно воведената тенкожичана апроксимација треба да е многу подолга од нивниот радиус a (вообичаена претпоставка е $\Delta \ell_n > 10a$), а многу пократка од брановата должина во анализираната средина при зададена фреквенција (вообичаена претпоставка $\Delta \ell_n < 0.1\lambda_i$).
- се претпоставува постоење само на аксијална компонента на векторот на густината на струја \vec{J} во електродите, а радијалната и кружната компонента се занемаруваат, односно се претпоставуваат линиски распределени лонгитудинални струи и полнежи по оските на електродите, со што истовремено се постигнува и значително упростување на МРІЕ од равенка со волуменски во равенка со линиски интеграл (равенката (2.27) се сведува на (2.28));
- согласно воведената тенкожичана апроксимација, граничните услови за векторот на јачина на електрично поле се применуваат само за аксијалната компонента на вкупното електрично поле на површината на електродите.
- во случај на побуда со паралелен струен или напонски генератор, едниот крај на генераторот е поврзан на спојница меѓу два сегменти на кои е дискретизиран заземјувачот или на крајот на отворен сегмент, а другиот крај е поврзан во неутрална точка во бесконечност при што се занемарува влијанието на спојните водови.

За понатамошниот развој на постапката, ќе бидат третирани два сегменти кои се дел од заземјувачкиот систем, а чија основна геометрија е прикажана на Слика 3.1.

Со векторот \vec{r}' ќе бидат дефинирани позициите на изворите на поле по должина на оската ℓ' , а со векторот \vec{r} се дефинирани позициите на точки на површината S во кои се пресметува полето, по должина на линијата ℓ . Со векторите \vec{t}' и \vec{t} , кои се во насока на оските ℓ' и ℓ , е дефиниран правецот на двата сегменти.



Слика 3.1 Основна геометрија на два сегменти кои се дел од заземјувачки систем (превземена од [Grc18a]).

Постапката за решавање на математичкиот модел со примена на МоМ, започнува со поставување на граничниот услов за тангенцијалните компоненти на електричното поле на површината на електродата S , кој апроксимативно се применува само за аксијалната компонента на вкупното електрично поле:

$$\vec{t} \cdot (\vec{E}^i + \vec{E}^s) = 0 \quad (3.10)$$

Вкупното електрично поле е претставено како сума на т.н. познато надворешно електрично поле \vec{E}^i и расеаното електрично поле \vec{E}^s кое е резултат на линиски распределби на струи $I(\ell')$ и полнежи $\rho_l(\ell')$ по оската ℓ' . Расеаното електрично поле \vec{E}^s се изразува со МРПЕ преку изразот (2.27). Доколку (2.27) се замени во (3.10) и се земат предвид горенаведените апроксимации, се добива:

$$\vec{t} \cdot \vec{E}^i = j\omega(\vec{t} \cdot \vec{A}) + \frac{\partial \Phi}{\partial \ell} \quad (3.11)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_{\ell'} I(\ell') \vec{t}' \bar{G}_A(\vec{r}, \vec{r}') d\ell' \quad (3.12)$$

$$\Phi(\vec{r}) = \int_{\ell'} \rho_l(\ell') G_\phi(\vec{r}, \vec{r}') d\ell' \quad (3.13)$$

$$\rho_l(\ell') = -\frac{1}{j\omega} \frac{\partial I(\ell')}{\partial \ell'} \quad (3.14)$$

каде што \bar{G}_A и G_ϕ се дијагична Гринова функција за магнетниот вектор потенцијал и Гринова функција за електричниот скалар потенцијал, соодветно. Со замена на изразите (3.12) - (3.14) во (3.11) се добива интегралната равенка за електрично поле со мешани потенцијали со која е изразена врската помеѓу непознатата лонгитудинална струја $I(\ell')$ во заземјувачот со познатото надворешно електрично поле \vec{E}^i , а истата претставува основа за понатамошна примена на МоМ:

$$\vec{t} \cdot \vec{E}^i = j\omega \int_{\ell'} I(\ell') \vec{t} \cdot \vec{t} \bar{\bar{G}}_A(\vec{r}, \vec{r}') d\ell' - \frac{1}{j\omega} \frac{\partial}{\partial \ell} \int_{\ell'} \frac{\partial}{\partial \ell'} I(\ell') G_\phi(\vec{r}, \vec{r}') d\ell' \quad (3.15)$$

Сега интегралната равенката (3.15) може да се изрази во облик на линеарен оператор:

$$L(I) = \vec{t} \cdot \vec{E}^i \quad (3.16)$$

притоа земајќи ја предвид следната аналогија со равенката (3.1):

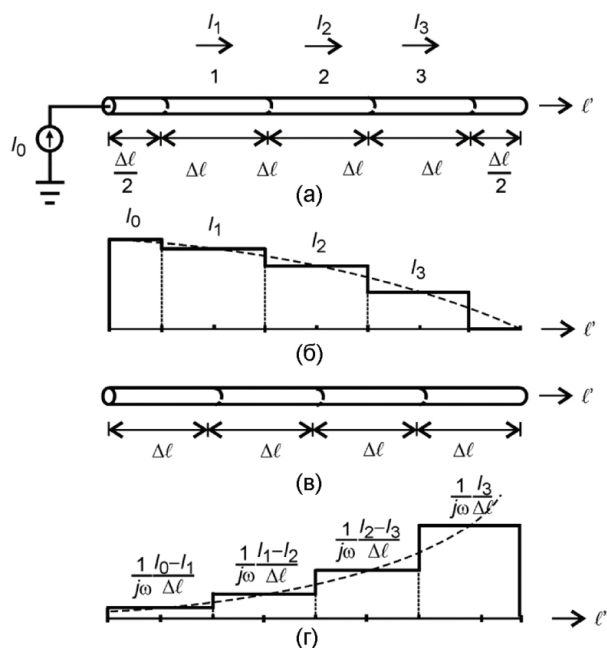
- функцијата g ја претставува тангенцијалната компонента на надворешното електрично поле \vec{E}^i кое задоволува познат граничен услов на површината S на идеален спроводник;
- функцијата f ја претставува лонгитудинална струја I во спроводникот, која се индуцира како резултат на надворешното електрично поле \vec{E}^i , а која фигурира како непознатата;
- линеарноста на операторот L кој ја изразува врската меѓу функциите \vec{E}^i и I произлегува од линеарноста на Максвеловите равенки преку кои се изведени Гриновите функции како и применетите гранични услови кои важат за линеарна средина.

Следен чекор во постапката е апроксимација на непознатата функција (лонгитудиналната струја), преку сума на N_S познати функции колкав што е бројот на сегменти со кои е дискретизиран заземјувачот. Лонгитудиналната струја $I(\ell')$ во заземјувачот може да се претстави преку суперпозиција на струите I_n во секој од сегментите на кои е дискретизиран заземјувачот, а оваа апроксимација математички е изразена како:

$$I(\ell') \approx \sum_{n=1}^{N_S} I_n \Pi_n(\ell') \quad (3.17)$$

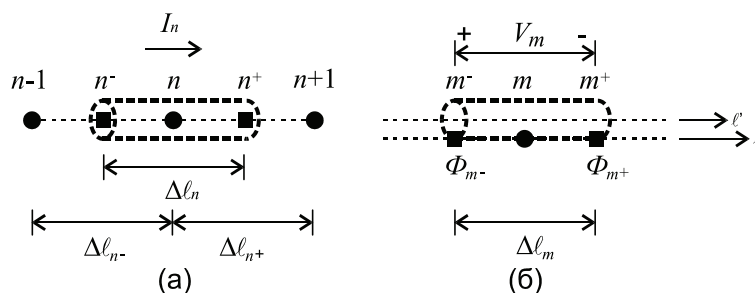
$$\Pi_n(\ell') = \begin{cases} 1, & \text{по должина на електродата, во } n\text{-тиот сегмент} \\ 0, & \text{во другите сегменти од електродата} \end{cases}$$

Во горниот израз, $\Pi_n(\ell')$ е претпоставена функција на експанзија на струјата, односно базична функција во облик на правоаголен импулс, а I_n се комплексни коефициенти со кои е определена непознатата струја во n -тиот сегмент на електродата. На овој начин е воведена претпоставка дека лонгитудиналната струја е константна по должина на сегментот, а нејзината вредност е точно определена само во средината на сегментот, како што е илустрирано на Слика 3.2(б).



Слика 3.2 Сегментација и апроксимација на лонгитудиналната струја и полнеж (превземена од [Grc18a])

а) Електрода од заземјувач која е дискретизирана на три сегменти и напојувана со паралелен струен извор, б) Апроксимација на лонгитудиналните струи во сегментите со правоаголни импулси, в) Сегментација која се однесува на електричниот полнеж, г) Апроксимација на линиската распределба на електрични полнежи со правоаголни импулси.



Слика 3.3 Приказ на извори и точки на набљудување на два сегменти

а) Еквивалентна линиска распределба на струја и полнеж на n -ти изворен сегмент, б) Пресметка на напон на краевеи на m -ти тест сегмент

Ако го набљудуваме само изворниот n -ти сегмент со должина $\Delta \ell_n$ низ кој се води лонгитудинална струја I_n по оската ℓ'_n , тогаш принципот на одржување на електричен полнеж налага постоење на точкести извори на полнеж во крајните точки на сегментот, означени со n^- и n^+ на Слика 3.3(a). Согласно усвоените апроксимации и насока на

струјата во n -тиот сегмент, наместо точкести полнежи, се претпоставува линиска распределба на полнеж ρ_l по оската ℓ' :

$$\rho_l(n^-) = -\frac{1}{j\omega} \frac{I_n}{\Delta\ell_{n^-}}, \quad \rho_l(n^+) = \frac{1}{j\omega} \frac{I_n}{\Delta\ell_{n^+}} \quad (3.18)$$

каде што должината на линијата по која е претпоставена распределбата на полнеж од n -тиот сегмент е еднаква на сумата од половините на n -тиот и соседните сегменти со кој се поврзува на двата краја:

$$\Delta\ell_{n^-} = (\Delta\ell_{n-1} + \Delta\ell_n)/2, \quad \Delta\ell_{n^+} = (\Delta\ell_n + \Delta\ell_{n+1})/2 \quad (3.19)$$

На овој начин се дефинира нова сегментација на структурата која се однесува на распределбата на полнеж, прикажана на Слика 3.2(в). Сегментацијата која се однесува на лонгитудиналните струи и на полнежите се разликува бидејќи тие се дефинирани на различни делови од електродата како што е прикажано на Слика 3.3(а):

- лонгитудиналната струја во n -тиот сегмент е дефинирана помеѓу точките n^- и n^+ , односно долж $\Delta\ell_n$;
- линиската распределба на полнеж на краевите на n -тиот сегмент е дефинирана помеѓу точките $n-1$ и n (долж $\Delta\ell_{n^-}$) и помеѓу точките n и $n+1$ (долж $\Delta\ell_{n^+}$).

Линиската распределба на полнеж, која се однесува на спојна точка на два соседни сегменти, може да се изрази како суперпозиција на полнежите од двата сегменти. Доколку се земе предвид врската помеѓу лонгитудиналната струја и линиската распределба на полнеж дадена со (3.14), а постапката на диференцирање се замени со метод на конечни разлики:

$$\left. \frac{\partial I}{\partial \ell'} \right|_{\text{од } \ell'_{n-1} \text{ до } \ell'_n} \approx \frac{I_n - I_{n-1}}{(\Delta\ell_{n-1} + \Delta\ell_n)/2} = c_n I_n + c_{n-1} I_{n-1} \quad (3.20)$$

$$\left. \frac{\partial I}{\partial \ell'} \right|_{\text{од } \ell'_n \text{ до } \ell'_{n+1}} \approx \frac{I_{n+1} - I_n}{(\Delta\ell_n + \Delta\ell_{n+1})/2} = c_{n+1} I_{n+1} + c_n I_n \quad (3.21)$$

$$c_n(\ell') = \begin{cases} \frac{2}{\Delta\ell_{n-1} + \Delta\ell_n}, & \ell'_{n-1} \leq \ell' < \ell'_n \\ \frac{-2}{\Delta\ell_n + \Delta\ell_{n+1}}, & \ell'_n < \ell' \leq \ell'_{n+1} \\ 0, & \text{за други позиции} \end{cases} \quad (3.22)$$

тогаш линиската распределба на полнеж може да се изрази преку суперпозиција на полнежите кои се однесуваат на секоја од спојните точки помеѓу сегментите на кои е поделен заземјувачот:

$$\rho_l(\ell') = -\frac{1}{j\omega} \frac{\partial I(\ell')}{\partial \ell'} \approx -\frac{1}{j\omega} \sum_{n=1}^{N_S} I_n c_n \Pi'_n(\ell') \quad (3.23)$$

$$\Pi'_n(\ell') = \begin{cases} -1, & \ell'_{n-1} \leq \ell' < \ell'_n \\ 1, & \ell'_n \leq \ell' < \ell'_{n+1} \\ 0, & \text{за други позиции} \end{cases}$$

каде што $\Pi'_n(\ell')$ е дублет на базични функции со облик на правоаголен импулс, од двете страни на n -тиот сегмент. Со тоа е завршена апроксимацијата изворите на поле кои се изразени преку непознатата струја во заземјувачот, а чија распределба е претпоставена во облик на правоаголни импулси. Следен чекор во постапката е тестирање на решението на интегралната равенка (3.15) со подесување во точка.

Напонот што се воспоставува на краевите на m -тиот сегмент, како резултат на надворешното електрично поле генерирано од изворите во n -тиот сегмент, може апроксимативно да се определи преку множење на тангенцијалната компонента на познатото електрично поле во точката m (изразена преку (3.15) за позиција \vec{r}_m), со должината на m -тиот сегмент, $\Delta \ell_m$. На тој начин се врши подесување на решението на интегралната равенка во точка.

Оваа постапка може да се прошири кон апроксимативно определување на напонот на краевите на m -тиот сегмент, како резултат на електричното поле генерирано од изворите во сите сегменти со кои е дискретизиран заземјувачот:

$$V_m = \vec{t}_m \cdot \vec{E}^i(\vec{r}_m) \Delta \ell_m$$

$$= \sum_{n=1}^{N_S} I_n \Delta \ell_m \left[\begin{aligned} & j\omega \int_{\ell'_n} \Pi_n(\ell') \vec{t}_m \cdot \vec{t}_n \bar{G}_A(\vec{r}_m, \vec{r}') d\ell' \\ & - \frac{1}{j\omega} \int_{\ell'_n} c_n \Pi'_n(\ell') \frac{\partial}{\partial \ell} G_\phi(\vec{r}_m, \vec{r}') d\ell' \end{aligned} \right] \quad (3.24)$$

или во компактна форма напонот може да се изрази на следниот начин:

$$V_m = \sum_{n=1}^{N_S} I_n z_{m,n}, \quad m = 1, \dots, N_S \quad (3.25)$$

каде што со $z_{m,n}$ се означени генерализирани меѓусебни импеданси помеѓу m -тиот и n -тиот сегмент, кои всушност го претставуваат електромагнетното влијание на n -тиот изворен врз m -тиот тест сегмент. Доколку диференцијалот во (3.24) се замени со конечни разлики:

$$\frac{\partial G_{\phi}(\vec{r}_m, \vec{r}')}{\partial \ell} \approx \frac{G_{\phi}(\vec{r}_{m^-}, \vec{r}') - G_{\phi}(\vec{r}_{m^+}, \vec{r}')}{\Delta \ell_m} \quad (3.26)$$

тогаш за дадена комбинација m -ти и n -ти сегмент, $z_{m,n}$ може да се претстави со:

$$z_{m,n} = \Delta \ell_m j \omega \vec{t}_m \cdot \vec{t}_n \int_{\ell'_n}^{\ell'_{n^+}} \bar{G}_A(\vec{r}_m, \vec{r}') d\ell' + \frac{1}{j\omega} \left[\int_{\ell'_n}^{\ell'_{n+1}} c_n G_{\phi}(\vec{r}_{m^+}, \vec{r}') d\ell' - \int_{\ell'_{n-1}}^{\ell'_n} c_n G_{\phi}(\vec{r}_{m^+}, \vec{r}') d\ell' - \int_{\ell'_n}^{\ell'_{n+1}} c_n G_{\phi}(\vec{r}_{m^-}, \vec{r}') d\ell' + \int_{\ell'_{n-1}}^{\ell'_n} c_n G_{\phi}(\vec{r}_{m^-}, \vec{r}') d\ell' \right] \quad (3.27)$$

при што со \vec{r}_m , \vec{r}_{m^+} и \vec{r}_{m^-} се означени позиции на точките m , m^+ и m^- , со ℓ'_{n-1} , ℓ'_n и ℓ'_{n+1} (со кои се дефинирани границите на интегралите) се означени позиции на централните точки на сегментите со индекси $n-1$, n и $n+1$, а со ℓ'_{n^-} и ℓ'_{n^+} позициите на почетната и крајната точка на n -тиот изворен сегмент.

За понатамошната постапка од интерес е $z_{m,n}$ да го изразиме и во следната симболичка форма, притоа задржувајќи го истиот редослед на елементите како во (3.27) [Grc18a]:

$$z_{m,n} = Z_{m,n}^A + Z_{m^+,n^+}^{\phi} - Z_{m^+,n^-}^{\phi} - Z_{m^-,n^+}^{\phi} + Z_{m^-,n^-}^{\phi} \quad (3.28)$$

Со проширување на постапката за секој m -ти сегмент, се добива систем од N_S линеарни равенки со N_S непознати, изразени во матрична форма:

$$[Z][I] = [V] \quad (3.29)$$

каде $[Z]$ претставува генерализирана матрица на импеданси со која се опишани електромагнетните интеракции помеѓу сегментите со кои е дискретизиран заземјувачот, $[I]$ претставува вектор на непознатите лонгитудинални струи во електродите на заземјувачот, а $[V]$ претставува вектор на ексцитации односно во овој вектор се дефинира побудата на заземјувачот.

При зададена побуда, лонгитудиналните струи во електродите на заземјувачот се определуваат со примена на стандардни постапки за инверзија на матрици:

$$[I] = [Z]^{-1} [V] \quad (3.30)$$

а со тоа е комплетирана постапката за определување на непознатите струи во заземјувачот со примена на МРІЕ и МоМ, кои се основа за понатамошно утврдување параметри кои го карактеризираат однесувањето на заземјувачкиот систем.

3.3 Моделирање на побуда на заземјувачот

На Слика 3.4 се илустрирани два основни начини на побуда на заземјувачкиот систем. Првиот начин на побуда е со паралелно напојување со идеален струен или напонски генератор, Слика 3.4(а), кој со едниот терминал е поврзан во произволна точка на заземјувачот, која може да се наоѓа во отворен крај на сегмент или спојна точка меѓу два или повеќе сегменти, а со другиот терминал е поврзан во неутрална точка во бесконечност, при што се занемарува влијанието на спојните кабли. Овој начин на побуда е карактеристичен во анализи на заземјувачи. Вториот начин е преку сериски поврзан идеален струен или напонски генератор, Слика 3.4 (б), а овој начин на побуда е типичен за антени. Нивното моделирање е претставено преку неколку примери кои се однесуваат на едноставен случај на заземјувач, но постапката е слична и за посложени конфигурации.



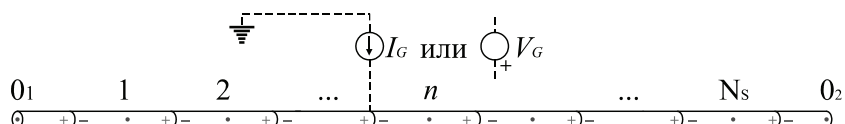
Слика 3.4 Два основни начини на побуда на заземјувачи (превземена од [Grc18b])

а) Паралелна побуда. б) Сериска побуда.

3.3.1 Побуда со паралелни генератори

Иако едниот терминал на паралелниот генератор може теоретски да се поврзе во произволна точка на заземјувачот, дискретизацијата на заземјувачот на конечен број на сегменти налага поврзување на паралелниот генератор или во отворен крај на сегмент или спојна точка меѓу сегменти. Во тој случај, точката во која се поврзува паралелниот генератор може да се совпаѓа само со почетната, средишната или со крајната точка со кои се карактеризира n -ти сегмент (n^- , n или n^+ , соодветно). Во понатамошната постапка ќе се усвои поврзување на паралелниот генератор во точката n^- при побуда во спојница меѓу сегменти и поврзување во точката n при побуда во сегмент со отворен пристап.

На Слика 3.5 е претставен наједноставен случај на заземјувач кој е побуден со паралелен генератор (струен или напонски) во спојна точка меѓу два сегменти, која се совпаѓа со почетната точка на сегментот со индекс n (точка n^-).



Слика 3.5 Паралелна побуда на заземјувач со идеален струен или напонски генератор.

3.3.1.1 Побуда со паралелен струен генератор

Доколку заземјувачот во примерот прикажан на Слика 3.5 се побуди со паралелен струен генератор во точката n^- тогаш изразот (3.29) го добива следниот облик:

$$\begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} & \cdots & z_{1,N_s} \\ z_{2,1} & z_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ z_{N_s,1} & z_{N_s,2} & \cdots & z_{N_s,N_s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_{N_s} \end{bmatrix} = -I_G \begin{bmatrix} z_{1,G} \\ z_{2,G} \\ \vdots \\ z_{N_s,G} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

каде што елементите $z_{m,G}$ од десната матрица се конструираат како [Grc18b]:

$$z_{m,G} = Z_{m^+,n^-}^\Phi - Z_{m^-,n^-}^\Phi, \quad m = 1, 2, \dots, N_s. \quad (3.32)$$

Компонентите Z_{m^+,n^-}^Φ се определуваат преку изразите (3.27) и (3.28), а може да се зачуваат при формирањето на генерализираната матрица на импеданси $[Z]$.

Доколку побудата се приклучи на отворениот крај на сегментот со индекс 0_1 , односно во точката 0_1 , тогаш во елементите $z_{m,G}$ влегува дополнителна компонента која се однесува на магнетниот вектор потенцијал [Grc18b]:

$$z_{m,G} = Z_{m,0_1}^A + Z_{m^+,0_1^+}^\Phi - Z_{m^-,0_1^+}^\Phi, \quad m = 1, 2, \dots, N_s, \quad (3.33)$$

каде $Z_{m,0_1}^A$ се изведува врз база на изразот (3.27), притоа земајќи предвид дека се работи за половина од изворниот сегмент, односно се интегрира од точката “ 0_1 ” до точка “ 0_1^{++} ”:

$$Z_{m,0_1}^A = \Delta \ell_m j \omega \vec{t}_m \cdot \vec{t}_{0_1} \int_{\ell_{0_1}^-}^{\ell_{0_1}^+} \vec{G}_A(\vec{r}_m, \vec{r}') d\ell' \quad (3.34)$$

3.3.1.2 Побуда со паралелен напонски генератор

Доколку заземјувачот во примерот прикажан на Слика 3.5 се побуди со паралелен напонски генератор во точката n^- тогаш изразот (3.29) го добива следниот облик:

$$\begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} & \cdots & z_{1,N_s} & z_{1,G} \\ z_{2,1} & z_{2,2} & & & z_{2,G} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ z_{N_s,1} & & & z_{N_s,N_s} & \vdots \\ z_{G,1} & z_{G,2} & \cdots & \cdots & z_{G,G} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_{N_s} \\ I_{VG} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ V_G \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Во овој случај генерализираната матрица на импеданси се проширува со нови елементи $z_{m,G}$, $z_{G,m}$ и $z_{G,G}$ кои за побуда во почетната точка на сегмент со индекс n се конструираат како [Grc18b]:

$$\begin{aligned} z_{m,G} &= Z_{m^+,n^-}^\Phi - Z_{m^-,n^-}^\Phi, \quad z_{G,m} = Z_{n^-,m^+}^\Phi - Z_{n^-,m^-}^\Phi, \\ z_{G,G} &= Z_{n^-,n^-}^\Phi, \quad m = 1, 2, \dots, N_s. \end{aligned} \quad (3.36)$$

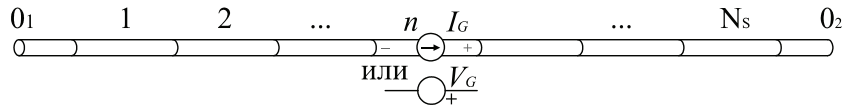
Компонентите Z_{m^+,n^-}^Φ , Z_{n^-,m^+}^Φ и Z_{n^-,n^-}^Φ се определуваат преку изразите (3.27) и (3.28), а може да се зачуваат при формирањето на генерализираната матрица на импеданси $[Z]$.

Доколку побудата се приклучи на отворениот крај на сегментот со индекс 0_1 , тогаш во елементите $z_{m,G}$, $z_{G,m}$ и $z_{G,G}$ влегува дополнителна компонента која се однесува на магнетниот вектор потенцијал $[Grc18b]$:

$$\begin{aligned} z_{m,G} &= Z_{m,0_1}^A + Z_{m^+,0_1^+}^\Phi - Z_{m^-,0_1^+}^\Phi, \quad z_{G,m} = Z_{0_1,m}^A + Z_{0_1^+,m^+}^\Phi - Z_{0_1^+,m^-}^\Phi, \\ z_{G,G} &= Z_{0_1,0_1}^A + Z_{0_1^+,0_1^+}^\Phi, \quad m = 1, 2, \dots, N_s. \end{aligned} \quad (3.37)$$

3.3.2 Побуда со сериски генератори

Моделирањето на сериски генератор во МоМ е значително поедноставно во однос на моделирањето на паралелен генератор. Неговата насока е секогаш претпоставена од почетната точка n^- кон крајната точка n^+ на сегментот со индекс n во кој се поставува генераторот. На Слика 3.6 е претставен наједноставен случај на заземјувач кој е побуден со сериски генератор (струен или напонски) во сегмент со индекс n .



Слика 3.6 Сериска побуда на заземјувач со идеален струен или напонски генератор.

3.3.2.1 Побуда со сериски струен генератор

За побуда со сериски струен генератор, изразот (3.29) го добива следниот облик:

$$\begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} & \cdots & z_{1,n} & \cdots & z_{1,N_s} \\ z_{2,1} & z_{2,2} & & z_{2,n} & \cdots & z_{2,N_s} \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ z_{N_s,1} & z_{N_s,2} & \cdots & z_{N_s,n} & \cdots & z_{N_s,N_s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \\ \vdots \\ I_{N_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ I_G \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Од (3.38) може да се забележи дека во генерализираната матрица на импеданси, сите елементи $z_{n,k}$, $k = \{1, \dots, N_s\}$, кои се однесуваат на влијанието останатите сегменти врз n -тиот сегмент (во кој е поставен струјниот генератор) се изедначени со 0, освен елементот $z_{n,n}$ кој е изедначен со 1, а на елементот во n -тиот ред од последната матрица му се доделува вредноста на струјата од генераторот I_G .

3.3.2.2 Побуда со сериски напонски генератор

За побуда со сериски напонски генератор, изразот (3.29) го добива следниот облик:

$$\begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} & \cdots & z_{1,n} & \cdots & z_{1,N_s} \\ z_{2,1} & z_{2,2} & & z_{2,n} & \cdots & z_{2,N_s} \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ z_{n,1} & z_{n,2} & & z_{n,n} & & z_{n,N_s} \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ z_{N_s,1} & z_{N_s,2} & \cdots & z_{N_s,n} & \cdots & z_{N_s,N_s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \\ \vdots \\ I_{N_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ V_G \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Во овој случај генерализираната матрица на импеданси не се модифицира, а на елементот во n -тиот ред од последната матрица му се доделува вредноста на напонот на генераторот V_G .

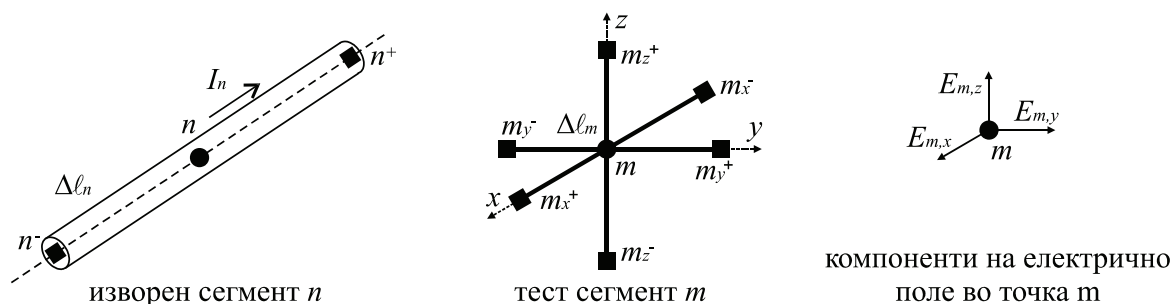
3.4 Пресметка на електрично поле, напони, потенцијали во околина на заземјувачот и импеданса на заземјувачот кон земја

3.4.1 Определување на компоненти на векторот на јачина на електрично поле во Декартов координатен систем

Од равенките (3.24) и (3.25) може да се воочи дека постои пропорционална врска на меѓусебната импеданса $z_{m,n}$ и тангенцијалната компонента на електричното поле во точката m на m -тиот сегмент, кое е генерирано од лонгитудинална струја во n -тиот сегмент:

$$\vec{t}_m \cdot \vec{E}^i(\vec{r}_m) = z_{m,n} I_n / \Delta \ell_m \quad (3.40)$$

Оваа релација може да се примени и генерализира за определување на x -, y - и z -компонентите на векторот на јачина на електрично поле во било која точка m во просторот, со помош на x -, y - или z - ориентиран тест сегмент со должина $\Delta \ell_m$, чиј центар е во точката m како што е прикажано на Слика 3.7.



Слика 3.7 Приказ на изворен и тест сегмент при пресметка на електрично поле

Најпрво се определуваат меѓусебните импеданси $z_{mx,n}$, $z_{my,n}$ и $z_{mz,n}$ на секој изворен сегмент n од заземјувачот, кон секој x -, y - или z - ориентиран тест сегмент, следејќи ја постапката опишана во претходното поглавје. Потоа, компонентите на векторот на јачина на електрично поле се пресметуваат како [Ada73]:

$$E_u(\vec{r}_m) = \sum_{n=1}^{N_S} z_{mu,n} I_n / \Delta \ell_m, \quad u = x, y, z \quad (3.41)$$

За поголема точност на постапката, треба да се усвои многу мала должина на тест сегментот, односно $\Delta \ell_m \rightarrow 0 m$. Сепак, со цел да се одржи нумеричка стабилност, спроведените анализи покажуваат дека висока точност на пресметаното електрично поле може да се постигне за $\Delta \ell_m = 1 mm$.

3.4.2 Пресметување напон помеѓу две точки во околина на заземјувачот

По дефиниција, напонот помеѓу две точки А и В во временски променливо поле се определува преку интегрирање на векторот на јачина на електричното поле по однапред дефинирана патека $\ell_{A,B}$ која ги поврзува точките.

$$U_{A,B} = \int_{\ell_{A,B}} \vec{E} d\vec{\ell} \quad (3.42)$$

Меѓутоа, доколку електричното поле се формулира преку МПЕ, тогаш напонот може да се пресмета и како [Grc96b], [Ram93]:

$$U_{A,B} = (\Phi_A - \Phi_B) + j\omega \int_{\ell_{A,B}} \vec{A} d\vec{\ell} = U_{\Phi_{A,B}} + U_{\ell_{A,B}} \quad (3.43)$$

каде што првата компонента $U_{\Phi_{AB}}$ се однесува на разликата на електричните скалар потенцијали во крајните точки на патеката ℓ_{AB} е еднозначно определена со позициите на крајните точки, а втората компонента $U_{\ell_{AB}}$ е резултат на постоењето временски променливо магнетно поле во околина на заземјувачот и е зависна од изборот на патеката. Оваа компонента на напонот и електричниот скалар потенцијал во една од крајните точки можат апроксимативно да се пресметаат како:

$$\Phi_A(\vec{r}) \approx \frac{1}{j\omega} \sum_{n=1}^{N_S} I_n \left(\int_{\ell'_{n-1}}^{\ell'_n} c_n G_\Phi(\vec{r}_A, \vec{r}') d\ell' - \int_{\ell'_n}^{\ell'_{n+1}} c_n G_\Phi(\vec{r}_A, \vec{r}') d\ell' \right) \quad (3.44)$$

$$U_{\ell_{AB}} \approx j\omega \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{n=1}^{N_S} I_n \Delta\ell_p \int_{\ell'_{n-}}^{\ell'_{n+}} \vec{t}_p \cdot \vec{t}_n \bar{G}_A(\vec{r}_p, \vec{r}') d\ell' \quad (3.45)$$

каде со N_p е означен бројот на сегменти на кои е дискретизирана патеката ℓ_{AB} , со \vec{r}_p , \vec{t}_p и $\Delta\ell_p$ се означени позицијата на централната точка, насоката и должината на секој сегмент од таа патека, со ℓ'_{n-1} , ℓ'_n и ℓ'_{n+1} (со кои се дефинирани границите на интегралите) се означени позиции на централните точки на сегментите со индекси $n-1$, n и $n+1$, а со ℓ'_{n-} и ℓ'_{n+} позициите на почетната и крајната точка на n -тиот изворен сегмент.

Често пати поради еднозначност на пресметаните напони, компонентата $U_{\ell_{AB}}$ се занемарува. Ваквиот пристап воведува одреден степен на грешка која резултира со преценување на пресметаните напони [Grc96a], а истата станува незначителна само при анализи на многу ниски фреквенции, односно при $f \rightarrow 0$ Hz.

3.4.3 Пресметување на импеданса на заземјувачот кон земја

Импедансата кон земја зависи од местото на побуда, а се определува како влезна импеданса на паралелно напојување. Начинот на пресметка на импедансата кон земја се разликува за паралелно струјно и паралелно напонско напојување.

Во случај на паралелно струјно напојување, импедансата кон земја е изразена како количник на напонот во точката во која се поврзува напојувањето (во однос на точка со референтен потенцијал) и струјата што ја инјектира струјниот генератор, кога сите останати генератори (доколку ги има приклучени на заземјувачот) се отстранети. Притоа се применуваат повеќе пристапи кон определување на напонот на точката во која се поврзува напојувањето, во однос на референтна точка:

- Наједноставен пристап е изразување само преку електричниот скалар потенцијал во точката на поврзување, со помош на изразот (3.44). Со тоа се претпоставува дека референтната точка е во бесконечност (на нулти потенцијал), а се занемарува влијанието на променливото магнетно поле, при што добиеното решение е еднозначно определено. Ваквиот пристап е општо прифатен за пресметка на импедансата кон земја на заземјувачот.
- Како напон помеѓу точката на поврзување и референтна точка која е дефинирана со мерно коло, притоа усвојувајќи патека за интегрирање на електричното поле која го следи обликот на мерното коло. Напонот се определува со изразот (3.43), а овој пристап може да се користи при верификација со експериментални резултати или при анализи во кои се моделира мерното коло [Ols15], [Sun19];

Следејќи ја оваа постапка, импедансите кон земја за точките n^- и 0_1 во примерот на Слика 3.5 се пресметуваат како:

$$Z_{n^-} = \frac{U_{n^-,ref}}{I_G} \approx \frac{\Phi_{n^-}}{I_G} \Bigg|_{\substack{\text{останати генератори} \\ \text{отстранети}}} \quad Z_{0_1} = \frac{U_{0_1,ref}}{I_G} \approx \frac{\Phi_{0_1}}{I_G} \Bigg|_{\substack{\text{останати генератори} \\ \text{отстранети}}} \quad (3.46)$$

Во случај на паралелно напојување со идеален напонски генератор, импедансата кон земја е изразена како количник на напонот на генераторот V_G и струјата што тече низ генераторот I_{V_G} , кога сите останати генератори се отстранети. Следејќи ја оваа постапка, импедансите кон земја за точките n^- и 0_1 во примерот на Слика 3.5 се пресметуваат како:

$$Z_{n^-} = \frac{V_G}{I_{V_G}} \Bigg|_{\substack{\text{останати генератори} \\ \text{отстранети}}} \quad Z_{0_1} = \frac{V_G}{I_{V_G}} \Bigg|_{\substack{\text{останати генератори} \\ \text{отстранети}}} \quad (3.47)$$

Вака добиените резултати се идентични со резултатите кои се добиваат при побуда со паралелен струен генератор, притоа усвојувајќи го наједноставниот пристап за определување на напонот во точката на поврзување, преку електричниот скалар потенцијал.

Глава 4

Гринови функции за потенцијали во слоевита средина

Магнетниот вектор потенцијал од електричен дипол во хомоген бесконечен простор е секогаш со насока на диполот, независно од неговата ориентација. Но во случај на слоевита средина, аксијалната компонента на магнетниот вектор потенцијал не е доволна за комплетно изразување на електричното и магнетното поле во просторот. Со цел исполнување на граничните услови (2.12)-(2.15) за електрично и магнетно поле на разделната површина меѓу два слоја, Сомерфелд [Som49] предлага дополнителна компонента на магнетниот вектор потенцијал, ориентирана нормално на хоризонталниот електричен дипол, односно во правец на z - оската, Слика 4.1(а). Овој избор на потенцијали е познат како Сомерфелдов, чија дијагична Гринова функција за магнетниот вектор потенцијал е изразена како [Mic87]:

$$\bar{G}_A^{som} = (\hat{x}\hat{x}' + \hat{y}\hat{y}')G_A^{xx} + \hat{z}\hat{x}'G_A^{zx} + \hat{z}\hat{y}'G_A^{zy} + \hat{z}\hat{z}'G_A^{zz} \quad (4.1)$$

Меѓутоа Сомерфелдовиот избор на вектор потенцијали не е единствен, бидејќи според Ертеза и Парк [Ert69] задоволување на истите гранични услови може да се постигне и доколку на аксијалната компонента на вектор потенцијалот од x - ориентиран ХЕД и се придружи y - ориентиран вектор потенцијал, Слика 4.1(б). Дијагичната Гринова функција за магнетниот вектор потенцијал, за овој избор на потенцијали е изразена како [Mic87]:

$$\bar{G}_A^{ert} = \hat{x}\hat{x}'G_A^{xx} + \hat{y}\hat{y}'G_A^{yy} + (\hat{x}\hat{y}' + \hat{y}\hat{x}')G_A^{xy} + \hat{z}\hat{z}'G_A^{zz} \quad (4.2)$$

со напомена дека со исклучок на G_A^{zz} , Гриновите функции за останатите компоненти на магнетниот вектор потенцијал се разликуваат. Исто така треба да се истакне дека (4.2) важи само за извор и точка на набљудување во ист слој.

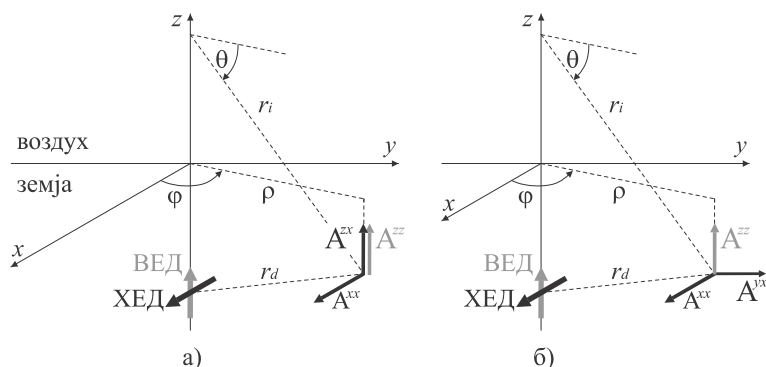
Од горенаведеното следува дека потенцијалите во МРПЕ не се еднозначно определени. Всушност, доколку се дефинираат две големини \vec{A}' и Φ' кои се изразени како:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla f \quad (4.3)$$

$$\Phi' = \Phi + j\omega f \quad (4.4)$$

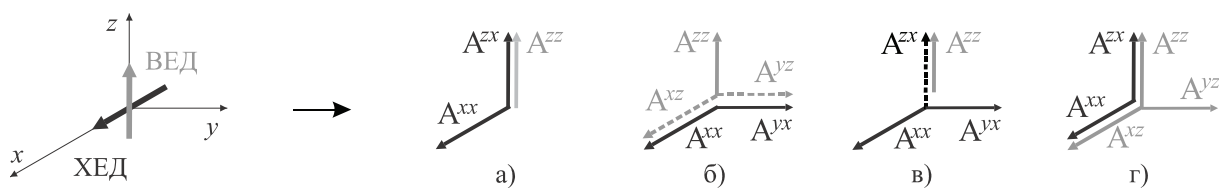
каде f е скаларна функција, и истите се заменат со магнетниот вектор потенцијал \vec{A} и електричниот скалар потенцијал Φ во изразот (2.22), тогаш електричното поле добиено со изразот (2.22) и векторот на магнетна индукција, изразен со (2.20), остануваат

непроменети [Gay97]. Ако се земаат предвид изразите (2.23) и (2.24), следува дека електричното поле во слоевита средина може да се изрази преку повеќе различни формулации на Гринови функции за потенцијали во МРПЕ.



Слика 4.1 Компоненти на магнетен вектор потенцијал од електричен дипол
 за: а) Сомерфелдов избор на потенцијали б) Избор предложен од Ертеза и Парк.

Иако бројот на можни варијанти на магнетниот вектор потенцијал е теоретски неограничен (поради можноста за произволен избор на скаларната функција f), сепак четири формулации овозможуваат најоптимално изразување на електричното поле во слоевита средина: традиционалната формулација на потенцијали во МРПЕ, која произлегува директно од Сомерфелдовиот избор на вектор потенцијали; и три алтернативни формулации означени како А, В и С, кои се предложени и подетално анализирани во [Mic90a]. Притоа, формулациите А и В произлегуваат од изборот на вектор потенцијали предложен од Ертеза и Парк [Ert69], а формулација С се базира на Сомерфелдовиот избор на вектор потенцијали. Компонентите на магнетниот вектор потенцијал за четирите формулации на потенцијали се прикажани на Слика 4.2 (со испрекинатата линија се прикажани компоненти кои постојат само кога изворот и точката на набљудување се во различни слоеви).



Слика 4.2 Компоненти на магнетен вектор потенцијал од ХЕД и ВЕД за различни формулации на потенцијали во МРПЕ: а) Традиционална б) А, в) В, г) С формулација.

Примената на различните формулации на потенцијали е анализирана кај антени, печатени електрични кола и области поврзани со електромагнетна компатибилност [Vra02], [Enx05], но досега не е спроведена поопширна анализа за нивна примена кај заземјувачи. Притоа треба да се нагласи дека доменот на параметри во анализи на заземјувачи значително се разликува од претходно споменатите области: кај

заземјувачи од особен интерес е опсегот на ниските фреквенции и тоа почнувајќи од 0 Hz па вообичаено до 10 MHz; анализите се спроведуваат во спроводна средина; заземјувачите често се изведуваат со комбинација на хоризонтални и вертикални електроди со што анализираните проблеми вообичаено се тридимензионални, параметрите од интерес кај анализи на заземјувачи (импеданса во однос на далечна земја, потенцијали на заземјувачот и во непосредна близина, напони меѓу различни точки на заземјувачот итн.) се разликуваат од параметрите од интерес во другите споменати области.

Во понатамошниот текст се претставени Гриновите функции за потенцијали во просторен домен, кои се изразени преку генерализираните коефициенти на рефлексija и пропуштање на електромагнетни бранови во слоевита средина. Оваа форма, покрај тоа што е директно применлива во електромагнетниот модел, исто така претставува основа за изведување на нискофреквентните апроксимации на Гриновите функции кои се користат во анализи на заземјувачи. Поради комплетност, претставени се основните параметри со кои се опишува простирање на електромагнетни бранови во слоевита средина, врз основа на кои се изразуваат Гриновите функции за потенцијали во МРПЕ, а претставена е и постапката за изведување на алтернативните формулации на Гринови функции (А, В и С формулации) врз основа на Сомерфелдовиот избор на вектор потенцијали и изборот предложен од Ертеза и Парк.

Според сознанијата на авторот, за прв пат во оваа дисертација е претставен комплетниот сет на Гринови функции за четирите карактеристични формулации на потенцијали во просторен домен, за генерален случај на извори и точки на набљудување во слоевита средина, а воедно за прв пат ќе бидат претставени и нивните нискофреквентни апроксимации за анализа на заземјувачи во хомогена и двослојна земја (за А, В и С формулација).

4.1 Параметри со кои се опишува простирање на електромагнетни бранови во слоевита средина

Кога средината во која се наоѓа изворот е линеарна, изотропна и неограничена, Гриновите функции за потенцијали се изразуваат преку скаларната Гринова функција за сферен бран, чие простирање се опишува со равенката:

$$g_d^n(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-jk_n|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (4.5)$$

каде n е индекс на средината во која се простира бранот, а d означува директен бран. Оваа равенка може да се изрази преку два познати интегрални идентитети, тоа се Вејловиот (4.6) и Сомерфелдовиот идентитет (4.7) [Som49]:

$$\frac{e^{-jk_n|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jk_{n,z}|z-z'|}}{jk_{n,z}} e^{-j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (4.6)$$

$$\frac{e^{-jk_n|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-jk_{n,z}|z-z'|}}{jk_{n,z}} J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \quad (4.7)$$

чија што физичка интерпретација е важна за изведување на Гриновите функции во слоевита средина. Вејловиот идентитет го изразува сферниот бран преку бесконечна сума на рамни бранови и е од особена важност при дефинирањето на коефициентите на рефлексија и пропуштање на сферни бранови на разделните површини меѓу два соседни слоја. Сомерфелдовиот идентитет го изразува сферниот бран преку бесконечна сума на цилиндрични бранови во насока на оската ρ и рамни бранови во насока на оската z , во цилиндричен координатен систем. Во горните изрази, параметрите k_n и $k_{n,z}$ се бранов број и z - компонента на брановиот број за средина со индекс n , изразени како:

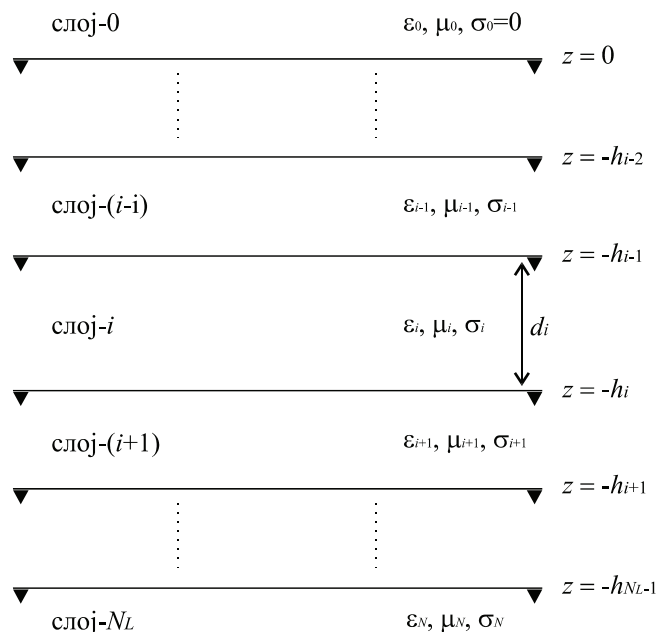
$$k_n = \sqrt{-j\omega\mu_n\sigma_n}, \quad \sigma_n = \sigma_n + j\omega\varepsilon_n \quad (4.8)$$

$$k_{n,z}^2 = k_n^2 - k_\rho^2 \quad (4.9)$$

каде k_ρ претставува радијален бранов број, а σ_n е комплексна спроводност на средината со индекс n . Притоа треба да се земе предвид дека $\text{Im}\{k_n\} \leq 0$ и $\text{Im}\{k_{n,z}\} \leq 0$.

Земјата е слоевита средина која е најчесто со нехомогена структура, а при одредени услови и со фреквентно зависни и нелинеарни карактеристики. Со цел да се олесни моделирање на електромагнетните процеси за реални услови, се врши поедноставување на нејзините карактеристики. Моделите на земја со хоризонтални паралелни слоеви добро ја претставуваат земјата во практични анализи и пресметки, па ваквата апроксимација е широко прифатена во моделирање на заземјувачи [Daw79a], [Daw94], [IEEE80] но и во други области како геофизика, моделирање на антени итн.

Во применетата постапка, слоевитата средина е претставена преку два или повеќе паралелни слоја кои се меѓусебно разделени со рамни хоризонтални разделни површини. Словите се неограничени во насока на x - и y - оската, а најгорниот слој со карактеристики на вакуум и најдолниот слој со карактеристики на земја се неограничени и во насока на z - оската. Пример за една таква слоевита средина е илустриран Слика 4.3. За секој слој со индекс n и дебелина d_n , се претпоставени линеарни, фреквенциски независни и хомогени карактеристики, дефинирани со пермеабилност μ_n , пермитивност ε_n и специфична електрична спроводност σ_n . Разделната површина меѓу два соседни слоја со индекси n и $n+1$, се наоѓа на вертикална оддалеченост h_n од координатниот почеток на z - оската, кој е усвоен на разделната површина со најгорниот слој, кој е со карактеристики на вакуум. Во понатамошниот текст, слојот со извор е означен со индекс i , а слојот во кој е точката на набљудување означен е со индекс m .



Слика 4.3 Приказ на параметри преку кои се опишува слоевита средина.

Со цел да се воспостави општо решение на за електричното поле во слоевита средина, најпрво е неопходно да се дефинираат некои од основните параметри кои се однесуваат на рефлексија и пропуштање на полето на разделните површини меѓу два соседни слоја. За таа цел разгледан е рамен бран кој упаѓа на разделната површина помеѓу два слоја со индекси n и $n\pm 1$, од страна на слојот n . Овој бран има делумна рефлексија во слојот n , а делумно се пропушта во слојот $n\pm 1$. Амплитудите на рефлектираниот и пропуштениот бран зависат од карактеристиките на двете средини, поларизацијата на упадниот бран (ТЕ или ТМ) и неговата фреквенција, а истите можат да се изразат преку Френеловите коефициенти на рефлексија и пропуштање [Che95]:

$$R_{n,n\pm 1}^{TE} = \frac{\mu_{n\pm 1}k_{n,z} - \mu_n k_{n\pm 1,z}}{\mu_{n\pm 1}k_{n,z} + \mu_n k_{n\pm 1,z}} \quad (4.10)$$

$$R_{n,n\pm 1}^{TM} = \frac{\underline{\sigma}_{n\pm 1}k_{n,z} - \underline{\sigma}_n k_{n\pm 1,z}}{\underline{\sigma}_{n\pm 1}k_{n,z} + \underline{\sigma}_n k_{n\pm 1,z}} \quad (4.11)$$

$$T_{n,n\pm 1}^{TE} = \frac{2\mu_{n\pm 1}k_{n,z}}{\mu_{n\pm 1}k_{n,z} + \mu_n k_{n\pm 1,z}} \quad (4.12)$$

$$T_{n,n\pm 1}^{TM} = \frac{2\underline{\sigma}_{n\pm 1}k_{n,z}}{\underline{\sigma}_{n\pm 1}k_{n,z} + \underline{\sigma}_n k_{n\pm 1,z}} \quad (4.13)$$

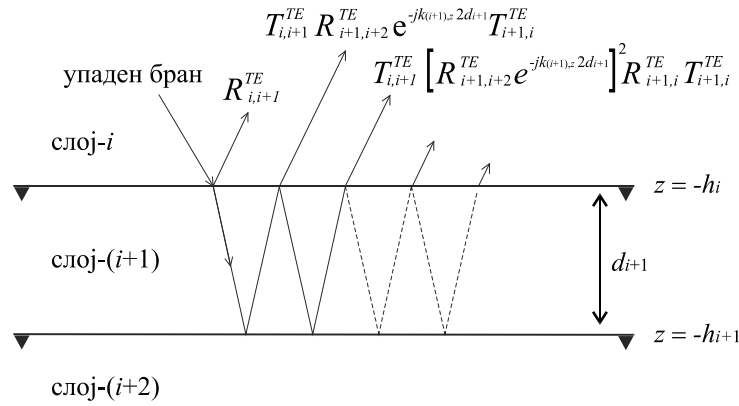
каде што $R_{n,n\pm 1}^{TE, TM}$ е сооднос на амплитудата на рефлектираниот бран, во однос на упадниот бран, а $T_{n,n\pm 1}^{TE, TM}$ е сооднос на амплитудата на пропуштениот бран во однос на упадниот бран, на разделната површина помеѓу слоевите со индекси n и $n\pm 1$.

Од граничните услови за тангенцијалните компоненти на векторите на јачина на електрично и магнетно поле, на разделната средина меѓу слоевите n и $n\pm 1$, дадени со изразите (2.12) и (2.13), произлегува дека:

$$R_{n,n\pm 1}^{TE, TM} = -R_{n\pm 1,n}^{TE, TM} \quad (4.14)$$

$$T_{n,n\pm 1}^{TE, TM} = 1 + R_{n,n\pm 1}^{TE, TM} \quad (4.15)$$

Во слоевата средина со повеќе разделни површини, настануваат повеќекратни рефлексии и пропуштања. Концептот на повеќекратни рефлексии, наједноставно може да се опише преку пример со рамен бран кој се простира во слоевата средина со две разделни површини, претставен на Слика 4.4.



Слика 4.4 Приказ на повеќекратни рефлексии (прилагодена според [Kin05]).

Во било кој слој, резултантниот бран може да се изрази преку сума на нагорно и надолно насочени бранови. Со генерализираниот коефициент на рефлексija $\tilde{R}_{n,n\pm 1}^{TE, TM}$ е дефиниран соодносот на амплитудите на брановите со ТЕ или ТМ поларизација, со нагорно (долен индекс “ $n,n+1$ ”) и надолно (долен индекс “ $n,n-1$ ”) простирање непосредно до самата разделна површина во средината n , меѓу два соседни слоја n и $n\pm 1$ [Che95]:

$$\tilde{R}_{n,n+1}^{TE, TM} = \frac{R_{n,n+1}^{TE, TM} + \tilde{R}_{n+1,n+2}^{TE, TM} e^{-jk_{n+1,z} 2d_{n+1}}}{1 + R_{n,n+1}^{TE, TM} \tilde{R}_{n+1,n+2}^{TE, TM} e^{-jk_{n+1,z} 2d_{n+1}}} \quad (4.16)$$

$$\tilde{R}_{n,n-1}^{TE, TM} = \frac{R_{n,n-1}^{TE, TM} + \tilde{R}_{n-1,n-2}^{TE, TM} e^{-jk_{n-1,z} 2d_{n-1}}}{1 + R_{n,n-1}^{TE, TM} \tilde{R}_{n-1,n-2}^{TE, TM} e^{-jk_{n-1,z} 2d_{n-1}}} \quad (4.17)$$

Тие можат да се добијат по итеративна постапка, почнувајќи од најдолниот слој со индекс N_L за $\tilde{R}_{n,n+1}^{TE, TM}$, односно од најгорниот слој со индекс “0” (воздух) за добивање на $\tilde{R}_{n,n-1}^{TE, TM}$, притоа усвојувајќи ги следните почетни вредности, $\tilde{R}_{N_L, N_L+1}^{TE, TM} = 0$ и $\tilde{R}_{0,-1}^{TE, TM} = 0$ бидејќи најдолниот и најгорниот слој се неограничени во насока на z - оската.

Ако се земе предвид дека бранот генериран од секој извор, вклучувајќи и точкаст извор може да се претстави преку сума на рамни бранови, со помош на идентитетите (4.6) и (4.7), тогаш преку принципот на рефлексија, пропуштање и суперпозиција на рамни бранови може да се опише полето кое резултат на произволен извор во слоевита средина.

Во случај кога изворот и точката на набљудување се во ист слој во слоевита средина, ($m = i$), покрај директната компонента на бранот која има облик на сферен бран во хомогена средина, постојат две дополнителни компоненти кои се однесуваат на надолно и нагорно насочени бранови во слојот- i , а кои се резултат на повеќекратни рефлексии од разделните површини помеѓу сите слоеви во системот. Нивните амплитуди за било која вертикална позиција на извор и точка на набљудување, можат да се изразат преку коефициентите $A_i^{TE/TM}$, $B_i^{TE/TM}$, $C_i^{TE/TM}$ и $D_i^{TE/TM}$ (во понатамошниот текст А-Д коефициенти). Тие се функција од карактеристиките на слоевитата средина, вертикалната позицијата на изворот во однос на z - оската и поларизацијата на бранот (ТЕ или ТМ), а се изразени преку генерализираните коефициенти на рефлексија (4.16) (4.17) и параметрите со кои се опишува слоевита средина, претставени на Слика 4.3:

$$A_i^{TE/TM} = \tilde{R}_{i,i-1}^{TE/TM} e^{-jk_{i,z}(d_i-(z'+h_i))} \left[e^{-jk_{i,z}(d_i-(z'+h_i))} + \tilde{R}_{i,i+1}^{TE/TM} e^{-jk_{i,z}(d_i+(z'+h_i))} \right] \tilde{M}_i^{TE/TM} \quad (4.18)$$

$$B_i^{TE/TM} = \tilde{R}_{i,i-1}^{TE/TM} e^{-jk_{i,z}(d_i-(z'+h_i))} \left[e^{-jk_{i,z}(d_i-(z'+h_i))} - \tilde{R}_{i,i+1}^{TE/TM} e^{-jk_{i,z}(d_i+(z'+h_i))} \right] \tilde{M}_i^{TE/TM} \quad (4.19)$$

$$C_i^{TE/TM} = \tilde{R}_{i,i+1}^{TE/TM} e^{-jk_{i,z}(z'+h_i)} \left[e^{-jk_{i,z}(z'+h_i)} + \tilde{R}_{i,i-1}^{TE/TM} e^{-jk_{i,z}(2d_i-(z'+h_i))} \right] \tilde{M}_i^{TE/TM} \quad (4.20)$$

$$D_i^{TE/TM} = \tilde{R}_{i,i+1}^{TE/TM} e^{-jk_{i,z}(z'+h_i)} \left[-e^{-jk_{i,z}(z'+h_i)} + \tilde{R}_{i,i-1}^{TE/TM} e^{-jk_{i,z}(2d_i-(z'+h_i))} \right] \tilde{M}_i^{TE/TM} \quad (4.21)$$

$$\tilde{M}_i^{TE/TM} = [1 - \tilde{R}_{i,i-1}^{TE/TM} \tilde{R}_{i,i+1}^{TE/TM} e^{-jk_{i,z} 2d_i}]^{-1} \quad (4.22)$$

Кога изворот и точката на набљудување се во различен слој, ($m \neq i$), полето е изразено преку амплитудите $\tilde{A}_{i,m}^{TE, TM \pm}$ и $\tilde{C}_{i,m}^{TE, TM \pm}$ кои во случај на нагорно насочен бран, за ($m < i$), се означени со горен индекс “+”, а во случај на надолно насочен бран, за ($m > i$), се означени со горен индекс “-”. Овие амплитуди се изразени преку генерализираните коефициенти на рефлексија и пропуштање [Che95], [Tan05]:

- кога точката на набљудување е во слој над слојот со извор ($m < i$):

$$\tilde{A}_{i,m}^{TM/TE+} = \tilde{T}_{i,m}^{TM/TE+} \tilde{M}_i^{TM/TE} \left[e^{jk_{i,z}(h_{i-1}+z')} + \tilde{R}_{i,i+1}^{TM/TE} e^{-jk_{i,z}(2h_i+z'-h_{i-1})} \right] \quad (4.23)$$

$$\tilde{C}_{i,m}^{TM/TE+} = \tilde{T}_{i,m}^{TM/TE+} \tilde{M}_i^{TM/TE} \left[e^{jk_{i,z}(h_{i-1}+z')} - \tilde{R}_{i,i+1}^{TM/TE} e^{-jk_{i,z}(2h_i+z'-h_{i-1})} \right] \quad (4.24)$$

$$\tilde{T}_{i,m}^{TM/TE+} = \prod_{n=i}^{m+1} S_{n,n-1}^{TM/TE+} \Theta_n \quad (4.25)$$

$$S_{n,n-1}^{TM/TE+} = \frac{T_{n,n-1}^{TM/TE}}{1 + R_{n,n-1}^{TM/TE} \tilde{R}_{n-1,n-2}^{TM/TE} e^{-2jk_{n-1,z}(h_{n-1}-h_{n-2})}} \quad (4.26)$$

- кога точката на набљудување е во слој под слојот со извор ($m > i$):

$$\tilde{A}_{i,m}^{TM/TE-} = \tilde{T}_{i,m}^{TM/TE-} \tilde{M}_i^{TM/TE} \left[e^{-jk_{i,z}(h_i+z')} + \tilde{R}_{i,i-1}^{TM/TE} e^{jk_{i,z}(2h_{i-1}+z'-h_i)} \right] \quad (4.27)$$

$$\tilde{C}_{i,m}^{TM/TE-} = \tilde{T}_{i,m}^{TM/TE-} \tilde{M}_i^{TM/TE} \left[e^{-jk_{i,z}(h_i+z')} - \tilde{R}_{i,i-1}^{TM/TE} e^{jk_{i,z}(2h_{i-1}+z'-h_i)} \right] \quad (4.28)$$

$$\tilde{T}_{i,m}^{TM/TE-} = \prod_{n=i}^{m-1} S_{n,n+1}^{TM/TE-} \Theta_n \quad (4.29)$$

$$S_{n,n+1}^{TM/TE-} = \frac{T_{n,n+1}^{TM/TE}}{1 + R_{n,n+1}^{TM/TE} \tilde{R}_{n+1,n+2}^{TM/TE} e^{-2jk_{n+1,z}(h_{n+1}-h_n)}} \quad (4.30)$$

И во двата случаи ($m < i$) и ($m > i$) параметарот Θ_n се определува како:

$$\Theta_n = \begin{cases} 1 & , n = i \\ e^{-jk_{n,z}(h_n-h_{n-1})} & , n \neq i \end{cases} \quad (4.31)$$

4.2 Гринови функции за потенцијали во МРІЕ за слоевита средина

Претставени се Гриновите функции во просторен домен за четири формулации на потенцијали во МРІЕ. Според конститутивниот избор на потенцијали, формулациите се одделно третирали како:

- формулации базирани на Сомерфелдов избор на вектор потенцијали [Som49],
- формулации базирани на избор на вектор потенцијали од Ертеза и Парк [Ert69].

Зависно од слојот во кој се наоѓа точката со извор, со индекс i , и слојот во кој се наоѓа точката на набљудување, со индекс m , третирали се три различни случаи:

- кога изворот и точката на набљудување се во ист слој, тогаш $m = i$;
- кога полето се пресметува во слој над слојот со извор, тогаш $i > m$ и $z > z'$;
- кога полето се пресметува во слој под слојот со извор, тогаш $i < m$ и $z < z'$.

4.2.1 Формулации базирани на Сомерфелдов избор на потенцијали

Традиционалната формулација на потенцијали во МРІЕ произлегува од Сомерфелдовиот избор на вектор потенцијали од електричен дипол [Som49]. Дијадиичната Гринова функција за магнетниот вектор потенцијал е идентична со дијадиичната Гринова функција за Сомерфелдов избор на потенцијали, која во матрична форма е изразена како [Mic90a]:

$$\bar{\bar{G}}_A^{som} = \begin{bmatrix} G_A^{xx} & 0 & 0 \\ 0 & G_A^{yy} & 0 \\ G_A^{zx} & G_A^{zy} & G_A^{zz} \end{bmatrix} \quad G_\phi = \begin{cases} G_\phi^h & \text{за ХЕД} \\ G_\phi^v & \text{за ВЕД} \end{cases} \quad (4.32)$$

Дијадиичната Гринова функција во (4.32) е изразена како суперпозиција на вектор потенцијалите од x - и y - ориентиран ХЕД и еден z - ориентиран ВЕД, при што за секој член во матрицата, првиот горен индекс се однесува на компонента на вектор потенцијалот, а вториот се однесува на ориентација на изворот.

Во слоевита средина не постои единствена Гринова функција за електричен скалар потенцијал G_ϕ која ја задоволува релацијата (2.26) за дијадиичната Гринова функција $\bar{\bar{G}}_A^{som}$ во (4.32). Всушност, од овој избор на вектор потенцијали произлегуваат две различни Гринови функции за електричниот скалар потенцијал, една која се однесува на хоризонтален, G_ϕ^h , а друга на вертикален електричен дипол, G_ϕ^v . Постоенето на различни Гринови функции за електричниот скалар потенцијал од ХЕД и ВЕД ја отежнува примената на традиционалната формулација за анализа на структури кои водат и хоризонтални и вертикални струи [Gay97], [Dur95].

Пристапот кој го предлагаат Михалски и Ченг [Mic90a] за поедноставување на примената на МРИЕ за анализа на структури со произволен облик, предвидува воведување на произволна комбинација на скаларна и векторска функција, K_ϕ и \vec{P} соодветно, кои ја задоволуваат релацијата (4.33), при што $\bar{\bar{G}}_A$ може да се замени со $\bar{\bar{G}}_A^{som}$ од (4.1) или $\bar{\bar{G}}_A^{ert}$ од (4.2).

$$\frac{j\omega}{k_m^2} \nabla \cdot \bar{\bar{G}}_A = \frac{1}{j\omega} \nabla' K_\phi + j\omega \vec{P} \quad (4.33)$$

Доколку векторската функција \vec{P} се префрли на левата страна на изразот (4.33) и се дефинира модифицирана дијадична Гринава функција $\bar{\bar{K}}_A$:

$$\bar{\bar{K}}_A = \bar{\bar{G}}_A + \nabla \vec{P} \quad (4.34)$$

тогаш се добива релација меѓу $\bar{\bar{K}}_A$ и K_ϕ со облик сличен на (2.26):

$$\frac{j\omega}{k_m^2} \nabla \cdot \bar{\bar{K}}_A = \frac{1}{j\omega} \nabla' K_\phi \quad (4.35)$$

Доколку во релацијата (4.33) се усвои $\bar{\bar{G}}_A = \bar{\bar{G}}_A^{som}$, за скаларната функција се усвои $K_\phi = G_\phi^h$, а за векторската функција \vec{P} се усвои само z -компонента т.е. $P_x = P_y = 0$ и $P_z \neq 0$ при што:

$$P_z = \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial z'} (G_\phi^h - G_\phi^v) \quad (4.36)$$

тогаш се добива познатата С формулација на потенцијали во МРИЕ [Mic90a], чија дијадична Гринава функција за магнетен вектор потенцијал е изразена како:

$$\bar{\bar{K}}_A^c = \begin{bmatrix} G_A^{xx} & 0 & K_A^{c,xz} \\ 0 & G_A^{yy} & K_A^{c,yz} \\ G_A^{zx} & G_A^{zy} & K_A^{c,zz} \end{bmatrix} \quad K_\phi^c = G_\phi^h \text{ за ХЕД и ВЕД} \quad (4.37)$$

Елементите во првите две колони на матриците (4.37) и (4.32) се идентични. Во третата колона се додаваат две модифицирани Гринови функции за магнетен вектор потенцијал, кои претставуваат хоризонтални компоненти на магнетниот вектор потенцијал од ВЕД, $K_A^{c,xz}$ и $K_A^{c,yz}$, а Гриновата функција G_A^{zz} се заменува со $K_A^{c,zz}$.

Гриновите функции за компонентите на магнетниот вектор потенцијал од ВЕД, за формулација С, може да се изведат преку постапка која се базира на примена на Лоренцовиот услов [Gay97], каде G_A^{uz} се елементите на третата колона во (4.32):

$$K_A^{c,uz} = G_A^{uz} + \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial u \partial z'} (G_\phi^h - G_\phi^v), \quad u = x, y, z. \quad (4.38)$$

Во прилог се дадени компонентите на Гриновите функции за потенцијали од ХЕД и ВЕД за двете формулации. Детали околу изведувањето на компонентите на дијагичната Гриновата функција за \overline{G}_A^{som} од Сомерфелдовиот избор на вектор потенцијали, врз основа на кои се изведени двете формулации, се дадени во Додаток А.

4.2.1.1 Гринови функции за извор и точка на набљудување во ист слој ($m = i$):

Гринови функции за потенцијали во традиционална формулација:

$$G_A^{xx} = \frac{\mu_m}{4\pi} \left\{ g_d^m + \int_0^\infty \left(A_m^{TE} \frac{e^{jk_{m,z}(z-z')}}{jk_{m,z}} + C_m^{TE} \frac{e^{-jk_{m,z}(z-z')}}{jk_{m,z}} \right) J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right\} \quad (4.39)$$

$$\frac{G_A^{zx}}{\cos \varphi} = \frac{G_A^{zy}}{\sin \varphi} = -\frac{\mu_m}{4\pi} \left\{ \int_0^\infty \left[(A_m^{TE} + B_m^{TM}) e^{jk_{m,z}(z-z')} + (D_m^{TM} - C_m^{TE}) e^{-jk_{m,z}(z-z')} \right] J_1(k_\rho \rho) dk_\rho \right\} \quad (4.40)$$

$$G_A^{zz} = \frac{\mu_m}{4\pi} \left\{ g_d^m + \int_0^\infty \left(C_m^{TM} \frac{e^{-jk_{m,z}(z-z')}}{jk_{m,z}} + A_m^{TM} \frac{e^{jk_{m,z}(z-z')}}{jk_{m,z}} \right) J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right\} \quad (4.41)$$

$$G_\phi^h = \frac{j\omega}{4\pi\sigma_m} \left\{ g_d^m + \int_0^\infty \left(\frac{k_{m,z}^2 B_m^{TM} + k_m^2 A_m^{TE}}{k_\rho^2} \frac{e^{jk_{m,z}(z-z')}}{jk_{m,z}} + \frac{k_m^2 C_m^{TE} - k_{m,z}^2 D_m^{TM}}{k_\rho^2} \frac{e^{-jk_{m,z}(z-z')}}{jk_{m,z}} \right) J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right\} \quad (4.42)$$

$$G_\phi^v = \frac{j\omega}{4\pi\sigma_m} \left\{ g_d^m + \int_0^\infty \left(D_m^{TM} \frac{e^{-jk_{m,z}(z-z')}}{jk_{m,z}} - B_m^{TM} \frac{e^{jk_{m,z}(z-z')}}{jk_{m,z}} \right) J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right\} \quad (4.43)$$

Модифицирани Гринови функции за магнетен вектор потенцијал во С формулација:

$$\frac{K_A^{c,xz}}{\cos \varphi} = \frac{K_A^{c,yz}}{\sin \varphi} = -\frac{\mu_m}{4\pi} \left\{ \int_0^\infty \left[(B_m^{TE} + A_m^{TM}) e^{jk_{m,z}(z-z')} + (D_m^{TE} - C_m^{TM}) e^{-jk_{m,z}(z-z')} \right] J_1(k_\rho \rho) dk_\rho \right\} \quad (4.44)$$

$$K_A^{c,zz} = \frac{\mu_m}{4\pi} \left\{ g_d^m + \int_0^\infty \left[\left(2C_m^{TM} - D_m^{TE} + \frac{k_m^2}{k_\rho^2} (D_m^{TE} - C_m^{TM}) \right) \frac{e^{-jk_{m,z}(z-z')}}{jk_{m,z}} + \left(2A_m^{TM} + B_m^{TE} - \frac{k_m^2}{k_\rho^2} (B_m^{TE} + A_m^{TM}) \right) \frac{e^{jk_{m,z}(z-z')}}{jk_{m,z}} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right\} \quad (4.45)$$

4.2.1.2 Гринови функции за извор и точка на набљудување во различни слоеви ($m \neq i$)

Гринови функции за потенцијали во традиционална формулација:

$$G_A^{xx} = \frac{\mu_m}{4\pi} \begin{cases} \int_0^\infty \frac{\mu_i}{\mu_m} \frac{\tilde{A}_{i,m}^{TE+}}{jk_{i,z}} e^{-jk_{m,z}h_m} \left[e^{-jk_{m,z}z} + \tilde{R}_{m,m-1}^{TE} e^{jk_{m,z}(2h_{m-1}+z)} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho, & (m < i) \\ \int_0^\infty \frac{\mu_i}{\mu_m} \frac{\tilde{A}_{i,m}^{TE-}}{jk_{i,z}} e^{jk_{m,z}h_{m-1}} \left[e^{jk_{m,z}z} + \tilde{R}_{m,m+1}^{TE} e^{-jk_{m,z}(2h_m+z)} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho, & (m > i) \end{cases} \quad (4.46)$$

$$\frac{G_A^{zx}}{\cos \varphi} = \frac{G_A^{zy}}{\sin \varphi} = \frac{\mu_m}{4\pi} \begin{cases} \int_0^\infty \left\{ \begin{aligned} &\tilde{C}_{i,m}^{TM+} e^{-jk_{m,z}h_m} \left[e^{-jk_{m,z}z} + \tilde{R}_{m,m-1}^{TM} e^{jk_{m,z}(2h_{m-1}+z)} \right] \\ &- \frac{k_{m,z}}{k_{i,z}} \frac{\mu_i}{\mu_m} \tilde{A}_{i,m}^{TE+} e^{-jk_{m,z}h_m} \left[e^{-jk_{m,z}z} - \tilde{R}_{m,m-1}^{TE} e^{jk_{m,z}(2h_{m-1}+z)} \right] \end{aligned} \right\} J_1(k_\rho \rho) dk_\rho, & (m < i) \\ \int_0^\infty \left\{ \begin{aligned} &-\tilde{C}_{i,m}^{TM-} e^{jk_{m,z}h_{m-1}} \left[e^{jk_{m,z}z} + \tilde{R}_{m,m+1}^{TM} e^{-jk_{m,z}(2h_m+z)} \right] \\ &+ \frac{k_{m,z}}{k_{i,z}} \frac{\mu_i}{\mu_m} \tilde{A}_{i,m}^{TE-} e^{jk_{m,z}h_{m-1}} \left[e^{jk_{m,z}z} - \tilde{R}_{m,m+1}^{TE} e^{-jk_{m,z}(2h_m+z)} \right] \end{aligned} \right\} J_1(k_\rho \rho) dk_\rho, & (m > i) \end{cases} \quad (4.47)$$

$$G_A^{zz} = \frac{\mu_m}{4\pi} \begin{cases} \int_0^\infty \frac{\tilde{A}_{i,m}^{TM+}}{jk_{i,z}} e^{-jk_{m,z}h_m} \left[e^{-jk_{m,z}z} + \tilde{R}_{m,m-1}^{TM} e^{2jk_{m,z}h_{m-1}} e^{jk_{m,z}z} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho, & (m < i) \\ \int_0^\infty \frac{\tilde{A}_{i,m}^{TM-}}{jk_{i,z}} e^{jk_{m,z}h_{m-1}} \left[e^{jk_{m,z}z} + \tilde{R}_{m,m+1}^{TM} e^{-2jk_{m,z}h_m} e^{-jk_{m,z}z} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho, & (m > i) \end{cases} \quad (4.48)$$

$$G_\Phi^h = \frac{j\omega}{4\pi\sigma_m} \begin{cases} \int_0^\infty \left\{ \begin{aligned} &\frac{k_m^2}{jk_{i,z}} \frac{\mu_i}{\mu_m} \tilde{A}_{i,m}^{TE+} e^{-jk_{m,z}h_m} \left[e^{-jk_{m,z}z} + \tilde{R}_{m,m-1}^{TE} e^{jk_{m,z}(2h_{m-1}+z)} \right] \\ &+ jk_{m,z} \tilde{C}_{i,m}^{TM+} e^{-jk_{m,z}h_m} \left[e^{-jk_{m,z}z} - \tilde{R}_{m,m-1}^{TM} e^{jk_{m,z}(2h_{m-1}+z)} \right] \end{aligned} \right\} \frac{1}{k_\rho^2} J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho, & (m < i) \\ \int_0^\infty \left\{ \begin{aligned} &\frac{k_m^2}{jk_{i,z}} \frac{\mu_i}{\mu_m} \tilde{A}_{i,m}^{TE-} e^{jk_{m,z}h_{m-1}} \left[e^{jk_{m,z}z} + \tilde{R}_{m,m+1}^{TE} e^{-jk_{m,z}(2h_m+z)} \right] \\ &+ jk_{m,z} \tilde{C}_{i,m}^{TM-} e^{jk_{m,z}h_{m-1}} \left[e^{jk_{m,z}z} - \tilde{R}_{m,m+1}^{TM} e^{-jk_{m,z}(2h_m+z)} \right] \end{aligned} \right\} \frac{1}{k_\rho^2} J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho, & (m > i) \end{cases} \quad (4.49)$$

$$G_\Phi^v = \frac{j\omega}{4\pi\sigma_m} \begin{cases} \int_0^\infty \frac{\tilde{C}_{i,m}^{TM+}}{jk_{i,z}} \frac{k_{m,z}}{k_{i,z}} e^{-jk_{m,z}h_m} \left[e^{-jk_{m,z}z} - \tilde{R}_{m,m-1}^{TM} e^{2jk_{m,z}h_{m-1}} e^{jk_{m,z}z} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho, & (m < i) \\ \int_0^\infty \frac{\tilde{C}_{i,m}^{TM-}}{jk_{i,z}} \frac{k_{m,z}}{k_{i,z}} e^{jk_{m,z}h_{m-1}} \left[e^{jk_{m,z}z} - \tilde{R}_{m,m+1}^{TM} e^{-2jk_{m,z}h_m} e^{-jk_{m,z}z} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho, & (m > i) \end{cases} \quad (4.50)$$

Модифицирани Гринови функции за магнетен вектор потенцијал во С формулација:

$$\frac{K_A^{c,xz}}{\cos \varphi} = \frac{K_A^{c,yz}}{\sin \varphi} = \frac{\mu_m}{4\pi} \left\{ \begin{array}{l} \int_0^\infty \left[-\frac{\mu_i}{\mu_m} \tilde{C}_{i,m}^{TE+} e^{-jk_{m,z}h_m} \left[e^{-jk_{m,z}z} + \tilde{R}_{m,m-1}^{TE} e^{jk_{m,z}(2h_{m-1}+z)} \right] \right. \\ \left. + \frac{k_i^2}{k_m^2} \frac{k_{m,z}}{k_{i,z}} \tilde{A}_{i,m}^{TM+} e^{-jk_{m,z}h_m} \left[e^{-jk_{m,z}z} - \tilde{R}_{m,m-1}^{TM} e^{jk_{m,z}(2h_{m-1}+z)} \right] \right] dk_\rho, \quad (m < i) \\ \int_0^\infty \left[+\frac{\mu_i}{\mu_m} \tilde{C}_{i,m}^{TE-} e^{jk_{m,z}h_{m-1}} \left[e^{jk_{m,z}z} + \tilde{R}_{m,m+1}^{TE} e^{-jk_{m,z}(2h_m+z)} \right] \right. \\ \left. - \frac{k_i^2}{k_m^2} \frac{k_{m,z}}{k_{i,z}} \tilde{A}_{i,m}^{TM-} e^{jk_{m,z}h_{m-1}} \left[e^{jk_{m,z}z} - \tilde{R}_{m,m+1}^{TM} e^{-jk_{m,z}(2h_m+z)} \right] \right] dk_\rho, \quad (m > i) \end{array} \right\} \quad (4.51)$$

$$K_A^{c,zz} = \frac{\mu_m}{4\pi} \left\{ \begin{array}{l} \int_0^\infty \left[-\frac{jk_{m,z}}{k_\rho^2} \frac{\mu_i}{\mu_m} \tilde{C}_{i,m}^{TE+} e^{-jk_{m,z}h_m} \left[e^{-jk_{m,z}z} - \tilde{R}_{m,m-1}^{TE} e^{jk_{m,z}(2h_{m-1}+z)} \right] \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{k_{m,z}^2}{k_\rho^2} \frac{k_i^2}{k_m^2} \right) \frac{\tilde{A}_{i,m}^{TM+}}{jk_{i,z}} e^{-jk_{m,z}h_m} \left[e^{-jk_{m,z}z} + \tilde{R}_{m,m-1}^{TM} e^{jk_{m,z}(2h_{m-1}+z)} \right] \right] dk_\rho, \quad (m < i) \\ \int_0^\infty \left[-\frac{jk_{m,z}}{k_\rho^2} \frac{\mu_i}{\mu_m} \tilde{C}_{i,m}^{TE-} e^{jk_{m,z}h_{m-1}} \left[e^{jk_{m,z}z} - \tilde{R}_{m,m+1}^{TE} e^{-jk_{m,z}(2h_m+z)} \right] \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{k_{m,z}^2}{k_\rho^2} \frac{k_i^2}{k_m^2} \right) \frac{\tilde{A}_{i,m}^{TM-}}{jk_{i,z}} e^{jk_{m,z}h_{m-1}} \left[e^{jk_{m,z}z} + \tilde{R}_{m,m+1}^{TM} e^{-jk_{m,z}(2h_m+z)} \right] \right] dk_\rho, \quad (m > i) \end{array} \right\} \quad (4.52)$$

4.2.2 Формулации во МРІЕ базирани на избор на потенцијали од Ертеза и Парк

Изборот на потенцијали кој е предложен од Ертеза и Парк [Ert69], претставува основа во изведувањето на т.н. А и В формулации на потенцијали во МРІЕ.

Формулација А се добива со усвојување на $P_x = P_y = 0$ и $P_z \neq 0$, а формулација В со усвојување на $P_x \neq 0$, $P_y \neq 0$ и $P_z = 0$ и нивна примена заедно со дијадичната Гринова функција $\bar{\bar{G}}_A^{ert}$, дадена со (4.2), во релацијата (4.33). Притоа се добива системот равенки (во спектрален домен):

$$\begin{aligned} \frac{j\omega}{k_m^2} (-jk_x \tilde{G}_A^{xx} - jk_y \tilde{G}_A^{yx}) &= \frac{1}{j\omega} jk_x \tilde{K}_\phi + j\omega \tilde{P}_x \\ \frac{j\omega}{k_m^2} (-jk_x \tilde{G}_A^{xy} - jk_y \tilde{G}_A^{yy}) &= \frac{1}{j\omega} jk_y \tilde{K}_\phi + j\omega \tilde{P}_y \\ \frac{j\omega}{k_m^2} \frac{\partial}{\partial z} \tilde{G}_A^{zz} &= \frac{1}{j\omega} \frac{\partial}{\partial z'} \tilde{K}_\phi + j\omega \tilde{P}_z \end{aligned} \quad (4.53)$$

каде P_x и P_y се поврзани со релацијата:

$$k_x \tilde{P}_y = k_y \tilde{P}_x \quad (4.54)$$

Со решавање на системот равенки (4.53), за познати компоненти на магнетниот вектор потенцијал во $\bar{\bar{G}}_A^{ert}$, се добиваат K_ϕ и \tilde{P} , а потоа, со замена на \tilde{P} во (4.34) се добиваат модифицираните дијадични Гринови функции за магнетен вектор потенцијал за формулациите А и В:

$$\bar{\bar{K}}_A^a = \begin{bmatrix} K_A^{a,xx} & K_A^{a,xy} & K_A^{a,xz} \\ K_A^{a,yx} & K_A^{a,yy} & K_A^{a,yz} \\ 0 & 0 & K_A^{a,zz} \end{bmatrix} \quad K_\phi^a \text{ идентична за ХЕД и ВЕД} \quad (4.55)$$

$$\bar{\bar{K}}_A^b = \begin{bmatrix} K_A^{b,xx} & K_A^{b,xy} & 0 \\ K_A^{b,yx} & K_A^{b,yy} & 0 \\ K_A^{b,zx} & K_A^{b,zy} & K_A^{b,zz} \end{bmatrix} \quad K_\phi^b = G_\phi^v \text{ идентична за ХЕД и ВЕД} \quad (4.56)$$

Компонентите на $\bar{\bar{K}}_A^a$ за формулација А се добиваат од $\bar{\bar{G}}_A^{ert}$ преку релациите:

$$\begin{aligned} K_A^{a,xx} &= G_A^{xx}, \quad K_A^{a,yy} = G_A^{yy}, \quad K_A^{a,xy} = G_A^{xy}, \\ K_A^{a,xz} &= \frac{\partial}{\partial x} P_z, \quad K_A^{a,yz} = \frac{\partial}{\partial y} P_z, \quad K_A^{a,zz} = G_A^{zz} + \frac{\partial}{\partial z} P_z, \end{aligned} \quad (4.57)$$

додека компонентите на $\bar{\bar{K}}_A^b$ за формулација В се добиваат од $\bar{\bar{G}}_A^{ert}$ преку релациите:

$$\begin{aligned}
 K_A^{b,xx} &= G_A^{xx} + \frac{\partial}{\partial x} P_x, \quad K_A^{b,yy} = G_A^{yy} + \frac{\partial}{\partial y} P_y, \quad K_A^{b,xy} = G_A^{xy} + \frac{\partial}{\partial x} P_y, \\
 K_A^{b,zx} &= \frac{\partial}{\partial z} P_x, \quad K_A^{b,zy} = \frac{\partial}{\partial z} P_y, \quad K_A^{b,zz} = G_A^{zz},
 \end{aligned}
 \tag{4.58}$$

Кога изворот и точката на набљудување се во ист слој, т.е. кога $m = i$, тогаш од решението на системот (4.53) следи $\vec{P} = 0$, па според (4.34) следи дека $\vec{K}_A^{a/b} = \vec{G}_A^{ert}$ за двете формулации. Кога изворот и точката на набљудување се во различни слоеви, т.е. $m \neq i$, тогаш $\vec{P} \neq 0$ што резултира со различни Гринови функции за компонентите на магнетниот вектор и електричниот скалар потенцијал во двете формулации. Врз основа на горенаведеното, се добиваат Гриновите функции за потенцијали за формулација А и формулација В. Детали околу изведувањето на компонентите на дијагичната Гриновата функција \vec{G}_A^{ert} од изборот на вектор потенцијали на Ертеза и Парк, врз основа на кои се изведени двете формулации, се дадени во Додаток А.

4.2.2.1 Гринови функции за извор и точка на набљудување во ист слој ($m = i$) за формулации А и В

Гриновите функции за потенцијали за формулација А и формулација В за извор и точка на набљудување во ист слој се идентични, според тоа:

$$K_A^{a/b,xx} = \frac{\mu_m}{4\pi} \left\{ \begin{aligned} &g_d^m + \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[(A_m^{TE} - B_m^{TM}) \frac{e^{jk_{m,z}(z-z')}}{jk_{m,z}} + (C_m^{TE} + D_m^{TM}) \frac{e^{-jk_{m,z}(z-z')}}{jk_{m,z}} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \\ &+ \frac{1}{2} \cos(2\varphi) \int_0^\infty \left[(A_m^{TE} + B_m^{TM}) \frac{e^{jk_{m,z}(z-z')}}{jk_{m,z}} + (C_m^{TE} - D_m^{TM}) \frac{e^{-jk_{m,z}(z-z')}}{jk_{m,z}} \right] J_2(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \end{aligned} \right\} \tag{4.59}$$

$$K_A^{a/b,yy} = \frac{\mu_m}{4\pi} \left\{ \begin{aligned} &g_d^m + \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[(A_m^{TE} - B_m^{TM}) \frac{e^{jk_{m,z}(z-z')}}{jk_{m,z}} + (C_m^{TE} + D_m^{TM}) \frac{e^{-jk_{m,z}(z-z')}}{jk_{m,z}} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \\ &- \frac{1}{2} \cos(2\varphi) \int_0^\infty \left[(A_m^{TE} + B_m^{TM}) \frac{e^{jk_{m,z}(z-z')}}{jk_{m,z}} + (C_m^{TE} - D_m^{TM}) \frac{e^{-jk_{m,z}(z-z')}}{jk_{m,z}} \right] J_2(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \end{aligned} \right\} \tag{4.60}$$

$$K_A^{a/b,xy} = \frac{\mu_m}{4\pi} \left\{ \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \int_0^\infty \left[(A_m^{TE} + B_m^{TM}) \frac{e^{jk_{m,z}(z-z')}}{jk_{m,z}} + (C_m^{TE} - D_m^{TM}) \frac{e^{-jk_{m,z}(z-z')}}{jk_{m,z}} \right] J_2(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right\} \tag{4.61}$$

$$K_A^{a/b,zz} = \frac{\mu_m}{4\pi} \left\{ g_d^m + \int_0^\infty \left(C_m^{TM} \frac{e^{-jk_{m,z}(z-z')}}{jk_{m,z}} + A_m^{TM} \frac{e^{jk_{m,z}(z-z')}}{jk_{m,z}} \right) J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right\} \tag{4.62}$$

$$K_\Phi^{a/b} = \frac{j\omega}{4\pi\sigma_m} \left\{ g_d^m + \int_0^\infty \left(D_m^{TM} \frac{e^{-jk_{m,z}(z-z')}}{jk_{m,z}} - B_m^{TM} \frac{e^{jk_{m,z}(z-z')}}{jk_{m,z}} \right) J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right\} \tag{4.63}$$

Според решението на системот (4.53) за $m = i$, следи дека $\vec{P} = 0$, а со тоа $K_A^{a,xz} = K_A^{a,yz} = 0$ и $K_A^{b,zx} = K_A^{b,zy} = 0$, согласно (4.57) и (4.58) за А и В формулација.

4.2.2.2 Гринови функции за извор и точка на набљудување во различни слоеви ($m \neq i$) за формулација А:

$$K_A^{a,xx} = \frac{\mu_m}{4\pi} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cos(2\varphi) \left[\int_0^\infty \frac{\tilde{A}_{i,m}^{TE+}}{jk_{i,z}} \frac{\mu_i}{\mu_m} e^{-jk_{m,z}h_m} \left[e^{-jk_{m,z}z} + \tilde{R}_{m,m-1}^{TE} e^{jk_{m,z}(2h_{m-1}+z)} \right] J_2(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right. \\ \left. - \int_0^\infty \frac{\tilde{C}_{i,m}^{TM+}}{jk_{m,z}} e^{-jk_{m,z}h_m} \left[e^{-jk_{m,z}z} - \tilde{R}_{m,m-1}^{TM} e^{jk_{m,z}(2h_{m-1}+z)} \right] J_2(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right] \\ + \frac{1}{2} \left[\int_0^\infty \frac{\tilde{A}_{i,m}^{TE+}}{jk_{i,z}} \frac{\mu_i}{\mu_m} e^{-jk_{m,z}h_m} \left[e^{-jk_{m,z}z} + \tilde{R}_{m,m-1}^{TE} e^{jk_{m,z}(2h_{m-1}+z)} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right. \\ \left. + \int_0^\infty \frac{\tilde{C}_{i,m}^{TM+}}{jk_{m,z}} e^{-jk_{m,z}h_m} \left[e^{-jk_{m,z}z} - \tilde{R}_{m,m-1}^{TM} e^{jk_{m,z}(2h_{m-1}+z)} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right] \end{array} \right. , (m < i) \\ \\ \frac{1}{2} \cos(2\varphi) \left[\int_0^\infty \frac{\tilde{A}_{i,m}^{TE-}}{jk_{i,z}} \frac{\mu_i}{\mu_m} e^{jk_{m,z}h_{m-1}} \left[e^{jk_{m,z}z} + \tilde{R}_{m,m+1}^{TE} e^{-jk_{m,z}(2h_m+z)} \right] J_2(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right. \\ \left. - \int_0^\infty \frac{\tilde{C}_{i,m}^{TM-}}{jk_{m,z}} e^{jk_{m,z}h_{m-1}} \left[e^{jk_{m,z}z} - \tilde{R}_{m,m+1}^{TM} e^{-jk_{m,z}(2h_m+z)} \right] J_2(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right] \\ + \frac{1}{2} \left[\int_0^\infty \frac{\tilde{A}_{i,m}^{TE-}}{jk_{i,z}} \frac{\mu_i}{\mu_m} e^{jk_{m,z}h_{m-1}} \left[e^{jk_{m,z}z} + \tilde{R}_{m,m+1}^{TE} e^{-jk_{m,z}(2h_m+z)} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right. \\ \left. + \int_0^\infty \frac{\tilde{C}_{i,m}^{TM-}}{jk_{m,z}} e^{jk_{m,z}h_{m-1}} \left[e^{jk_{m,z}z} - \tilde{R}_{m,m+1}^{TM} e^{-jk_{m,z}(2h_m+z)} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right] \end{array} \right. , (m > i)$$

$$K_A^{a,yy} = \frac{\mu_m}{4\pi} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cos(2\varphi) \left[\int_0^\infty \frac{\tilde{A}_{i,m}^{TE+}}{jk_{i,z}} \frac{\mu_i}{\mu_m} e^{-jk_{m,z}h_m} \left[e^{-jk_{m,z}z} + \tilde{R}_{m,m-1}^{TE} e^{jk_{m,z}(2h_{m-1}+z)} \right] J_2(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right. \\ \left. - \int_0^\infty \frac{\tilde{C}_{i,m}^{TM+}}{jk_{m,z}} e^{-jk_{m,z}h_m} \left[e^{-jk_{m,z}z} - \tilde{R}_{m,m-1}^{TM} e^{jk_{m,z}(2h_{m-1}+z)} \right] J_2(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right] \\ + \frac{1}{2} \left[\int_0^\infty \frac{\tilde{A}_{i,m}^{TE+}}{jk_{i,z}} \frac{\mu_i}{\mu_m} e^{-jk_{m,z}h_m} \left[e^{-jk_{m,z}z} + \tilde{R}_{m,m-1}^{TE} e^{jk_{m,z}(2h_{m-1}+z)} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right. \\ \left. + \int_0^\infty \frac{\tilde{C}_{i,m}^{TM+}}{jk_{m,z}} e^{-jk_{m,z}h_m} \left[e^{-jk_{m,z}z} - \tilde{R}_{m,m-1}^{TM} e^{jk_{m,z}(2h_{m-1}+z)} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right] \end{array} \right. , (m < i) \\ \\ -\frac{1}{2} \cos(2\varphi) \left[\int_0^\infty \frac{\tilde{A}_{i,m}^{TE-}}{jk_{i,z}} \frac{\mu_i}{\mu_m} e^{jk_{m,z}h_{m-1}} \left[e^{jk_{m,z}z} + \tilde{R}_{m,m+1}^{TE} e^{-jk_{m,z}(2h_m+z)} \right] J_2(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right. \\ \left. - \int_0^\infty \frac{\tilde{C}_{i,m}^{TM-}}{jk_{m,z}} e^{jk_{m,z}h_{m-1}} \left[e^{jk_{m,z}z} - \tilde{R}_{m,m+1}^{TM} e^{-jk_{m,z}(2h_m+z)} \right] J_2(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right] \\ + \frac{1}{2} \left[\int_0^\infty \frac{\tilde{A}_{i,m}^{TE-}}{jk_{i,z}} \frac{\mu_i}{\mu_m} e^{jk_{m,z}h_{m-1}} \left[e^{jk_{m,z}z} + \tilde{R}_{m,m+1}^{TE} e^{-jk_{m,z}(2h_m+z)} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right. \\ \left. + \int_0^\infty \frac{\tilde{C}_{i,m}^{TM-}}{jk_{m,z}} e^{jk_{m,z}h_{m-1}} \left[e^{jk_{m,z}z} - \tilde{R}_{m,m+1}^{TM} e^{-jk_{m,z}(2h_m+z)} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right] \end{array} \right. , (m > i)$$

$$K_A^{a,xy/yz} = \frac{\mu_m}{4\pi} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \left[\int_0^\infty \frac{\tilde{A}_{i,m}^{TE+}}{jk_{i,z}} \frac{\mu_i}{\mu_m} e^{-jk_{m,z}h_m} \left[e^{-jk_{m,z}z} + \tilde{R}_{m,m-1}^{TE} e^{jk_{m,z}(2h_{m-1}+z)} \right] J_2(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right. \\ \left. - \int_0^\infty \frac{\tilde{C}_{i,m}^{TM+}}{jk_{m,z}} e^{-jk_{m,z}h_m} \left[e^{-jk_{m,z}z} - \tilde{R}_{m,m-1}^{TM} e^{jk_{m,z}(2h_{m-1}+z)} \right] J_2(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right] , (m < i) \\ \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \left[\int_0^\infty \frac{\tilde{A}_{i,m}^{TE-}}{jk_{i,z}} \frac{\mu_i}{\mu_m} e^{jk_{m,z}h_{m-1}} \left[e^{jk_{m,z}z} + \tilde{R}_{m,m+1}^{TE} e^{-jk_{m,z}(2h_m+z)} \right] J_2(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right. \\ \left. - \int_0^\infty \frac{\tilde{C}_{i,m}^{TM-}}{jk_{m,z}} e^{jk_{m,z}h_{m-1}} \left[e^{jk_{m,z}z} - \tilde{R}_{m,m+1}^{TM} e^{-jk_{m,z}(2h_m+z)} \right] J_2(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right] , (m > i) \end{array} \right. \quad (4.66)$$

$$\frac{K_A^{a,xz}}{\cos \varphi} = \frac{K_A^{a,yz}}{\sin \varphi} = \frac{\mu_m}{4\pi} \left\{ \begin{array}{l} \int_0^\infty \frac{k_\rho^2}{k_{m,z} k_{i,z}} \left(1 - \frac{k_i^2}{k_m^2} \right) \tilde{A}_{i,m}^{TM+} e^{-jk_{m,z}h_m} \left[e^{-jk_{m,z}z} - \tilde{R}_{m,m-1}^{TM} e^{jk_{m,z}(2h_{m-1}+z)} \right] J_1(k_\rho \rho) dk_\rho , (m < i) \\ \int_0^\infty \frac{k_\rho^2}{k_{m,z} k_{i,z}} \left(\frac{k_i^2}{k_m^2} - 1 \right) \tilde{A}_{i,m}^{TM-} e^{jk_{m,z}h_{m-1}} \left[e^{jk_{m,z}z} - \tilde{R}_{m,m+1}^{TM} e^{-jk_{m,z}(2h_m+z)} \right] J_1(k_\rho \rho) dk_\rho , (m > i) \end{array} \right. \quad (4.67)$$

$$K_A^{a,zz} = \frac{\mu_m}{4\pi} \left\{ \begin{array}{l} \int_0^\infty \frac{\tilde{A}_{i,m}^{TM+}}{jk_{i,z}} \frac{k_i^2}{k_m^2} e^{-jk_{m,z}h_m} \left[e^{-jk_{m,z}z} + \tilde{R}_{m,m-1}^{TM} e^{jk_{m,z}(2h_{m-1}+z)} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho , (m < i) \\ \int_0^\infty \frac{\tilde{A}_{i,m}^{TM-}}{jk_{i,z}} \frac{k_i^2}{k_m^2} e^{jk_{m,z}h_{m-1}} \left[e^{jk_{m,z}z} + \tilde{R}_{m,m+1}^{TM} e^{-jk_{m,z}(2h_m+z)} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho , (m > i) \end{array} \right. \quad (4.68)$$

$$K_\Phi^a = \frac{j\omega}{4\pi\sigma_m} \left\{ \begin{array}{l} \int_0^\infty \frac{\tilde{C}_{i,m}^{TM+}}{jk_{m,z}} e^{-jk_{m,z}h_m} \left[e^{-jk_{m,z}z} - \tilde{R}_{m,m-1}^{TM} e^{jk_{m,z}(2h_{m-1}+z)} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho , (m < i) \\ \int_0^\infty \frac{\tilde{C}_{i,m}^{TM-}}{jk_{m,z}} e^{jk_{m,z}h_{m-1}} \left[e^{jk_{m,z}z} - \tilde{R}_{m,m+1}^{TM} e^{-jk_{m,z}(2h_m+z)} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho , (m > i) \end{array} \right. \quad (4.69)$$

4.2.2.3 Гринови функции за извор и точка на набљудување во различни слоеви ($m \neq i$) за формулација В:

$$K_A^{b,xx} = \frac{\mu_m}{4\pi} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cos(2\varphi) \left[\int_0^\infty \frac{\tilde{A}_{i,m}^{TE+} \mu_i}{jk_{i,z} \mu_m} e^{-jk_{m,z}h_m} \left[e^{-jk_{m,z}z} + \tilde{R}_{m,m-1}^{TE} e^{jk_{m,z}(2h_{m-1}+z)} \right] J_2(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right. \\ \left. - \int_0^\infty \frac{\tilde{C}_{i,m}^{TM+} k_{m,z} k_i^2}{jk_{i,z} k_{i,z} k_m^2} e^{-jk_{m,z}h_m} \left[e^{-jk_{m,z}z} - \tilde{R}_{m,m-1}^{TM} e^{jk_{m,z}(2h_{m-1}+z)} \right] J_2(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right] \\ + \frac{1}{2} \left[\int_0^\infty \frac{\tilde{A}_{i,m}^{TE+} \mu_i}{jk_{i,z} \mu_m} e^{-jk_{m,z}h_m} \left[e^{-jk_{m,z}z} + \tilde{R}_{m,m-1}^{TE} e^{jk_{m,z}(2h_{m-1}+z)} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right. \\ \left. + \int_0^\infty \frac{\tilde{C}_{i,m}^{TM+} k_{m,z} k_i^2}{jk_{i,z} k_{i,z} k_m^2} e^{-jk_{m,z}h_m} \left[e^{-jk_{m,z}z} - \tilde{R}_{m,m-1}^{TM} e^{jk_{m,z}(2h_{m-1}+z)} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right] \\ \frac{1}{2} \cos(2\varphi) \left[\int_0^\infty \frac{\tilde{A}_{i,m}^{TE-} \mu_i}{jk_{i,z} \mu_m} e^{jk_{m,z}h_{m-1}} \left[e^{jk_{m,z}z} + \tilde{R}_{m,m+1}^{TE} e^{-jk_{m,z}(2h_m+z)} \right] J_2(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right. \\ \left. - \int_0^\infty \frac{\tilde{C}_{i,m}^{TM-} k_{m,z} k_i^2}{jk_{i,z} k_{i,z} k_m^2} e^{jk_{m,z}h_{m-1}} \left[e^{jk_{m,z}z} - \tilde{R}_{m,m+1}^{TM} e^{-jk_{m,z}(2h_m+z)} \right] J_2(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right] \\ + \frac{1}{2} \left[\int_0^\infty \frac{\tilde{A}_{i,m}^{TE-} \mu_i}{jk_{i,z} \mu_m} e^{jk_{m,z}h_{m-1}} \left[e^{jk_{m,z}z} + \tilde{R}_{m,m+1}^{TE} e^{-jk_{m,z}(2h_m+z)} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right. \\ \left. + \int_0^\infty \frac{\tilde{C}_{i,m}^{TM-} k_{m,z} k_i^2}{jk_{i,z} k_{i,z} k_m^2} e^{jk_{m,z}h_{m-1}} \left[e^{jk_{m,z}z} - \tilde{R}_{m,m+1}^{TM} e^{-jk_{m,z}(2h_m+z)} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right] \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} , (m < i) \\ \\ \\ \\ , (m > i) \end{array} \right. \quad (4.70)$$

$$K_A^{b,yy} = \frac{\mu_m}{4\pi} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cos(2\varphi) \left[\int_0^\infty \frac{\tilde{A}_{i,m}^{TE+} \mu_i}{jk_{i,z} \mu_m} e^{-jk_{m,z}h_m} \left[e^{-jk_{m,z}z} + \tilde{R}_{m,m-1}^{TE} e^{jk_{m,z}(2h_{m-1}+z)} \right] J_2(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right. \\ \left. - \int_0^\infty \frac{\tilde{C}_{i,m}^{TM+} k_{m,z} k_i^2}{jk_{i,z} k_{i,z} k_m^2} e^{-jk_{m,z}h_m} \left[e^{-jk_{m,z}z} - \tilde{R}_{m,m-1}^{TM} e^{jk_{m,z}(2h_{m-1}+z)} \right] J_2(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right] \\ + \frac{1}{2} \left[\int_0^\infty \frac{\tilde{A}_{i,m}^{TE+} \mu_i}{jk_{i,z} \mu_m} e^{-jk_{m,z}h_m} \left[e^{-jk_{m,z}z} + \tilde{R}_{m,m-1}^{TE} e^{jk_{m,z}(2h_{m-1}+z)} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right. \\ \left. + \int_0^\infty \frac{\tilde{C}_{i,m}^{TM+} k_{m,z} k_i^2}{jk_{i,z} k_{i,z} k_m^2} e^{-jk_{m,z}h_m} \left[e^{-jk_{m,z}z} - \tilde{R}_{m,m-1}^{TM} e^{jk_{m,z}(2h_{m-1}+z)} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right] \\ -\frac{1}{2} \cos(2\varphi) \left[\int_0^\infty \frac{\tilde{A}_{i,m}^{TE-} \mu_i}{jk_{i,z} \mu_m} e^{jk_{m,z}h_{m-1}} \left[e^{jk_{m,z}z} + \tilde{R}_{m,m+1}^{TE} e^{-jk_{m,z}(2h_m+z)} \right] J_2(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right. \\ \left. - \int_0^\infty \frac{\tilde{C}_{i,m}^{TM-} k_{m,z} k_i^2}{jk_{i,z} k_{i,z} k_m^2} e^{jk_{m,z}h_{m-1}} \left[e^{jk_{m,z}z} - \tilde{R}_{m,m+1}^{TM} e^{-jk_{m,z}(2h_m+z)} \right] J_2(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right] \\ + \frac{1}{2} \left[\int_0^\infty \frac{\tilde{A}_{i,m}^{TE-} \mu_i}{jk_{i,z} \mu_m} e^{jk_{m,z}h_{m-1}} \left[e^{jk_{m,z}z} + \tilde{R}_{m,m+1}^{TE} e^{-jk_{m,z}(2h_m+z)} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right. \\ \left. + \int_0^\infty \frac{\tilde{C}_{i,m}^{TM-} k_{m,z} k_i^2}{jk_{i,z} k_{i,z} k_m^2} e^{jk_{m,z}h_{m-1}} \left[e^{jk_{m,z}z} - \tilde{R}_{m,m+1}^{TM} e^{-jk_{m,z}(2h_m+z)} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right] \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} , (m < i) \\ \\ \\ \\ , (m > i) \end{array} \right. \quad (4.71)$$

$$K_A^{b,xy/yx} = \frac{\mu_m}{4\pi} \begin{cases} \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \left[\int_0^\infty \frac{\tilde{A}_{i,m}^{TE+}}{jk_{i,z}} \frac{\mu_i}{\mu_m} e^{-jk_{m,z}h_m} \left[e^{-jk_{m,z}z} + \tilde{R}_{m,m-1}^{TE} e^{jk_{m,z}(2h_{m-1}+z)} \right] J_2(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right. \\ \left. - \int_0^\infty \frac{\tilde{C}_{i,m}^{TM+}}{jk_{i,z}} \frac{k_{m,z} k_i^2}{k_{i,z} k_m^2} e^{-jk_{m,z}h_m} \left[e^{-jk_{m,z}z} - \tilde{R}_{m,m-1}^{TM} e^{jk_{m,z}(2h_{m-1}+z)} \right] J_2(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right] & , (m < i) \\ \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \left[\int_0^\infty \frac{\tilde{A}_{i,m}^{TE-}}{jk_{i,z}} \frac{\mu_i}{\mu_m} e^{jk_{m,z}h_{m-1}} \left[e^{jk_{m,z}z} + \tilde{R}_{m,m+1}^{TE} e^{-jk_{m,z}(2h_m+z)} \right] J_2(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right. \\ \left. - \int_0^\infty \frac{\tilde{C}_{i,m}^{TM-}}{jk_{i,z}} \frac{k_{m,z} k_i^2}{k_{i,z} k_m^2} e^{jk_{m,z}h_{m-1}} \left[e^{jk_{m,z}z} - \tilde{R}_{m,m+1}^{TM} e^{-jk_{m,z}(2h_m+z)} \right] J_2(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right] & , (m > i) \end{cases} \quad (4.72)$$

$$\frac{K_A^{b,zx}}{\cos \varphi} = \frac{K_A^{b,zy}}{\sin \varphi} = \frac{\mu_m}{4\pi} \begin{cases} \int_0^\infty \frac{k_i^2 - k_m^2}{k_{i,z}^2} \frac{k_\rho^2}{k_m^2} \tilde{C}_{i,m}^{TM+} e^{-jk_{m,z}h_m} \left[e^{-jk_{m,z}z} + \tilde{R}_{m,m-1}^{TM} e^{jk_{m,z}(2h_{m-1}+z)} \right] J_1(k_\rho \rho) dk_\rho & , (m < i) \\ \int_0^\infty \frac{k_m^2 - k_i^2}{k_{i,z}^2} \frac{k_\rho^2}{k_m^2} \tilde{C}_{i,m}^{TM-} e^{jk_{m,z}h_{m-1}} \left[e^{jk_{m,z}z} + \tilde{R}_{m,m+1}^{TM} e^{-jk_{m,z}(2h_m+z)} \right] J_1(k_\rho \rho) dk_\rho & , (m > i) \end{cases} \quad (4.73)$$

$$K_A^{b,zz} = \frac{\mu_m}{4\pi} \begin{cases} \int_0^\infty \frac{\tilde{A}_{i,m}^{TM+}}{jk_{i,z}} e^{-jk_{m,z}h_m} \left[e^{-jk_{m,z}z} + \tilde{R}_{m,m-1}^{TM} e^{2jk_{m,z}h_{m-1}} e^{jk_{m,z}z} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho & , (m < i) \\ \int_0^\infty \frac{\tilde{A}_{i,m}^{TM-}}{jk_{i,z}} e^{jk_{m,z}h_{m-1}} \left[e^{jk_{m,z}z} + \tilde{R}_{m,m+1}^{TM} e^{-2jk_{m,z}h_m} e^{-jk_{m,z}z} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho & , (m > i) \end{cases} \quad (4.74)$$

$$K_\phi^b = \frac{j\omega}{4\pi\sigma_m} \begin{cases} \int_0^\infty \frac{\tilde{C}_{i,m}^{TM+}}{jk_{i,z}} \frac{k_{m,z}}{k_{i,z}} e^{-jk_{m,z}h_m} \left[e^{-jk_{m,z}z} - \tilde{R}_{m,m-1}^{TM} e^{2jk_{m,z}h_{m-1}} e^{jk_{m,z}z} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho & , (m < i) \\ \int_0^\infty \frac{\tilde{C}_{i,m}^{TM-}}{jk_{i,z}} \frac{k_{m,z}}{k_{i,z}} e^{jk_{m,z}h_{m-1}} \left[e^{jk_{m,z}z} - \tilde{R}_{m,m+1}^{TM} e^{-2jk_{m,z}h_m} e^{-jk_{m,z}z} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho & , (m > i) \end{cases} \quad (4.75)$$

Притоа треба да се нагласи дека Гриновите функции $K_A^{b,zz}$ и K_ϕ^b за формулација В се идентични со Гриновите функции G_A^{zz} и G_ϕ^v од традиционалната формулација.

4.3 Гринови функции за потенцијали во хомоген полу-простор

Гриновите функции за хомоген спроводен полу-простор се од особен интерес во анализи на заземјувачи. Тогаш Гриновите функции значително се поедноставуваат, а со тоа се поедноставува и математичкиот модел, постапката за нивно нумеричко пресметување, како и целокупната постапка за анализа на однесувањето на заземјувачкиот систем. Од тие причини, најголемиот број објавени теоретски и експериментални резултати во анализа на заземјувачи се однесуваат на хомогена земја.

Доколку се усвои модел на хомогена земја, тогаш најгорниот слој со карактеристики на воздух се протега вертикално од $z=0$ до $z=\infty$, а слојот со карактеристики на земја се протега од $z=0$ до $z=-\infty$. Ако за горниот слој се усвои индекс 0, а за долниот слој индекс 1, тогаш Генерализираните коефициенти на рефлексија, претставени со изразите (4.16) и (4.17), ги добиваат следните вредности:

$$\tilde{R}_{0,-1}^{TE, TM} = 0 \qquad \tilde{R}_{1,2}^{TE, TM} = 0 \qquad (4.76)$$

$$\tilde{R}_{1,0}^{TE, TM} = R_{1,0}^{TE, TM} \qquad \tilde{R}_{0,1}^{TE, TM} = R_{0,1}^{TE, TM} \qquad (4.77)$$

притоа треба да се истакне дека $\tilde{R}_{0,-1}^{TE, TM} = \tilde{R}_{1,2}^{TE, TM} = 0$ се усвоени како ако почетни вредности за итеративно пресметување на останатите генерализирани коефициенти на рефлексија, бидејќи двата слоја се неограничени во насока на z -оската.

Ако анализата се ограничи само во рамки на хомогена земја, тогаш A-D коефициентите, (4.18) - (4.21), за слојот со индекс 1 добиваат вредности:

$$A_1^{TE/TM} = R_{1,0}^{TE/TM} e^{jk_{1,z} 2z'}, \quad B_1^{TE/TM} = R_{1,0}^{TE/TM} e^{jk_{1,z} 2z'}, \quad C_1^{TE/TM} = 0, \quad D_1^{TE/TM} = 0 \qquad (4.78)$$

па со нивна замена во (4.39)-(4.45) и (4.59)-(4.63) се добиваат Гриновите функции за хомогена земја за традиционалната формулација и за формулациите означени со A, B и C [Mic87], [Mic90b].

4.3.1 Гринови функции за традиционалната формулација на потенцијали

$$G_A^{xx} = \frac{\mu_1}{4\pi} \left\{ g_d^1 + \int_0^\infty R_{1,0}^{TE} \frac{e^{jk_{1,z}(z+z')}}{jk_{1,z}} J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right\} \qquad (4.79)$$

$$\frac{G_A^{zx}}{\cos \varphi} = \frac{G_A^{zy}}{\sin \varphi} = -\frac{\mu_1}{4\pi} \int_0^\infty (R_{1,0}^{TE} + R_{1,0}^{TM}) e^{jk_{1,z}(z+z')} J_1(k_\rho \rho) dk_\rho \qquad (4.80)$$

$$G_A^{zz} = \frac{\mu_1}{4\pi} \left\{ g_d^1 + \int_0^\infty R_{1,0}^{TM} \frac{e^{jk_{1,z}(z+z')}}{jk_{1,z}} J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right\} \qquad (4.81)$$

$$G_{\phi}^h = \frac{j\omega}{4\pi\sigma_1} \left\{ g_d^1 + \int_0^{\infty} \frac{k_{1,z}^2 R_{1,0}^{TM} + k_1^2 R_{1,0}^{TE}}{k_{\rho}^2} \frac{e^{jk_{1,z}(z+z')}}{jk_{1,z}} J_0(k_{\rho}\rho) k_{\rho} dk_{\rho} \right\} \quad (4.82)$$

$$G_{\phi}^v = \frac{j\omega}{4\pi\sigma_1} \left\{ g_d^1 - \int_0^{\infty} R_{1,0}^{TM} \frac{e^{jk_{1,z}(z+z')}}{jk_{1,z}} J_0(k_{\rho}\rho) k_{\rho} dk_{\rho} \right\} \quad (4.83)$$

4.3.2 Модифицирани Гринови функции за магнетен вектор потенцијал во С формулација

$$\frac{K_A^{c,xz}}{\cos\varphi} = \frac{K_A^{c,yz}}{\sin\varphi} = -\frac{\mu_1}{4\pi} \int_0^{\infty} (R_{1,0}^{TE} + R_{1,0}^{TM}) e^{jk_{1,z}(z+z')} J_1(k_{\rho}\rho) dk_{\rho} \quad (4.84)$$

$$K_A^{c,zz} = \frac{\mu_1}{4\pi} \left\{ g_d^1 + \int_0^{\infty} \left(2R_{1,0}^{TM} + R_{1,0}^{TE} - \frac{k_1^2}{k_{\rho}^2} (R_{1,0}^{TE} + R_{1,0}^{TM}) \right) \frac{e^{jk_{1,z}(z+z')}}{jk_{1,z}} J_0(k_{\rho}\rho) k_{\rho} dk_{\rho} \right\} \quad (4.85)$$

Гриновата функција за електричен скалар потенцијал за формулација С е идентична со Гриновата функција за скалар потенцијал од ХЕД дадена со изразот (4.82)

4.3.3 Гринови функции за потенцијали во А и В формулација

$$K_A^{a/b,xx} = \frac{\mu_1}{4\pi} \left\{ g_d^1 + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (R_{1,0}^{TE} - R_{1,0}^{TM}) \frac{e^{jk_{1,z}(z+z')}}{jk_{1,z}} J_0(k_{\rho}\rho) k_{\rho} dk_{\rho} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cos(2\varphi) \int_0^{\infty} (R_{1,0}^{TE} + R_{1,0}^{TM}) \frac{e^{jk_{1,z}(z+z')}}{jk_{1,z}} J_2(k_{\rho}\rho) k_{\rho} dk_{\rho} \right\} \quad (4.86)$$

$$K_A^{a/b,yy} = \frac{\mu_1}{4\pi} \left\{ g_d^1 + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (R_{1,0}^{TE} - R_{1,0}^{TM}) \frac{e^{jk_{1,z}(z+z')}}{jk_{1,z}} J_0(k_{\rho}\rho) k_{\rho} dk_{\rho} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \cos(2\varphi) \int_0^{\infty} (R_{1,0}^{TE} + R_{1,0}^{TM}) \frac{e^{jk_{1,z}(z+z')}}{jk_{1,z}} J_2(k_{\rho}\rho) k_{\rho} dk_{\rho} \right\} \quad (4.87)$$

$$K_A^{a/b,xy/yx} = \frac{\mu_1}{4\pi} \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \int_0^{\infty} (R_{1,0}^{TE} + R_{1,0}^{TM}) \frac{e^{jk_{1,z}(z+z')}}{jk_{1,z}} J_2(k_{\rho}\rho) k_{\rho} dk_{\rho} \quad (4.88)$$

$$K_A^{a/b,zz} = \frac{\mu_1}{4\pi} \left\{ g_d^1 + \int_0^{\infty} R_{1,0}^{TM} \frac{e^{jk_{1,z}(z+z')}}{jk_{1,z}} J_0(k_{\rho}\rho) k_{\rho} dk_{\rho} \right\} \quad (4.89)$$

$$K_{\phi}^{a/b} = \frac{j\omega}{4\pi\sigma_1} \left\{ g_d^1 - \int_0^{\infty} R_{1,0}^{TM} \frac{e^{jk_{1,z}(z+z')}}{jk_{1,z}} J_0(k_{\rho}\rho) k_{\rho} dk_{\rho} \right\} \quad (4.90)$$

Притоа според решението на системот (4.53) за $m = i$, следи дека $\vec{P} = 0$, а со тоа $K_A^{a,xz} = K_A^{a,yz} = 0$ во формулација А и $K_A^{b,xx} = K_A^{b,yy} = 0$ во формулација В, согласно изразите (4.57) и (4.58).

4.4 Нумеричко интегрирање на Сомерфелдовите интегрални

Решавањето на Гриновите функции подразбира нумеричко решавање на интегрални равенки од Сомерфелдов тип кои се карактеризираат со осцилаторна природа, сингуларен карактер и бавна конвергенција. Комплексноста на постапката зависи од многу фактори, меѓу кои најзначајни се: обликот на Гриновата функција (изразена преку Беселова или Ханкелова функција), карактеристиките на средината во која се анализира проблемот (хомогена или слоевита, спроводна или диелектрична), вертикалното и радијалното растојание меѓу изворот и точката на набљудување, фреквенцијата при која се врши анализата, итн. Врз база на овие фактори, се избира соодветна патека на интегрирање, во комплексна рамнина, по која интегралот најбрзо конвергира.

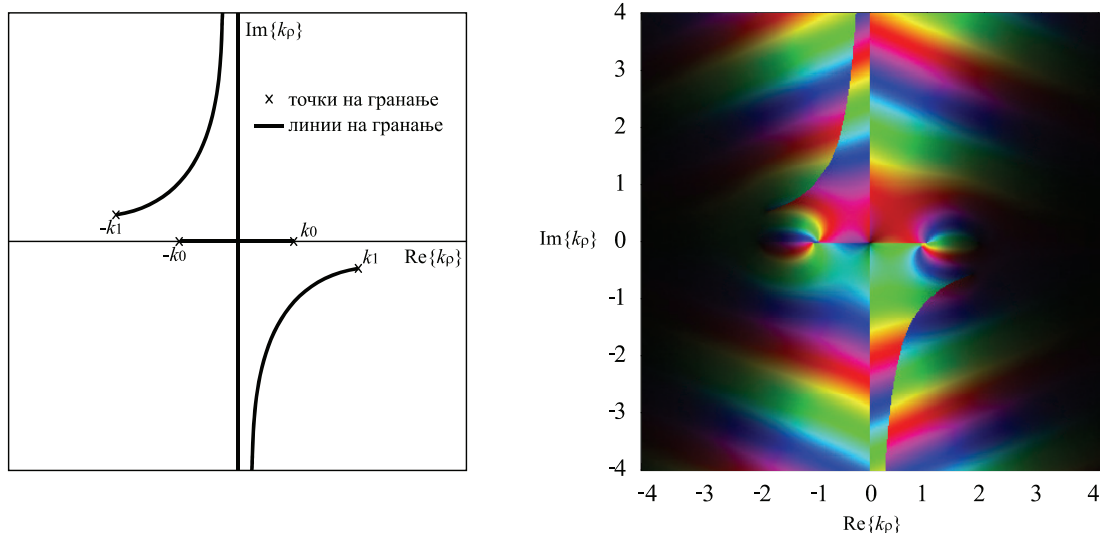
Со цел да се појасни изборот на соодветна патека на интегрирање, анализиран е едноставен облик на интегрална равенка од Сомерфелдов тип, која е применета во Гриновата функција за електричен скалар потенцијал од вертикален електричен дипол во хомогена земја:

$$G_{\phi}^v = \frac{j\omega}{4\pi\sigma_1} \left\{ g_d^1 - \int_0^{\infty} R_{1,0}^{TM} \frac{e^{jk_{1,z}(z+z')}}{jk_{1,z}} J_0(k_{\rho}\rho) k_{\rho} dk_{\rho} \right\} \quad (4.91)$$

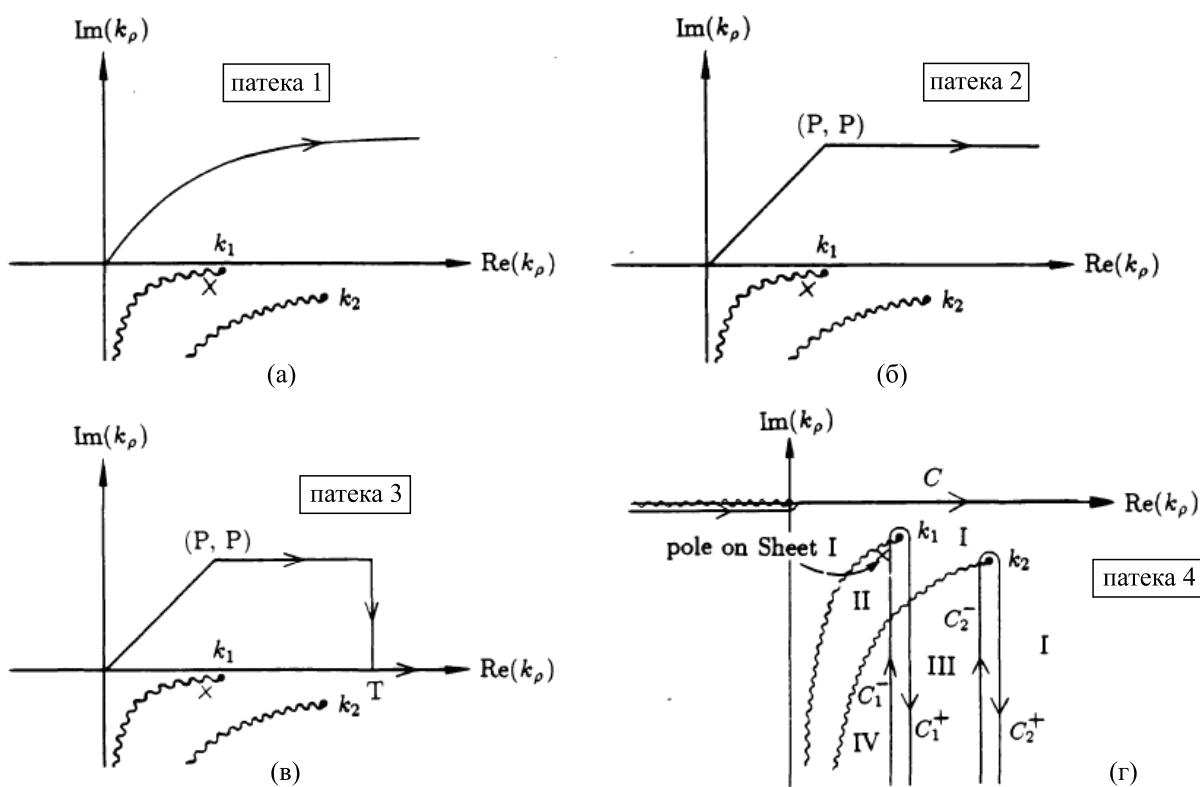
$$k_{1,z} = \sqrt{k_1^2 - k_{\rho}^2} \quad (4.92)$$

Кога $k_{\rho} = k_1$ и $k_{\rho} = \infty$, подинтегралната функција во (4.91) станува сингуларна, односно интегралот нема решение. Овие точки се наоѓаат во комплексна рамнина во која се дефинира и патеката на интегрирање, а се нарекуваат точки на гранање. Линијата што ги поврзува овие точки се нарекува линија на гранање, а решенијата на подинтегралната функција се дисконтинуирани при премин од едната на другата страна на оваа линија. Еден од основните критериуми при дефинирање на патеката на интегрирање е избегнување на точките и линиите на гранање, бидејќи евентуален пресек води кон грешка во решението на интегралот или намалена конвергенција.

Втор битен критериум е определување патека по која интензитетот на решението на подинтегралната функција има најбрзо опаѓање (опаѓањето на интензитет е претставено преку затемнување на Слика 4.5), а решенијата имаат минимална промена на фазата (промената на фазата на решението на подинтегралната функција во анализираниот домен е изразена преку промена на боите на Слика 4.5). Во таа насока се дефинирани повеќе патеки на интегрирање на Сомерфелдовиот интеграл, од кои секоја е соодветна за различни комбинации на радијално растојание ρ , вертикална оддалеченост $h = |z+z'|$ и карактеристики на средина во која се наоѓаат точката со извор и точката на набљудување. Дел од овие патеки кои важат за анализи во хомоген полу-простор и кои се применливи за интегралната равенка (4.91) се претставени на Слика 4.6.



Слика 4.5 Точки и линии на гранање (превземена од [Агу16]) шематски приказ (лево) и приказ на решенија со примена на техника за боење на домен на подинтегралната функција (десно).



Слика 4.6 Патеки на интегрирање на Сомерфелдов интеграл (превземена од [Мис89]):

- а) патека 1 е ефикасна за $h > \rho$, б) патека 2 е ефикасна за мали вредности на $\rho \text{Im}\{k_\rho\}$,
- в) патека 3 е ефикасна за $\rho \gg h$ и за $h \rightarrow 0$, г) патека 4 е ефикасна за многу големо ρ .

Со исклучок на втората патека, која е предложена во [Lyt74], дефинирањето на останатите патеки е поврзано со утврдување на точки и линии на гранање, полови или пак обемни математички модификации на подинтегралната функција, што ја прави постапката особено сложена за спроводна и повеќеслојна земја, како и за решавање на проблеми во кои има промени на вертикалната позиција на изворите и точките на набљудување. Извршените анализи во рамки на ова истражување покажуваат дека втората патека, иако не е ефикасна за големи радијални растојанија, овозможува точни и стабилни решенија во доменот на параметри во анализа на заземјувачи во хомогена и слоевита земја. Тоа се потврдува и во делот за верификација на моделот каде што сите резултати се добиени со нумеричко интегрирање по оваа патека. Притоа треба да се истакне дека усвојувањето на втората патека за интегрирање претставува компромис помеѓу ефикасно нумеричко интегрирање и едноставност на пристапот.

Почетната точка на втората патека се наоѓа во координатниот почеток на комплексната рамнина, а точката на превој се наоѓа во $k_p = (p+jp)$, каде што p се определува според критериумот $p = \min[1/\rho, 1/h]$. Потоа патеката се води паралелно на реалната оска кон бесконечност, односно кон $k_p = (\infty+jp)$ каде решението на подинтегралната функција опаѓа кон нула (види Слика 4.5). Нумеричкото интегрирање по избраната патека се врши со рутинa базирана на адаптивна Ромбергова постапка со променлива должина на чекорот [Mil70].

4.5 Анализа на формулации на Гринови функции во МРІЕ од аспект на нивна примена во анализи на заземјувачи

Во Глава 4.2 беа претставени Гриновите функции за четири карактеристични формулации на потенцијали во МРІЕ. Од наведените, традиционалната формулација за потенцијали е вообичаен избор во анализи на хоризонтални или вертикални заземјувачи и електроди. Нејзината популарност во вакви анализи произлегува од можноста за примена на единствена Гринова функција за аксијалната компонента на магнетниот вектор потенцијал во однос на електродата, односно доволна е примена само на G_A^{xx} за хоризонтални електроди или мрежи и само G_A^{zz} за вертикални електроди. Меѓутоа нејзината примена значително се усложнува за анализа на структури со хоризонтални и вертикални или коси електроди, поради различните Гринови функции за електричен скалар потенцијал кои се однесуваат на хоризонтални и вертикални извори на поле (ХЕД и ВЕД). Исто така нејзината примена се усложнува и при продор на вертикални електроди низ разделна површина меѓу два слоја, поради дисконтинуитетот на Гриновата функција за електричен скалар потенцијал од ВЕД при премин на точката со извор од еден во друг слој [Mic90a].

Формулација С ги овозможува истите предности на традиционалната формулација за анализи на хоризонтални структури, поради идентичните Гринови функции за магнетниот вектор потенцијал од ХЕД. Дополнително, примената на оваа формулација овозможува примена на едноставен математички модел за анализа на структури со хоризонтални и вертикални или коси електроди, поради единствената Гринова функција за електричен скалар потенцијал од ХЕД и ВЕД (идентичен со G_{ϕ}^h од традиционалната формулација). Решенијата на оваа Гринова функција се континуирани при премин на изворот и точката на набљудување низ разделната површина [Gay97] што ја прави префериран избор во однос на останатите формулации, за анализа на проблеми во слоевита средина, каде структурата остварува продор низ различни слоеви [Mic90a].

Двете формулации кои се базираат на изборот на вектор потенцијали предложен од Ертеза и Парк [Ert69], тоа се формулација А и В, исто така овозможуваат примена на едноставен математички модел за анализа на електроди со произволна ориентација поради еднозначната дефиниција на Гринова функција за електричен скалар потенцијал од ХЕД и ВЕД. Според [Mic90a], овие формулации се префериран избор за анализи на проблеми кои се ограничени во еден слој. Помеѓу нив, формулација А е поедноставна за примена во анализи на електроди кои продираат низ слоеви бидејќи применетата Гриновата функција за електричен скалар потенцијал е континуирана при премин на точката со извори низ разделна површина.

Спроведените анализи во текот на подготовката на овој труд покажуваат дека интегралните равенки во Гриновите функции на формулација А подобро конвергираат во однос на оние во формулација С при нумеричко интегрирање по патека 2 од Слика 4.6. Во просек, пресметките извршени со формулација А траат околу 20% пократко во однос на пресметките извршени со формулација С.

Врз основа на горенаведеното може да се констатира дека од аспект на едноставност во примена, формулација С и формулација А се посоодветни за анализа на заземјувачи со произволно ориентирани електроди и/или електроди што продираат низ слоеви, во однос на другите формулации. Помеѓу нив, за понатамошните анализи е усвоена формулација С пред се поради нејзината поширока примена во анализи на електромагнетни проблеми во слоевита средина. Меѓутоа во некои анализи ќе бидат дадени и резултати добиени со примена на формулација А, пред се како потврда на точноста на претставените Гринови функции и воопшто на целокупниот модел за ефикасни анализи на заземјувачи во слоевита средина.

Глава 5

Нискофреквентни апроксимации на Гриновите функции за потенцијали во МРЕ за двослојна и хомогена земја

Во претходната Глава беа претставени Гриновите функции за традиционалната и т.н. А, В и С формулација на потенцијали во МРЕ, во просторен домен и во егзактна математичка форма. Сите Гринови функции содржат сингуларни и осцилаторни интегрални од т.н. Сомерфелдов тип кои бавно конвергираат и кои се решаваат со примена на сложени нумерички постапки за интегрирање. Замената на Гриновите функции со нивни апроксимации е вообичаен пристап да се избегнат сложените постапки за решавање на овие интегрални, а воедно и да се забрзаат пресметките.

Најпопуларните апроксимации се изведени како нискофреквентни апроксимации на Гриновите функции, во аналитички облик, а истите можат да се интерпретираат преку рефлектирани ликови на изворите на поле, во однос на разделните површини помеѓу слоеви. Затоа методите кои се базираат на примена на овие апроксимации се познати и како методи на ликови. Нискофреквентните апроксимации даваат егзактно решение на Гриновите функции за електричен дипол при анализа на проблеми поврзани со стационарни струи [Jon97] односно при 0 Hz, а обезбедуваат висока точност на анализите на заземјувачи во анализи на многу ниски фреквенции, во кои спаѓаат анализи на индустриска фреквенција од 50/60 Hz. Точноста на овие апроксимации при повисоки фреквенции во голема мера зависи од геометријата на заземјувачот и карактеристиките на околната средина [Arn16].

Досега применуваните апроксимации за хомогена и слоевита средина се изведени од т.н. Сомерфелдов избор вектор потенцијали [Som49]. Во оваа дисертација, предложени се нискофреквентни апроксимации за хомогена и двослојна земја, кои се базирани на изборот на потенцијали предложен од Ертеза и Парк [Ert69]. Во насока на утврдување на точноста на постоечките и предложените апроксимации, извршени се параметарски анализи за различни геометрии, фреквенции и карактеристики на хомогена и двослојна земја. Притоа е извршена споредба на апроксимациите со резултати добиени со професионален софтвер електромагнетни симулации FEKO [Fek09]. Според сознанијата на авторот, апроксимациите базирани на изборот на потенцијали од Ертеза и Парк [Ert69], се за прв пат преставени и анализирани во рамките на оваа дисертација и придружните трудови.

Меѓутоа анализата на нискофреквентните апроксимации е важна и од аспект на зголемување на ефикасноста на егзактниот електромагнетен модел. Преку идентификување на сингуларитети, кои во нискофреквентните апроксимации се изразени во аналитички облик, и нивно извлекување од Сомерфелдовите интегрални се постигнува значително подобрување на конвергенцијата на овие интегрални. Овој пристап е применет во понатамошната постапка за зголемување на ефикасноста на егзактниот електромагнетен модел во кој се имплементирани Гриновите функции за традиционалната и т.н. А, В и С формулација на потенцијали. Од тие причини, претставени се нискофреквентните апроксимации на Гриновите функции за анализи во двослојна и хомогена земја, за четирите формулации на потенцијали во МРІЕ, на кои им претходи објаснување на главните чекори во постапката за нивно изведување.

Како и во претходната глава, главните чекори во изведување и претставата на апроксимациите се организирани според конститутивниот избор на потенцијали (Сомерфелдов или избор на Ертеза и Парк) и според позициите на изворите и точките на набљудување (во ист или различни слоеви). Поради комплетност, во Додаток Д е претставено подетално изведување на нискофреквентна апроксимација на Гриновата функција за електричен скалар потенцијал за формулација С, за извор и точка на набљудување во ист слој во двослојна земја, а на сличен начин се изведуваат и другите нискофреквентни апроксимации на Гринови функции за потенцијали.

5.1 Основни претпоставки во развојот на нискофреквентните апроксимации

Со цел да се изведат нискофреквентните апроксимации на Гриновите функции, се усвојува случај кога фреквенцијата тежи кон 0 Hz. Тогаш брановите броеви k_n за секој слој n тежат кон нула, а нивните z -компоненти стануваат приближно еднакви за секој слој и во равенките можат да се изразат преку унифициран бранов број $k_{n,z}$ на кој му се придружуваат карактеристики на слојот во кој се наоѓа точката на набљудување. Поради поедноставување на равенките и на целата постапка за нивно изведување, се претпоставува дека за секој слој со индекс n важи $\mu_n = \mu_0$, што е вообичаена претпоставка при анализа на заземјувачи.

Врз основа на горенаведените претпоставки, Френеловите коефициенти на рефлексија и пропуштање на бранови со ТЕ и ТМ поларизација, дадени во (4.10)-(4.13), се изразуваат преку квазистатичките коефициенти на рефлексија и пропуштање $R_{n,n\pm 1}$ и $T_{n,n\pm 1}$ соодветно:

$$R_{n,n\pm 1}^{TE}(f \rightarrow 0 \text{ Hz}) = 0 \quad R_{n,n\pm 1}^{TM}(f \rightarrow 0 \text{ Hz}) = -R_{n,n\pm 1} = -\frac{\sigma_n - \sigma_{n\pm 1}}{\sigma_n + \sigma_{n\pm 1}} \quad (5.1)$$

$$T_{n,n\pm 1}^{TE}(f \rightarrow 0 \text{ Hz}) = 1 \quad T_{n,n\pm 1}^{TM}(f \rightarrow 0 \text{ Hz}) = T_{n,n\pm 1} = 1 - R_{n,n\pm 1} \quad (5.2)$$

Трансформација на Гриновите функции од интегрална во аналитичка форма се врши со помош на следните идентитети, кои се изведени од Сомерфелдовиот идентитет во Додаток В:

$$g_{l,p}^n = \int_0^{\infty} \frac{e^{-jk_{n,z}h_{l,p}}}{jk_{n,z}} J_0(k_{\rho}\rho) k_{\rho} dk_{\rho} = \frac{e^{-jk_n r_{l,p}}}{r_{l,p}} \quad (5.3)$$

$$\check{g}_{l,p}^n = \int_0^{\infty} e^{-jk_{n,z}h_{l,p}} J_1(k_{\rho}\rho) dk_{\rho} = \frac{1}{\rho} \left(e^{-jk_n h_{l,p}} - \frac{e^{-jk_n r_{l,p}}}{r_{l,p}} h_{l,p} \right) \quad (5.4)$$

$$\hat{g}_{l,p}^n = \int_0^{\infty} \frac{e^{-jk_{n,z}h_{l,p}}}{jk_{n,z}} J_2(k_{\rho}\rho) k_{\rho} dk_{\rho} = \frac{2(e^{-jk_n h_{l,p}} - e^{-jk_n r_{l,p}})}{jk_n \rho^2} - \frac{e^{-jk_n r_{l,p}}}{r_{l,p}} \quad (5.5)$$

при што се земаат предвид следните геометриски релации:

$$\begin{aligned} r_{l,p} &= \sqrt{\rho^2 + h_{l,p}^2}, \quad l = 1, 2, 3, 4. & h_{1,p} &= 2dp + (z + z') \\ \rho &= \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} & h_{2,p} &= 2dp + (z - z') \\ h_d &= |z - z'| & h_{3,p} &= 2dp - (z + z') \\ r_d &= \sqrt{\rho^2 + h_d^2} & h_{4,p} &= 2dp - (z - z') \\ & & h_{5,p} &= 2dp - 2d - (z + z') \end{aligned} \quad (5.6)$$

Кај Гриновите функции во аналитичка форма, означени со $g_{l,p}^n$, $\check{g}_{l,p}^n$ и $\hat{g}_{l,p}^n$, горниот индекс n се однесува на слојот во кој се наоѓа точката на набљудување, додека долниот индекс l се однесува на првиот индекс на еквивалентното вертикално растојание $h_{l,p}$ меѓу точката на набљудување и ликот кој се јавува во p -тиот член од бесконечната сума на ликови во нискофреквентните апроксимации за двослоен модел на земја. Долниот индекс d во Гриновата функција g_d^n , дадена со (4.5), се однесува на директната компонента на бранот од изворот кон точката на набљудување.

Постапката за изведување на нискофреквентни апроксимации на Гринови функции за двослоен модел на земја е детално образложена во [Arn11b] и [Arn12b], притоа ограничувајќи се само на Гринови функции за традиционален избор на потенцијали во МРІЕ. Во оваа Докторска дисертација применети се истите принципи, но изведувањето на нискофреквентни апроксимации е проширено за Гринови функции за сите карактеристични формулации на потенцијали во МРІЕ (традиционалната и т.н. А, В и С формулација). Апроксимациите за хомогена земја се изведени врз база на изведените апроксимации за двослоен модел на земја.

5.2 Постапка за изведување на нискофреквентна апроксимација на Гринови функции за двослојна и хомогена земја

5.2.1 Нискофреквентни апроксимации на Гринови функции за извор и точка на набљудување во ист слој

Прв чекот во постапката е изведување на генерализираните коефициенти на рефлексии во двослојна земја, каде што најгорниот слој (воздух) кој се протега вертикално од $z = 0$ до $z = \infty$ има индекс 0, а најдолниот слој на земја која се протега од $z = -d_1$ до $z = -\infty$ има индекс 2. Во овој случај, Генерализираните коефициенти на рефлексии, кои беа дадени со изразите (4.16) и (4.17), ги добиваат следните вредности:

$$\tilde{R}_{0,-1}^{TE, TM} = 0 \qquad \tilde{R}_{2,3}^{TE, TM} = 0 \qquad (5.7)$$

$$\tilde{R}_{1,0}^{TE, TM} = R_{1,0}^{TE, TM} \qquad \tilde{R}_{1,2}^{TE, TM} = R_{1,2}^{TE, TM} \qquad (5.8)$$

$$\tilde{R}_{2,1}^{TE, TM} = \frac{R_{2,1}^{TE, TM} + R_{1,0}^{TE, TM} e^{-2jk_{1,z}d_1}}{1 + R_{2,1}^{TE, TM} R_{1,0}^{TE, TM} e^{-2jk_{1,z}d_1}} \qquad \tilde{R}_{0,1}^{TE, TM} = \frac{R_{0,1}^{TE, TM} + R_{1,2}^{TE, TM} e^{-2jk_{1,z}d_1}}{1 + R_{0,1}^{TE, TM} R_{1,2}^{TE, TM} e^{-2jk_{1,z}d_1}} \qquad (5.9)$$

Во оваа фаза треба да се истакне дека $\tilde{R}_{0,-1}^{TE, TM}$ и $\tilde{R}_{2,3}^{TE, TM}$ се усвоени со вредност $\tilde{R}_{0,-1}^{TE, TM} = \tilde{R}_{2,3}^{TE, TM} = 0$ како почетни вредности за итеративно пресметување на останатите генерализирани коефициенти на рефлексии, но и во понатамошната постапка за изведување нискофреквентни апроксимации, бидејќи најдолниот и најгорниот слој се неограничени во насока на z - оската.

Врз основа на наведените генерализирани коефициенти на рефлексии, изведени се апроксимации на Гриновите функции за сите случаи кога изворот и точката на набљудување се наоѓаат во иста или различни средини. Со цел поедноставување на изразите, за параметарот d_l кој се однесува на дебелината на најгорниот слој на земја, ќе се користи ознаката d . Во останатите чекори на изведување на нискофреквентните апроксимации ќе важат основните претпоставки, дадени во поглавјето 5.1.

Сега можат да се изразат А-D коефициентите за секоја средина, преку генерализираните коефициенти за рефлексии за двослојна земја:

$$\tilde{M}_m^{TE, TM} = \begin{cases} 1 & m = i = 0 \\ \left(1 - R_{1,0}^{TE, TM} R_{1,2}^{TE, TM} e^{-2jk_{1,z}d}\right)^{-1} & m = i = 1 \\ 1 & m = i = 2 \end{cases} \qquad (5.10)$$

$$A_m^{TE, TM} = \begin{cases} 0 & m = i = 0 \\ R_{1,0}^{TE, TM} \left(e^{jk_{1,z} 2z'} + R_{1,2}^{TE, TM} e^{-jk_{1,z} 2d} \right) \tilde{M}_1^{TE, TM} & m = i = 1 \\ \left(R_{2,1}^{TE, TM} + R_{1,0}^{TE, TM} e^{-jk_{1,z} 2d} \right) \tilde{M}_1^{TE, TM} e^{-jk_{2,z} 2(-d-z')} & m = i = 2 \end{cases} \quad (5.11)$$

$$B_m^{TE, TM} = \begin{cases} 0 & m = i = 0 \\ R_{1,0}^{TE, TM} \left(e^{jk_{1,z} 2z'} - R_{1,2}^{TE, TM} e^{-jk_{1,z} 2d} \right) \tilde{M}_1^{TE, TM} & m = i = 1 \\ \left(R_{2,1}^{TE, TM} + R_{1,0}^{TE, TM} e^{-jk_{1,z} 2d} \right) \tilde{M}_1^{TE, TM} e^{-jk_{2,z} 2(-d-z')} & m = i = 2 \end{cases} \quad (5.12)$$

$$C_m^{TE, TM} = \begin{cases} \left(R_{0,1}^{TE, TM} + R_{1,2}^{TE, TM} e^{-jk_{1,z} 2d} \right) \tilde{M}_1^{TE, TM} e^{-jk_{0,z} 2z'} & m = i = 0 \\ R_{1,2}^{TE, TM} \left(e^{-jk_{1,z} 2(d+z')} + R_{1,0}^{TE, TM} e^{-jk_{1,z} 2d} \right) \tilde{M}_1^{TE, TM} & m = i = 1 \\ 0 & m = i = 2 \end{cases} \quad (5.13)$$

$$D_m^{TE, TM} = \begin{cases} -\left(R_{0,1}^{TE, TM} + R_{1,2}^{TE, TM} e^{-jk_{1,z} 2d} \right) \tilde{M}_1^{TE, TM} e^{-jk_{0,z} 2z'} & m = i = 0 \\ R_{1,2}^{TE, TM} \left(-e^{-jk_{1,z} 2(d+z')} + R_{1,0}^{TE, TM} e^{-jk_{1,z} 2d} \right) \tilde{M}_1^{TE, TM} & m = i = 1 \\ 0 & m = i = 2 \end{cases} \quad (5.14)$$

Од горните изрази може да се забележи дека коефициентите $A_m^{TE, TM}$ и $B_m^{TE, TM}$ се однесуваат на влијанието на горната разделна површина (според $A_m^{TE, TM} = B_m^{TE, TM} = 0$ за $m = 0$), додека коефициентите $C_m^{TE, TM}$ и $D_m^{TE, TM}$ се однесуваат на влијанието од долната разделна површина (според $C_m^{TE, TM} = D_m^{TE, TM} = 0$ за $m = 2$).

Кога изворот и точката на набљудување се во најгорниот или најдолниот слој, А-Д коефициентите се функција од различни бранови броеви. Кога во Гриновите функции се појавуваат мешани бранови броеви, невозможно е изведување на нивна нискофреквентна апроксимација во аналитички облик. За таа цел, како што беше истакнато во поглавјето 5.1, А-Д коефициентите се изразуваат како функција од унифицирана z -компонента на бранов $k_{n,z}$, на кој му се придружени карактеристики на слојот во кој се наоѓа точката на набљудување, односно $n = m$. Ваквиот пристап се применува и за извор и точка на набљудување во различни слоеви, како и кај експоненцијалниот член во Гриновите функции, со кој се множат А-Д коефициентите. Согласно горенаведениот пристап, нискофреквентните апроксимации на А-Д коефициентите можат да се изразат како:

$$\tilde{M}_{m(LF)}^{TM} = \begin{cases} 1 \\ (1 - R_{1,0}R_{1,2}e^{-jk_{n,z}2d})^{-1} \\ 1 \end{cases}, \quad \tilde{M}_{m(LF)}^{TE} = \begin{cases} 1 \\ 1 \\ 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} m = i = 0 \\ m = i = 1 \\ m = i = 2 \end{matrix} \quad (5.15)$$

$$A_{m(LF)}^{TM} = \begin{cases} 0 \\ -R_{1,0}(e^{jk_{n,z}2z'} - R_{1,2}e^{-jk_{n,z}2d})\tilde{M}_{1(LF)}^{TM} \\ -(R_{2,1} + R_{1,0}e^{-jk_{n,z}2d})\tilde{M}_{1(LF)}^{TM}e^{-jk_{n,z}2(-d-z')} \end{cases} \quad \begin{matrix} m = i = 0 \\ m = i = 1 \\ m = i = 2 \end{matrix} \quad (5.16)$$

$$B_{m(LF)}^{TM} = \begin{cases} 0 \\ -R_{1,0}(e^{jk_{n,z}2z'} + R_{1,2}e^{-jk_{n,z}2d})\tilde{M}_{1(LF)}^{TM} \\ -(R_{2,1} + R_{1,0}e^{-jk_{n,z}2d})\tilde{M}_{1(LF)}^{TM}e^{-jk_{n,z}2(-d-z')} \end{cases} \quad \begin{matrix} m = i = 0 \\ m = i = 1 \\ m = i = 2 \end{matrix} \quad (5.17)$$

$$C_{m(LF)}^{TM} = \begin{cases} -(R_{0,1} + R_{1,2}e^{-jk_{n,z}2d})\tilde{M}_{1(LF)}^{TM}e^{-jk_{n,z}2z'} \\ -R_{1,2}(e^{-jk_{n,z}2(d+z')} - R_{1,0}e^{-jk_{n,z}2d})\tilde{M}_{1(LF)}^{TM} \\ 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} m = i = 0 \\ m = i = 1 \\ m = i = 2 \end{matrix} \quad (5.18)$$

$$D_{m(LF)}^{TM} = \begin{cases} (R_{0,1} + R_{1,2}e^{-jk_{n,z}2d})\tilde{M}_{1(LF)}^{TM}e^{-jk_{n,z}2z'} \\ R_{1,2}(e^{-jk_{n,z}2(d+z')} + R_{1,0}e^{-jk_{n,z}2d})\tilde{M}_{1(LF)}^{TM} \\ 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} m = i = 0 \\ m = i = 1 \\ m = i = 2 \end{matrix} \quad (5.19)$$

$$A_{m(LF)}^{TE} = B_{m(LF)}^{TE} = C_{m(LF)}^{TE} = D_{m(LF)}^{TE} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} m = i = 0 \\ m = i = 1 \\ m = i = 2 \end{matrix} \quad (5.20)$$

Во понатамошниот развој на нискофреквентна апроксимација, ќе биде искористен следниот развој во ред, [Bre60]:

$$\tilde{M}_{1(LF)}^{TM} = (1 - R_{1,0}R_{1,2}e^{-jk_{n,z}2d})^{-1} = \sum_{p=0}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p e^{-jk_{n,z}2dp} \quad (5.21)$$

како и идентитетите претставени во поглавјето 5.1. После соодветно организирање на равенките, се добиваат нискофреквентните апроксимации на Гриновите функции за компонентите на магнетниот вектор и електричниот скалар потенцијал, за извор и точка на набљудување во ист слој во двослоен модел на земја.

Доколку за двата слоја за земја, со индекси 1 и 2, се усвојат исти карактеристики, тогаш коефициентите на рефлексива кои се однесуваат на разделната површина помеѓу слоевите со индекс 1 и 2, добиваат вредности $R_{1,2} = R_{2,1} = 0$. Со тоа апроксимациите на Гриновите функции за потенцијали добиваат значително поедноставена аналитичка форма, односно се добиваат нискофреквентни апроксимации на Гринови функции за потенцијали во хомоген полу-простор.

5.2.1.1 Традиционална формулација на потенцијали во МРІЕ

Дијадичната Гринава функција за традиционалната формулација на потенцијали го има следниот облик:

$$\bar{\bar{G}}_A = (\hat{x}\hat{x}' + \hat{y}\hat{y}')G_A^{xx} + \hat{z}\hat{x}'G_A^{zx} + \hat{z}\hat{y}'G_A^{zy} + \hat{z}\hat{z}'G_A^{zz} \quad (5.22)$$

при што за двослоен модел на земја, нискофреквентните апроксимации на компонентите на магнетниот вектор потенцијал се изразени со:

$$G_{A(LF)}^{xx} = \begin{cases} \mathbf{g}_d^0 & , m = i = 0 \\ \mathbf{g}_d^1 & , m = i = 1 \\ \mathbf{g}_d^2 & , m = i = 2 \end{cases} \quad (5.23)$$

$$\frac{G_{A(LF)}^{zx}}{\cos \varphi} = \frac{G_{A(LF)}^{zy}}{\sin \varphi} = \begin{cases} -R_{1,0}\check{\mathbf{g}}_{1,0}^0 - \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[R_{1,0} - \frac{1}{R_{1,0}} \right] \check{\mathbf{g}}_{1,p}^0 & , m = i = 0 \\ -R_{1,0}\check{\mathbf{g}}_{3,0}^1 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[\frac{1}{R_{1,0}} \check{\mathbf{g}}_{1,p}^1 + \check{\mathbf{g}}_{2,p}^1 - R_{1,0}\check{\mathbf{g}}_{3,p}^1 - \check{\mathbf{g}}_{4,p}^1 \right] & , m = i = 1 \\ R_{1,2}\check{\mathbf{g}}_{5,0}^2 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[R_{1,2} - \frac{1}{R_{1,2}} \right] \check{\mathbf{g}}_{5,p}^2 & , m = i = 2 \end{cases} \quad (5.24)$$

$$G_{A(LF)}^{zz} = \begin{cases} \mathbf{g}_d^0 + R_{1,0}\mathbf{g}_{1,0}^0 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[R_{1,0} - \frac{1}{R_{1,0}} \right] \mathbf{g}_{1,p}^0 & , m = i = 0 \\ \mathbf{g}_d^1 - R_{1,0}\mathbf{g}_{3,0}^1 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[-\frac{1}{R_{1,0}} \mathbf{g}_{1,p}^1 + \mathbf{g}_{2,p}^1 - R_{1,0}\mathbf{g}_{3,p}^1 + \mathbf{g}_{4,p}^1 \right] & , m = i = 1 \\ \mathbf{g}_d^2 + R_{1,2}\mathbf{g}_{5,0}^2 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[R_{1,2} - \frac{1}{R_{1,2}} \right] \mathbf{g}_{5,p}^2 & , m = i = 2 \end{cases} \quad (5.25)$$

додека во случај на хомогена земја се добиваат следните изрази:

$$G_{A(LF)}^{xx} = \begin{cases} \mathbf{g}_d^0 & , m = i = 0 \\ \mathbf{g}_d^1 & , m = i = 1 \end{cases} \quad (5.26)$$

$$\frac{G_{A(LF)}^{zx}}{\cos \varphi} = \frac{G_{A(LF)}^{zy}}{\sin \varphi} = \begin{cases} -R_{1,0}\check{\mathbf{g}}_{1,0}^0 & , m = i = 0 \\ -R_{1,0}\check{\mathbf{g}}_{3,0}^1 & , m = i = 1 \end{cases} \quad (5.27)$$

$$G_{A(LF)}^{zz} = \begin{cases} \mathbf{g}_d^0 + R_{1,0}\mathbf{g}_{1,0}^0 & , m = i = 0 \\ \mathbf{g}_d^1 - R_{1,0}\mathbf{g}_{3,0}^1 & , m = i = 1 \end{cases} \quad (5.28)$$

5.2.1.2 Формулација С за потенцијали во МРПЕ

Дијадичната Гринава функција за формулација С го има следниот облик:

$$\bar{\bar{K}}_A^c = (\hat{x}\hat{x}' + \hat{y}\hat{y}')G_A^{xx} + \hat{z}\hat{x}'G_A^{zx} + \hat{z}\hat{y}'G_A^{zy} + \hat{x}\hat{z}'K_A^{c,xz} + \hat{y}\hat{z}'K_A^{c,yz} + \hat{z}\hat{z}'K_A^{c,zz} \quad (5.29)$$

при што $G_{A,m(LF)}^{xx}$, $G_{A,m(LF)}^{zx}$ и $G_{A,m(LF)}^{zy}$ се идентични со изразите во (5.23) и (5.24) соодветно, а се јавуваат три нови компоненти $K_{A,m(LF)}^{c,xz}$, $K_{A,m(LF)}^{c,yz}$ и $K_{A,m(LF)}^{c,zz}$:

$$\frac{K_{A(LF)}^{c,xz}}{\cos \varphi} = \frac{K_{A(LF)}^{c,yz}}{\sin \varphi} = \begin{cases} -R_{1,0}\check{g}_{1,0}^0 - \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[R_{1,0} - \frac{1}{R_{1,0}} \right] \check{g}_{1,p}^0 & , m = i = 0 \\ -R_{1,0}\check{g}_{3,0}^1 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[\frac{1}{R_{1,0}} \check{g}_{1,p}^1 - \check{g}_{2,p}^1 - R_{1,0}\check{g}_{3,p}^1 + \check{g}_{4,p}^1 \right] & , m = i = 1 \\ R_{1,2}\check{g}_{5,0}^2 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[R_{1,2} - \frac{1}{R_{1,2}} \right] \check{g}_{5,p}^2 & , m = i = 2 \end{cases} \quad (5.30)$$

$$K_{A(LF)}^{c,zz} = \begin{cases} g_d^0 + 2R_{1,0}g_{1,0}^0 + 2\sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[R_{1,0} - \frac{1}{R_{1,0}} \right] g_{1,p}^0 & , m = i = 0 \\ g_d^1 - 2R_{1,0}g_{3,0}^1 + 2\sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[-\frac{1}{R_{1,0}} g_{1,p}^1 + g_{2,p}^1 - R_{1,0}g_{3,p}^1 + g_{4,p}^1 \right] & , m = i = 1 \\ g_d^2 + 2R_{1,2}g_{5,0}^2 + 2\sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[R_{1,2} - \frac{1}{R_{1,2}} \right] g_{5,p}^2 & , m = i = 2 \end{cases} \quad (5.31)$$

Во случај кога земјата е хомогена, нискофреквентните апроксимации се:

$$\frac{K_{A(LF)}^{c,xz}}{\cos \varphi} = \frac{K_{A(LF)}^{c,yz}}{\sin \varphi} = \begin{cases} -R_{1,0}\check{g}_{1,0}^0 & , m = i = 0 \\ -R_{1,0}\check{g}_{3,0}^1 & , m = i = 1 \end{cases} \quad (5.32)$$

$$K_{A(LF)}^{c,zz} = \begin{cases} g_d^0 + 2R_{1,0}g_{1,0}^0 & , m = i = 0 \\ g_d^1 - 2R_{1,0}g_{3,0}^1 & , m = i = 1 \end{cases} \quad (5.33)$$

5.2.1.3 Формулација А и формулација В во МРПЕ

Дијадичните Гринови функции за А и В формулација во МРПЕ се изразени како:

$$\bar{\bar{K}}_A^a = \hat{x}\hat{x}'K_A^{a,xx} + \hat{y}\hat{y}'K_A^{a,yy} + (\hat{x}\hat{y}' + \hat{y}\hat{x}')K_A^{a,xy} + \hat{x}\hat{z}'K_A^{a,xz} + \hat{y}\hat{z}'K_A^{a,yz} + \hat{z}\hat{z}'K_A^{a,zz} \quad (5.34)$$

$$\bar{\bar{K}}_A^b = \hat{x}\hat{x}'K_A^{b,xx} + \hat{y}\hat{y}'K_A^{b,yy} + (\hat{x}\hat{y}' + \hat{y}\hat{x}')K_A^{b,xy} + \hat{z}\hat{x}'K_A^{b,zx} + \hat{z}\hat{y}'K_A^{b,zy} + \hat{z}\hat{z}'K_A^{b,zz} \quad (5.35)$$

каде што $K_{A(LF)}^{a,xz} = K_{A(LF)}^{a,yz} = K_{A(LF)}^{b,zx} = K_{A(LF)}^{b,zy} = 0$, $K_{A(LF)}^{a,zz} = K_{A(LF)}^{b,zz} = G_{A(LF)}^{zz}$ од изразот (5.25) за двослојна и (5.28) за хомогена земја, а останатите компоненти им се идентични за извор и точка на набљудување во ист слој и се изразени како:

$$K_{A(LF)}^{a/b,xx} = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{G}_d^0 + \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} -R_{1,0}\mathcal{G}_{1,0}^0 - \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[R_{1,0} - \frac{1}{R_{1,0}} \right] \mathcal{G}_{1,p}^0 \\ + \cos(2\varphi) \left[R_{1,0}\hat{\mathcal{G}}_{1,0}^0 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[R_{1,0} - \frac{1}{R_{1,0}} \right] \hat{\mathcal{G}}_{1,p}^0 \right] \end{array} \right\} \\ \\ \mathcal{G}_d^1 + \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} R_{1,0}\mathcal{G}_{3,0}^1 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[\frac{1}{R_{1,0}} \mathcal{G}_{1,p}^1 + \mathcal{G}_{2,p}^1 + R_{1,0}\mathcal{G}_{3,p}^1 + \mathcal{G}_{4,p}^1 \right] \\ - \cos(2\varphi) \left[R_{1,0}\hat{\mathcal{G}}_{3,0}^1 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[\frac{1}{R_{1,0}} \hat{\mathcal{G}}_{1,p}^1 + \hat{\mathcal{G}}_{2,p}^1 + R_{1,0}\hat{\mathcal{G}}_{3,p}^1 + \hat{\mathcal{G}}_{4,p}^1 \right] \right] \end{array} \right\} \\ \\ \mathcal{G}_d^2 + \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} -R_{1,2}\mathcal{G}_{5,0}^2 - \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[R_{1,2} - \frac{1}{R_{1,2}} \right] \mathcal{G}_{5,p}^2 \\ + \cos(2\varphi) \left[R_{1,2}\hat{\mathcal{G}}_{5,0}^2 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[R_{1,2} - \frac{1}{R_{1,2}} \right] \hat{\mathcal{G}}_{5,p}^2 \right] \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad , m = i = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \quad , m = i = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \quad , m = i = 2$$

$$(5.36)$$

$$K_{A(LF)}^{a/b,xy} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \left[R_{1,0}\hat{\mathcal{G}}_{1,0}^0 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[R_{1,0} - \frac{1}{R_{1,0}} \right] \hat{\mathcal{G}}_{1,p}^0 \right] \\ \\ -\frac{1}{2} \sin(2\varphi) \left[R_{1,0}\hat{\mathcal{G}}_{3,0}^1 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[\frac{1}{R_{1,0}} \hat{\mathcal{G}}_{1,p}^1 + \hat{\mathcal{G}}_{2,p}^1 + R_{1,0}\hat{\mathcal{G}}_{3,p}^1 + \hat{\mathcal{G}}_{4,p}^1 \right] \right] \\ \\ \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \left[R_{1,2}\hat{\mathcal{G}}_{5,0}^2 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[R_{1,2} - \frac{1}{R_{1,2}} \right] \hat{\mathcal{G}}_{5,p}^2 \right] \end{array} \right\} \quad , m = i = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \quad , m = i = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \quad , m = i = 2$$

$$(5.37)$$

$$K_{A(LF)}^{a/b,yy} = \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \mathcal{G}_d^0 + \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} -R_{1,0}\mathcal{G}_{1,0}^0 - \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[R_{1,0} - \frac{1}{R_{1,0}} \right] \mathcal{G}_{1,p}^0 \\ -\cos(2\varphi) \left[R_{1,0}\hat{\mathcal{G}}_{1,0}^0 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[R_{1,0} - \frac{1}{R_{1,0}} \right] \hat{\mathcal{G}}_{1,p}^0 \right] \end{array} \right\} \\ \\ \mathcal{G}_d^1 + \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} R_{1,0}\mathcal{G}_{3,0}^1 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[\frac{1}{R_{1,0}} \mathcal{G}_{1,p}^1 + \mathcal{G}_{2,p}^1 + R_{1,0}\mathcal{G}_{3,p}^1 + \mathcal{G}_{4,p}^1 \right] \\ + \cos(2\varphi) \left[R_{1,0}\hat{\mathcal{G}}_{3,0}^1 \right. \\ \left. + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[\frac{1}{R_{1,0}} \hat{\mathcal{G}}_{1,p}^1 + \hat{\mathcal{G}}_{2,p}^1 + R_{1,0}\hat{\mathcal{G}}_{3,p}^1 + \hat{\mathcal{G}}_{4,p}^1 \right] \right] \end{array} \right\} \\ \\ \mathcal{G}_d^2 + \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} -R_{1,2}\mathcal{G}_{5,0}^2 - \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[R_{1,2} - \frac{1}{R_{1,2}} \right] \mathcal{G}_{5,p}^2 \\ -\cos(2\varphi) \left[R_{1,2}\hat{\mathcal{G}}_{5,0}^2 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[R_{1,2} - \frac{1}{R_{1,2}} \right] \hat{\mathcal{G}}_{5,p}^2 \right] \end{array} \right\} \end{array} \right\} \begin{array}{l} , m = i = 0 \\ \\ , m = i = 1 \\ \\ , m = i = 2 \end{array} \end{array} \right. \quad (5.38)$$

а за случај на хомогена земја можат да се изразат како:

$$K_{A(LF)}^{a/b,xx} = \begin{cases} \mathcal{G}_d^0 - \frac{1}{2}R_{1,0}\mathcal{G}_{1,0}^0 + \frac{1}{2}\cos(2\varphi)R_{1,0}\hat{\mathcal{G}}_{1,0}^0 & , m = i = 0 \\ \mathcal{G}_d^1 + \frac{1}{2}R_{1,0}\mathcal{G}_{3,0}^1 - \frac{1}{2}\cos(2\varphi)R_{1,0}\hat{\mathcal{G}}_{3,0}^1 & , m = i = 1 \end{cases} \quad (5.39)$$

$$K_{A(LF)}^{a/b,yy} = \begin{cases} \mathcal{G}_d^0 - \frac{1}{2}R_{1,0}\mathcal{G}_{1,0}^0 - \frac{1}{2}\cos(2\varphi)R_{1,0}\hat{\mathcal{G}}_{1,0}^0 & , m = i = 0 \\ \mathcal{G}_d^1 + \frac{1}{2}R_{1,0}\mathcal{G}_{3,0}^1 + \frac{1}{2}\cos(2\varphi)R_{1,0}\hat{\mathcal{G}}_{3,0}^1 & , m = i = 1 \end{cases} \quad (5.40)$$

$$K_{A(LF)}^{a/b,xy} = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(2\varphi)R_{1,0}\hat{\mathcal{G}}_{1,0}^0 & , m = i = 0 \\ -\frac{1}{2}\sin(2\varphi)R_{1,0}\hat{\mathcal{G}}_{3,0}^1 & , m = i = 1 \end{cases} \quad (5.41)$$

5.2.1.4 Гринови функции за електричен скалар потенцијал за сите формулации

Нискофреквентната апроксимација на Гриновите функции за електричниот скалар потенцијал е идентична за сите формулации, како и за хоризонтални и за вертикални електрични диполи. За двослоен модел на земја го има следниот облик:

$$G_{\phi(LF)} = \begin{cases} \mathbf{g}_d^0 - R_{1,0}\mathbf{g}_{1,0}^0 - \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[R_{1,0} - \frac{1}{R_{1,0}} \right] \mathbf{g}_{1,p}^0 & , m = i = 0 \\ \mathbf{g}_d^1 + R_{1,0}\mathbf{g}_{3,0}^1 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[\frac{1}{R_{1,0}} \mathbf{g}_{1,p}^1 + \mathbf{g}_{2,p}^1 + R_{1,0}\mathbf{g}_{3,p}^1 + \mathbf{g}_{4,p}^1 \right] & , m = i = 1 \\ \mathbf{g}_d^2 - R_{1,2}\mathbf{g}_{5,0}^2 - \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[R_{1,2} - \frac{1}{R_{1,2}} \right] \mathbf{g}_{5,p}^2 & , m = i = 2 \end{cases} \quad (5.42)$$

додека за хомогена земја има облик:

$$G_{\phi(LF)} = \begin{cases} \mathbf{g}_d^0 - R_{1,0}\mathbf{g}_{1,0}^0 & , m = i = 0 \\ \mathbf{g}_d^1 + R_{1,0}\mathbf{g}_{3,0}^1 & , m = i = 1 \end{cases} \quad (5.43)$$

5.2.2 Нискофреквентни апроксимации на Гринови функции за извор и точка на набљудување во различни слоеви

Во случај на извор и точка на набљудување во различни слоеви, електромагнетните бранови се пропуштаат низ разделните површини меѓу слоеви, а притоа настанува промената на амплитудите на пропуштените бранови која е изразена преку равенките (4.23),(4.24),(4.27) и (4.28). За двослојна земја тие го добиваат следниот облик:

- Амплитуди на пропуштен бран кон нагорен слој ($m < i$):

$$\tilde{A}_{1,0}^{TM/TE+} = T_{1,0}^{TM/TE} e^{jk_{1,z}z'} \left[1 + R_{1,2}^{TM/TE} e^{-2jk_{1,z}(d+z')} \right] \tilde{M}_1^{TM/TE} \quad (5.44)$$

$$\tilde{A}_{2,0}^{TM/TE+} = \tilde{C}_{2,0}^{TM/TE+} = T_{2,1}^{TM/TE} T_{1,0}^{TM/TE} \tilde{M}_1^{TM/TE} e^{-jk_{1,z}d} e^{-jk_{2,z}(-d-z')} \quad (5.45)$$

$$\tilde{A}_{2,1}^{TM/TE+} = \tilde{C}_{2,1}^{TM/TE+} = T_{2,1}^{TM/TE} \tilde{M}_1^{TM/TE} e^{-jk_{2,z}(-d-z')} \quad (5.46)$$

$$\tilde{C}_{1,0}^{TM/TE+} = T_{1,0}^{TM/TE} e^{jk_{1,z}z'} \left[1 - R_{1,2}^{TM/TE} e^{-2jk_{1,z}(d+z')} \right] \tilde{M}_1^{TM/TE} \quad (5.47)$$

- Амплитуди на пропуштен бран кон надолен слој ($m > i$):

$$\tilde{A}_{0,1}^{TM/TE-} = \tilde{C}_{0,1}^{TM/TE-} = T_{0,1}^{TM/TE} \tilde{M}_1^{TM/TE} e^{-jk_{0,z}z'} \quad (5.48)$$

$$\tilde{A}_{0,2}^{TM/TE-} = \tilde{C}_{0,2}^{TM/TE-} = T_{0,1}^{TM/TE} T_{1,2}^{TM/TE} \tilde{M}_1^{TM/TE} e^{-jk_{1,z}d} e^{-jk_{0,z}z'} \quad (5.49)$$

$$\tilde{A}_{1,2}^{TM/TE-} = T_{1,2}^{TM/TE} e^{-jk_{1,z}(d+z')} \left[1 + R_{1,0}^{TM/TE} e^{2jk_{1,z}z'} \right] \tilde{M}_1^{TM/TE} \quad (5.50)$$

$$\tilde{C}_{1,2}^{TM/TE-} = T_{1,2}^{TM/TE} e^{-jk_{1,z}(d+z')} \left[1 - \tilde{R}_{1,0}^{TM/TE} e^{2jk_{1,z}z'} \right] \tilde{M}_1^{TM/TE} \quad (5.51)$$

Следејќи ги истите принципи како во делот 5.2.1, нискофреквентните апроксимации на амплитудите на пропуштен бран го добиваат следниот облик:

- Нискофреквентни апроксимации на амплитуди на пропуштен бран кон нагорен слој:

$$\tilde{A}_{1,0(LF)}^{TM+} = T_{1,0} \tilde{M}_{1(LF)}^{TM} \left[e^{jk_{n,z}z'} - R_{1,2} e^{jk_{n,z}(-2d-z')} \right] \quad \tilde{A}_{1,0(LF)}^{TE+} = e^{jk_{n,z}z'} \quad (5.52)$$

$$\tilde{C}_{1,0(LF)}^{TM+} = T_{1,0} \tilde{M}_{1(LF)}^{TM} \left[e^{jk_{n,z}z'} + R_{1,2} e^{jk_{n,z}(-2d-z')} \right] \quad \tilde{C}_{1,0(LF)}^{TE+} = e^{jk_{n,z}z'} \quad (5.53)$$

$$\tilde{A}_{2,0(LF)}^{TM+} = \tilde{C}_{2,0(LF)}^{TM+} = T_{2,1} T_{1,0} \tilde{M}_{1(LF)}^{TM} e^{jk_{n,z}z} \quad \tilde{A}_{2,0(LF)}^{TE+} = \tilde{C}_{2,0(LF)}^{TE+} = e^{jk_{n,z}z'} \quad (5.54)$$

$$\tilde{A}_{2,1(LF)}^{TM+} = \tilde{C}_{2,1(LF)}^{TM+} = T_{2,1} \tilde{M}_{1(LF)}^{TM} e^{jk_{n,z}(d+z')} \quad \tilde{A}_{2,1(LF)}^{TE+} = \tilde{C}_{2,1(LF)}^{TE+} = e^{jk_{n,z}(d+z')} \quad (5.55)$$

- Нискофреквентни апроксимации на амплитуди на пропуштен бран кон надолан слој:

$$\tilde{A}_{0,1(LF)}^{TM-} = \tilde{C}_{0,1(LF)}^{TM-} = T_{0,1} \tilde{M}_{1(LF)}^{TM} e^{-jk_{n,z}z'} \quad \tilde{A}_{0,1(LF)}^{TE-} = \tilde{C}_{0,1(LF)}^{TE-} = e^{-jk_{n,z}z'} \quad (5.56)$$

$$\tilde{A}_{0,2(LF)}^{TM-} = \tilde{C}_{0,2(LF)}^{TM-} = T_{0,1} T_{1,2} \tilde{M}_{1(LF)}^{TM} e^{-jk_{n,z}(d+z')} \quad \tilde{A}_{0,2(LF)}^{TE-} = \tilde{C}_{0,2(LF)}^{TE-} = e^{-jk_{n,z}(d+z')} \quad (5.57)$$

$$\tilde{A}_{1,2(LF)}^{TM-} = T_{1,2} \tilde{M}_{1(LF)}^{TM} \left[e^{-jk_{n,z}(d+z')} - R_{1,0} e^{-jk_{n,z}(d-z')} \right] \quad \tilde{A}_{1,2(LF)}^{TE-} = e^{-jk_{n,z}(d+z')} \quad (5.58)$$

$$\tilde{C}_{1,2(LF)}^{TM-} = T_{1,2} \tilde{M}_{1(LF)}^{TM} \left[e^{-jk_{n,z}(d+z')} + R_{1,0} e^{-jk_{n,z}(d-z')} \right] \quad \tilde{C}_{1,2(LF)}^{TE-} = e^{-jk_{n,z}(d+z')} \quad (5.59)$$

Нискофреквентните апроксимации на Гриновите функции за извор и точка на набљудување во различни средини за двослоен модел на земја, се добиваат врз основа на горенаведените апроксимации за амплитудите на пропуштени бранови, притоа земајќи ги предвид развојот во редови на коефициентот M_1 даден со изразот (5.21) и идентитетите дадени со релациите (5.3) - (5.5).

Доколку за двата слоја на земја се усвојат исти карактеристики, тогаш коефициентите на рефлексија кои се однесуваат на разделната површина помеѓу слоевите со индекс 1 и 2, добиваат вредности $R_{1,2} = R_{2,1} = 0$, додека коефициентите на пропуштање добиваат вредности $T_{1,2} = T_{2,1} = 1$. Со тоа апроксимациите на Гриновите функции за потенцијали добиваат значително поедноставена аналитичка форма, односно се добиваат нискофреквентни апроксимации на Гринови функции за потенцијали во хомоген полу-простор.

Во наредниот дел се претставени Гриновите функции за потенцијали за случаи на двослојна и хомогена земја, групирани одделно за секоја формулација:

5.2.2.1 Традиционална формулација на потенцијали во МРІЕ

Дијадичната Гринава функција за магнетниот вектор потенцијал во традиционалната формулација на потенцијали го има следниот облик:

$$\bar{\bar{G}}_A = (\hat{x}\hat{x}' + \hat{y}\hat{y}')G_A^{xx} + \hat{z}\hat{x}'G_A^{zx} + \hat{z}\hat{y}'G_A^{zy} + \hat{z}\hat{z}'G_A^{zz} \quad (5.60)$$

притоа за двослоен модел на земја нискофреквентните апроксимации се изразени како:

$$G_{A(LF)}^{xx} = \frac{\mu_0}{4\pi} \begin{cases} g_d^0 & , i=1, m=0 \text{ и } i=2, m=0 \\ g_d^1 & , i=0, m=1 \text{ и } i=2, m=1 \\ g_d^2 & , i=0, m=2 \text{ и } i=1, m=2 \end{cases} \quad (5.61)$$

$$\frac{G_{A(LF)}^{zx}}{\cos \varphi} = \frac{G_{A(LF)}^{zy}}{\sin \varphi} = \frac{\mu_0}{4\pi} \begin{cases} (1-T_{0,1})\check{g}_d^1 - T_{0,1} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[\check{g}_{4p}^1 - \frac{1}{R_{1,0}} \check{g}_{1p}^1 \right] & , i=0, m=1 \\ (1-T_{0,1}T_{1,2})\check{g}_d^2 - T_{0,1}T_{1,2} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \check{g}_{4p}^2 & , i=0, m=2 \\ (1-T_{1,2})\check{g}_d^2 - T_{1,2} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[\check{g}_{4p}^2 + \frac{1}{R_{1,2}} \check{g}_{5p}^2 \right] & , i=1, m=2 \\ (T_{1,0}-1)\check{g}_d^0 + T_{1,0} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[\check{g}_{2p}^0 + \frac{1}{R_{1,0}} \check{g}_{1p}^0 \right] & , i=1, m=0 \\ (T_{2,1}T_{1,0}-1)\check{g}_d^0 + T_{2,1}T_{1,0} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \check{g}_{2p}^0 & , i=2, m=0 \\ (T_{2,1}-1)\check{g}_d^1 + T_{2,1} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[\check{g}_{2p}^1 - \frac{1}{R_{1,2}} \check{g}_{5p}^1 \right] & , i=2, m=1 \end{cases} \quad (5.62)$$

$$G_{A(LF)}^{zz} = \frac{\mu_0}{4\pi} \begin{cases} T_{0,1} \left\{ g_d^1 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[g_{4p}^1 - \frac{1}{R_{1,0}} g_{1p}^1 \right] \right\} & , i=0, m=1 \\ T_{0,1}T_{1,2} \left\{ g_d^2 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p g_{4p}^2 \right\} & , i=0, m=2 \\ T_{1,2} \left\{ g_d^2 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[g_{4p}^2 - \frac{1}{R_{1,2}} g_{5p}^2 \right] \right\} & , i=1, m=2 \\ T_{1,0} \left\{ g_d^0 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[g_{2p}^0 - \frac{1}{R_{1,0}} g_{1p}^0 \right] \right\} & , i=1, m=0 \\ T_{2,1}T_{1,0} \left\{ g_d^0 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p g_{2p}^0 \right\} & , i=2, m=0 \\ T_{2,1} \left\{ g_d^1 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[g_{2p}^1 - \frac{1}{R_{1,2}} g_{5p}^1 \right] \right\} & , i=2, m=1 \end{cases} \quad (5.63)$$

$$G_{\phi(LF)} = \frac{j\omega}{4\pi\sigma_m} \begin{cases} T_{0,1} \left\{ g_d^1 + \sum_{p=0}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[g_{4p}^1 + \frac{1}{R_{1,0}} g_{1p}^1 \right] \right\} & , i=0, m=1 \\ T_{0,1}T_{1,2} \left\{ g_d^2 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p g_{4p}^2 \right\} & , i=0, m=2 \\ T_{1,2} \left\{ g_d^2 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[g_{4p}^2 + \frac{1}{R_{1,2}} g_{5p}^2 \right] \right\} & , i=1, m=2 \\ T_{1,0} \left\{ g_d^0 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[g_{2p}^0 + \frac{1}{R_{1,0}} g_{1p}^0 \right] \right\} & , i=1, m=0 \\ T_{2,1}T_{1,0} \left\{ g_d^0 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p g_{2p}^0 \right\} & , i=2, m=0 \\ T_{2,1} \left\{ g_d^1 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[g_{2p}^1 + \frac{1}{R_{1,2}} g_{5p}^1 \right] \right\} & , i=2, m=1 \end{cases} \quad (5.64)$$

додека за модел на хомогена земја, го имаат следниот облик:

$$G_{A(LF)}^{xx} = \frac{\mu_0}{4\pi} \begin{cases} g_d^1 & , i=0, m=1 \\ g_d^0 & , i=1, m=0 \end{cases} \quad (5.65)$$

$$\frac{G_{A(LF)}^{zx}}{\cos\varphi} = \frac{G_{A(LF)}^{zy}}{\sin\varphi} = \frac{\mu_0}{4\pi} \begin{cases} (1-T_{0,1}) \check{g}_d^1 & , i=0, m=1 \\ (T_{1,0}-1) \check{g}_d^0 & , i=1, m=0 \end{cases} \quad (5.66)$$

$$G_{A(LF)}^{zz} = \frac{\mu_0}{4\pi} \begin{cases} T_{0,1} g_d^1 & , i=0, m=1 \\ T_{1,0} g_d^0 & , i=1, m=0 \end{cases} \quad (5.67)$$

$$G_{\phi(LF)} = \frac{j\omega}{4\pi\sigma_m} \begin{cases} T_{0,1} g_d^1 & , i=0, m=1 \\ T_{1,0} g_d^0 & , i=1, m=0 \end{cases} \quad (5.68)$$

5.2.2.2 Формулација С за потенцијали во МРІЕ

Дијадичната Гринава функција за магнетниот вектор потенцијал во формулација С го има следниот облик:

$$\bar{\bar{K}}_A^c = (\hat{x}\hat{x}' + \hat{y}\hat{y}')G_A^{xx} + \hat{z}\hat{x}'G_A^{zx} + \hat{z}\hat{y}'G_A^{zy} + \hat{x}\hat{z}'K_A^{c,xz} + \hat{y}\hat{z}'K_A^{c,yz} + \hat{z}\hat{z}'K_A^{c,zz} \quad (5.69)$$

при што $G_{A(LF)}^{xx}$, $G_{A(LF)}^{zx}$, $G_{A(LF)}^{zy}$ и $G_{\phi(LF)}$ се идентични со изразите во (5.61), (5.62) и (5.64) за двослоен модел и (5.65), (5.66) и (5.68) за хомоген модел на земја, соодветно, а се јавуваат три нови компоненти $K_{A(LF)}^{c,xz}$, $K_{A(LF)}^{c,yz}$ и $K_{A(LF)}^{c,zz}$. За двослоен модел на земја, нискофреквентните апроксимации на новите компоненти на Гриновите функции се:

$$\frac{K_{A(LF)}^{c,xz}}{\cos \varphi} = \frac{K_{A(LF)}^{c,yz}}{\sin \varphi} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \begin{array}{l} \left(1 - \frac{k_0^2}{k_1^2} T_{0,1}\right) \check{g}_d^1 - \frac{k_0^2}{k_1^2} T_{0,1} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[\check{g}_{4p}^1 + \frac{1}{R_{1,0}} \check{g}_{1p}^1 \right] \quad , i=0, m=1 \\ \left(1 - \frac{k_0^2}{k_2^2} T_{0,1} T_{1,2}\right) \check{g}_d^2 - \frac{k_0^2}{k_2^2} T_{0,1} T_{1,2} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \check{g}_{4p}^2 \quad , i=0, m=2 \\ \left(1 - \frac{k_1^2}{k_2^2} T_{1,2}\right) \check{g}_d^2 - \frac{k_1^2}{k_2^2} T_{1,2} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[\check{g}_{4p}^2 - \frac{1}{R_{1,2}} \check{g}_{5p}^2 \right] \quad , i=1, m=2 \\ \left(\frac{k_1^2}{k_0^2} T_{1,0} - 1\right) \check{g}_d^0 + \frac{k_1^2}{k_0^2} T_{1,0} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[\check{g}_{2p}^0 - \frac{1}{R_{1,0}} \check{g}_{1p}^0 \right] \quad , i=1, m=0 \\ \left(\frac{k_2^2}{k_0^2} T_{2,1} T_{1,0} - 1\right) \check{g}_d^0 + \frac{k_2^2}{k_0^2} T_{2,1} T_{1,0} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \check{g}_{2p}^0 \quad , i=2, m=0 \\ \left(\frac{k_2^2}{k_1^2} T_{2,1} - 1\right) \check{g}_d^1 + \frac{k_2^2}{k_1^2} T_{2,1} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[\check{g}_{2p}^1 + \frac{1}{R_{1,2}} \check{g}_{5p}^1 \right] \quad , i=2, m=1 \end{array} \right. \quad (5.70)$$

$$K_{A(LF)}^{c,zz} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \begin{array}{l} \left[\left(1 + \frac{k_0^2}{k_1^2} T_{0,1} - 1\right) g_d^1 + \left(1 + \frac{k_0^2}{k_1^2} T_{0,1} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[g_{4p}^1 - \frac{1}{R_{1,0}} g_{1p}^1 \right] \right) \right] \quad , i=0, m=1 \\ \left[\left(1 + \frac{k_0^2}{k_2^2} T_{0,1} T_{1,2} - 1\right) g_d^2 + \left(1 + \frac{k_0^2}{k_2^2} T_{0,1} T_{1,2} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p g_{4p}^2 \right) \right] \quad , i=0, m=2 \\ \left[\left(1 + \frac{k_1^2}{k_2^2} T_{1,2} - 1\right) g_d^2 + \left(1 + \frac{k_1^2}{k_2^2} T_{1,2} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[g_{4p}^2 - \frac{1}{R_{1,2}} g_{5p}^2 \right] \right) \right] \quad , i=1, m=2 \\ \left[\left(1 + \frac{k_1^2}{k_0^2} T_{1,0} - 1\right) g_d^0 + \left(1 + \frac{k_1^2}{k_0^2} T_{1,0} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[g_{2p}^0 - \frac{1}{R_{1,0}} g_{1p}^0 \right] \right) \right] \quad , i=1, m=0 \\ \left[\left(1 + \frac{k_2^2}{k_0^2} T_{2,1} T_{1,0} - 1\right) g_d^0 + \left(1 + \frac{k_2^2}{k_0^2} T_{2,1} T_{1,0} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p g_{2p}^0 \right) \right] \quad , i=2, m=0 \\ \left[\left(1 + \frac{k_2^2}{k_1^2} T_{2,1} - 1\right) g_d^1 + \left(1 + \frac{k_2^2}{k_1^2} T_{2,1} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[g_{2p}^1 - \frac{1}{R_{1,2}} g_{5p}^1 \right] \right) \right] \quad , i=2, m=1 \end{array} \right. \quad (5.71)$$

а во случај со хомогена земја, апроксимациите го добиваат следниот облик:

$$\frac{K_{A(LF)}^{c,xz}}{\cos \varphi} = \frac{K_{A(LF)}^{c,yz}}{\sin \varphi} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \begin{array}{l} \left(1 - \frac{k_0^2}{k_1^2} T_{0,1}\right) \check{g}_d^1 \quad , i=0, m=1 \\ \left(\frac{k_1^2}{k_0^2} T_{1,0} - 1\right) \check{g}_d^0 \quad , i=1, m=0 \end{array} \right. \quad (5.72)$$

$$K_{A(LF)}^{c,zz} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \begin{array}{l} \left[\left(1 + \frac{k_0^2}{k_1^2} T_{0,1} - 1\right) g_d^1 \right] \quad , i=0, m=1 \\ \left[\left(1 + \frac{k_1^2}{k_0^2} T_{1,0} - 1\right) g_d^0 \right] \quad , i=1, m=0 \end{array} \right. \quad (5.73)$$

5.2.2.3 Формулација А за потенцијали во МРИЕ

Кога изворот и точката на набљудување се во различни слоеви, тогаш компонентите на Гриновите функции за вектор потенцијали за А и В формулација се разликуваат. Дијадичната Гринова функција за формулација А во МРИЕ е изразена како:

$$\bar{\bar{K}}_A^a = \hat{x}\hat{x}'K_A^{a,xx} + \hat{y}\hat{y}'K_A^{a,yy} + (\hat{x}\hat{y}' + \hat{y}\hat{x}')K_A^{a,xy} + \hat{x}\hat{z}'K_A^{a,xz} + \hat{y}\hat{z}'K_A^{a,yz} + \hat{z}\hat{z}'K_A^{a,zz} \quad (5.74)$$

каде што нискофреквентните апроксимации на Гриновите функции за магнетен вектор потенцијал се:

$$K_{A(LF)}^{a,xx} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{1}{2} \cos(2\varphi) \left[(1-T_{0,1}) \hat{g}_d^1 - T_{0,1} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[\hat{g}_{4p}^1 + \frac{1}{R_{1,0}} \hat{g}_{1p}^1 \right] \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[(1+T_{0,1}) g_d^1 + T_{0,1} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[g_{4p}^1 + \frac{1}{R_{1,0}} g_{1p}^1 \right] \right] \right] \right\} , i=0, m=1 \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{1}{2} \cos(2\varphi) \left[(1-T_{0,1} T_{1,2}) \hat{g}_d^2 - T_{0,1} T_{1,2} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \hat{g}_{4p}^2 \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[(1+T_{0,1} T_{1,2}) g_d^2 + T_{0,1} T_{1,2} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p g_{4p}^2 \right] \right] \right\} , i=0, m=2 \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{1}{2} \cos(2\varphi) \left[(1-T_{1,2}) \hat{g}_d^2 - T_{1,2} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[\hat{g}_{4p}^2 + \frac{1}{R_{1,2}} \hat{g}_{5p}^2 \right] \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[(1+T_{1,2}) g_d^2 + T_{1,2} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[g_{4p}^2 + \frac{1}{R_{1,2}} g_{5p}^2 \right] \right] \right] \right\} , i=1, m=2 \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{1}{2} \cos(2\varphi) \left[(1-T_{1,0}) \hat{g}_d^0 - T_{1,0} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[\hat{g}_{2p}^0 + \frac{1}{R_{1,0}} \hat{g}_{1p}^0 \right] \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[(1+T_{1,0}) g_d^0 + T_{1,0} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[g_{2p}^0 + \frac{1}{R_{1,0}} g_{1p}^0 \right] \right] \right] \right\} , i=1, m=0 \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{1}{2} \cos(2\varphi) \left[(1-T_{2,1} T_{1,0}) \hat{g}_d^0 - T_{2,1} T_{1,0} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \hat{g}_{2p}^0 \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[(1+T_{2,1} T_{1,0}) g_d^0 + T_{2,1} T_{1,0} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p g_{2p}^0 \right] \right] \right\} , i=2, m=0 \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{1}{2} \cos(2\varphi) \left[(1-T_{2,1}) \hat{g}_d^1 - T_{2,1} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[\hat{g}_{2p}^1 + \frac{1}{R_{1,2}} \hat{g}_{5p}^1 \right] \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[(1+T_{2,1}) g_d^1 + T_{2,1} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[g_{2p}^1 + \frac{1}{R_{1,2}} g_{5p}^1 \right] \right] \right] \right\} , i=2, m=1 \end{array} \right. \quad (5.75)$$

$$K_{A(LF)}^{a,yy} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cos(2\varphi) \left[(1 - T_{0,1}) \hat{g}_d^1 - T_{0,1} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[\hat{g}_{4p}^1 + \frac{1}{R_{1,0}} \hat{g}_{1p}^1 \right] \right] \\ + \frac{1}{2} \left[(1 + T_{0,1}) g_d^1 + T_{0,1} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[g_{4p}^1 + \frac{1}{R_{1,0}} g_{1p}^1 \right] \right] \end{array} \right] \\ , i = 0, m = 1 \\ \\ \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cos(2\varphi) \left[(1 - T_{0,1} T_{1,2}) \hat{g}_d^2 - T_{0,1} T_{1,2} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \hat{g}_{4p}^2 \right] \\ + \frac{1}{2} \left[(1 + T_{0,1} T_{1,2}) g_d^2 + T_{0,1} T_{1,2} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p g_{4p}^2 \right] \end{array} \right] \\ , i = 0, m = 2 \\ \\ \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cos(2\varphi) \left[(1 - T_{1,2}) \hat{g}_d^2 - T_{1,2} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[\hat{g}_{4p}^2 + \frac{1}{R_{1,2}} \hat{g}_{5p}^2 \right] \right] \\ + \frac{1}{2} \left[(1 + T_{1,2}) g_d^2 + T_{1,2} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[g_{4p}^2 + \frac{1}{R_{1,2}} g_{5p}^2 \right] \right] \end{array} \right] \\ , i = 1, m = 2 \\ \\ \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cos(2\varphi) \left[(1 - T_{1,0}) \hat{g}_d^0 - T_{1,0} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[\hat{g}_{2p}^0 + \frac{1}{R_{1,0}} \hat{g}_{1p}^0 \right] \right] \\ + \frac{1}{2} \left[(1 + T_{1,0}) g_d^0 + T_{1,0} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[g_{2p}^0 + \frac{1}{R_{1,0}} g_{1p}^0 \right] \right] \end{array} \right] \\ , i = 1, m = 0 \\ \\ \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cos(2\varphi) \left[(1 - T_{2,1} T_{1,0}) \hat{g}_d^0 - T_{2,1} T_{1,0} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \hat{g}_{2p}^0 \right] \\ + \frac{1}{2} \left[(1 + T_{2,1} T_{1,0}) g_d^0 + T_{2,1} T_{1,0} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p g_{2p}^0 \right] \end{array} \right] \\ , i = 2, m = 0 \\ \\ \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cos(2\varphi) \left[(1 - T_{2,1}) \hat{g}_d^1 - T_{2,1} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[\hat{g}_{2p}^1 + \frac{1}{R_{1,2}} \hat{g}_{5p}^1 \right] \right] \\ + \frac{1}{2} \left[(1 + T_{2,1}) g_d^1 + T_{2,1} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[g_{2p}^1 + \frac{1}{R_{1,2}} g_{5p}^1 \right] \right] \end{array} \right] \\ , i = 2, m = 1 \end{array} \right. \quad (5.76)$$

$$K_{A(LF)}^{a,xy} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \left\{ \begin{array}{l} \left(1 - T_{0,1}\right) \hat{g}_d^1 - T_{0,1} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[\hat{g}_{4p}^1 + \frac{1}{R_{1,0}} \hat{g}_{1p}^1 \right] \quad , i=0, m=1 \\ \left(1 - T_{0,1} T_{1,2}\right) \hat{g}_d^2 - T_{0,1} T_{1,2} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \hat{g}_{4p}^2 \quad , i=0, m=2 \\ \left(1 - T_{1,2}\right) \hat{g}_d^2 - T_{1,2} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[\hat{g}_{4p}^2 + \frac{1}{R_{1,2}} \hat{g}_{5p}^2 \right] \quad , i=1, m=2 \\ \left(1 - T_{1,0}\right) \hat{g}_d^0 - T_{1,0} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[\hat{g}_{2p}^0 + \frac{1}{R_{1,0}} \hat{g}_{1p}^0 \right] \quad , i=1, m=0 \\ \left(1 - T_{2,1} T_{1,0}\right) \hat{g}_d^0 - T_{2,1} T_{1,0} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \hat{g}_{2p}^0 \quad , i=2, m=0 \\ \left(1 - T_{2,1}\right) \hat{g}_d^1 - T_{2,1} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[\hat{g}_{2p}^1 + \frac{1}{R_{1,2}} \hat{g}_{5p}^1 \right] \quad , i=2, m=1 \end{array} \right. \quad (5.77)$$

$$\frac{K_{A(LF)}^{a,xz}}{\cos \varphi} = \frac{K_{A(LF)}^{a,yz}}{\sin \varphi} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \begin{array}{l} \left(1 - \frac{k_0^2}{k_1^2}\right) T_{0,1} \left\{ \check{g}_d^1 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[\check{g}_{4p}^1 + \frac{1}{R_{1,0}} \check{g}_{1p}^1 \right] \right\} \quad , i=0, m=1 \\ \left(1 - \frac{k_0^2}{k_2^2}\right) T_{0,1} T_{1,2} \left\{ \check{g}_d^2 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \check{g}_{4p}^2 \right\} \quad , i=0, m=2 \\ \left(1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}\right) T_{1,2} \left\{ \check{g}_d^2 + \sum_{p=0}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[\check{g}_{4p}^2 - \frac{1}{R_{1,2}} \check{g}_{5p}^2 \right] \right\} \quad , i=1, m=2 \\ \left(\frac{k_1^2}{k_0^2} - 1\right) T_{1,0} \left\{ \check{g}_d^0 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[\check{g}_{2p}^0 - \frac{1}{R_{1,0}} \check{g}_{1p}^0 \right] \right\} \quad , i=1, m=0 \\ \left(\frac{k_2^2}{k_0^2} - 1\right) T_{2,1} T_{1,0} \left\{ \check{g}_d^0 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \check{g}_{2p}^0 \right\} \quad , i=2, m=0 \\ \left(\frac{k_2^2}{k_1^2} - 1\right) T_{2,1} \left\{ \check{g}_d^1 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[\check{g}_{2p}^1 + \frac{1}{R_{1,2}} \check{g}_{5p}^1 \right] \right\} \quad , i=2, m=1 \end{array} \right. \quad (5.78)$$

$$K_{A(LF)}^{a,zz} = \frac{\mu_0}{4\pi} \begin{cases} \frac{k_0^2}{k_1^2} T_{0,1} \left\{ g_d^1 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[g_{4p}^1 - \frac{1}{R_{1,0}} g_{1p}^1 \right] \right\} & , i=0, m=1 \\ \frac{k_0^2}{k_2^2} T_{0,1} T_{1,2} \left\{ g_d^2 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p g_{4p}^2 \right\} & , i=0, m=2 \\ \frac{k_1^2}{k_2^2} T_{1,2} \left\{ g_d^2 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[g_{4p}^2 - \frac{1}{R_{1,2}} g_{5p}^2 \right] \right\} & , i=1, m=2 \\ \frac{k_1^2}{k_0^2} T_{1,0} \left\{ g_d^0 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[g_{2p}^0 - \frac{1}{R_{1,0}} g_{1p}^0 \right] \right\} & , i=1, m=0 \\ \frac{k_2^2}{k_0^2} T_{2,1} T_{1,0} \left\{ g_d^0 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p g_{2p}^0 \right\} & , i=2, m=0 \\ \frac{k_2^2}{k_1^2} T_{2,1} \left\{ g_d^1 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[g_{2p}^1 - \frac{1}{R_{1,2}} g_{5p}^1 \right] \right\} & , i=2, m=1 \end{cases} \quad (5.79)$$

а за случај со хомогена земја се дадени со изразите:

$$K_{A(LF)}^{a,xx} = \frac{\mu_0}{4\pi} \begin{cases} \frac{1}{2} \cos(2\varphi) (1 - T_{0,1}) \hat{g}_d^1 + \frac{1}{2} (1 + T_{0,1}) g_d^1 & , i=0, m=1 \\ \frac{1}{2} \cos(2\varphi) (1 - T_{1,0}) \hat{g}_d^0 + \frac{1}{2} (1 + T_{1,0}) g_d^0 & , i=1, m=0 \end{cases} \quad (5.80)$$

$$K_{A(LF)}^{a,yy} = \frac{\mu_0}{4\pi} \begin{cases} -\frac{1}{2} \cos(2\varphi) (1 - T_{0,1}) \hat{g}_d^1 + \frac{1}{2} (1 + T_{0,1}) g_d^1 & , i=0, m=1 \\ -\frac{1}{2} \cos(2\varphi) (1 - T_{1,0}) \hat{g}_d^0 + \frac{1}{2} (1 + T_{1,0}) g_d^0 & , i=1, m=0 \end{cases} \quad (5.81)$$

$$K_{A(LF)}^{a,xy} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \begin{cases} (1 - T_{0,1}) \hat{g}_d^1 & , i=0, m=1 \\ (1 - T_{1,0}) \hat{g}_d^0 & , i=1, m=0 \end{cases} \quad (5.82)$$

$$\frac{K_{A(LF)}^{a,xz}}{\cos \varphi} = \frac{K_{A(LF)}^{a,yz}}{\sin \varphi} = \frac{\mu_0}{4\pi} \begin{cases} \left(1 - \frac{k_0^2}{k_1^2} \right) T_{0,1} \check{g}_d^1 & , i=0, m=1 \\ \left(\frac{k_1^2}{k_0^2} - 1 \right) T_{1,0} \check{g}_d^0 & , i=1, m=0 \end{cases} \quad (5.83)$$

$$K_{A(LF)}^{a,zz} = \frac{\mu_0}{4\pi} \begin{cases} \frac{k_0^2}{k_1^2} T_{0,1} g_d^1 & , i=0, m=1 \\ \frac{k_1^2}{k_0^2} T_{1,0} g_d^0 & , i=1, m=0 \end{cases} \quad (5.84)$$

Нискофреквентните апроксимации на Гриновите функции за електричниот скалар потенцијал се идентични за сите формулации и се дадени со изразите (5.64) за двослојна земја и (5.68) за хомогена земја.

5.2.2.4 Формулација В за потенцијали во МРИЕ

Дијадичната Гринава функција за формулација В во МРИЕ е изразена како:

$$\bar{\bar{K}}_A^b = \hat{x}\hat{x}'K_A^{b,xx} + \hat{y}\hat{y}'K_A^{b,yy} + (\hat{x}\hat{y}' + \hat{y}\hat{x}')K_A^{b,xy} + \hat{z}\hat{z}'K_A^{b,zz} + \hat{z}\hat{y}'K_A^{b,zy} + \hat{z}\hat{x}'K_A^{b,zx} \quad (5.85)$$

каде што нискофреквентните апроксимации на Гриновите функции за магнетен вектор потенцијал се:

$$K_{A(LF)}^{b,xx} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{1}{2} \cos(2\varphi) \left[\left(1 - T_{0,1} \frac{k_0^2}{k_1^2} \right) \hat{g}_d^1 - T_{0,1} \frac{k_0^2}{k_1^2} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[\hat{g}_{4p}^1 + \frac{1}{R_{1,0}} \hat{g}_{1p}^1 \right] \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[\left(1 + T_{0,1} \frac{k_0^2}{k_1^2} \right) g_d^1 + T_{0,1} \frac{k_0^2}{k_1^2} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[g_{4p}^1 + \frac{1}{R_{1,0}} g_{1p}^1 \right] \right] \right] \right\} \quad , i=0, m=1 \\ \\ \left[\frac{1}{2} \cos(2\varphi) \left[\left(1 - \frac{k_0^2}{k_2^2} T_{0,1} T_{1,2} \right) \hat{g}_d^2 - \frac{k_0^2}{k_2^2} T_{0,1} T_{1,2} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \hat{g}_{4p}^2 \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{k_0^2}{k_2^2} T_{0,1} T_{1,2} \right) g_d^2 + \frac{k_0^2}{k_2^2} T_{0,1} T_{1,2} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p g_{4p}^2 \right] \right] \right\} \quad , i=0, m=2 \\ \\ \left[\frac{1}{2} \cos(2\varphi) \left[\left(1 - \frac{k_1^2}{k_2^2} T_{1,2} \right) \hat{g}_d^2 - \frac{k_1^2}{k_2^2} T_{1,2} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[\hat{g}_{4p}^2 + \frac{1}{R_{1,2}} \hat{g}_{5p}^2 \right] \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{k_1^2}{k_2^2} T_{1,2} \right) g_d^2 + \frac{k_1^2}{k_2^2} T_{1,2} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[g_{4p}^2 + \frac{1}{R_{1,2}} g_{5p}^2 \right] \right] \right] \right\} \quad , i=1, m=2 \\ \\ \left[\frac{1}{2} \cos(2\varphi) \left[\left(1 - \frac{k_1^2}{k_0^2} T_{1,0} \right) \hat{g}_d^0 - \frac{k_1^2}{k_0^2} T_{1,0} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[\hat{g}_{2p}^0 + \frac{1}{R_{1,0}} \hat{g}_{1p}^0 \right] \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{k_1^2}{k_0^2} T_{1,0} \right) g_d^0 + \frac{k_1^2}{k_0^2} T_{1,0} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[g_{2p}^0 + \frac{1}{R_{1,0}} g_{1p}^0 \right] \right] \right] \right\} \quad , i=1, m=0 \\ \\ \left[\frac{1}{2} \cos(2\varphi) \left[\left(1 - \frac{k_2^2}{k_0^2} T_{2,1} T_{1,0} \right) \hat{g}_d^0 - \frac{k_2^2}{k_0^2} T_{2,1} T_{1,0} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \hat{g}_{2p}^0 \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{k_2^2}{k_0^2} T_{2,1} T_{1,0} \right) g_d^0 + \frac{k_2^2}{k_0^2} T_{2,1} T_{1,0} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p g_{2p}^0 \right] \right] \right\} \quad , i=2, m=0 \\ \\ \left[\frac{1}{2} \cos(2\varphi) \left[\left(1 - \frac{k_2^2}{k_1^2} T_{2,1} \right) \hat{g}_d^1 - \frac{k_2^2}{k_1^2} T_{2,1} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[\hat{g}_{2p}^1 + \frac{1}{R_{1,2}} \hat{g}_{5p}^1 \right] \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{k_2^2}{k_1^2} T_{2,1} \right) g_d^1 + \frac{k_2^2}{k_1^2} T_{2,1} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[g_{2p}^1 + \frac{1}{R_{1,2}} g_{5p}^1 \right] \right] \right] \right\} \quad , i=2, m=1 \end{array} \right. \quad (5.86)$$

$$K_{A(LF)}^{b,yy} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \begin{array}{l} \left[-\frac{1}{2} \cos(2\varphi) \left[\left(1 - T_{0,1} \frac{k_0^2}{k_1^2} \right) \hat{g}_d^1 - T_{0,1} \frac{k_0^2}{k_1^2} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[\hat{g}_{4p}^1 + \frac{1}{R_{1,0}} \hat{g}_{1p}^1 \right] \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[\left(1 + T_{0,1} \frac{k_0^2}{k_1^2} \right) g_d^1 + T_{0,1} \frac{k_0^2}{k_1^2} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[g_{4p}^1 + \frac{1}{R_{1,0}} g_{1p}^1 \right] \right] \right] \\ \\ \left[-\frac{1}{2} \cos(2\varphi) \left[\left(1 - \frac{k_0^2}{k_2^2} T_{0,1} T_{1,2} \right) \hat{g}_d^2 - \frac{k_0^2}{k_2^2} T_{0,1} T_{1,2} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \hat{g}_{4p}^2 \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{k_0^2}{k_2^2} T_{0,1} T_{1,2} \right) g_d^2 + \frac{k_0^2}{k_2^2} T_{0,1} T_{1,2} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p g_{4p}^2 \right] \right] \\ \\ \left[-\frac{1}{2} \cos(2\varphi) \left[\left(1 - \frac{k_1^2}{k_2^2} T_{1,2} \right) \hat{g}_d^2 - \frac{k_1^2}{k_2^2} T_{1,2} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[\hat{g}_{4p}^2 + \frac{1}{R_{1,2}} \hat{g}_{5p}^2 \right] \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{k_1^2}{k_2^2} T_{1,2} \right) g_d^2 + \frac{k_1^2}{k_2^2} T_{1,2} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[g_{4p}^2 + \frac{1}{R_{1,2}} g_{5p}^2 \right] \right] \right] \\ \\ \left[-\frac{1}{2} \cos(2\varphi) \left[\left(1 - \frac{k_1^2}{k_0^2} T_{1,0} \right) \hat{g}_d^0 - \frac{k_1^2}{k_0^2} T_{1,0} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[\hat{g}_{2p}^0 + \frac{1}{R_{1,0}} \hat{g}_{1p}^0 \right] \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{k_1^2}{k_0^2} T_{1,0} \right) g_d^0 + \frac{k_1^2}{k_0^2} T_{1,0} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[g_{2p}^0 + \frac{1}{R_{1,0}} g_{1p}^0 \right] \right] \right] \\ \\ \left[-\frac{1}{2} \cos(2\varphi) \left[\left(1 - \frac{k_2^2}{k_0^2} T_{2,1} T_{1,0} \right) \hat{g}_d^0 - \frac{k_2^2}{k_0^2} T_{2,1} T_{1,0} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \hat{g}_{2p}^0 \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{k_2^2}{k_0^2} T_{2,1} T_{1,0} \right) g_d^0 + \frac{k_2^2}{k_0^2} T_{2,1} T_{1,0} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p g_{2p}^0 \right] \right] \\ \\ \left[-\frac{1}{2} \cos(2\varphi) \left[\left(1 - \frac{k_2^2}{k_1^2} T_{2,1} \right) \hat{g}_d^1 - \frac{k_2^2}{k_1^2} T_{2,1} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[\hat{g}_{2p}^1 + \frac{1}{R_{1,2}} \hat{g}_{5p}^1 \right] \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{k_2^2}{k_1^2} T_{2,1} \right) g_d^1 + \frac{k_2^2}{k_1^2} T_{2,1} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[g_{2p}^1 + \frac{1}{R_{1,2}} g_{5p}^1 \right] \right] \right] \end{array} \right\} \begin{array}{l} , i=0, m=1 \\ \\ , i=0, m=2 \\ \\ , i=1, m=2 \\ \\ , i=1, m=0 \\ \\ , i=2, m=0 \\ \\ , i=2, m=1 \end{array} \quad (5.87)$$

$$K_{A(LF)}^{b,xy} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \left\{ \begin{array}{l} \left(1 - \frac{k_0^2}{k_1^2} T_{0,1}\right) \hat{g}_d^1 - \frac{k_0^2}{k_1^2} T_{0,1} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[\hat{g}_{4p}^1 + \frac{1}{R_{1,0}} \hat{g}_{1p}^1 \right] \quad , i=0, m=1 \\ \left(1 - \frac{k_0^2}{k_2^2} T_{0,1} T_{1,2}\right) \hat{g}_d^2 - \frac{k_0^2}{k_2^2} T_{0,1} T_{1,2} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \hat{g}_{4p}^2 \quad , i=0, m=2 \\ \left(1 - \frac{k_1^2}{k_2^2} T_{1,2}\right) \hat{g}_d^2 - \frac{k_1^2}{k_2^2} T_{1,2} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[\hat{g}_{4p}^2 + \frac{1}{R_{1,2}} \hat{g}_{5p}^2 \right] \quad , i=1, m=2 \\ \left(1 - \frac{k_1^2}{k_0^2} T_{1,0}\right) \hat{g}_d^0 - \frac{k_1^2}{k_0^2} T_{1,0} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[\hat{g}_{2p}^0 + \frac{1}{R_{1,0}} \hat{g}_{1p}^0 \right] \quad , i=1, m=0 \\ \left(1 - \frac{k_2^2}{k_0^2} T_{2,1} T_{1,0}\right) \hat{g}_d^0 - \frac{k_2^2}{k_0^2} T_{2,1} T_{1,0} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \hat{g}_{2p}^0 \quad , i=2, m=0 \\ \left(1 - \frac{k_2^2}{k_1^2} T_{2,1}\right) \hat{g}_d^1 - \frac{k_2^2}{k_1^2} T_{2,1} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[\hat{g}_{2p}^1 + \frac{1}{R_{1,2}} \hat{g}_{5p}^1 \right] \quad , i=2, m=1 \end{array} \right. \quad (5.88)$$

$$\frac{K_{A(LF)}^{b,xz}}{\cos \varphi} = \frac{K_{A(LF)}^{b,yz}}{\sin \varphi} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{k_0^2}{k_1^2} - 1\right) T_{0,1} \left\{ \check{g}_d^1 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[\check{g}_{4p}^1 - \frac{1}{R_{1,0}} \check{g}_{1p}^1 \right] \right\} \quad , i=0, m=1 \\ \left(\frac{k_0^2}{k_2^2} - 1\right) T_{0,1} T_{1,2} \left\{ \check{g}_d^2 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \check{g}_{4p}^2 \right\} \quad , i=0, m=2 \\ \left(\frac{k_1^2}{k_2^2} - 1\right) T_{1,2} \left\{ \check{g}_d^2 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[\check{g}_{4p}^2 + \frac{1}{R_{1,2}} \check{g}_{5p}^2 \right] \right\} \quad , i=1, m=2 \\ \left(1 - \frac{k_1^2}{k_0^2}\right) T_{1,0} \left\{ \check{g}_d^0 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[\check{g}_{2p}^0 + \frac{1}{R_{1,0}} \check{g}_{1p}^0 \right] \right\} \quad , i=1, m=0 \\ \left(1 - \frac{k_2^2}{k_0^2}\right) T_{2,1} T_{1,0} \left\{ \check{g}_d^0 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \check{g}_{2p}^0 \right\} \quad , i=2, m=0 \\ \left(1 - \frac{k_2^2}{k_1^2}\right) T_{2,1} \left\{ \check{g}_d^1 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[\check{g}_{2p}^1 - \frac{1}{R_{1,2}} \check{g}_{5p}^1 \right] \right\} \quad , i=2, m=1 \end{array} \right. \quad (5.89)$$

$$K_{A(LF)}^{b,zz} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \begin{array}{l} T_{0,1} \left\{ \mathcal{G}_d^1 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[\mathcal{G}_{4p}^1 - \frac{1}{R_{1,0}} \mathcal{G}_{1p}^1 \right] \right\} \quad , i=0, m=1 \\ T_{0,1} T_{1,2} \left\{ \mathcal{G}_d^2 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \mathcal{G}_{4p}^2 \right\} \quad , i=0, m=2 \\ T_{1,2} \left\{ \mathcal{G}_d^2 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[\mathcal{G}_{4p}^2 - \frac{1}{R_{1,2}} \mathcal{G}_{5p}^2 \right] \right\} \quad , i=1, m=2 \\ T_{1,0} \left\{ \mathcal{G}_d^0 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[\mathcal{G}_{2p}^0 - \frac{1}{R_{1,0}} \mathcal{G}_{1p}^0 \right] \right\} \quad , i=1, m=0 \\ T_{2,1} T_{1,0} \left\{ \mathcal{G}_d^0 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \mathcal{G}_{2p}^0 \right\} \quad , i=2, m=0 \\ T_{2,1} \left\{ \mathcal{G}_d^1 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \left[\mathcal{G}_{2p}^1 - \frac{1}{R_{1,2}} \mathcal{G}_{5p}^1 \right] \right\} \quad , i=2, m=1 \end{array} \right. \quad (5.90)$$

а за модел на хомогена земја се дадени со изразите:

$$K_{A(LF)}^{b,xx} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cos(2\varphi) \left(1 - T_{0,1} \frac{k_0^2}{k_1^2} \right) \hat{\mathcal{G}}_d^1 + \frac{1}{2} \left(1 + T_{0,1} \frac{k_0^2}{k_1^2} \right) \mathcal{G}_d^1 \quad , i=0, m=1 \\ \frac{1}{2} \cos(2\varphi) \left(1 - \frac{k_1^2}{k_0^2} T_{1,0} \right) \hat{\mathcal{G}}_d^0 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k_1^2}{k_0^2} T_{1,0} \right) \mathcal{G}_d^0 \quad , i=1, m=0 \end{array} \right. \quad (5.91)$$

$$K_{A(LF)}^{b,yy} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cos(2\varphi) \left(1 - T_{0,1} \frac{k_0^2}{k_1^2} \right) \hat{\mathcal{G}}_d^1 + \frac{1}{2} \left(1 + T_{0,1} \frac{k_0^2}{k_1^2} \right) \mathcal{G}_d^1 \quad , i=0, m=1 \\ -\frac{1}{2} \cos(2\varphi) \left(1 - \frac{k_1^2}{k_0^2} T_{1,0} \right) \hat{\mathcal{G}}_d^0 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k_1^2}{k_0^2} T_{1,0} \right) \mathcal{G}_d^0 \quad , i=1, m=0 \end{array} \right. \quad (5.92)$$

$$K_{A(LF)}^{b,xy} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \left\{ \begin{array}{l} \left(1 - \frac{k_0^2}{k_1^2} T_{0,1} \right) \hat{\mathcal{G}}_d^1 \quad , i=0, m=1 \\ \left(1 - \frac{k_1^2}{k_0^2} T_{1,0} \right) \hat{\mathcal{G}}_d^0 \quad , i=1, m=0 \end{array} \right. \quad (5.93)$$

$$\frac{K_{A(LF)}^{b,xz}}{\cos \varphi} = \frac{K_{A(LF)}^{b,yz}}{\sin \varphi} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{k_0^2}{k_1^2} - 1 \right) T_{0,1} \check{\mathcal{G}}_d^1 \quad , i=0, m=1 \\ \left(1 - \frac{k_1^2}{k_0^2} \right) T_{1,0} \check{\mathcal{G}}_d^0 \quad , i=1, m=0 \end{array} \right. \quad (5.94)$$

$$K_{A(LF)}^{b,zz} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \begin{array}{l} T_{0,1} \mathcal{G}_d^1 \quad , i=0, m=1 \\ T_{1,0} \mathcal{G}_d^0 \quad , i=1, m=0 \end{array} \right. \quad (5.95)$$

5.3 Толкување на членовите во нискофреквентните апроксимации на Гриновите функции

Од равенките во претходното поглавје може да се заклучи дека кај двослоен модел на земја, нискофреквентните апроксимации на Гриновите функции се претставени преку бесконечна сума од серии ликови на изворот во однос на разделните површини.

На Слика 5.1 се прикажани позициите на нултата и првата серија на ликови за два случаи: кога изворот и точката на набљудување се наоѓаат во првиот слој на земја; и кога изворот е во првиот слој на земја, а точката на набљудување е во воздух. На сликата се дадени и соодветните Гринови функции за кои се прикажани ликовите, а кои се однесуваат на нискофреквентната апроксимација на Гриновата функција за електричниот скалар потенцијал во двослојна земја, која е идентичен за сите формулации. Секој лик е претставен и означен со соодветна боја на сликата и во Гриновата функција. Изразите за Гриновите функции се организирани така што секој ред во Гриновите функции се однесува за одделна серија на ликови со индекс p . Со $h_{l,p}$ е прикажано еквивалентното вертикално растојание меѓу секој лик (со долни индекси l и p) и точката на набљудување, а со $r_{l,p}$ нивното меѓусебно растојание (значењето на индексите е објаснето во поглавје 5.1).

Со пораст на индексот p на серијата ликови во бесконечната сума на ликови, расте и меѓусебното растојание меѓу ликот и точката на набљудување, а со тоа се намалува неговиот придонес во решението на нискофреквентната апроксимација на Гриновата функција. Тоа значи дека членовите кои се однесуваат на директното влијание (во случајов означен како g_d^m и со црвена боја) и членовите со најмала вредност на долниот индекс l од нултата и првата серија на ликови кои се со долен индекс $p = 0$ и $p = 1$ (во случајов означени како $g_{\min(l),0}^m$ и $g_{\min(l),1}^m$, и со светла сина и портокалова боја, соодветно), а кои се однесуваат на примарните рефлексии од најблиските разделни површини, имаат најголем придонес во решението и се со најизразен сингуларен карактер во однос на останатите членови на нискофреквентната апроксимација. Значењето на коефициентите на рефлексии и пропуштање пред Гриновите функции за ликовите $g_{l,p}^n$, може да се разбере преку следната анализа на рефлектирани и пропуштени бранови за двата примери.

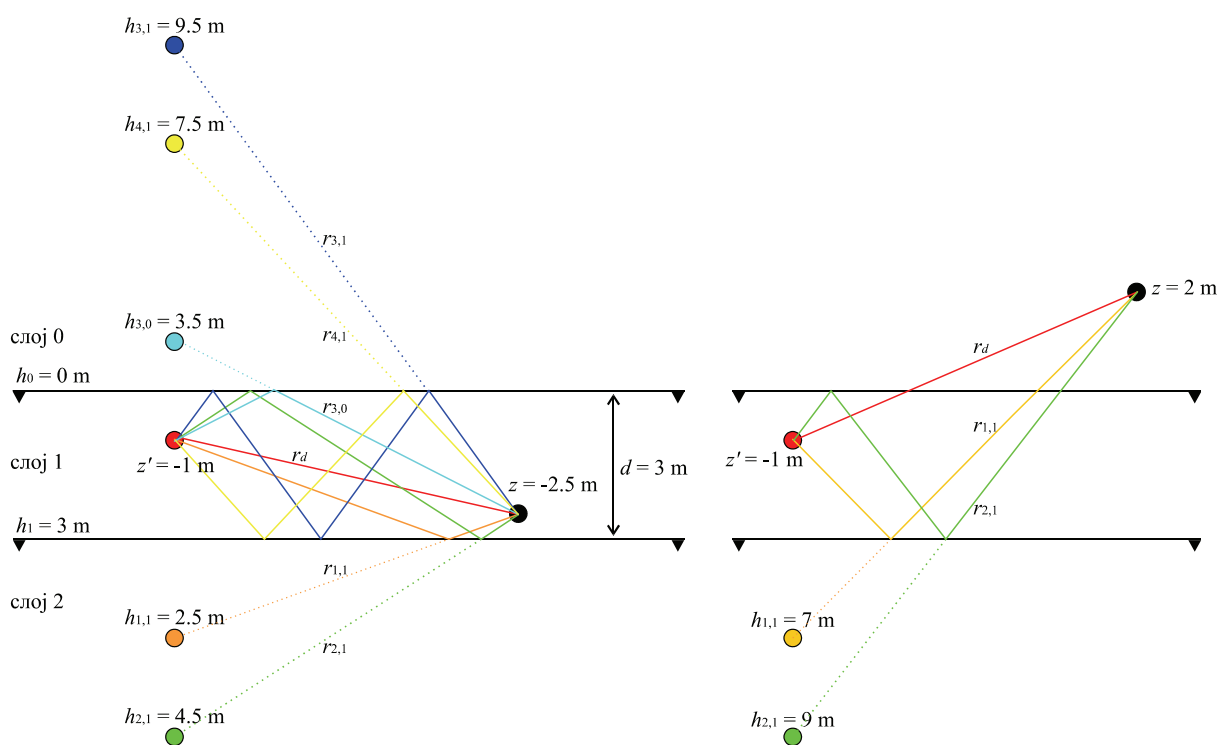
Кога изворот и точката на набљудување се во ист слој со индекс 1, тогаш:

- директната компонента g_d^1 (црвена боја) не се рефлектира или пропушта во друг слој, па истата не се множи со коефициент на рефлексии или пропуштање;
- со ликот $g_{3,1}^1$ од првата серија ликови (сина боја) е претставена двојната рефлексии на бранот од горната разделна површина со слојот 0 и единечната рефлексии од долната разделна површина со слојот 2, затоа се множи со $R_{1,0}^2 R_{1,2}$.

Кога изворот е во слојот 1, а точката на набљудување во слојот 0 тогаш:

- директната компонента g_d^0 (црвена боја) се пропушта од слојот 1 во слојот 0 па истата се множи со коефициентот на пропуштање $T_{1,0}$;
- ликот $g_{2,1}^0$ од првата серија ликови (зелена боја) ја претставува рефлексијата на бранот од горната и долната разделна површина, со слоевите 0 и 1 соодветно, и пропуштањето на бранот од слојот 1 во слојот 0. Од тие причини ликот се множи со $T_{1,0}R_{1,0}R_{1,2}$.

На сличен начин може да се толкува формирањето и на останатите ликови. Притоа треба да се земе предвид дека иако некои од ликовите се претставени преку Гринови функции во посложен облик, различен од оној за простирање на бран во хомоген простор, или пак се помножени со дополнителни коефициенти, нивните позиции и придонеси остануваат исти како и во анализираниите примери.



$$G_{\Phi_{1,1}(LF)} = \boxed{g_d^1} + \boxed{R_{1,0}g_{3,0}^1} + \boxed{R_{1,2}g_{1,1}^1} + \boxed{R_{1,0}R_{1,2}g_{2,1}^1} + \boxed{R_{1,0}^2R_{1,2}g_{3,1}^1} + \boxed{R_{1,0}R_{1,2}g_{4,1}^1} + \sum_{p=2}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[\frac{1}{R_{1,0}}g_{1,p}^1 + g_{2,p}^1 + R_{1,0}g_{3,p}^1 + g_{4,p}^1 \right]$$

$$G_{\Phi_{1,0}(LF)} = \boxed{T_{1,0}g_d^0} + \boxed{T_{1,0}R_{1,2}g_{1,1}^0} + \boxed{T_{1,0}R_{1,0}R_{1,2}g_{2,1}^0} + T_{1,0} \sum_{p=2}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[g_{2,p}^0 + \frac{1}{R_{1,0}}g_{1,p}^0 \right]$$

Слика 5.1 Позиција на ликови за извор и точка на набљудување во ист и различен слој за двослоен модел на земја.

5.4 Анализа на точноста на нискофреквентните апроксимации

Анализа на точноста на нискофреквентните апроксимации е извршена во фреквенциски домен, за фреквенции во опсег од 100 Hz до 10 MHz и за различни конфигурации на електроди кои се наоѓаат во горниот слој на двослојна земја. Анализирани се три нискофреквентни апроксимации на Гринови функции:

- апроксимација која произлегува од Поклингтоновата интегрална равенка за електрично поле [Grc90], а се применува во анализи во хомогена земја;
- апроксимација која произлегува од традиционалната формулација на потенцијали во МРПЕ, која е предложена во [Arn16] за хомогена земја и [Arn10a], [Arn11b] и [Arn12b] за двослојна земја, а е дадена со изразите (5.22)-(5.25) и (5.42);
- апроксимација која произлегува од изборот на вектор потенцијали предложен од Ертеза и Парк [Ert69] (идентична за А и В формулација за електроди во ист слој), која за хомогена земја е предложена во [Mar18a], а во оваа докторска дисертација е проширена за двослојна земја и е дадена со изразите (5.34)-(5.48) и (5.42).

Притоа треба да се истакне дека првите две формулации се базирани на Сомерфелдовиот избор на вектор потенцијали [Som49]. Анализирани се струите во четири конфигурации на електроди:

- хоризонтална електрода со должина 10 m, која е централно напојувана со сериски напонски генератор,
- пасивна хоризонтална електрода со должина од 5 m, која се води паралелно и на иста длабочина со напојуваната електрода,
- пасивна хоризонтална електрода со должина од 5 m, која се води нормално и на иста длабочина со напојуваната електрода,
- пасивна вертикална електрода со должина од 1.5 m, која се води покрај напојуваната електрода, а чија највисока точка е на длабочина од 0.5 m

Сите анализи се направени за електроди со радиус од 0.007 m, поставени на длабочина од 0.5 m, во двослојна земја со дебелина $d_1=2.5$ m на горниот слој. Карактеристиките на двослојната земја се изразени преку факторот на рефлексивност K [Daw79a], кој е пресметан како статичка апроксимација на $R_{2,1}^{TM}$ од (4.11):

$$K = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \quad (5.96)$$

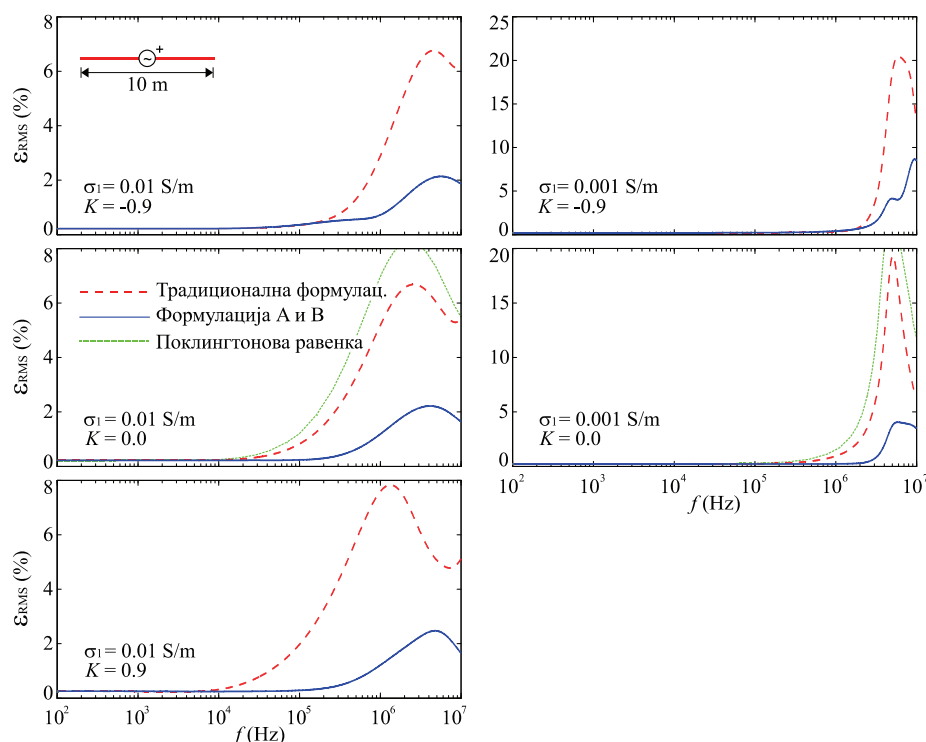
при што вредностите на специфичната спроводност на горниот слој на земја се поставени на $\sigma_1 = 0.01$ - или 0.001 S/m, а специфичната спроводност на долниот слој се менува според фактор на рефлексивност $K = -0.9$, 0.0 или $+0.9$. За релативната пермитивност и пермеабилност се усвоени вредности $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2} = 10$ и $\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$.

Во случајот со пасивна вертикална електрода, длабочината на највисоката точка изнесува 0.5 m. Електродите се побудени од сериски напонски генератор со ефективна вредност на напон од 1 V, кој е поврзан сериски во средината на 10 m долгата хоризонтална електрода.

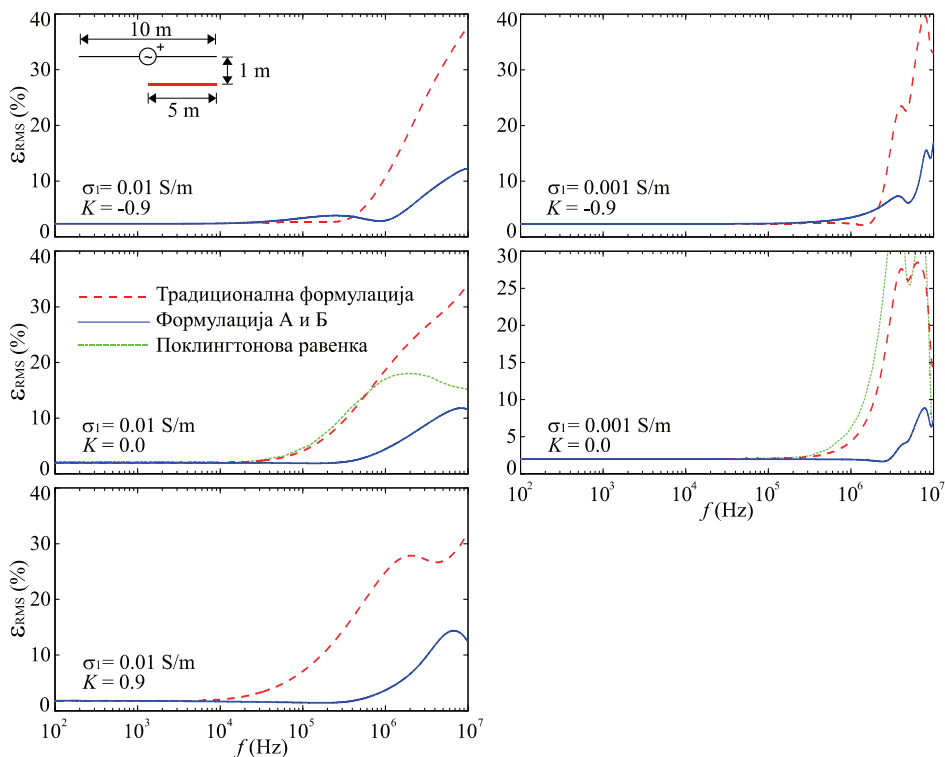
Точноста на наведените апроксимации е анализирана преку нормализираната ефективна грешка ε_{RMS} за пресметаните лонгитудинални струи во електродите (во првиот случај во напојуваната, а во останатите случаи во пасивните електроди), притоа користејќи ги резултатите од професионалниот софтвер за електромагнетни симулации FEKO [Fek09] како референтни. Нормализираната ефективна грешка на пресметаните лонгитудинални струи во електродите се определува со изразот [Pog74]:

$$\varepsilon_{\text{RMS}} = \left[\frac{\sum_{n=1}^{N_s} |\hat{I}_n^{\text{APP}} - \hat{I}_n^{\text{FEKO}}|^2}{\sum_{n=1}^{N_s} |\hat{I}_n^{\text{FEKO}}|^2} \right]^{1/2} \cdot 100 (\%) \quad (5.97)$$

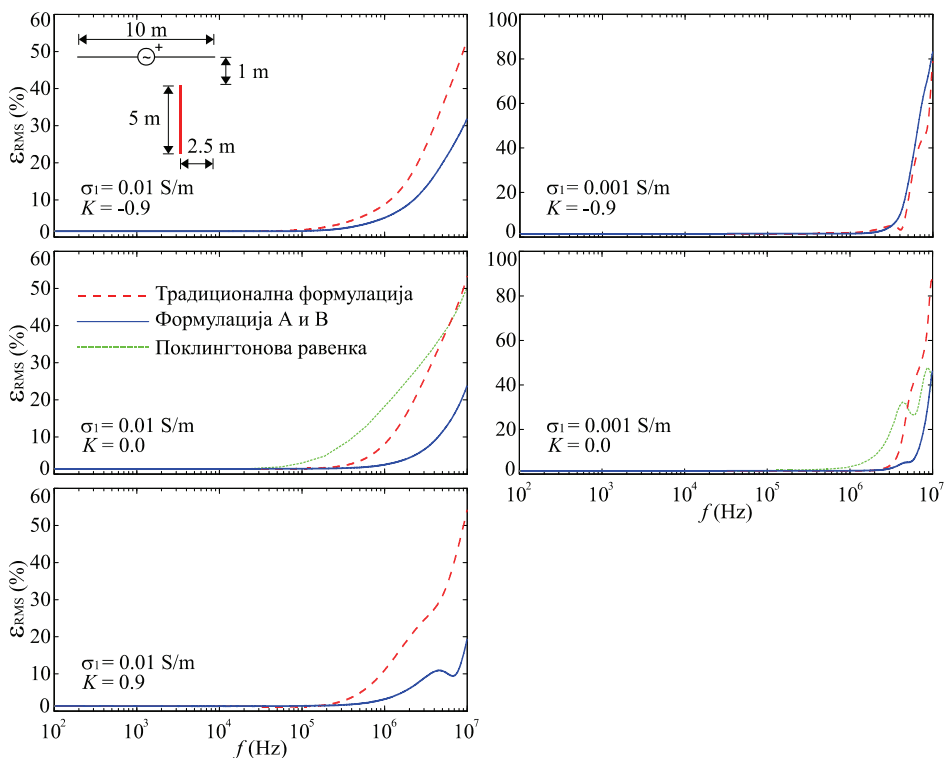
каде што \hat{I}_n^{FEKO} е фазор на лонгитудиналните струи пресметани со FEKO, \hat{I}_n^{APP} е фазор на пресметаните струи со нискофреквентните апроксимации, а N_s е вкупниот број на сегменти на кои е дискретизирана електродата и за кои е постигната конвергенција на резултатите.



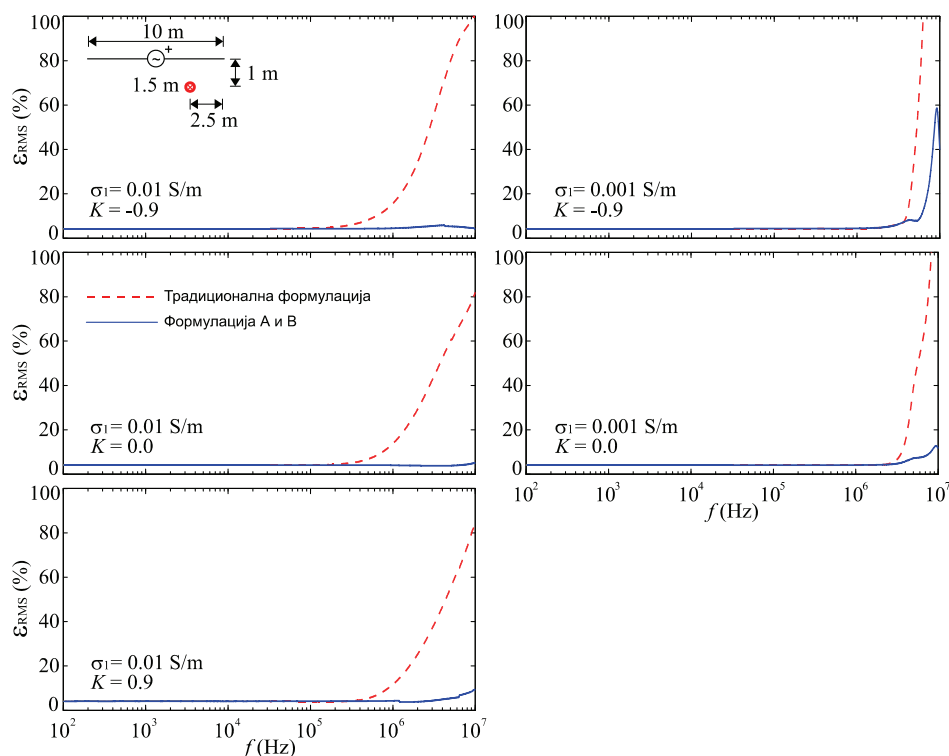
Слика 5.2 ε_{RMS} грешка на пресметани струи во 10 m централно напојувана електрода.



Слика 5.3 ϵ_{RMS} грешка на пресметани струи во пасивна 5 m долга хоризонтална електрода која е паралелна со напојуваната електрода.



Слика 5.4 ϵ_{RMS} грешка на пресметани струи во пасивна 5 m долга хоризонтална електрода која е нормална на напојуваната електрода.



Слика 5.5 ϵ_{RMS} грешка на пресметани струи во пасивна 1.5 m долга вертикална електрода која се наоѓа во близина на напојуваната хоризонтална електрода.

Врз основа на резултатите кои се прикажани на Слика 5.2 - Слика 5.5, можат да се изведат следните заклучоци:

- анализираните нискофреквентни апроксимации воведуваат речиси идентична грешка за фреквенции до 10 kHz во случај на $\sigma_1 = 0.01 \text{ S/m}$ и до 100 kHz во случај $\sigma_1 = 0.001 \text{ S/m}$, за различни вредности на K ;
- над овие фреквенции, односно во анализираниот опсег до 10 MHz, предложените апроксимации за формулација А и В даваат значително поточни резултати во споредба со постоечките апроксимации;
- исклучок е случајот претставен на Слика 5.4 при $\sigma_1 = 0.001 \text{ S/m}$ и $K = -0.9$, каде точноста на предложената апроксимација е нешто пониска од точноста на постоечките апроксимации базирани на традиционалната формулација;
- помеѓу сите апроксимации и резултатите од ФЕКО постои мала и константна грешка доменот на ниските фреквенции која најверојатно се должи на различната примена на МоМ (различни базични и тест функции, сегментација итн.);

Апроксимациите на Гриновите функции за ХЕД кај традиционалната формулација и формулација С се идентични, па од тие причини точноста на апроксимациите на формулација С не е третирана одделно.

Глава 6

Ефикасно моделирање на заземјувачки системи во слоевита средина

Во Глава 4 беа претставени Гриновите функции за традиционалната и т.н. А, В и С формулација на потенцијали во МРІЕ, во просторен домен и во егзактна математичка форма. Гриновите функции содржат сингуларни и осцилаторни интегрални од т.н. Сомерфелдов тип кои бавно конвергираат и кои немаат егзактно аналитичко решение. Нивното решавање претставува комплексен проблем на кој се посветени и сеуште се посветуваат голем број на публикации кои се однесуваат на примената на различни аналитички и нумерички техники за ефикасно решавање на овие интегрални. Поширок преглед на публикации на оваа тема, како и преглед на предностите и недостатоците на различните техники, може да се најде во [Mic98], [Fir10], [Alp10], [Mic16].

Во нумеричките техники за решавање на овие интегрални вообичаена е примената на постапки за извлекување на сингуларитети и површински бранови, апроксимирање на интегралот со комплексни ликови за одреден домен на патеката на интегрирање каде што истите задоволуваат, а потоа нумерички се интегрира нивниот остаток кој е со подобрени карактеристики. Притоа се применуваат напредни алгоритми за анализа на карактеристиките на интегралот, во насока на определување на параметрите на применетите апроксимации и извлечените компоненти кои се во аналитички облик, утврдување на оптимална патека за интегрирање во комплексна рамнина по која се постигнува најбрза конвергенција, како и избегнување на точки и линии на гранање, полови, итн. Ефикасноста на овие методи зависи од фреквенцијата при која се вршат анализите, карактеристиките на слоевитата средина (спроводна или диелектрична, полу-простор или повеќе слоеви), геометрија на анализираниот проблем (планарен или тродимензионален проблем), димензии на анализираната структура итн. Оттука и произлегува големиот број техники кои се оптимизирани за специфични случаи.

Меѓутоа, независно од применетата постапка за подобрување на конвергенцијата, примената на нумеричко интегрирање при решавање на Гриновите функции за секоја позиција на извор и точка на набљудување е неефикасен пристап. Решенијата на Гриновите функции честопати се повторуваат за иста релативна оддалеченост и вертикална позиција на изворот и точката на набљудување, во ограничен просторен домен кој е дефиниран со геометријата на системот. Тоа овозможува примена на постапка за интерполација на решенијата на Гриновите функции, од мал број на табелирани решенија кои се добиени со нумеричко интегрирање. На тој начин нумеричкото интегрирање на Сомерфелдови интегрални е значително редуцирано, а со тоа и времетраењето на пресметките. Постапките за интерполација имаат широка

примена во анализи на антени, печатени кола но и пошироко други области [Bri77], [Che00], [Atk10], [Fra11], [Bia16], [Bia18], а се применуваат и во професионални програми за моделирање на електромагнетни појави како што се NEC [Bur81a] и FEKO [Fek09].

За разлика од анализите на антени и печатени кола каде техниките за ефикасно решавање на Сомерфелдовите интегрални имаат широка примена, во литературата не може да се сретне ефикасен пристап на егзактно електромагнетно моделирање на големи заземјувачи, па анализите во вакви случаи вообичаено се извршуваат со апроксимативни методи, на пример со метода на ликови (еден таков пристап е претставен во Глава 5).

Во оваа дисертација е претставена едноставна процедура за подобрување на ефикасноста при решавањето на Гриновите функции во егзактниот електромагнетен модел за анализа на заземјувачи, која се состои од два главни чекори:

- извлекување на сингуларитети од Сомерфелдовиот интеграл, кои всушност претставуваат компоненти на нискофреквентните апроксимации (претставени во Глава 5) со цел подобрување на конвергенцијата на интегралите, измазнување на нивните решенија и овозможување поефикасна примена на алгоритам за интерполација;
- добивање на решението на остатокот од интегралот (кој е со подобрени карактеристики) преку постапка на интерполација од мал број табелирани решенија кои се добиени по пат на нумеричко интегрирање.

Во постапката на нумеричко интегрирање на Сомерфелдовите интегрални е применета едноставна патека на интегрирање (патека 2 претставена во поглавјето 4.4). Со оглед на постоењето на многу поефикасни но и комплексни алгоритми за решавање на Сомерфелдовите интегрални (кои се применуваат во анализи на антени), овој едноставен пристап претставува компромис помеѓу ефикасноста и едноставноста на применетата постапка. Применетата постапка како и постигнатите придобивки од аспект на забрзување на пресметките, се детално изложени во следните поглавја.

6.1 Подобрување на конвергенцијата и решенијата на Гриновите функции преку извлекување на сингуларитети

Гриновите функции се изразуваат преку еден или повеќе Сомерфелдови интегрални равенки кои се сингуларни за мали растојанија помеѓу изворот и точката на набљудување, а нивната конвергенција забавува со пораст на меѓусебните растојанија. Првата карактеристика претставува особен проблем за табелирање на Гриновите функции од аспект на интерполација, а втората при решавање на големи системи. Со цел да се репродуцираат стрмните промени на решенијата на интегралите преку интерполација, би било потребно табелирање на точки со голема густина во регионите со изразена сингуларност, а тоа значи нумеричко пресметување на голем број интегрални равенки што би резултирало со неефикасност на постапката.

Стрмните промени на решенијата на Сомерфелдовите интегрални равенки можат да се измазнат со извлекување на сингуларитети надвор од интегралот. Овие сингуларитети, кои можат да се идентификуваат како компоненти од нискофреквентните апроксимации (изведени во Глава 5), се извлекуваат од Сомерфелдовиот интеграл, а во Гриновата функција се враќаат во аналитичка форма која е добиена со примена на т.н. Сомерфелдови идентитети. На овој начин решението на Гриновата функција останува непроменето. Спроведените анализи покажуваат дека доволно е извлекување на најмногу три компоненти со изразен сингуларен карактер кои можат да се интерпретираат како директен бран и примарни рефлексии од најблиските разделните површини помеѓу кои се наоѓаат точката со извор и точката на набљудување.

Оваа постапка придонесува кон подобрување на ефикасноста на анализите од два аспекта:

- интегралите со извлечени сингуларитети (модифицирани интегрални равенки) имаат значително подобрена конвергенција за извори и точки на набљудување кои се блиску до разделните површини, но и за големи растојанија меѓу изворите и точките на набљудување, што резултира со пократко време за нивно нумеричко интегрирање;
- промените во интензитет на решенијата на модифицираните интегрални равенки, кои се табелирани за дискретни вредности на геометриските параметри ρ , z и z' , стануваат значително помалку, што овозможува користење поретка таблица за интерполација, а со тоа се намалува и бројот на интегрални равенки кои се решаваат нумерички, што пак резултира со дополнително намалување на времетраењето на пресметките.

На овој начин се постигнува значително подобрување на ефикасноста на електромагнетните анализи без деградација на нивната точност, што е потврдено со анализа на неколку примери на крајот од оваа глава.

Важно е да се нагласи дека постапката за извлекување на сингуларни компоненти се применува само во случаи кога изворот и точката на набљудување се во ист или во два соседни слоја, а во случај на раздвоени слоеви, сингуларниот карактер на Гриновите функции се губи поради влијанието на повеќекратното пропуштање на бранот низ разделните површини.

Обликот и коефициентите кои се појавуваат во извлечените сингуларни членови, како и нивниот број, зависат од тоа дали изворот и точката на набљудување се наоѓаат во ист или различни слоеви, од редот на Беселовата функција која е содржана во интегралната равенка од која се извлекува сингуларитет, од насоката на вертикалната компонента рефлектираниот лик која се менува кај Гриновите функции за магнетниот вектор потенцијал, итн.

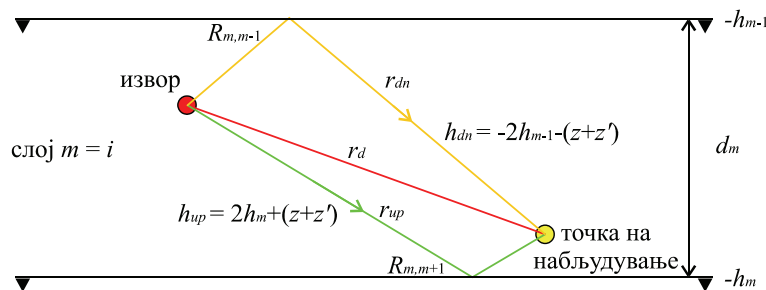
Во понатамошниот текст анализата на постапката за извлекување на сингуларни компоненти е поделена на два случаи кои се однесуваат на:

- извор и точка на набљудување во ист слој, ($m = i$);
- извор и точка на набљудување во различен слој, ($m \neq i$);

Примената на оваа постапка е претставена за генерален случај на слоевита земја со паралелни хоризонтални слоеви, во Гриновите функции за потенцијали за формулација С. Меѓутоа постапката е генерална и на сличен начин се применува и за останатите формулации на Гринови функции во МРПЕ, притоа земајќи ги предвид нивните нискофреквентни апроксимации.

6.1.1 Извлекување на сингуларитети за извор и точка на набљудување во ист слој ($m = i$)

На Слика 6.1 се илустрирани директниот бран и примарните рефлексии од разделните површини со кои е ограничен анализираниот слој. Во случај кога изворот и точката на набљудување се во најгорниот слој (воздух) не постои рефлексija од горна разделна површина, како ни рефлексija од долна разделна површина кога тие се наоѓаат во најдолниот полу-простор.



Слика 6.1 Илустрација на директен бран и примарни рефлексии од најблиските разделни површини за извор и точка на набљудување во ист слој.

Позициите на компонентите со најизразена сингуларност можат да се изразат преку еквивалентните растојанија меѓу точката на набљудување и ликовите на изворот во однос на долната и горната разделна површина. Долните индекси up и dn се однесуваат на нагорно- и надолно- насочени рефлектирани бранови, соодветно:

$$\begin{aligned} r_{up/dn} &= \sqrt{\rho^2 + h_{up/dn}^2} \\ h_{up} &= |2h_m + (z + z')|, \quad h_{dn} = |-2h_{m-1} - (z + z')| \end{aligned} \quad (6.1)$$

Доколку е присутна во Гриновата функција, компонентата од директниот бран е изразена преку скаларната Гринова функција за сферен бран во хомоген простор, изразена со (4.5), со карактеристики на слојот m во кој се наоѓа точката на набљудување. Бидејќи оваа компонента е веќе извлечена во аналитичка форма во Гриновите функции дадени во Глава 4, истата нема да биде дополнително третирана.

Обликот на Гриновите функции со кои се изразени сингуларните компоненти од рефлектираните бранови, зависи од редот на Беселовата функција во интегралната равенка од Сомерфелдов тип, од која се извлекуваат тие компоненти. Во Гриновите функции, тие се претставени во следната аналитичка форма:

$$g_{up/dn}^m = \frac{e^{-jk_m r_{up/dn}}}{r_{up/dn}} \quad (6.2)$$

$$\check{g}_{up/dn}^m = \frac{1}{\rho} \left(e^{-jk_m h_{up/dn}} - \frac{e^{-jk_m r_{up/dn}}}{r_{up/dn}} h_{up/dn} \right) \quad (6.3)$$

$$\hat{g}_{up/dn}^m = \frac{2(e^{-jk_m h_{up/dn}} - e^{-jk_m r_{up/dn}})}{jk_m \rho^2} - \frac{e^{-jk_m r_{up/dn}}}{r_{up/dn}} \quad (6.4)$$

Притоа истите се множат со коефициентите на рефлексија во однос на разделните површини, и тоа со $R_{m,m-1}$ за надолно и $R_{m,m+1}$ за нагорно насочениот бран. Компонентите кои се одземаат од интегралните равенки и се враќаат во Гриновата функција во аналитички облик, за формулација С во МРИЕ, се дадени во Табела 6.1.

Табела 6.1 Сингуларни членови кои се одземаат од Сомерфелдовите интегрални равенки и се враќаат во аналитички облик во Гриновите функции за формулација С, за извор и точка на набљудување во ист слој

Гринова функција	Компоненти кои се одземаат од интегралните равенки	Компоненти кои се додаваат во аналитичка форма во Гриновите функции
G_A^{xx}	/	/
G_A^{zx}	$\int_0^{\infty} \left(-R_{m,m-1} e^{-jk_{m,z}h_{dn}} + R_{m,m+1} e^{-jk_{m,z}h_{up}} \right) J_1(k_{\rho}\rho) dk_{\rho}$	$-R_{m,m-1} \check{g}_{dn}^m + R_{m,m+1} \check{g}_{up}^m$
K_A^{zz}	$-2 \int_0^{\infty} \left(R_{m,m-1} \frac{e^{-jk_{m,z}h_{dn}}}{jk_{m,z}} + R_{m,m+1} \frac{e^{-jk_{m,z}h_{up}}}{jk_{m,z}} \right) J_0(k_{\rho}\rho) k_{\rho} dk_{\rho}$	$-2 \left(R_{m,m-1} g_{dn}^m + R_{m,m+1} g_{up}^m \right)$
K_A^{xz}	$\int_0^{\infty} \left(R_{m,m-1} e^{-jk_{m,z}h_{dn}} - R_{m,m+1} e^{-jk_{m,z}h_{up}} \right) J_1(k_{\rho}\rho) dk_{\rho}$	$R_{m,m-1} \check{g}_{dn}^m - R_{m,m+1} \check{g}_{up}^m$
G_{ϕ}	$\int_0^{\infty} \left(R_{m,m-1} \frac{e^{-jk_{m,z}h_{dn}}}{jk_{m,z}} + R_{m,m+1} \frac{e^{-jk_{m,z}h_{up}}}{jk_{m,z}} \right) J_0(k_{\rho}\rho) k_{\rho} dk_{\rho}$	$R_{m,m-1} g_{dn}^m + R_{m,m+1} g_{up}^m$

Врз основа на горенаведеното, на пример Гриновата функција за електричниот скалар потенцијал дадена во изразот (4.42) сега може да се претстави како:

$$G_{\phi} = \frac{j\omega}{4\pi\sigma_m} \left\{ g_d^m + \underbrace{\left(R_{m,m-1} g_{dn}^m + R_{m,m+1} g_{up}^m \right)}_{\text{вратени компоненти во аналитичка форма}} + I_{G_{\phi}} \right\} \quad (6.5)$$

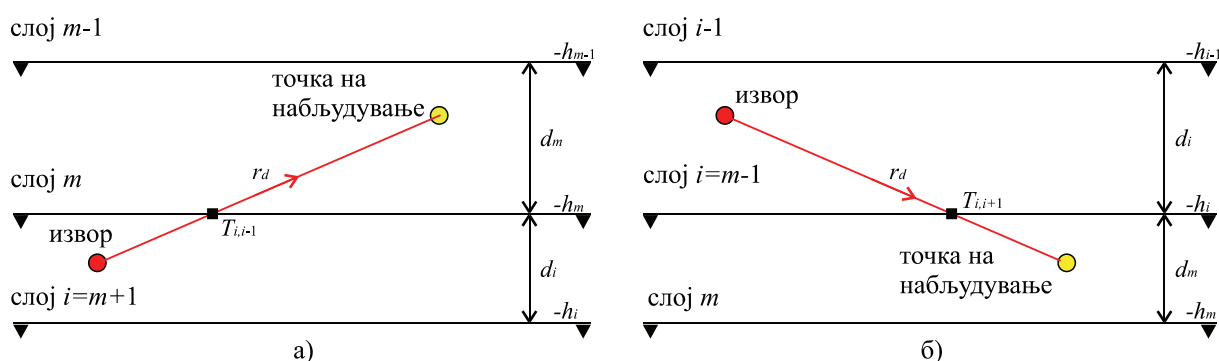
$$I_{G_{\phi}} = \int_0^{\infty} \left[\frac{k_{m,z}^2 B^{TM} + k_m^2 A^{TE}}{k_{\rho}^2} \frac{e^{jk_{m,z}(z-z')}}{jk_{m,z}} + \frac{k_m^2 C^{TE} - k_{m,z}^2 D^{TM}}{k_{\rho}^2} \frac{e^{-jk_{m,z}(z-z')}}{jk_{m,z}} - \underbrace{\left(R_{m,m-1} \frac{e^{-jk_{m,z}h_{dn}}}{jk_{m,z}} + R_{m,m+1} \frac{e^{-jk_{m,z}h_{up}}}{jk_{m,z}} \right)}_{\text{извлечени сингуларни компоненти}} \right] J_0(k_{\rho}\rho) k_{\rho} dk_{\rho} \quad (6.6)$$

каде што со $I_{G_{\phi}}$ е означен модифицираниот интеграл од Сомерфелдов тип, со извлечени сингуларни компоненти кои се однесуваат на примарните рефлексии.

6.1.2 Извлекување на сингуларитети за извор и точка на набљудување во различни слоеви ($m \neq i$)

Спроведените анализи покажуваат дека кога изворот и точката на набљудување се во различни слоеви, извлекувањето на компонентите кои се однесуваат на рефлектираните бранови не овозможува значително подобрување на ефикасноста, а во некои ситуации дури и ги оптоварува пресметките. Од тие причини истите се изоставени и не се предмет на анализа, па извлекувањето на сингуларни компоненти ќе се однесува само на пропуштениот директен бран.

На Слика 6.2 е илустриран пропуштениот директен бран низ разделната површина меѓу два соседни слоја во кои се наоѓаат изворот и точката на набљудување.



Слика 6.2 Илустрација на пропуштен директен бран низ разделната површина меѓу два соседни слоја во кои се наоѓаат изворот и точката на набљудување.

Геометриската поставеност на точката со извор и точката на набљудување е изразена преку линиското растојание меѓу двете точки:

$$r_d = \sqrt{\rho^2 + h_d^2}, \quad h_d = |z - z'| \quad (6.7)$$

Компонентата од пропуштениот директен бран не е воочлива во егзактниот облик на Гриновите функции за потенцијали, но истата доколку постои се појавува во нискофреквентите апроксимации. Оваа компонента не е секогаш изразена во форма на Гринова функција за сферен бран во хомоген простор, туку нејзиниот облик зависи од редот на Беселовата функција во интегралната равенка од Сомерфелдов тип која е предмет на модификација. Коефициентите кои се појавуваат пред Гриновата функција имаат сложен облик и можат да се утврдат единствено преку анализа на нискофреквентните апроксимации, дадени во Глава 5.

Компонентите кои се одземаат од Сомерфелдовите интегрални и се враќаат во Гриновата функција во аналитички облик, за формулација С во МРПЕ, се дадени во Табела 6.2 за $m < i$ и во Табела 6.3 за случај кога $m > i$.

Табела 6.2 Сингуларни членови кои се одземаат од Сомерфелдовите интегрални и се враќаат во аналитички облик во Гриновите функции за формулација С, за извор и точка на набљудување во различен слој ($m < i$)

Гринова функција	Компоненти кои се одземаат од интегралните равенки	Компоненти кои се додаваат во аналитичка форма во Гриновите функции
G_A^{xx}	$\int_0^{\infty} \frac{e^{-jk_{m,z}h_d}}{jk_{m,z}} J_0(k_{\rho}\rho) k_{\rho} dk_{\rho}$	g_d^m
G_A^{zx}	$\int_0^{\infty} (T_{i,i-1} - 1) e^{-jk_{m,z}h_d} J_1(k_{\rho}\rho) dk_{\rho}$	$(T_{i,i-1} - 1) \check{g}_d^m$
K_A^{zz}	$\int_0^{\infty} \left[\left(1 + \frac{k_i^2}{k_m^2} \right) T_{i,i-1} - 1 \right] \frac{e^{-jk_{m,z}h_d}}{jk_{m,z}} J_0(k_{\rho}\rho) k_{\rho} dk_{\rho}$	$\left[\left(1 + \frac{k_i^2}{k_m^2} \right) T_{i,i-1} - 1 \right] g_d^m$
K_A^{xz}	$\int_0^{\infty} \left(\frac{k_i^2}{k_m^2} T_{i,i-1} - 1 \right) e^{-jk_{m,z}h_d} J_1(k_{\rho}\rho) dk_{\rho}$	$\left(\frac{k_i^2}{k_m^2} T_{i,i-1} - 1 \right) \check{g}_d^m$
G_{ϕ}	$\int_0^{\infty} T_{i,i-1} \frac{e^{-jk_{m,z}h_d}}{jk_{m,z}} J_0(k_{\rho}\rho) k_{\rho} dk_{\rho}$	$T_{i,i-1} g_d^m$

Табела 6.3 Сингуларни членови кои се одземаат од Сомерфелдовите интегрални и се враќаат во аналитички облик во Гриновите функции за формулација С, за извор и точка на набљудување во различен слој и ($m > i$)

Гринова функција	Компоненти кои се одземаат од интегралните равенки	Компоненти кои се додаваат во аналитичка форма во Гриновите функции
G_A^{xx}	$\int_0^{\infty} \frac{e^{-jk_{m,z}h_d}}{jk_{m,z}} J_0(k_{\rho}\rho) k_{\rho} dk_{\rho}$	g_d^m
G_A^{zx}	$\int_0^{\infty} (1 - T_{i,i+1}) e^{-jk_{m,z}h_d} J_1(k_{\rho}\rho) dk_{\rho}$	$(1 - T_{i,i+1}) \check{g}_d^m$
K_A^{zz}	$\int_0^{\infty} \left[\left(1 + \frac{k_i^2}{k_m^2} \right) T_{i,i+1} - 1 \right] \frac{e^{-jk_{m,z}h_d}}{jk_{m,z}} J_0(k_{\rho}\rho) k_{\rho} dk_{\rho}$	$\left[\left(1 + \frac{k_i^2}{k_m^2} \right) T_{i,i+1} - 1 \right] g_d^m$
K_A^{xz}	$\int_0^{\infty} \left(1 - \frac{k_i^2}{k_m^2} T_{i,i+1} \right) e^{-jk_{m,z}h_d} J_1(k_{\rho}\rho) dk_{\rho}$	$\left(1 - \frac{k_i^2}{k_m^2} T_{i,i+1} \right) \check{g}_d^m$
G_{ϕ}	$\int_0^{\infty} T_{i,i+1} \frac{e^{-jk_{m,z}h_d}}{jk_{m,z}} J_0(k_{\rho}\rho) k_{\rho} dk_{\rho}$	$T_{i,i+1} g_d^m$

Следејќи ги горенаведените насоки, Гриновата функција за електричен скалар потенцијал за формулација С, дадена со (4.49) за случај $m > i$, може да се изрази како:

$$G_{\phi} = \frac{j\omega}{4\pi\sigma_m} \left(\underbrace{T_{i,i+1} \frac{e^{-jk_m r_d}}{r_d}}_{\text{вратена компонента во аналитичка форма}} + I_{G_{\phi}} \right) \quad (6.8)$$

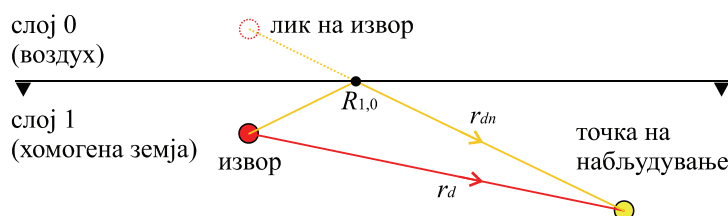
$$I_{G_{\phi}} = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{k_{\rho}^2} \frac{k_m^2}{jk_{i,z}} \frac{\mu_i}{\mu_m} \tilde{A}_{m,i}^{TE} e^{jk_{m,z} h_{m-1}} \left[e^{jk_{m,z} z} + \tilde{R}_{m,m+1}^{TE} e^{-jk_{m,z} (2h_m + z)} \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{k_{\rho}^2} jk_{m,z} \tilde{C}_{m,i}^{TM} e^{jk_{m,z} h_{m-1}} \left[e^{jk_{m,z} z} - \tilde{R}_{m,m+1}^{TM} e^{-jk_{m,z} (2h_m + z)} \right] \right. \\ \left. - \underbrace{T_{i,i+1} \frac{e^{-jk_{m,z} h_d}}{jk_{m,z}}}_{\text{извлечена сингуларна компонента}} \right\} J_0(k_{\rho} \rho) k_{\rho} dk_{\rho} \quad (6.9)$$

каде што со $I_{G_{\phi}}$ е означен модифицираниот интеграл од Сомерфелдов тип, со извлечени сингуларни компоненти кои се однесуваат на пропуштениот директен бран.

6.1.3 Извлекување на сингуларитети за извор и точка на набљудување во хомоген полу-простор

Како што беше покажано во Глава 4 и Глава 5, Гриновите функции (и нивните апроксимации) за хомоген полу-простор можат да се изведат од Гриновите функции за генерален случај на слоевита земја. Сличен е и случајот со постапката за извлекување на сингуларните компоненти од интегралните равенки во Гриновите функции, која се базира на претходно воспоставените принципи.

Кога изворот и точката на набљудување се во хомогена земја, тогаш постои единствена рефлексивна бран од горната разделната површина, односно постои само рефлектиран надолен бран. Со тоа постапката за извлекување на сингуларни компоненти од интегралната равенка е значително поедноставена.



Слика 6.3 Илустрација на рефлектиран бран од горна разделна површина.

Компонентите кои се одземаат од интегралните равенки и се враќаат во Гриновата функција во аналитички облик, за формулација С во МРПЕ за анализа ограничена во хомогена земја, се дадени во Табела 6.4.

Табела 6.4 Сингуларни членови кои се одземаат од Сомерфелдовите интегрални и се враќаат во аналитички облик во Гриновите функции за формулација С, за извор и точка на набљудување во хомогена земја

Гринова функција	Компоненти кои се одземаат од интегралните равенки	Компоненти кои се додаваат во аналитичка форма во Гриновите функции
G_A^{xx}	/	/
G_A^{zx}	$-R_{1,0} \int_0^{\infty} e^{-jk_{1,z} z+z' } J_1(k_{\rho}\rho) dk_{\rho}$	$-R_{1,0} \frac{1}{\rho} \left(e^{-jk_{1,z} z+z' } - \frac{e^{-jk_1 r_{dn}}}{r_{dn}} z+z' \right)$
K_A^{zz}	$-2R_{1,0} \int_0^{\infty} \frac{e^{-jk_{1,z} z+z' }}{jk_{1,z}} J_0(k_{\rho}\rho) k_{\rho} dk_{\rho}$	$-2R_{1,0} \frac{e^{-jk_1 r_{dn}}}{r_{dn}}$
K_A^{xz}	$R_{1,0} \int_0^{\infty} e^{-jk_{1,z} z+z' } J_1(k_{\rho}\rho) dk_{\rho}$	$R_{1,0} \frac{1}{\rho} \left(e^{-jk_{1,z} z+z' } - \frac{e^{-jk_1 r_{dn}}}{r_{dn}} z+z' \right)$
G_{ϕ}	$R_{1,0} \int_0^{\infty} \frac{e^{-jk_{1,z} z+z' }}{jk_{1,z}} J_0(k_{\rho}\rho) k_{\rho} dk_{\rho}$	$R_{1,0} \frac{e^{-jk_1 r_{dn}}}{r_{dn}}$

Гриновата функција за електричен скалар потенцијал за формулација С за извор и точка на набљудување во хомогена земја, која беше дадена во изразот (4.82), после примена на претставената постапка може да се изрази како:

$$G_{\phi} = \frac{j\omega}{4\pi\sigma_1} \left\{ \frac{e^{-jk_1 r_d}}{r_d} + \underbrace{R_{1,0} \frac{e^{-jk_1 r_{dn}}}{r_{dn}}}_{\text{вратена компонента во аналитички облик}} + I_{G_{\phi}} \right\} \quad (6.10)$$

$$I_{G_{\phi}} = \int_0^{\infty} \left(\frac{k_{1,z}^2 R_{1,0}^{TM} + k_1^2 R_{1,0}^{TE}}{k_{\rho}^2} - \underbrace{R_{1,0}}_{\text{извлечена сингуларна компонента}} \right) \frac{e^{-jk_{1,z}|z+z'|}}{jk_{1,z}} J_0(k_{\rho}\rho) k_{\rho} dk_{\rho} \quad (6.11)$$

каде што со $I_{G_{\phi}}$ е означен модифицираниот интеграл од Сомерфелдов тип, со извлечена сингуларна компонента која се однесува на рефлектираниот надолно насочен бран.

6.2 Интерполација на Гриновите функции

Како што беше претходно истакнато, со цел да се примени постапка на интерполација за добивање решенија на Гриновите функции, неопходно е претходно прилагодување на интегралните равенки преку извлекување на сингуларни компоненти.

Гриновите функции зависат од три геометриски големини, тоа се: вертикалната позиција на изворот и на точката на набљудување во однос на z -оска, означени со z' и z соодветно, и радијалната оддалеченост меѓу изворот и точката на набљудување, означена со ρ . Според тоа, во генерален случај, интерполацијата се изведува во тродимензионален домен. Во случај кога анализата е ограничена во хомогена земја, таблицата за интерполација може да се редуцира на две геометриски големини [Bur81b], изразени преку z , z' и ρ , тоа се: растојание меѓу ликот на изворот и точката на набљудување, $r_i = (\rho^2 + \Delta z^2)^{-2}$, и аголот меѓу векторот \vec{r}_i и неговата проекција во x -рамнината, $\theta = \tan^{-1}(\rho/\Delta z)$, каде $\Delta z = z - z'$ (прикажани на Слика 4.1). Во специјален случај кога сите извори и точки на набљудување се во иста хоризонтална рамнина, интерполацијата може да се редуцира на една димензија, само за параметарот ρ .

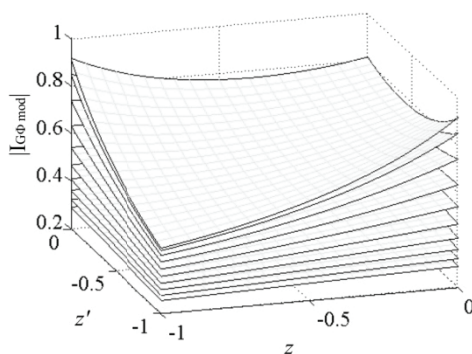
Во оваа постапка е применет адаптивен алгоритам на интерполација, во кој доменот и густината на точки за кои се пресметуваат интегралните равенки во таблицата, се прилагодуваат кон геометријата на системот и карактеристиките на слоевитата средина за која се вршат анализите. Целиот домен на Гриновите функции за кои се врши интерполација се дели на региони, при што секој регион се однесува на конкретна комбинација на слоеви со извор и точка на набљудување. Бројот на региони може да варира од еден регион, во случај кога сите извори и точки на набљудување се наоѓаат во еден слој од повеќеслојна средина, до N^2 каде N е број на слоеви во кои се протега анализираната структура. Разделна површина меѓу два слоја не смее да биде опфатена во рамки на регион за интерполација поради дисконтинуитетот на некои Гринови функции за точки на разделните површини. Избегнување на разделната површина се постигнува со избор на крајни точки на регионот за интерполација, кои се вертикално оддалечени за $1 \cdot 10^{-10}$ m над или под разделната површина со цел да се минимизира на овој начин внесената грешка [Gay97].

Постојат различни постапки за интерполација: линеарна, полиномна, сплајнова интерполација, итн., како и различни пристапи за нивна реализација. Полиномната интерполација од трет степен овозможува добар компромис помеѓу ефикасноста на постапката и постигната точност на резултатите, поради глатките промени на вредностите на табелираните решенија на интегралните равенки. Според тоа, за анализа за генерален тродимензионален проблем, применета е тродимензионална кубна интерполација, а во анализи ограничени во хомогена земја, применета е дводимензионална кубна интерполација.

Кај тродимензионалната кубна интерполација, точката за која се бара решение, а која е просторно определена со (z, z', ρ) , се позиционира во средишниот регион на мрежа од 64 точки (4 x 4 x 4 точки во три димензии кои ја опкружуваат точката на набљудување), за кои се табелирани вредностите на интегралните равенки, како што е илустрирано на Слика 6.6. Притоа важно е да се запази рамномерна оддалеченост помеѓу точките во рамки на една димензија, која не мора да биде иста за секоја димензија и за секој слој.

Тродимензионалната кубна интерполација се реализира преку три последователни еднодимензионални интерполации, за секој геометриски параметар одделно, како што е шематски илустрирано на Слика 6.6. На пример со цел да се одреди интерполирана вредност за интегралот I за параметрите (z, z', ρ) , најпрво се применува дводимензионална интерполација (реализирана преку две еднодимензионални кубни интерполации следејќи слична постапка како во [Bur81a]) за параметрите z и z' во секоја од четирите z - z' рамнини кои се однесуваат на различни табелирани вредности за ρ (прикажани на Слика 6.4.), односно се добиваат интерполирани решенија на интегралите за следните параметри: $I_k(z, z', \rho_k)$; $I_{k+1}(z, z', \rho_{k+1})$, $I_{k+2}(z, z', \rho_{k+2})$ и $I_{k+3}(z, z', \rho_{k+3})$. Потоа со цел да се добие бараната вредност за $I(z, z', \rho)$, се применува дополнителна еднодимензионална интерполација, врз основа на четирите еднакво разместени точки со интерполирани вредности I_k , I_{k+1} , I_{k+2} и I_{k+3} . Подетално математичко објаснување на применетата постапка за интерполација е дадено во Додаток Б

Изборот на овој редослед на интерполација не е случаен и се должи на глатките промени на решенијата на интегралните равенки, за точки на исто радијално растојание ρ , односно за точки во иста z - z' рамнината, како што е илустрирано на Слика 6.4. Овој редослед на интерполација овозможува поголема точност на резултатите за поретка мрежа на точки во z - z' рамнината.

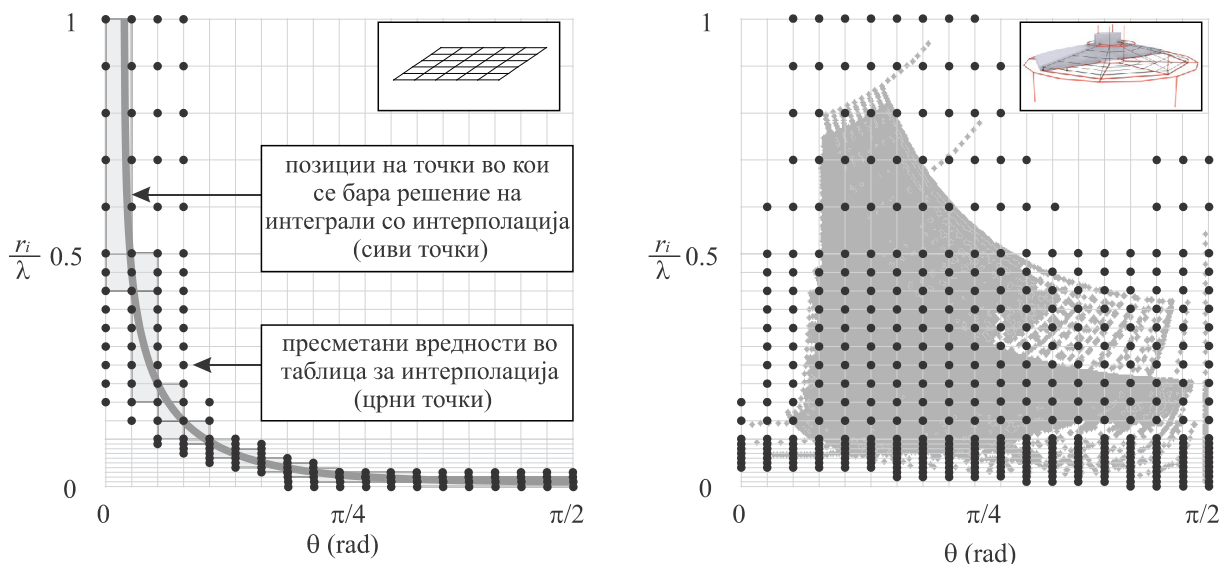


Слика 6.4 Приказ на повеќе z - z' рамнини во кои се табелирани решенија на модифицираната Гринава функција за електричен скалар потенцијал G_ϕ .

Дводимензионалната кубна интерполација, се реализира преку две последователни кубни интерполации за параметрите r_i и θ , од 16 табелирани точки во кои нумерички се пресметани интегралните равенки. Математичката постапка е идентична како кај тродимензионална кубна интерполација.

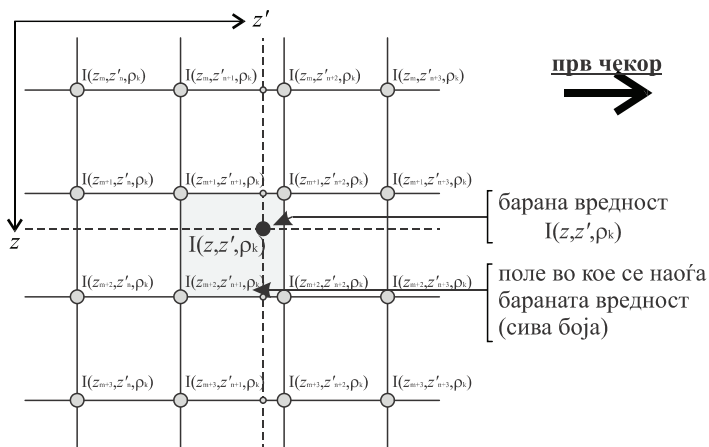
Во постапката на интерполација применети се неколку техники за дополнително скратување на пресметковното време:

- интегралните равенки не се решаваат однапред за секоја точка од таблицата, туку таблицата за интерполација се дополнува по потреба, со што е избегнато непотребно нумеричко решавање на интегралните равенки, во табелирани точки кои не се повикуваат во анализата. Тоа значи дека исполнетоста на таблицата за интерполација, а со тоа и брзината на извршување на анализите во голема мера зависат од геометрискиот облик на заземјувачот. Оваа постапка може најдобро да се илустрира преку дводимензионална таблица за интерполација, која е пополнета при анализа на заземјувачи во хомогена средина, а е прикажана на слика Слика 6.5.
- едновремено пополнување на таблицата за интерполација за сите Гринови функции, при што времето на нумеричко решавање на истите е еднакво на времето потребно за решавање на Гриновата функција со најбавна конвергенција,
- зачувување на коефициентите a, b, c и d , дадени во изразите (Г.2) - (Г.5). Ова се единствените коефициенти кои можат да бидат зачувани за повторна употреба за комбинација (z, z', ρ) која припаѓа во истото поле за кое веќе се пресметани коефициентите. Тоа не важи и за коефициентите од вториот и третиот чекор на интерполација, бидејќи истите се изведени за конкретни вредности на z, z' или ρ .



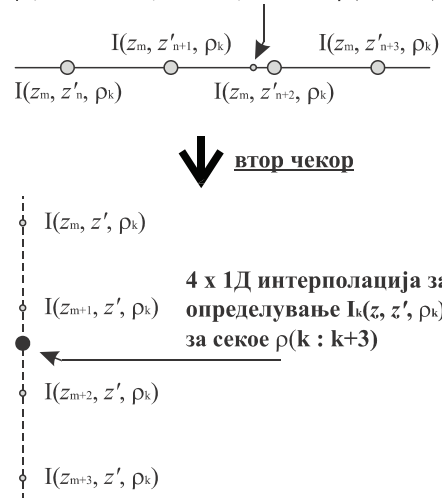
Слика 6.5 Исполнетост на таблица за дводимензионална интерполација при анализа во хомогена земја на а) хоризонтален мрежест заземјувач, б) сложен 3Д заземјувач .

2Д интерполација во z - z' рамнина за секое $\rho(k : k+3)$



прв чекор

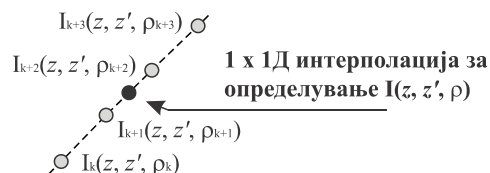
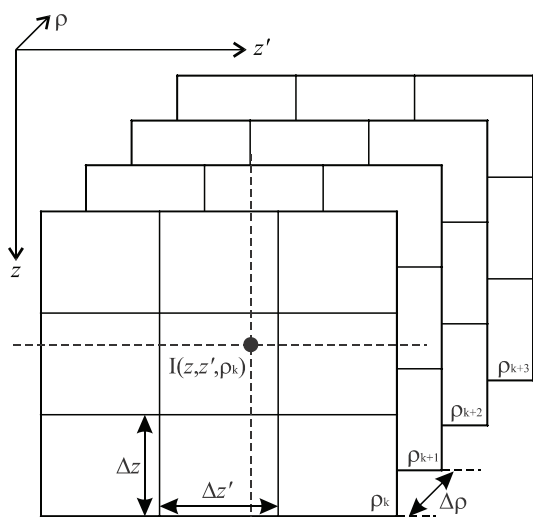
16 x 1Д интерполација за определување $I(z_m, z', \rho_k)$ за секое $z(m : m+3)$ и секое $\rho(k : k+3)$



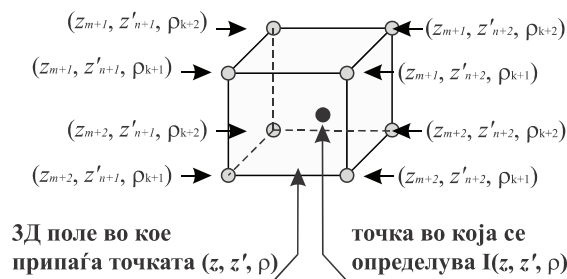
втор чекор

4 x 1Д интерполација за определување $I_k(z, z', \rho_k)$ за секое $\rho(k : k+3)$

организација на просторот околу точката (z, z', ρ) во која се врши интерполација преку четири z - z' рамнини



трет чекор



3Д поле во кое припаѓа точката (z, z', ρ) точка во која се определува $I(z, z', \rho)$

Слика 6.6 Шематски дијаграм со кој се прикажува принципот на тродимензионална кубна интерполација на решавање на интеграл $I(z, z', \rho)$, преку три последователни еднодимензионални кубни интерполации.

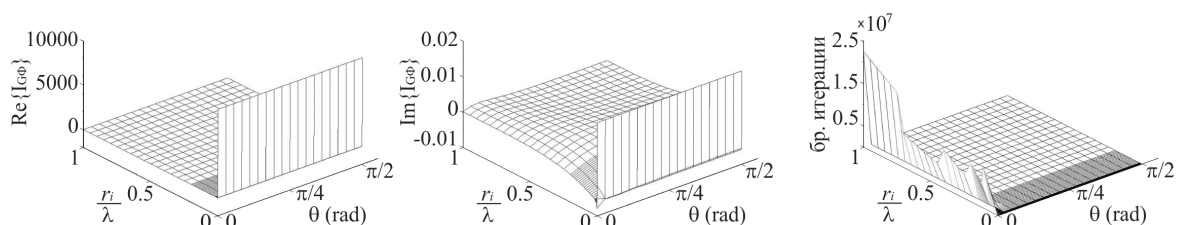
6.3 Анализа на придобивките од извлекувањето на сингуларитети од интегралните равенки во Гриновите функции

Извлекувањето на сингуларните компоненти од интегралните равенки во Гриновите функции е во насока на подобрување на нивните карактеристики и подготовка за нивна примена во интерполација. Во таа насока се анализирани и постигнатите придобивки од примената на оваа постапка.

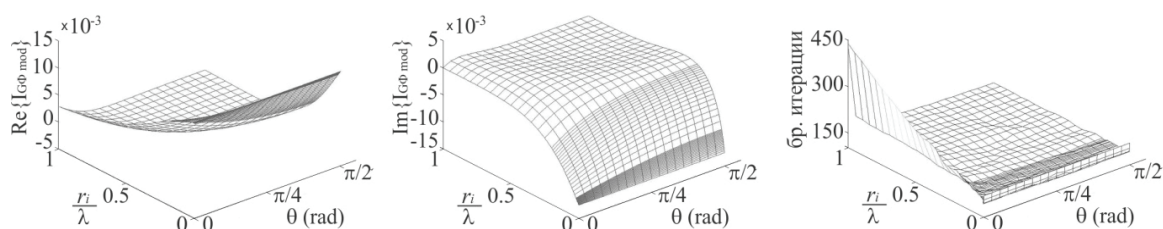
Од аспект на едноставност во презентирањето на резултатите и заклучоците, анализите се направени најпрво за пример со извори и точки на набљудување кои се ограничени во хомогена земја, а потоа анализите се проширени и за двослојна земја. Причината за овој редослед е во тоа што Гриновите функции и таблицата за интерполација за хомогена земја вклучуваат зависност од 2 геометриски големини, а тоа ги прави анализите поедноставни. Гриновите функции и таблиците за интерполација во слоевита земја вклучуваат зависност од 3 геометриски големини, со што самата анализа и претстава на резултатите стануваат значително покомплексни.

6.3.1.1 Анализа за хомогена земја

На Слика 6.7 и Слика 6.8 се прикажани табелирани решенија на интегралните равенки во Гриновите функции за електричниот скалар потенцијал за формулација С, за оригиналната форма дадена во изразот (4.82) и за модифицираната форма на интегралната равенка дадена со изразот (6.11), соодветно.



Слика 6.7 Табелирани решенија и број на итерации до постигнување конвергенција на интегралната равенка во G_ϕ , пред извлекување сингуларни компоненти.



Слика 6.8 Табелирани решенија и број на итерации до постигнување конвергенција на интегралната равенка во G_ϕ , после извлекување сингуларни компоненти.

Прикажаните решенија се однесуваат на хомогена земја со специфична спроводност $\sigma_1 = 0.01 \text{ S/m}$, пермитивност $\epsilon_1 = 10\epsilon_0$ и пермеабилност $\mu_1 = \mu_0$. Фреквенцијата за која се извршени пресметките изнесува $f = 1 \text{ kHz}$, но трендот на промена на резултатите е сличен и за други фреквенции. На десната страна е прикажан бројот на повикувања на подинтегралната функција во постапката за нумеричко интегрирање, до постигнување конвергенција.

Од Слика 6.7 може да се заклучи дека интегралната равенка (4.82) е сингуларна за мали вредности на r_i , односно мали растојанија меѓу изворот и точките на набљудување, што ја прави несоодветна за интерполација. Исто така може да се забележи бавна конвергенција за мали вредности на аголот θ , односно за извори и точки на набљудување до површина на земја.

Од Слика 6.8 може да се заклучи дека модифицираната интегрална равенка (6.11), која е добиена по извлекување сингуларните членови интегралот во (4.82), има глатки промени на табелираните решенија. Промените на решенијата се повеќе изразени за мали растојанија меѓу изворот и точката на набљудување па и таблицата за интерполација е погуста, а за поголеми растојанија промените стануваат речиси незначителни што овозможува примена на поретка мрежа. Слична промена на густината на мрежата за ρ е применета и во тридимензионална интерполација.

Бројот на итеративно повикување и решавање на подинтегралната функција до постигнување конвергенција е намален од $25 \cdot 10^6$ на 450 итерации, за извори и точки на набљудување до површината на земја. Ова подобрување е од особен интерес во анализи на големи заземјувачи каде радијалните растојанија меѓу сегменти на заземјувачот стануваат многу поголеми од длабочината на која е поставен заземјувачот.

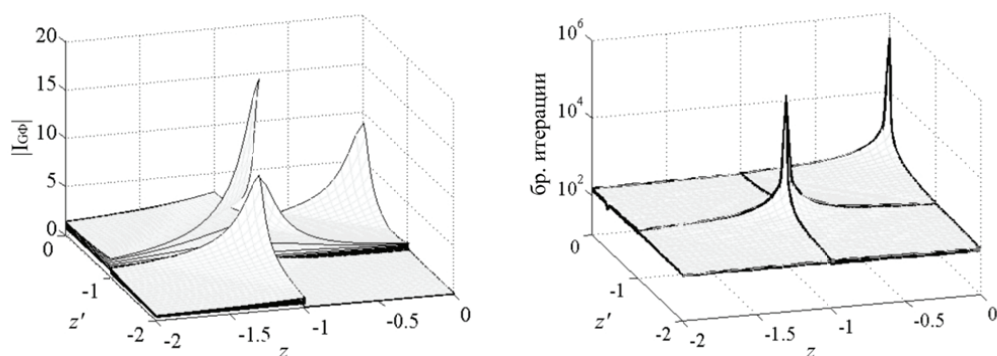
При ниски фреквенции кои тежнеат кон 0 Hz , решенијата на модифицираниот интеграл (6.11) се доближуваат кон нула, а решенијата на Гриновите функции стануваат еднакви на решенијата на извлечените нискофреквентни апроксимации во аналитичка форма, што е голема предност во однос на оригиналната форма на Гриновите функции од аспект на нивната примена во анализи на заземјувачи.

Придобивките од извлекување на сингуларните компоненти, кои се интерпретираат како ликови на изворот во однос на разделната површина, се идентични и за останатите Гринови функции за потенцијали во формулација C но и генерално за останатите формулации. Една слична анализа за Гриновите функции за A и B формулација е претставена во [Mar19].

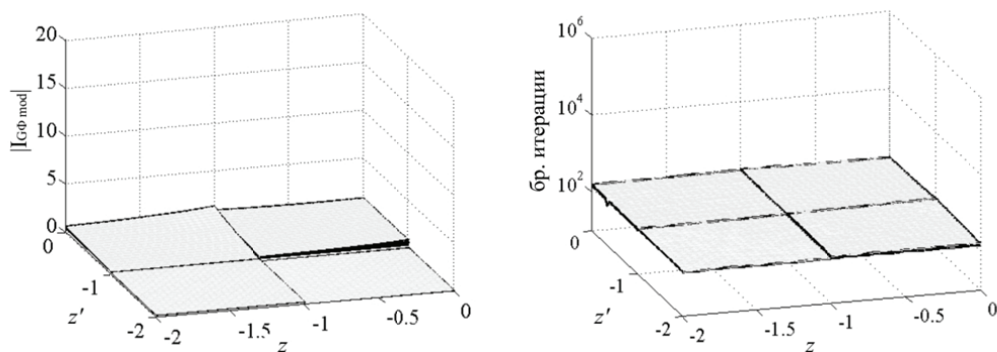
6.3.1.2 Анализа за слоевита земја

На Слика 6.9 и Слика 6.10 се прикажани табелирани решенија на интегралните равенки во оригинална форма (дадени со (4.42) и (4.49)) и модифицираните интегрални равенки (дадени со изразите (6.6) и (6.9)) во Гриновите функции за електричен скалар потенцијал за формулација C, соодветно.

Анализата е извршена за двослојна земја со дебелина $d_1 = 1$ m на горниот слој и $\sigma_1 = 0.01$ S/m, $\sigma_2 = 0.19$ S/m (фактор на рефлексија $K = -0.9$), $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10\epsilon_0$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$. Прикажаните решенија се табелирани за вредности на z и z' во опсег од 0 m до -2 m, што значи дека точката со извор и точката на набљудување можат да бидат во ист или различен слој. Резултатите се табелирани за повеќе $z-z'$ рамнини при што секоја рамнина одговара на конкретна вредност на радијалното растојание ρ , кое пак се менува во опсег од 0.1 m до 3 m, во 10 чекори. Табелираните решенија се поделени на четири региони, кои се однесуваат на различни комбинации на слоеви во кои може да се наоѓа точката со извор и точката на набљудување.



Слика 6.9 Табелирани решенија и број на итерации до постигнување конвергенција на интегралната равенка во G_ϕ , пред извлекување сингуларни компоненти.



Слика 6.10 Табелирани решенија и број на итерации до постигнување конвергенција на интегралната равенка во G_ϕ , после извлекување сингуларни компоненти.

Од резултатите прикажани на Слика 6.9 може да се констатира дека решенијата на интегралните равенки во (4.42) и (4.49) се сингуларни за мали радијални растојанија меѓу изворот и точката на набљудување (максимумот се однесува за $\rho = 0.1$ m, а интензитетот опаѓа со зголемување на ρ). При мали радијални растојанија и за точки z и z' блиски до разделна површина, градиентот на промена на решенијата е изразен во сите три димензии во доменот на интерполација, што наметнува потреба од примена на густа мрежа за интерполација.

Бројот на итеративни повикувања на подинтегралната функција до постигнување на конвергенција е минимален за мали радијални растојанија, а расте со зголемување на радијалното растојание (максимумот се однесува на најголемото радијално растојание $\rho = 3 \text{ m}$, а изнесува приближно $2.4 \cdot 10^5$ итерации). Притоа конвергенцијата на интегралите во (4.42) и (4.49) е најбавна за извори и точки на набљудување кои се доближуваат до разделната површина.

На Слика 6.10 се прикажани решенијата и бројот на потребни итерации за решавање на модифицираните интегрални равенки (6.6) и (6.9). Во овој случај, градиентот на промена на решенијата е значително помал во однос на претходниот случај. Покрај малите промени на решенијата во $z-z'$ рамнините, исто така мала е и промената на решенијата добиени за различни вредности на ρ . На тој начин е овозможена примена на значително поретка мрежа за интерполација во сите три димензии. Бројот на повикувања на подинтегралната функција до конвергенција изнесува приближно 160 итерации, а е речиси независен од позицијата на z и z' .

Придобивките од извлекување на сингуларните компоненти се идентични и за останатите Гринови функции за потенцијали во формулација C но и генерално за останатите формулации.

6.4 Анализа на ефикасност и точност на претставената постапка за решавање на Гриновите функции

6.4.1 Анализа на постигнатата ефикасност и точност со постапките за прилагодување и дводимензионална интерполација на интегралните равенки за анализи во хомогена земја

Анализа на ефикасноста и точноста на процедурата за интерполација во хомогена земја е извршена за два типа на заземјувачи, кои се карактеристични по својот облик и димензии:

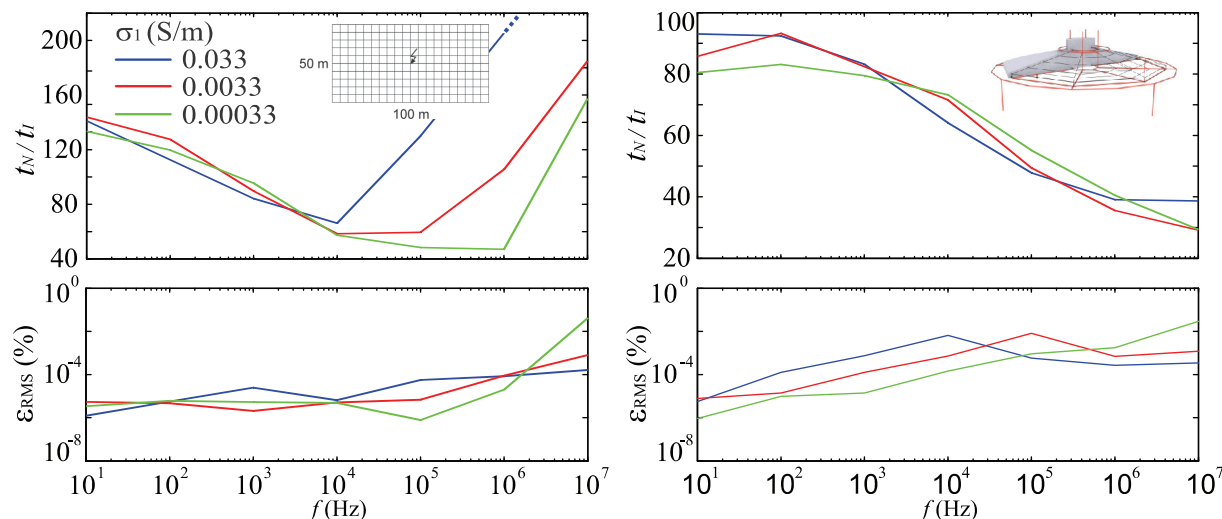
- Хоризонтален мрежест заземјувач со димензии $50 \times 100 \text{ m}$, поставен на длабочина од 0.5 m . Кај овој заземјувач, сите електроди се наоѓаат во иста рамнина, што резултира со мала исполнетост на таблицата за интерполација, како што е илустрирано на Слика 6.5(а).
- Заземјувач на ветрогенератор, со димензии $15 \times 15 \times 3 \text{ m}$. Овој заземјувач е составен од електроди со хоризонтална, вертикална и коса ориентација. Исполнетоста на таблицата за интерполација е голема поради разноликоста во длабочината и ориентацијата на електродите, како што е илустрирано на Слика 6.5(б).

Пресметана е распределбата на лонгитудинални струи во заземјувачите за следните параметри: $f = 10 \text{ Hz} - 10 \text{ MHz}$ (една фреквенција по декада), $\sigma_1 = 0.033, 0.0033$ и 0.00033 S/m , $\epsilon_1 = 10\epsilon_0$ и $\mu_1 = \mu_0$. Анализа на ефикасноста и точноста на предложената постапка за дводимензионална интерполација е извршена преку споредба на:

- пресметковното време потребно за определување на лонгитудиналните струи во заземјувачите со директно нумеричко решавање на Сомерфелдовите интеграли, t_N , и со примена на постапка за нивна интерполација, t_I ;
- нормализираната ефективна грешка ϵ_{RMS} , дадена со (5.97), за пресметаните лонгитудинални струи со постапка на интерполација на интегралните равенки, при што како референтни се усвоени резултатите добиени со директно нумеричко интегрирање на Сомерфелдовите интеграли.

Резултатите од извршените анализи покажуваат:

- значително намалување на пресметковното време од над 30 пати, зависно од анализираниот случај (комбинација на облик на заземјувач, карактеристики на земја, фреквенција);
- воведување ϵ_{RMS} грешка за пресметаните лонгитудинални струи која е помала од 0.1%, а според тоа може да се смета дека применетата постапка дава речиси егзактни резултати.



Слика 6.11 Анализа на ефикасност и точноста на применетата постапка за дводимензионална интерполација за пресметка на лонгитудинални струи во заземјувачи во хомогена земја [Mar18b].

6.4.2 **Анализа на постигнатата ефикасност со постапките за прилагодување и тридимензионална интерполација на интегралните равенки за анализи во двослојна земја**

Постигнатата ефикасност со постапките за прилагодување и интерполација на интегралните равенки е анализирана преку времетраењето на пресметките за три различни пристапи за анализа на заземјувачи во двослојна земја: примена на постапки за подобрување на ефикасноста на електромагнетниот модел, интензивно нумеричко интегрирање на Сомерфелдовите интегрални во електромагнетниот модел и решавање на проблемот со нискофреквентна апроксимација (последното само за $f = 100$ Hz).

За таа цел се анализирани електроди со радиус 0.01 m, во двослојна земја со 2 m дебелина на горниот слој чија специфична спроводност изнесува $\sigma_1 = 0.01$ S/m. Усвоени се две карактеристични вредности за специфичната спроводност на долниот слој на земја, тоа се $\sigma_2 = 0.19$ S/m и $\sigma_2 = 0.000526$ S/m, што одговараат на $K = -0.9$ и $K = +0.9$, а за сите слоеви е усвоено $\epsilon_r = 10$ и $\mu_r = 1$. Должината на електродите се менува во опсег од 1 m до 100 m, при што истите се дискретизирани на сегменти со должина од 0.1 m. Со менување на должината на електродите се менува и бројот на сегментите. Анализирани се два случаи: хоризонтална електрода на длабочина од 0.5 m и коса електрода со наклон од 1.146^0 во однос на хоризонталната оска, чија највисока точка се наоѓа на површина на земја.

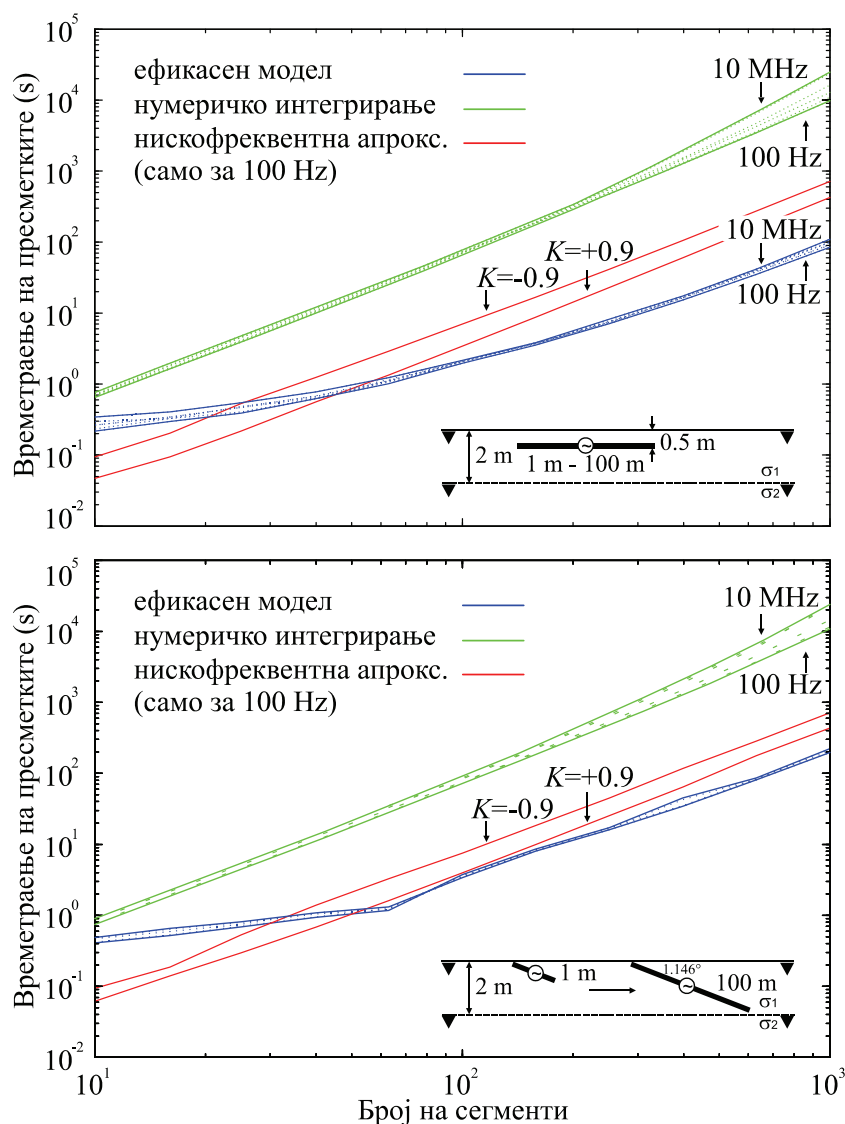
Пресметките кои се базираат на егзактна електромагнетна теорија, со и без примена на постапки за зголемување на ефикасноста, се извршени за неколку фреквенции во опсег од 100 Hz до 10 MHz (најмногу една фреквенција по декада) и за двата типа на двослојна земја. Притоа се добиени фамилии на криви, кои ги прикажуваат рамките во кои се движи времетраењето на пресметките. Пресметките кои се извршени со примена на нискофреквентна апроксимација се извршени само за фреквенција од 100 Hz, при која овој пристап дава решенија блиски до егзактните.

На Слика 8.1 е прикажана зависноста на времетраењето на пресметките на лонгитудинални струи во функција од бројот на сегменти на кои се поделени електродите. Од извршените анализи може да се констатира дека со зголемување на фреквенцијата на побудата, се зголемува и времетраењето на пресметките, за иста должина и сегментација на електродите. Овој ефект е поизразен кај пристапот за решавање на Гриновите функции со директно нумеричко интегрирање, каде што пресметковното време за фреквенции од 100 Hz и 10 MHz се разликува повеќе од два пати, а причината е во намалената конвергенција на Сомерфелдовите интегрални при пораст на фреквенцијата и за исти геометриски параметри.

Овој ефект е помалку изразен кај ефикасниот електромагнетен модел, каде времетраењето на пресметките се менува до 20 % кај хоризонталната електрода, а е речиси незначителен во времетраењето на пресметките кај косата електрода. Слабото

влијание на времетраењето на пресметките се должи на малиот број на табелирани Гринови функции за кои се применува нумеричко интегрирање. Од истите причини произлегува и значително пократкото пресметковно време со примена на ефикасниот електромагнетен модел, а придобивките од ваквото забрзување се особено изразени кај заземјувач со големи димензии и голем број на сегменти.

За хоризонтална електрода со должина од 100 m која е дискретизирана на 1000 сегменти, времетраењето на пресметките со електромагнетниот модел со подобрена ефикасност се движи од 80-тина секунди за $f = 100$ Hz до 100-тина секунди за $f = 10$ MHz, додека времетраењето на пресметките со примена на егзактна електромагнетна теорија и интензивно нумеричко интегрирање на интегралните равенки се движи од 2 h и 45 min за $f = 100$ Hz до 6 h и 20 min за $f = 10$ MHz.



Слика 6.12 Времетраење на пресметка на лонгитудинални струи во хоризонтална и коса електрода во функција од бројот на сегменти на кои се поделени електродите.

Времетраењето на пресметките каде што се применува на нискофреквентна апроксимација на Гриновите функции е пократко од пресметковното време со ефикасниот електромагнетен модел само за многу мал број на сегменти односно при анализа на мали заземјувачи. Меѓутоа предноста на ефикасниот електромагнетен модел е очигледна при анализа на големи заземјувачи, каде неговото пресметковно време е 4 до 7 пати пократко во однос на пресметковното време кај применетата нискофреквентна апроксимација. Тоа со должи на големиот број на ликови кои треба да се земат предвид при определување на меѓусебните интеракции на сегментите на кои е дискретизиран заземјувачот, особено во доменот на ниските фреквенции каде придонесите на далечните ликови се позначителни.

Во истражувачката и инженерската пракса, примената на апроксимации на Гриновите функции претставува компромис помеѓу забрзување на анализите на заземјувачи, особено во случај на големи системи и воведување на прифатлива грешка во доменот на повисоките фреквенции. Меѓутоа резултатите од извршените анализи покажуваат дека примената на нискофреквентни апроксимации на Гриновите функции за потенцијали може да се смета за оправдана во анализи на заземјувачи само со цел да се избегнат комплексните постапки за нумеричко решавање на Сомерфелдовите интегрални, но не и да се зголеми ефикасноста на пресметките. Исклучок од оваа констатација е примената на нискофреквентни апроксимации при анализи во хомогена земја во кои може да постои само еден рефлектиран лик на изворот, што ги прави анализите значително побрзи во однос на останатите пристапи.

Според прикажаните резултати на Слика 6.12, наклонот на електродата нема значително влијание врз времетраењето на пресметките кои се вршат со интензивно нумеричко интегрирање. Меѓутоа кај ефикасниот електромагнетен модел, наклонот на електродата резултира со поголема исполнетост на таблицата за интерполација, односно со зголемување на времетраењето на пресметките, кое во случајот на заземјувач од 100 m е речиси двојно зголемено. Одовде може да се заклучи дека ефикасноста на предложениот пристап за забрзување на пресметките е најголема кај хоризонтални заземјувачи, а најмала кај заземјувачи чии електроди се протегаат на различни длабочини. Во секој случај времетраењето на пресметките со примена на постапките за зголемување на ефикасност е значително пократко од времетраењето на пресметките кои се вршат со интензивно нумеричко интегрирање или со примена на апроксимации.

Во сите случаи, пресметките се извршени со примена на Гринови функции базирани на формулација С. Времетраењето на пресметките со примена на Гринови функции базирани на формулација А е за околу 20 % пократко во однос на прикажаните времиња. Тоа најверојатно се должи на подобрата конвергенција на интегралните равенки, за усвоената патека на интегрирање (патека 2) во глава 4.4.

Пресметките се извршени на персонален компјутер со фреквенција на процесор од 2.2 GHz, без примена на паралелизација.

Глава 7

Верификација на моделот

Математичкиот модел и постапките за негово ефикасно решавање, кои беа претставени во претходните глави, се имплементирани во програма развиена во програмскиот јазик Fortran, која е наменета за анализа на заземјувачки системи во слоевита средина. Освен заземјувачи, програмата овозможува и анализа на структури во слоевита средина кои можат да се моделираат со тенки и неизолирани спроводници, а тоа ќе послужи за нејзина верификација со професионални програми за анализа на високофреквентни електромагнетни појави и со публикувани резултати кои се однесуваат на антени.

Применети се неколку пристапи кон верификација на точноста и доменот на примена на претставениот модел, како и воопшто на развиената програма:

- нумеричка споредба на резултатите добиени со примена на различни формулации на Гринови функции, со што е извршена верификација на точноста на применетите Гринови функции како и на точноста постапките за нивно нумеричко решавање и интерполација;
- нумеричка споредба со модел за анализа на заземјувачи базиран на алтернативен пристап во МоМ, со триаголна базична и тест функција;
- нумеричка споредба со резултати од ФЕКО, кој е професионален софтвер за анализа на антени;
- споредба со публикувани нумерички и експериментални резултати во доменот на ниски и високи фреквенции.

Притоа се анализирани проблеми со различна геометрија, а предмет на споредба се лонгитудинални струи во спроводниците, струи кои истекуваат во земја, електрично поле, импеданси кон земја, напони итн., во фреквенциски опсег од 0 Hz -10 MHz и за различни карактеристики на хомогена и слоевита земја.

Карактеристиките на двослојниот модел на земја можат да бидат опишани преку факторот на рефлексивност K [Daw79a], кој е пресметан како статичка апроксимација на Френеловиот коефициент на рефлексивност $R_{2,1}^{TM}$ од (4.11):

$$K = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \quad (7.1)$$

при што специфичната спроводност на горниот слој на земја σ_1 се фиксира на одредена вредност, а се менува специфичната спроводност на долниот слој на земја σ_2 , соодветно на вредноста на K .

Споредбата на резултати добиени со различни програми во нумерички параметарски анализи е изразена преку нормализирана ефективна грешка [Pog74]:

$$\varepsilon_{\text{RMS}} = \left[\frac{\sum_{n=1}^N |\hat{X}_n - \hat{X}_n^{\text{REF}}|^2}{\sum_{n=1}^N |\hat{X}_n^{\text{REF}}|^2} \right]^{1/2} \cdot 100 (\%) \quad (7.2)$$

каде што \hat{X}_n^{REF} и \hat{X}_n се фазори на референтната и споредуваната големина, соодветно, а N е вкупниот број на примероци од анализираната големина. На овој начин, резултатот од споредбата на голем број просторно распределени големини (распределба на струја, електрично поле итн.) се сведува на една скаларна големина.

Во примерите каде што се врши верификација во временски домен, проблемот најпрво се решава во фреквентен домен за одреден број на фреквенции, а интензитетот на побудата за секоја фреквенција се определува со примена на Фуриеова трансформација на струјниот импулс. Потоа временскиот одсив на системот се определува со примена на инверзна Фуриеова трансформација. Постапката математички е претставена со изразот [Grc90]:

$$x(t) = F^{-1} \{ X(j\omega) \cdot F[i(t)] \} \quad (7.3)$$

каде што: $x(t)$ е одсив на анализираната големина во временски домен, $i(t)$ е струјниот импулс со кој е побуден заземјувачот, $X(j\omega)$ е анализираната големина во фреквентен домен, а F и F^{-1} претставуваат Фуриеова и инверзна Фуриеова трансформација, соодветно.

7.1 Верификација со модел за анализа на заземјувачи базиран на алтернативен пристап во МоМ

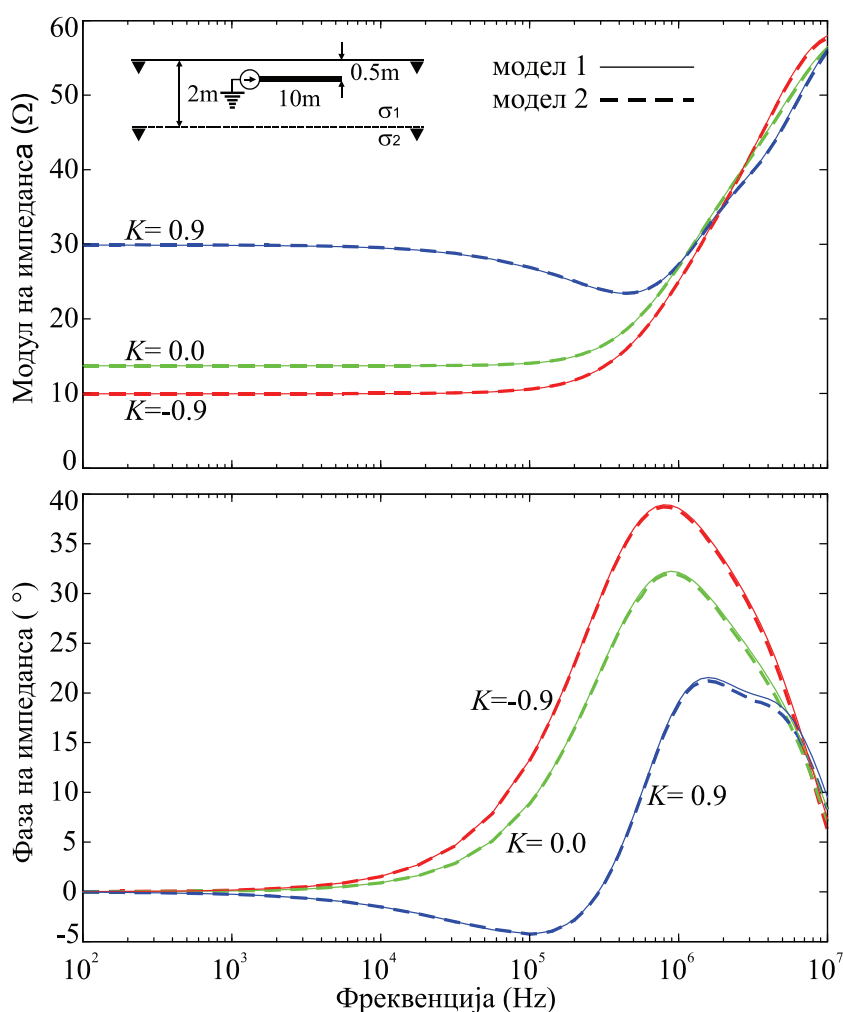
Резултатите од егзактниот електромагнетен модел, кој е развиен во рамки на оваа дисертација, а кој се базира на МоМ со константна базична функција и тестирање на решението со подесување во точка [Har67], се верифицирани со друг егзактен електромагнетен модел за анализа на заземјувачи во двослојна земја [Arn04], кој се базира на алтернативен пристап во МоМ со триаголна базична и тест функција [Cha70].

Анализирани се импеданси кон земја на хоризонтални електроди со должини 10 m и 100 m, со радиус 0.01 m, поставени на длабочина 0.5 m во двослојна земја со 2 m дебелина на горниот слој. За горниот слој на земја е усвоена специфична спроводност $\sigma_1 = 0.01$ S/m, а за долниот слој на земја се усвоени три карактеристични вредности $\sigma_2 = 0.19, 0.01$ и 0.000526 S/m, кои соодветствуваат на $K = -0.9, 0.0$ и $+0.9$, соодветно. За двата слоја е усвоена пермитивност $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10\varepsilon_0$ и пермеабилност $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$.

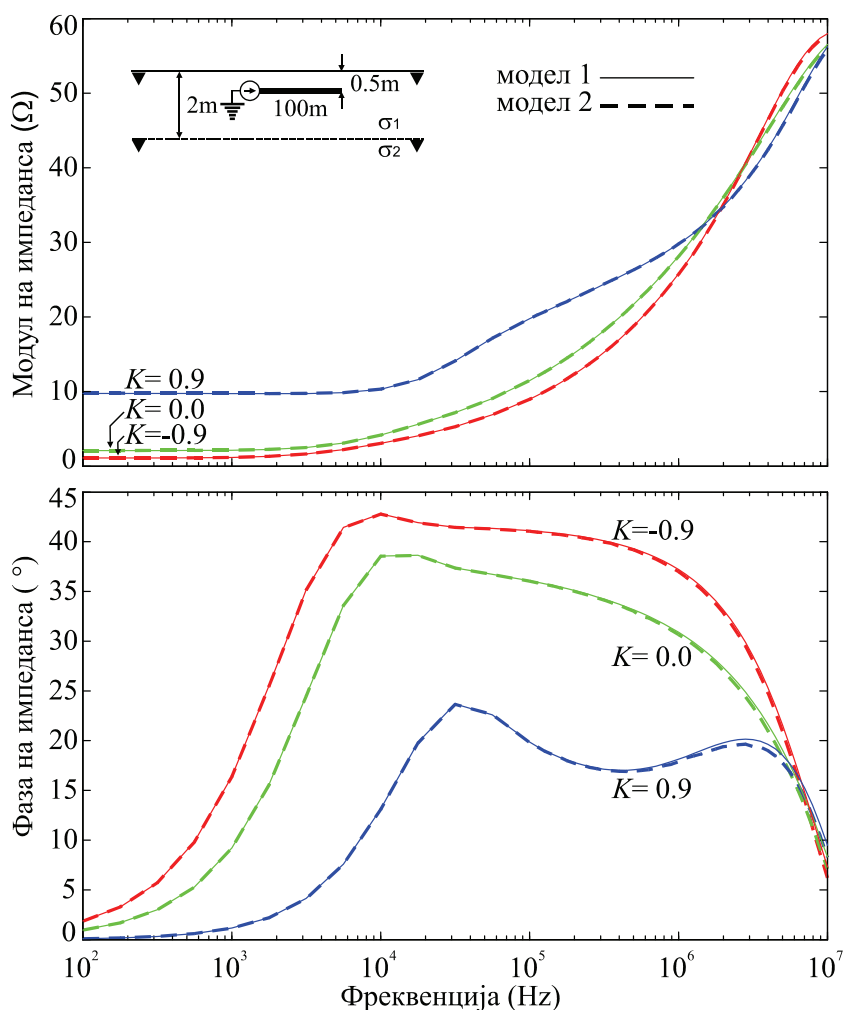
Побудата е реализирана со паралелен струен генератор приклучен на еден крај од електродите, а импедансите се пресметани според постапката опишана во Глава 3.4.3.

Резултатите од моделот кој е развиен во рамки на оваа дисертација се означени со модел 1, а резултатите добиени од моделот кој е користен за споредба [Arn04] се означени со модел 2.

Од прикажаните резултати на Слика 7.1 и Слика 7.2 може да се констатира дека пресметаните импеданси кон земја со двата програми се речиси идентични за целиот опсег на параметри и за двата анализирани случаи.



Слика 7.1 Споредба на импеданси кон земја за 10 m хоризонтална електрода.



Слика 7.2 Споредба на импеданси кон земја за 100 m хоризонтална електрода.

7.2 Верификација со професионален софтвер FEKO за анализа на антени

Поради недостаток на публикувани резултати од параметарски анализи на заземјувачи во слоевита средина, а со цел да се верифицира точноста на презентираниот електромагнетен модел за широк опсег на параметри, извршени се споредбени параметарски анализи со резултати од FEKO. FEKO е професионален софтвер за анализа на електромагнетни проблеми кај антени. Според [Fek09] и [Vra02], FEKO се базира на егзактна примена на интегралните равенки за електрично поле во слоевита средина изразени преку формулација C во МРПЕ и примена на МоМ за решавање на проблемот. Според тоа, добиените резултатите можат да се сметаат за референтни.

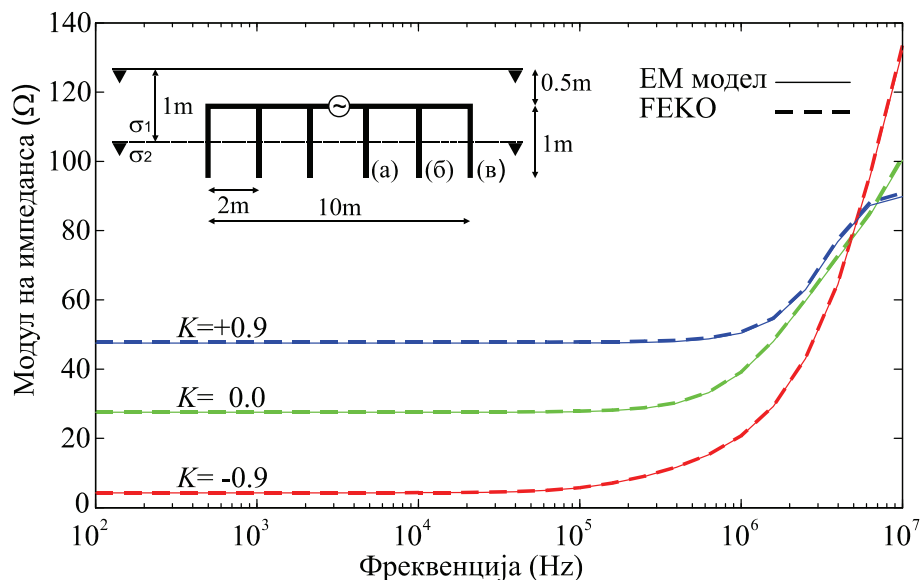
Со FEKO е овозможена анализа на структури со произволен облик, кои можат да се протегаат во еден или повеќе слоеви во слоевита средина. Меѓутоа FEKO не поддржува побуда на структурите со паралелни генератори, кои се карактеристични за анализи на заземјувачи како и анализи на многу ниски фреквенции, па затоа во анализираните примери побудата е реализирана со сериско напонско напојување и за фреквенции над 100 Hz. Предмет на споредбена анализа меѓу двете програми (програмата во која е имплементиран егзактниот електромагнетен модел и FEKO) се еквивалентната импеданса на структурата во однос на терминалите на идеалниот напонски генератор и лонгитудиналните струи во електродите.

Анализирана е хоризонтална електрода на длабочина 0.5 m во двослојна земја со дебелина 1 m на горниот слој. Електродата е со должина 10 m, а на неа се поврзани 6 вертикални електроди со должини од по 1 m, рамномерно распоредени и на меѓусебна оддалеченост од 2 m. Сите електроди се со радиус 0.01 m. За горниот слој на земја е усвоена специфична спроводност $\sigma_1 = 0.01$ S/m, а за долниот слој на земја се усвоени три карактеристични вредности $\sigma_2 = 0.19, 0.01$ и 0.000526 S/m, кои соодветствуваат на $K = -0.9, 0.0$ и $+0.9$, соодветно. За двата слоја е усвоена пермитивност $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10\epsilon_0$ и пермеабилност $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$. Системот е побуден со сериски напонски генератор, поставен во средината на хоризонталната електрода.

Изборот на овој пример е базиран на следните специфичности:

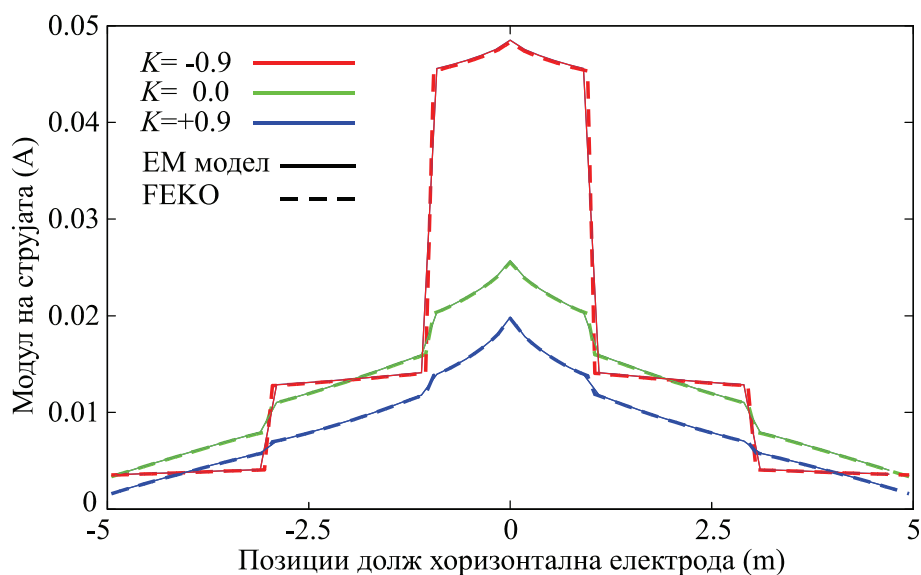
- системот е изведен од хоризонтални и вертикални електроди кои се протегаат во двата слоја на земја и по својата конструкција е близок до концептот за сложен заземјувач (со исклучок на применетиот тип на напојување кој е наметнат поради споредбата со FEKO),
- поради малите димензии на системот, густината на електродите, како и нивниот контакт со различните слоеви на земја, доаѓа до израз влијанието на слоевитиот карактер на земјата дури и за фреквенција од 10 MHz

На Слика 7.3 е направена споредба на импедансите со кои е оптоварен напонскиот генератор, пресметани како количник на напонот на генераторот (за кој е усвоена вредност 1 V) и струјата што тече низ него односно струјата низ сегментот на кој е поставен генераторот.

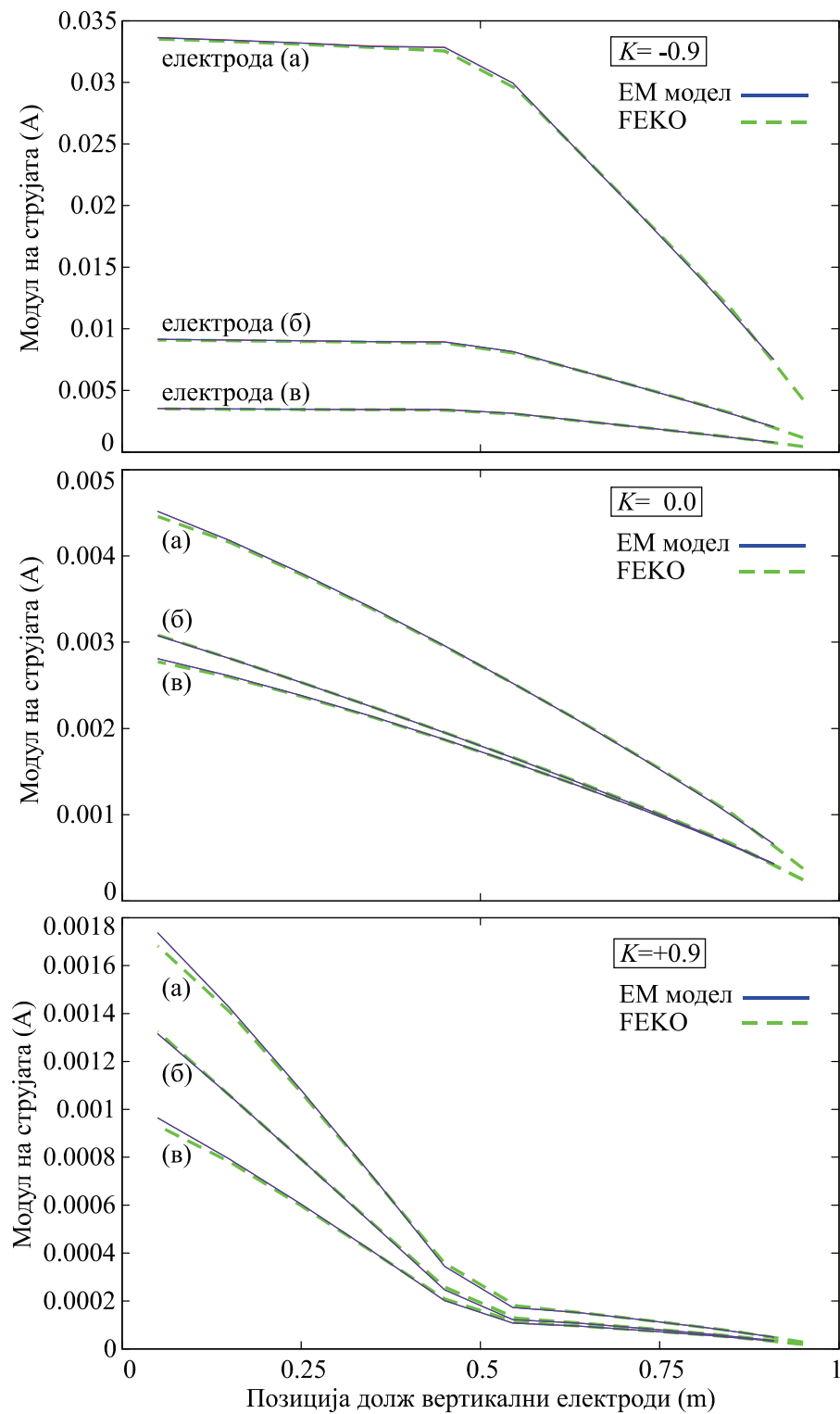


Слика 7.3 Споредба на импеданси со кои е оптоварен напонскиот генератор.

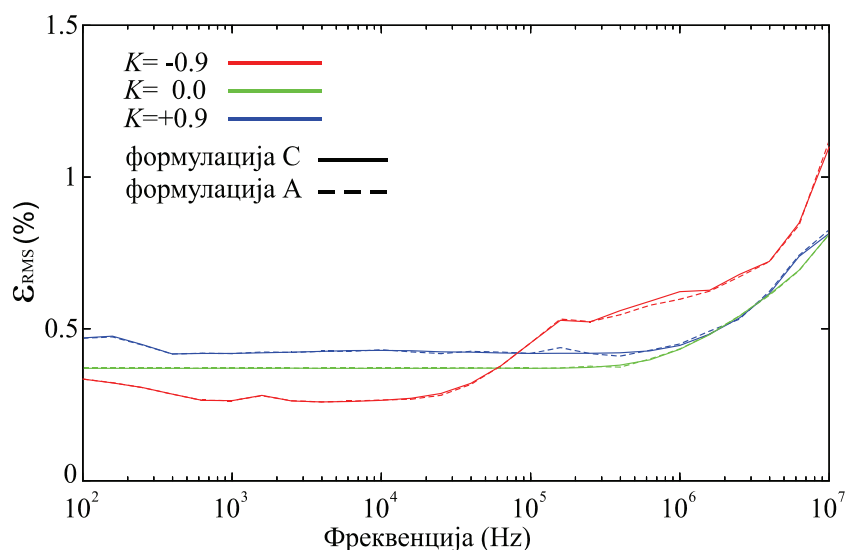
На Слика 7.4 и Слика 7.5 е даден приказ на распределбата на лонгитудиналните струи долж хоризонталната и вертикалните електроди за фреквенција на изворот од 1 MHz, за трите случаи на двослојна земја. На Слика 7.6 е направена споредба на лонгитудиналните струи во електродите во системот, пресметани со електромагнетниот модел (со примена на формулациите A и C) и FEKO, а меѓусебната разлика е изразена преку ϵ_{RMS} грешка, притоа усвојувајќи ги пресметаните струи со FEKO за референтни. Споредбата е направена за различни карактеристики на двослојна земја (за $K = -0.9, 0.0$ и $+0.9$) и за фреквенции во опсег од 100 Hz до 10 MHz



Слика 7.4 Споредба на лонгитудинални струи во хоризонтална електрода.



Слика 7.5 Споредба на лонгитудинални струи во вертикални електроди.



Слика 7.6 Анализа на ϵ_{RMS} грешка за лонгитудинални струи пресметани со двата програми усвојувајќи ги резултатите од FEKO како референтни.

Од приложените резултати може да се констатира поклопување на резултатите добиени со електромагнетниот модел и FEKO, за анализираниот опсег на параметри. Пресметаната ϵ_{RMS} грешка за лонгитудиналните струи која се движи до 1 %, може да е резултат на разлики во применетите базични и тест функции во МоМ, разлики во сегментација на структурата, нумерички постапки за решавање на проблемот итн.

7.3 Верификација со публикувани нумерички резултати

7.3.1 Верификации со нумерички резултати во доменот на статика

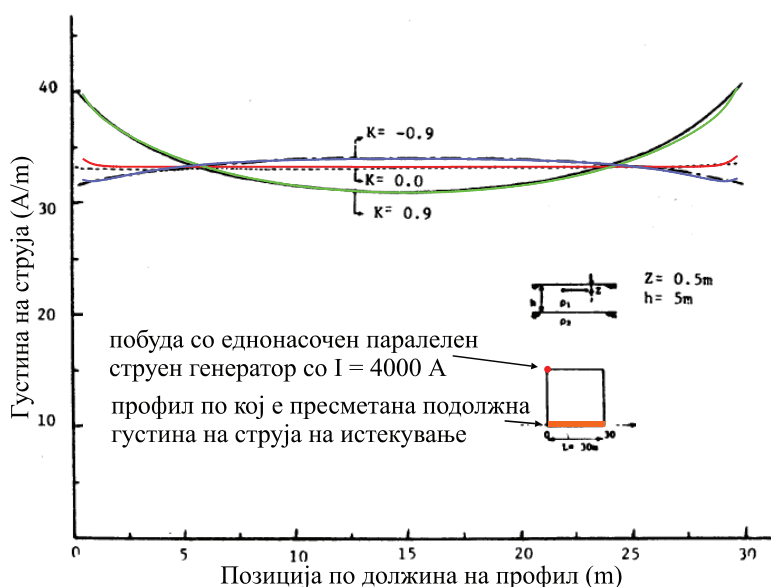
Верификација на предложениот модел во доменот на статика е извршена преку споредба со публикувани нумерички резултати во [Daw79a], [Daw79b] и [Daw94]. Во сите случаи анализирани се распределбите на подолжна густина на струја на истекување од електродите на заземјувачи, кои се напојувани со еднонасочен паралелен струен извор.

Резултатите на Слика 7.7 се однесуваат на мрежест заземјувач со едно окно, со димензии 30 x 30 m и радиус на електродите 0.01 m, поставен на длабочина од 0.5 m во двослојна земја со дебелина на горниот слој од 5 m. На Слика 7.8 се прикажани резултатите од анализа на мрежест заземјувач со четири окна, со димензии 30 x 30 m и радиус на електродите 0.01 m, поставен на длабочина од 0.5 m во двослојна земја со дебелина на горниот слој од 2 и 10 m. На Слика 7.9 се прикажани распределбите на подолжна густина на струја на истекување долж вертикална електрода со должина 10 m и радиус 0.01 m поставена во двослојна земја со дебелина на горниот слој од 5 m. Највисоката точка на вертикалната електрода, во која се инјектира струја, е на

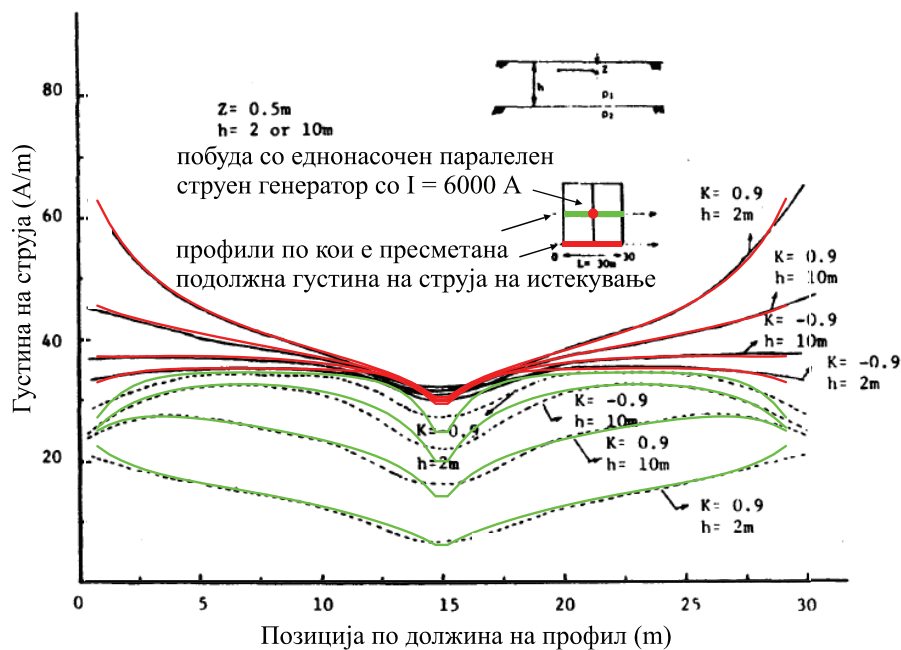
длабочина 0.05 m од површина на земјата. Во сите три примери, за горниот слој на земја е усвоена специфична спроводност $\sigma_1 = 0.01$ S/m, а за долниот слој на земја се усвоени три карактеристични вредности $\sigma_2 = 0.19$, 0.01 и 0.000526 S/m, кои соодветствуваат на $K = -0.9$, 0.0 и +0.9, соодветно.

Резултатите на Слика 7.10 се однесуваат на хоризонтален мрежест заземјувач со едно окно, со димензии 20 x 20 m и радиус на електродите 0.01 m, поставен на повеќе длабочини (прикажани на граfiците) во земја со три слоја, со дебелини од по 3 m на првите два слоја. Специфичните спроводности на слоевите изнесуваат: $\sigma_1 = 0.02$ S/m, $\sigma_2 = 0.001$ S/m и $\sigma_3 = 0.01$ S/m за случајот под а), и $\sigma_1 = 0.0005$ S/m, $\sigma_2 = 0.01$ S/m, $\sigma_3 = 0.001$ S/m за случајот под б). На Слика 7.11 е прикажана густината на струја на истекување кон земја од електрода на истиот заземјувач, поставен во земја со шест слоја со дебелина слоевите од по 2 m. Специфичните спроводности на слоевите изнесуваат: $\sigma_1 = 0.01$ S/m, $\sigma_2 = 0.00666$ S/m, $\sigma_3 = 0.004$ S/m, $\sigma_4 = 0.002$ S/m, $\sigma_5 = 0.00133$ S/m, $\sigma_6 = 0.001$ S/m.

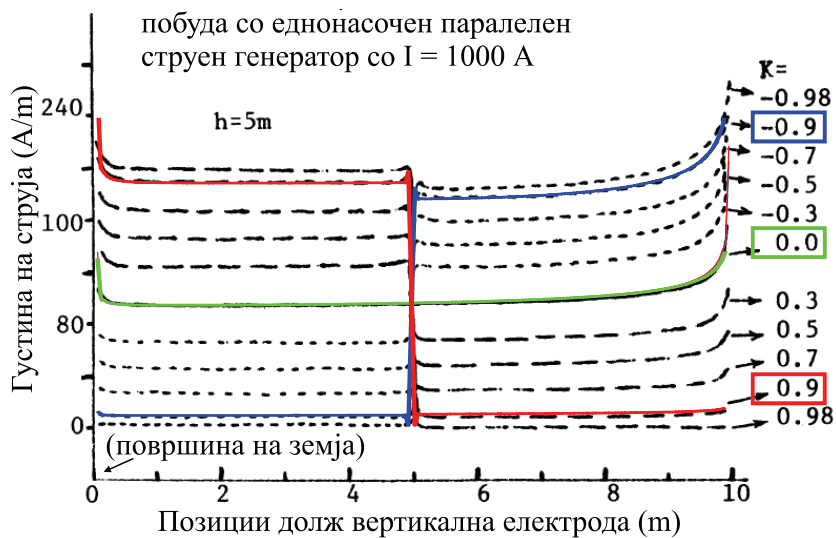
Во сите случаи, прикажаните резултати (во боја) се добиени со егзактниот електромагнетен модел во кој се применети Гриновите функции за потенцијали за формулација А и формулација С дадени во поглавјето 4.2 и со примена на постапките за нивно ефикасно решавање дадени во Глава 6. Пресметаните и публикуваните резултати добро се сложуваат, а со тоа се покажува дека со егзактниот електромагнетен модел и применетите постапки за негово решавање се овозможени анализи во статика, но исто така се покажува дека со моделот се овозможени анализи во повеќеслојна земја. Идентични резултати за примерите со двослојна земја се добиваат и со примена на нискофреквентни апроксимации на Гриновите функции кои се претставени во Глава 5.



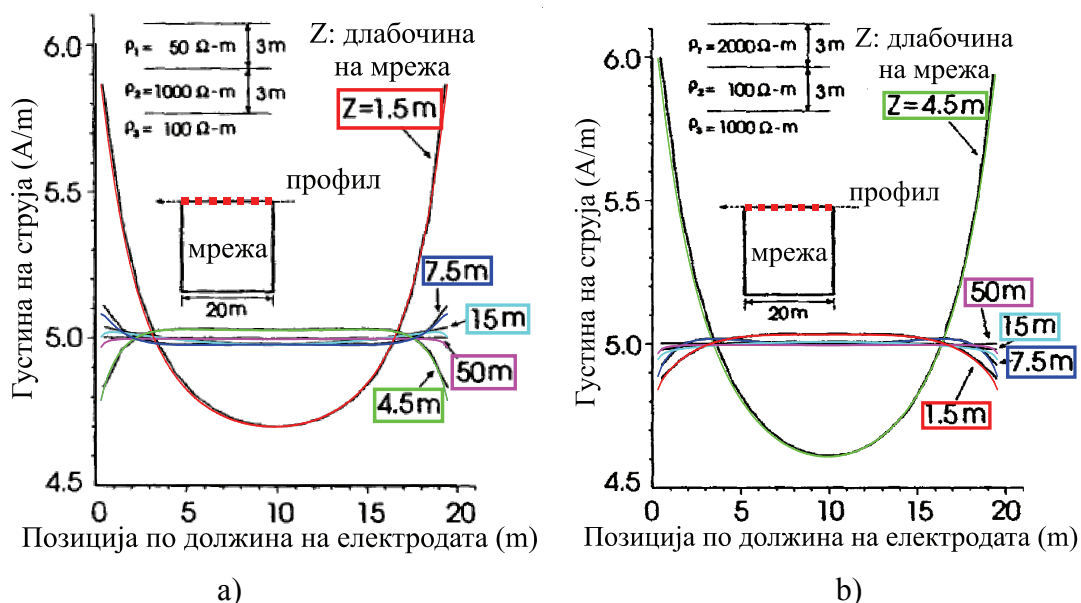
Слика 7.7 Струи на истекување од 30 m × 30 m мрежест заземјувач со едно окно во двослојна земја, претставени во функција од коефициентот на рефлексија K [Daw79a].



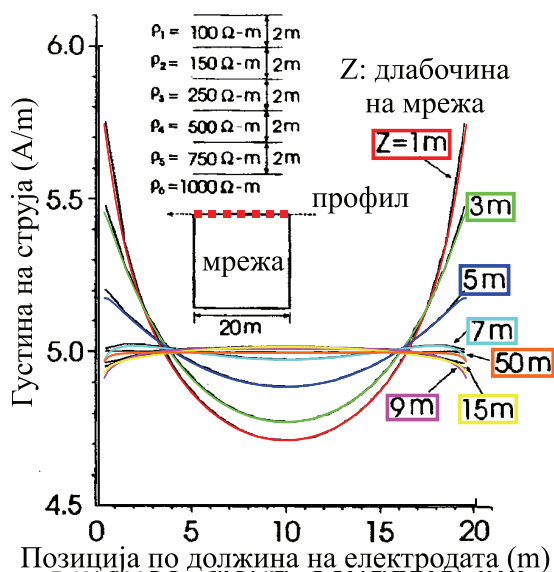
Слика 7.8 Струи на истекување од 30 m × 30 m мрежест заземјувач со четири окна во двослојна земја, претставени во функција од коефициентот на рефлексција K и дебелината на горниот слој на земја [Daw79a].



Слика 7.9 Струи на истекување од вертикална електрода во двослојна земја, претставени во функција од коефициентот на рефлексција K [Daw79b].



Слика 7.10 Струи на истекување од електрода на 20 x 20 m мрежест заземјувач во земја со три слоја, претставени во функција од длабочината Z на заземјувачот [Daw94].



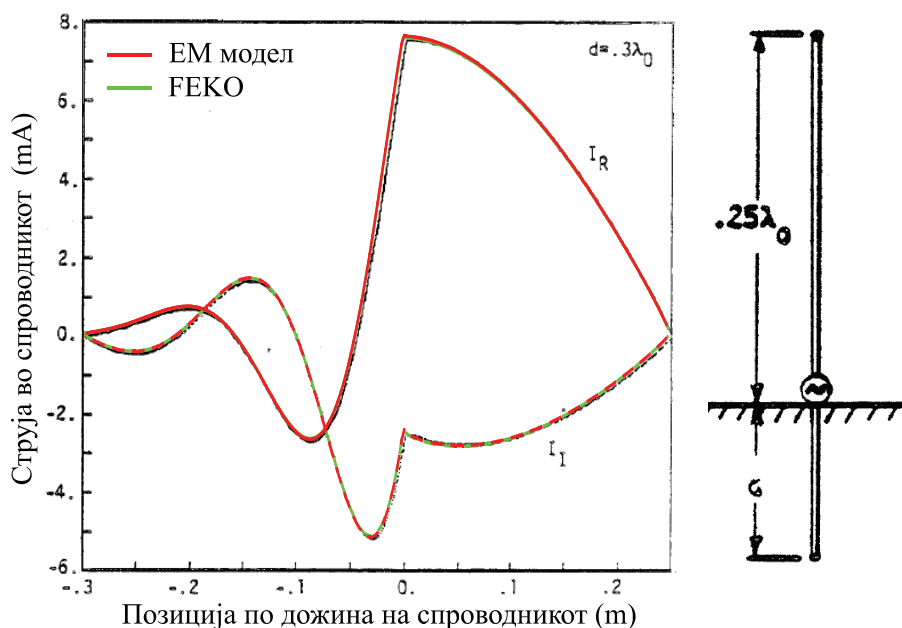
Слика 7.11 Струи на истекување од електрода на 20 x 20 m мрежест заземјувач во земја со шест слоја, претставени во функција од длабочината Z на заземјувачот [Daw94].

7.3.2 Верификации со нумерички резултати во доменот на високите фреквенции

Верификација на предложениот модел во доменот на високи фреквенции е извршена преку споредба со публикувани нумерички резултати во [Bur83], [Mic89] и [Kar17].

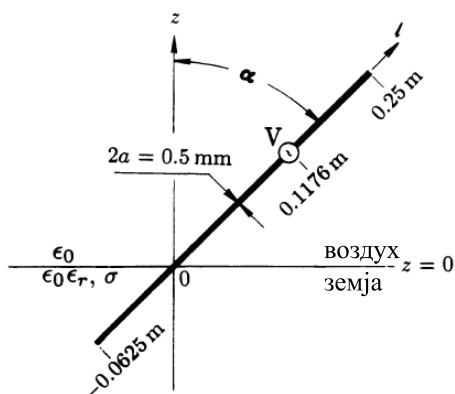
Во првиот пример, прикажан на Слика 7.12, анализиран е вертикален спроводник со радиус $0.25 \cdot 10^{-3}$ m кој продира од воздух во хомогена земја. Должината на надземниот дел изнесува 0.25 m, а делот во земја е со должина од 0.3 m. Спроводникот е напојуван со сериски напонски генератор со ефективна вредност на напон 1 V и фреквенција 300 MHz, кој е поставен во точката на продор. За слојот со земја се зададени следните карактеристики: $\sigma_1 = 0.267$ S/m, $\epsilon_1 = 16 - j16$ и $\mu_1 = \mu_0$.

За дадениот пример, пресметана е лонгитудиналната струја во спроводникот со програмата во која е применет егзактниот електромагнетен модел, притоа применувајќи А и С формулацијата за потенцијали во МРПЕ. Исто така е направена и пресметка на лонгитудиналните струи со FEKO. Од Слика 7.12 може да се констатира речиси идеално поклопување на публикуваните нумерички резултати во [Bur83], пресметаните резултати со примена А и С формулација и пресметаните резултати со FEKO.



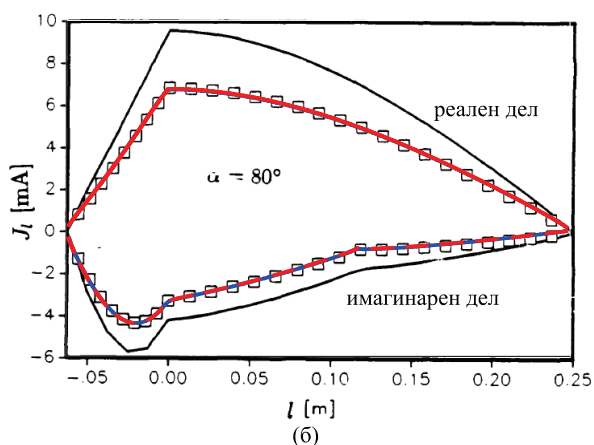
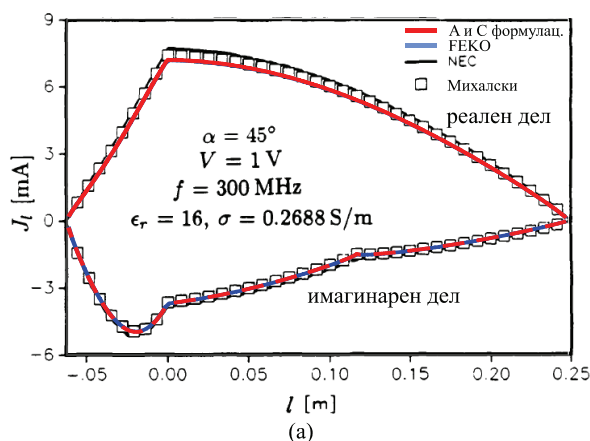
Слика 7.12 Подолжни струи во вертикален спроводник кој продира во земја [Bur83].
(полна линија - реална вредност, испрекината линија – имагинарна вредност)

Во вториот пример е анализиран кос тенок спроводник чија геометрија е прикажана на Слика 7.13. Спроводникот продира во земја под агли 45° и 80° . Параметрите на земја и серискиот напонски генератор се идентични како во претходниот пример.



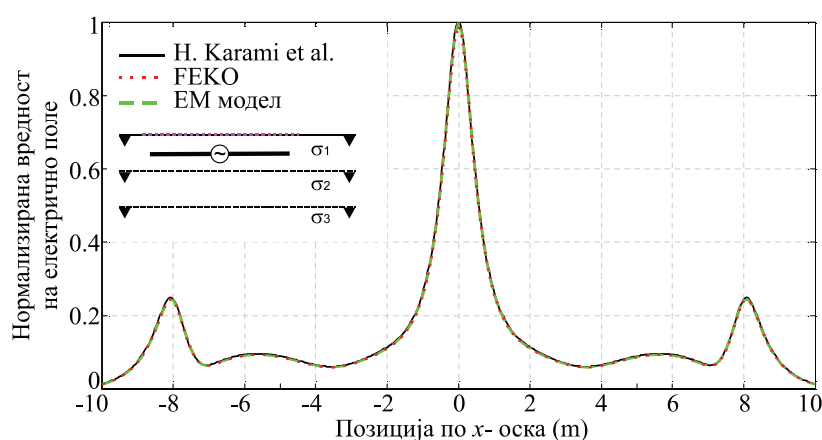
Слика 7.13 Кос тенок спроводник кој продира во земја [Миc89].

Пресметана е лонгитудиналната струја во спроводникот со програмата во која е применет егзактниот електромагнетен модел, притоа применувајќи А и С формулација за потенцијали во МРПЕ. Исто така е направена и пресметка на лонгитудиналните струи со ФЕКО. Од Слика 7.14 може да се констатира поклопување на пресметаните резултати со примена А и С формулација и пресметаните резултати со ФЕКО, како и поклопување со резултатите од Михалски [Миc89].

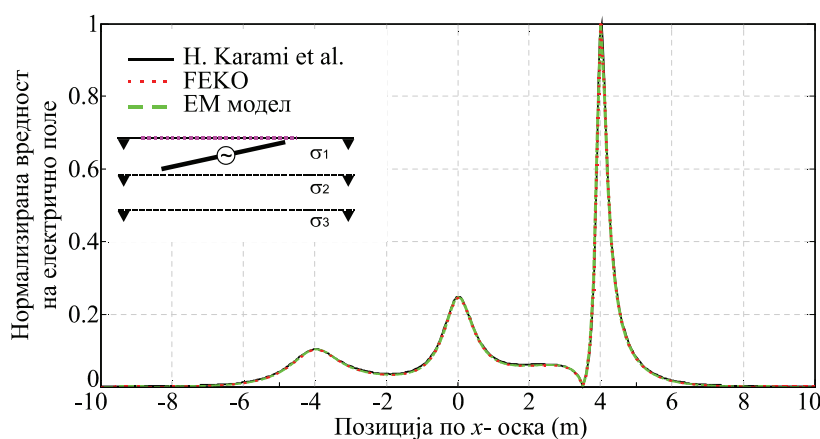


Слика 7.14 Лонгитудинални струи во кос спроводник кој продира во земја [Миc89].
 (полна линија - реална вредност, испрекината линија – имагинарна вредност)

Во следните два примери се анализирани хоризонтална и коса електрода во земја со три слоја, со карактеристики: $\sigma_1 = 0.001$ S/m, $\sigma_2 = 0.01$ S/m, $\sigma_3 = 0.1$ S/m $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2} = 10$, $\epsilon_{r3} = 80$, $\mu_{r1} = \mu_{r2} = \mu_{r3} = 1$ и $h_1 = 1$ m, $h_2 = 2$ m. Двете електроди се со радиус од 0.0125 m и се централно напојувани со сериски напонски генератор. Крајните точки на хоризонталната електрода се со координати (-8.0, 0.0, -0.5) и (8.0, 0.0, -0.5), а крајните точки на косата електрода се со координати (-3.98, 0.0, -0.84) и (3.98, 0.0, -0.15). Се пресметува тангенцијалната компонента на електрично поле по профил чии крајни точки се со координати (-10.0, 0.0, 0.0) и (10.0, 0.0, 0.0), за фреквенција од 10 MHz за примерот со хоризонталната и фреквенција од 5 MHz за примерот со косата електрода. Покрај публикуваните резултати, на Слика 7.15 и Слика 7.16, се прикажани и резултати добиени со електромагнетниот модел (идентични за формулација А и С) и со FEKO, при што може да се констатира поклопување на трите графици.



Слика 7.15 Нормализирана вредност на x- компонента на електрично поле од хоризонтална електрода во слоевита земја со три слоја [Kar17]



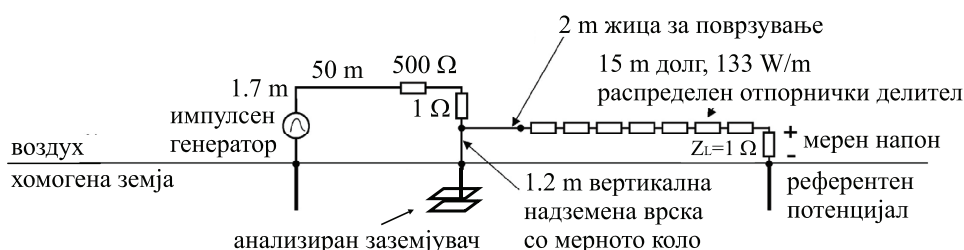
Слика 7.16 Нормализирана вредност на x- компонента на електрично поле од коса електрода во слоевита земја со три слоја [Kar17]

Во сите случаи, пресметаните и публикуваните резултати одлично се сложуваат, а со тоа се покажува дека применетиот модел е валиден за високофреквентни анализи во хомогена и повеќеслојна земја.

7.4 Верификација со публикувани експериментални резултати

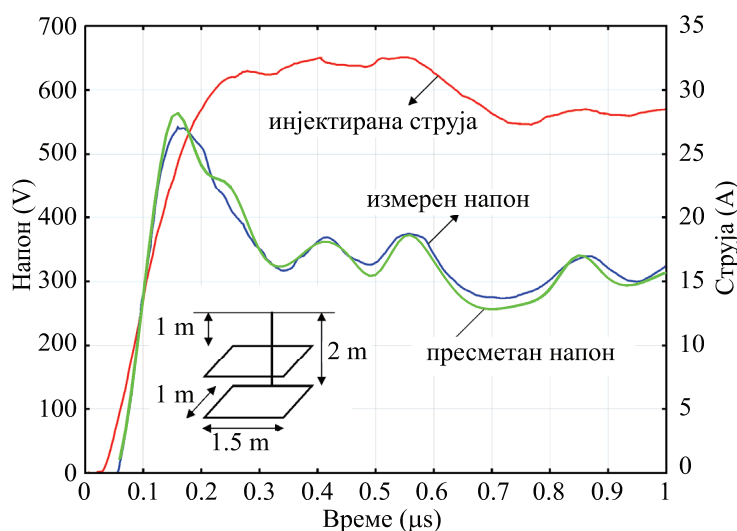
7.4.1 Верификација со експериментални резултати во хомогена земја

Постојат мал број на добро документирани и публикувани експерименти со заземјувачи кои се изведени на терен, а кои можат да послужат за верификација на пресметковните модели. Една група на добро документирани експерименти е спроведена во доцните 1970-ти години од страна на Electricite de France (EdF) [Mer92], [Ros93]. За валидација на моделот искористен е пример со заземјувач со две окца од бакарен спроводник со радиус 0.01 m, поставен во хомогена земја со спроводност $\sigma_1 = 0.0143 \text{ S/m}$ и пермитивност $\epsilon_1 = 15\epsilon_0$. Мерното коло е илустрирано на Слика 7.17.



Слика 7.17 Приказ на мерно коло за анализираниот експеримент [Ols15].

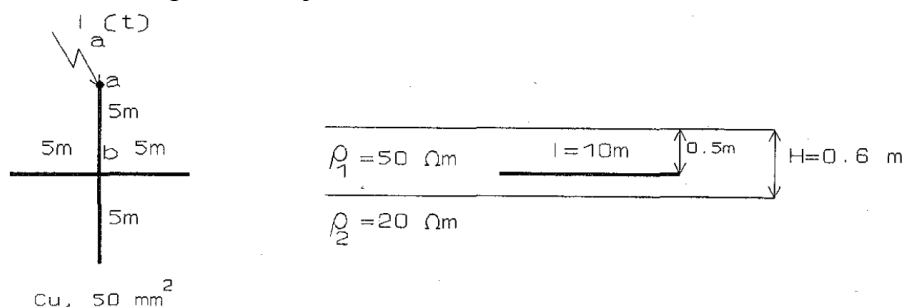
На Слика 7.18 е прикажан пресметаниот напон меѓу точка на вертикалната електрода на површина на земја и референтна точка во бесконечност, притоа земајќи го предвид влијанието на спојните кабли кои додаваат индуктивност од 1.2 μH и отпорничкиот делител кој воведува задоцнување од 0.05 μs . Постапката за корекција на мерните резултати поради влијанието на мерното коло е подетално опишана во [Ols15]. По применетата корекција се добива одлично совпаѓање на експерименталните и пресметаните резултати со примена на формулација C.



Слика 7.18 Споредба на пресметани со измерени вредности на напон.

7.4.2 Верификација со експериментални резултати во двослојна земја

Друга група на добро документирани резултати за различни конфигурации на заземјувачи во двослојна земја се дадени во [Sto98]. За верификација искористен е пример со заземјувач во форма на ѕвезда (конфигурацијата бр. 3 во [Sto98]) чија геометрија и место на побуда се прикажани на Слика 7.19. Заземјувачот е изведен со бакарни спроводници со радиус 0.004 m, а е поставен на длабочина 0.5 m во земја за која врз база на мерења е утврден двослоен карактер со $\sigma_1 = 0.02$ S/m и $\sigma_2 = 0.050$ S/m, со дебелина 0.6 m на горниот слој.



Слика 7.19 Приказ на конфигурација на анализиран заземјувач [Sto98].

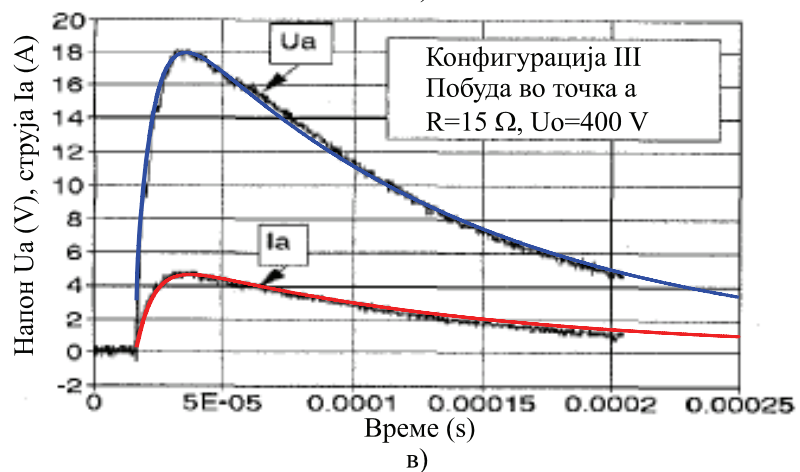
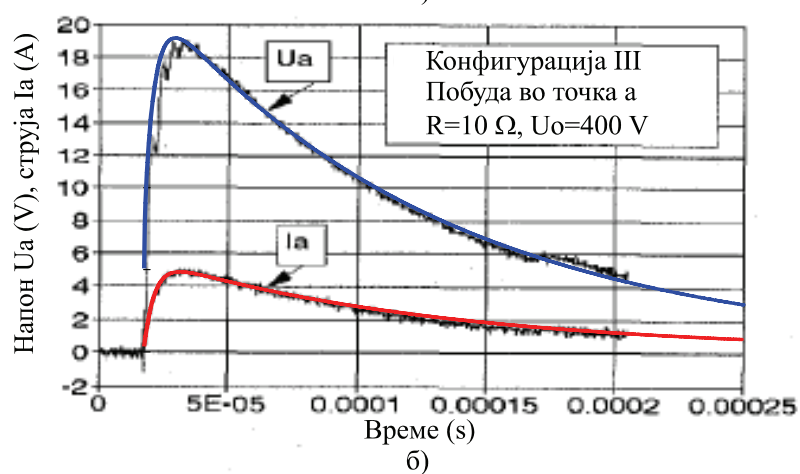
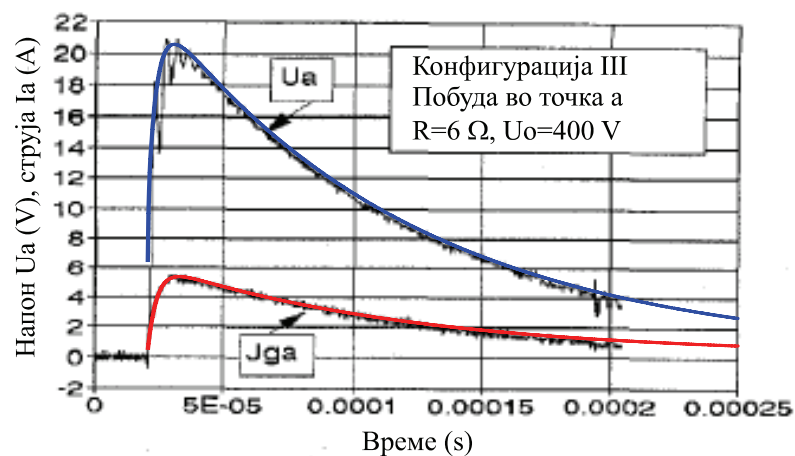
Заземјувачот е побуден со струјни импулси, кои според прикажаниот облик можат приближно да се опишат со двојно експоненцијална функција, изразена како:

$$i_{DE}(t) = \frac{I_m}{k} \cdot (e^{-t\tau_1} - e^{-t\tau_2}) \quad (7.4)$$

чии параметри за секој анализиран случај се добиени со нагудување:

Анализиран случај	T_{max}/T_2 (μ s)	I_m/k (kA)	τ_1 (μ s)	τ_2 (μ s)
а)	8 / 85	6.102	0.009905	0.28
б)	9.3 / 90	5.7215	0.00882	0.245
в)	16 / 99	5.8215	0.00832	0.145

На Слика 7.20 се прикажани измерената импулсна струја и напон во точката на побуда. Врз основа на анализа на вредностите на измерениот напон и струја, поточно на нивниот количник во периодот на опаѓање на струјниот импулс каде што доминираат нискофреквентните компоненти на побудата, проценето е дека отпорноста на заземјувачот изнесува приближно $R_{g(dc)} \approx 4 \Omega$. Оваа вредност значително се разликува од пресметаната вредност од 2.9Ω за дадената геометрија на заземјувачот и карактеристики на земја, што укажува на можна промена на отпорот на земја меѓу периодот на анализа на земјата и периодот на мерење на заземјувачот. Со подесување на параметрите на земја е постигнато поклопување на измерените и пресметаните напонски импулси за $\sigma_1 = 0.02$ S/m и $\sigma_2 = 0.03$ S/m. Во овој случај пресметаниот статички отпор кон земја на заземјувачот изнесува $R_{g(dc)} = 3.8 \Omega$ што е блиску до претходно проценетата вредност.



Слика 7.20 Измерени и пресметани вредности за струја и напон во точка на побуда [Sto98].

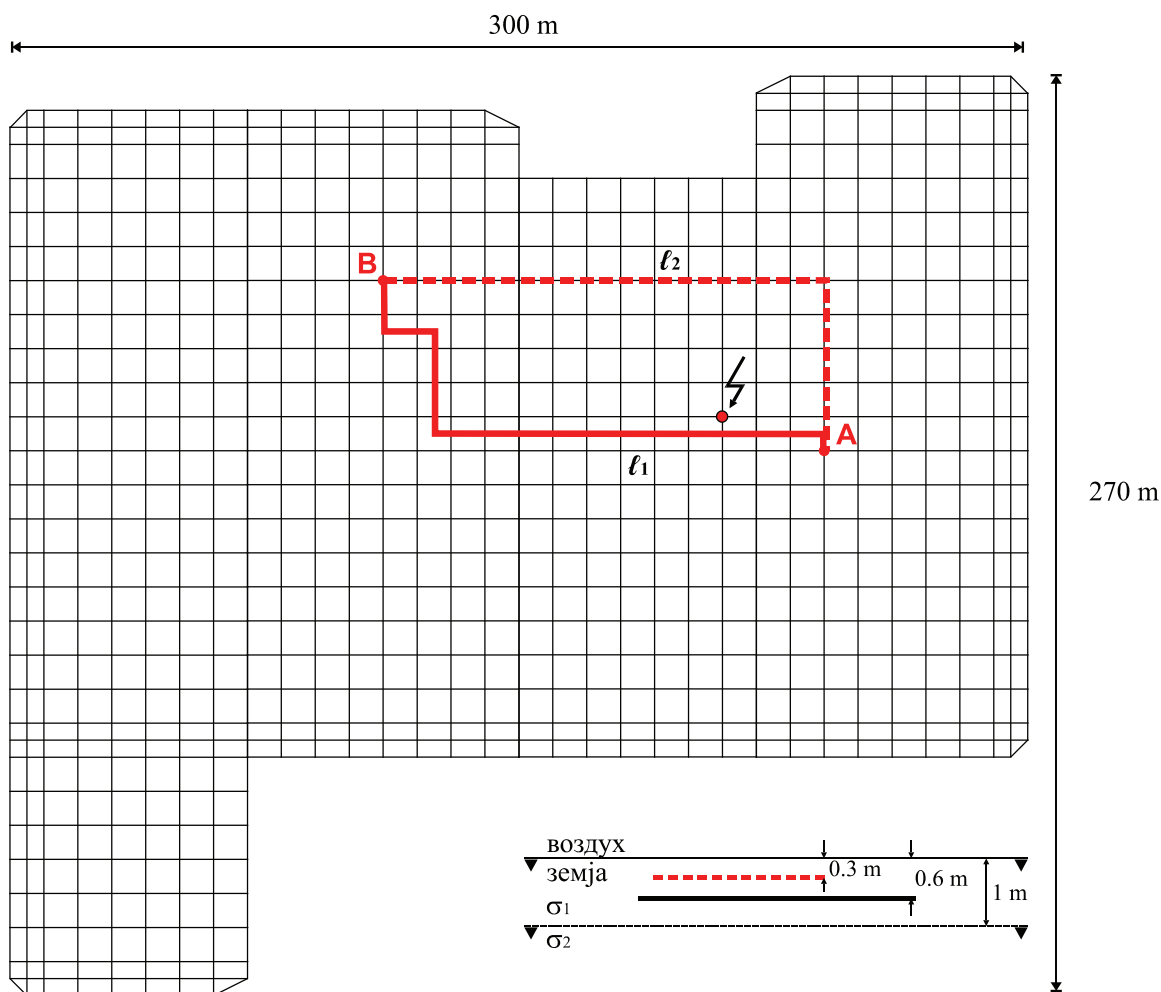
Глава 8

Примена на електромагнетниот модел во анализа на големи заземјувачи

Еден од основните проблеми во примената на егзактна електромагнетна теорија за анализи на големи заземјувачки системи претставува долгото времетраење на пресметките, па вообичаено анализите се извршуваат врз база на нискофреквентни апроксимации. Доменот на примена на нискофреквентните апроксимации е обемно анализиран, меѓутоа поради недостаток на ефикасен модел, ваквите анализи се ограничени на едноставни и мали заземјувачи (најчесто праволиниски електроди) или праволиниски дипол антени. Со воспоставувањето на ефикасен електромагнетен модел за анализа на заземјувачи, кој се базира на егзактна електромагнетна теорија, од една страна е овозможена прецизна анализа на практични проблеми кај заземјувачи со реална големина, а од друга страна анализа на доменот на точност на апроксимативните методи во анализа на големи заземјувачи.

Предложениот ефикасен модел е применет во нумеричка параметарска анализа на голем мрежест заземјувач, базиран на обликот и димензиите кои се дадени во примерот во [Zha05]. Заземјувачот е со неправилен правоаголен облик, со максимални димензии 300 x 270 m, со окна со димензии 10 x 10 m и 0.007 m радиус на електродите, а е поставен во земја на длабочина од 0.6 m.

Со цел да се поедностави анализата на влијанието на карактеристиките на слоевита земја врз параметри кои се од интерес во анализи на заземјувачи, како и врз точноста на нискофреквентните апроксимации, анализите се извршени за двослојна земја со 1 m дебелина на горниот слој и $\sigma_1 = 0.01$ S/m, а специфичната спроводност на долниот слој σ_2 е избрана да соодветствува на фактор на рефлексивност $K = -0.9, 0.0$ и $+0.9$. На длабочина од 0.3 m се дефинирани два профила, со патеки ℓ_1 и ℓ_2 и со исти крајни точки, кои се водат хоризонтално над заземјувачот (ℓ_1 следи слична патека како кабелот во примерот во [Zha05]), а на двата краја се спуштаат вертикално до електродите на заземјувачот. Заземјувачот е побуден со паралелен струен генератор со амплитуда 1 A и променлива фреквенција во опсег од 100 Hz до 10 MHz. Обликот на заземјувачот, местото на побуда и позициите на профилите се прикажани на Слика 8.1.



Слика 8.1 Приказ на геометрија, профили и место на побуда на анализираниот мрежест заземјувач.

Анализата е извршена во фреквенциски и во временски домен, за побуда со струјни импулси со два карактеристични облици кои се однесуваат на прв и последователен удар на гром. Предмет на анализа се:

- влијанието на карактеристиките на двослојна земја врз импедансата кон земја на заземјувачот, пресметана во точката на поврзување на побудата;
- преоден потенцијал во точката на побуда, во однос на далечна неутрална земја;
- влијанието на параметрите на двослојна земја врз напоните помеѓу крајните точки на профилот l_1 ;
- воведената грешка кај пресметаните напони по профилот l_1 со примена на нискофреквентни апроксимации на Гриновите функции за потенцијали во МРПЕ;
- влијание на изборот на патека на профилите врз пресметаниот напон во исти крајни точки.

Струјните импулси кои се однесуваат на прв и последователен удар на гром се репродуцирани со двојно експоненцијална функција, дадена со изразот (7.4), а се определени со параметрите дадени во Табела 8.1 (обликот е соодветен на импулсите дадени во стандардот IEC 62305-1 [IEC10]):

Табела 8.1 Параметри со кои се опишува струен импулс за прв и последователен удар на гром преку двојно експоненцијална функција

Облик на струен импулс	T_{max}/T_2 (μs)	I_m (A)	k	τ_1 (μs)	τ_2 (μs)
прв удар	10 / 350	1	0.951	0.00211	0.2485
последователен удар	0.25 / 100	1	0.995	0.00699	10.87

Анализите се извршени со примена на егзактна и апроксимативна форма на Гринови функции од формулација С на потенцијали во МРПЕ. Притоа е важно да се истакне дека во анализираниот пример, каде поради геометријата на заземјувачот се присутни само хоризонтални извори, применетите Гриновите функции се идентични со Гриновите функции од традиционалната формулација. Оваа формулација и нејзините апроксимации се најчесто применувани во анализи на заземјувачи, па една од целите на оваа анализа е да се прикажат резултати добиени со егзактна форма на Гриновите функции, како и да се утврди доменот на примена на нивните апроксимации во анализи на големи мрежести заземјувачи. Според сознанијата на авторот, прикажаните резултати кои се добиени со примена на егзактна форма на Гринови функции, се први од овој тип за случај со големи заземјувачи од овие размери.

8.1 Анализа на влијанието на карактеристиките на двослојна земја врз пресметаната импеданса на заземјувачот кон земја

Импедансата кон земја $Z(j\omega)$ е параметар кој ги опишува карактеристиките на заземјувачот во фреквентен домен. Таа е приближно еднаква на статичката отпорност R_{dc} на заземјувачот во опсегот на ниски фреквенции, а може да има поголема или помала вредност од R_{dc} во опсегот на високи фреквенции, зависно од карактерот (индуктивен или капацитивен) на импедансата. Се пресметува според постапката дадена во Глава 3.4.3, не зависи од обликот на побудата, но зависи од местото на побуда, геометријата на заземјувачот и карактеристиките на средината во која се наоѓа.

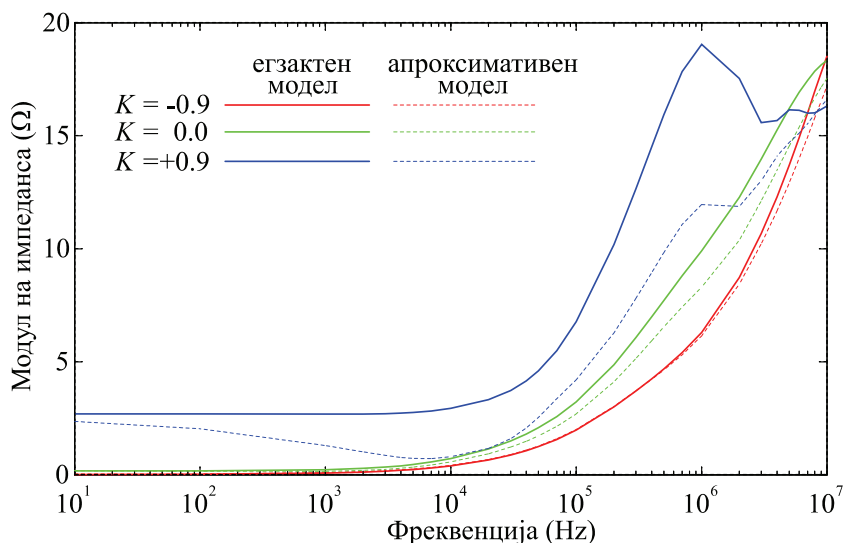
На Слика 8.2 се прикажани пресметани вредности на модулот на импедансата кон земја за испитуваниот мрежест заземјувач, добиени со примена на егзактна електромагнетна теорија (претставени со полна линија) и со примена на нискофреквентна апроксимација (претставени со испрекинатата линија), а врз база на Гриновите функции за формулација С на потенцијали во МРПЕ.

Анализата базирана на егзактна електромагнетна теорија покажува дека импедансата кон земја е фреквенциски независна и приближно еднаква на статичката

отпорност на заземјувачот во доменот на ниските фреквенции, односно до фреквенција од 1 kHz, за трите типа на двослојна земја. Над оваа фреквенција импедансата станува фреквенциски зависна и се карактеризира со претежно индуктивен карактер. Резултатите на Слика 8.2 ја покажуваат и изразената зависност на импедансата од карактеристиките на долниот слој на земја во целиот фреквенциски опсег.

Анализите извршени со примена на нискофреквентната апроксимација покажуваат дека нејзината точност, покрај фреквенциската зависност, во голема мера зависи и од карактеристиките на слоевитата земја. Нискофреквентната апроксимација на формулација С, овозможува висока точност на анализите речиси во целиот анализиран фреквенциски опсег, за земја со висока спроводност на долниот слој односно за $K = -0.9$. Меѓутоа точноста на оваа апроксимација е значително намалена во случај на земја со мала спроводливост на долниот слој односно за $K = +0.9$, а грешката е изразена дури и при фреквенции од 100 Hz. Изнесените заклучоци важат само за горен слој на земја со $\sigma_1 = 0.01$ S/m бидејќи други ситуации не се анализирани.

Тука треба да се истакне дека за хоризонтални структури, нискофреквентната апроксимација на формулација С е идентична со нискофреквентната апроксимација за традиционалната формулација, која е одамна воспоставена и применувана во анализи на заземјувачи [Am04].



Слика 8.2 Импеданса кон земја на мрежест заземјувач во функција од фреквенцијата и од карактеристиките на двослојна земја.

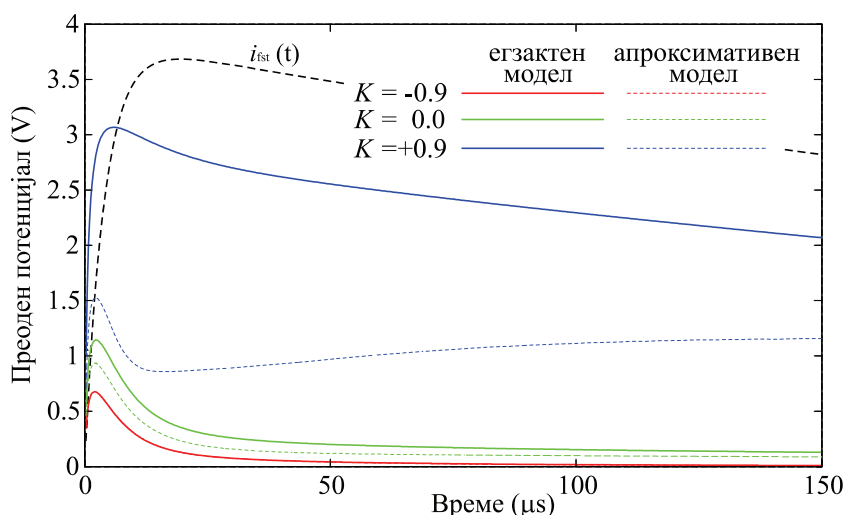
8.2 Анализа на влијанието на карактеристиките на двослојна земја врз пресметаниот преоден потенцијал во местото на побуда

Со импедансата кон земја беа опишани фреквентните карактеристики на заземјувачот, независно од побудата. Но при побуда со струен импулс, перформансите на заземјувачот во голема мера зависат и од обликот на струјниот импулс. Преодниот потенцијал е параметар со кој се опишуваат перформансите на заземјувачот во временски домен. Тоа е всушност напонот кој се воспоставува на местото на побуда во однос на далечна неутрална земја, а вообичаено е определен единствено преку електричниот скалар потенцијал во местото на побуда на заземјувачот, како што е дискутирано во поглавјето 3.4.2. Се пресметува најпрво во фреквенциски домен, како производ на хармониската импеданса кон земја (анализирана во претходното поглавје) и Фуриеовата трансформација на струјниот импулс, а потоа се трансформира во временски домен со примена на инверзна Фуриеова трансформација:

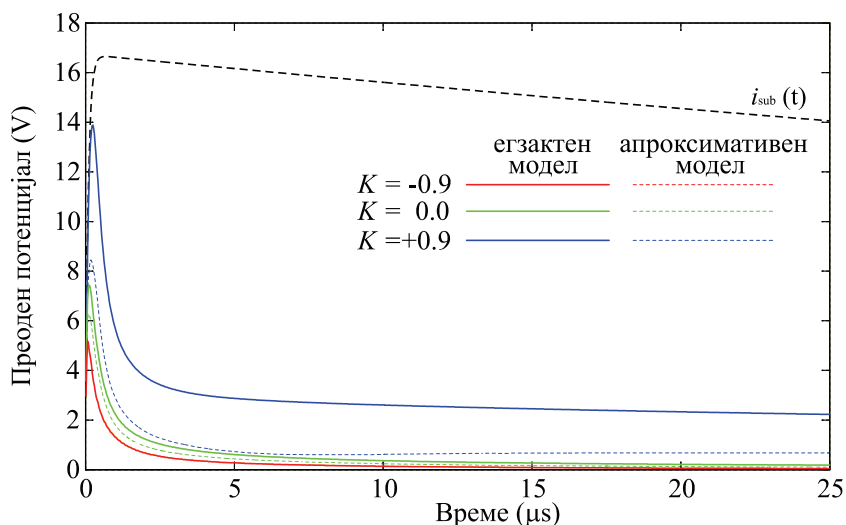
$$u(t) = F^{-1} \{ Z(j\omega) \cdot F[i(t)] \} \quad (8.1)$$

На Слика 8.3 и Слика 8.4 се прикажани преодните потенцијали, пресметани за струјни импулси кои одговараат на прв и последователен удар на гром со амплитуда од 1 А. Резултатите се добиени со примена на егзактна форма и нискофреквентна апроксимација на Гриновите функции од формулација С на потенцијали во МРПЕ.

Резултатите добиени со примена на егзактна електромагнетна теорија покажуваат силно влијание на карактеристиките на долниот слој на земја врз пресметаниот преоден потенцијал. Како особено неповолен се покажува случајот со долен слој на земја со голема специфична отпорност, независно од обликот на струјниот импулс.



Слика 8.3 Преоден потенцијал од прв удар на гром со амплитуда од 1 А пресметан со егзактна и апроксимативна форма на Гринови функции.



Слика 8.4 Преоден потенцијал од последователен удар на гром со амплитуда од 1 А пресметан со егзактна и апроксимативна форма на Гринови функции.

Слични заклучоци можат да се добијат и од резултатите добиени со примена на нискофреквентна апроксимација на Гриновите функции. Меѓутоа максималните вредности на преодниот потенцијал, пресметани со примена на нискофреквентна апроксимација, се речиси двојно пониски од пресметаните со егзактните Гринови функции, за двослојна земја со голема специфична отпорност на долниот слој, односно за $K = +0.9$. Тоа ги прави нискофреквентните апроксимации несоодветни за анализи при овие околности. Нешто помала грешка, односно околу 20 % пониски вредности се добиени за хомогена земја, а добро поклопување на резултатите е постигнато единствено за двослојна земја со мала специфична отпорност на долниот слој и при прв удар на гром.

Од анализата може да се заклучи дека нискофреквентните апроксимации на Гриновите функции од формулација C (кои се идентични со традиционалната формулација за хоризонтални структури) се единствено применливи за земја со висока спроводност на долниот слој. Истите даваат резултати со прифатлива грешка во случај на хомогена земја, меѓутоа добиените резултати ги потценуваат пресметаните напони и нивната примена не обезбедува сигурност на анализите. Изнесените заклучоци важат само за горен слој на земја со $\sigma_1=0.01$ S/m бидејќи други ситуации не се анализирани.

8.3 Анализа на напон меѓу крајни точки на профил

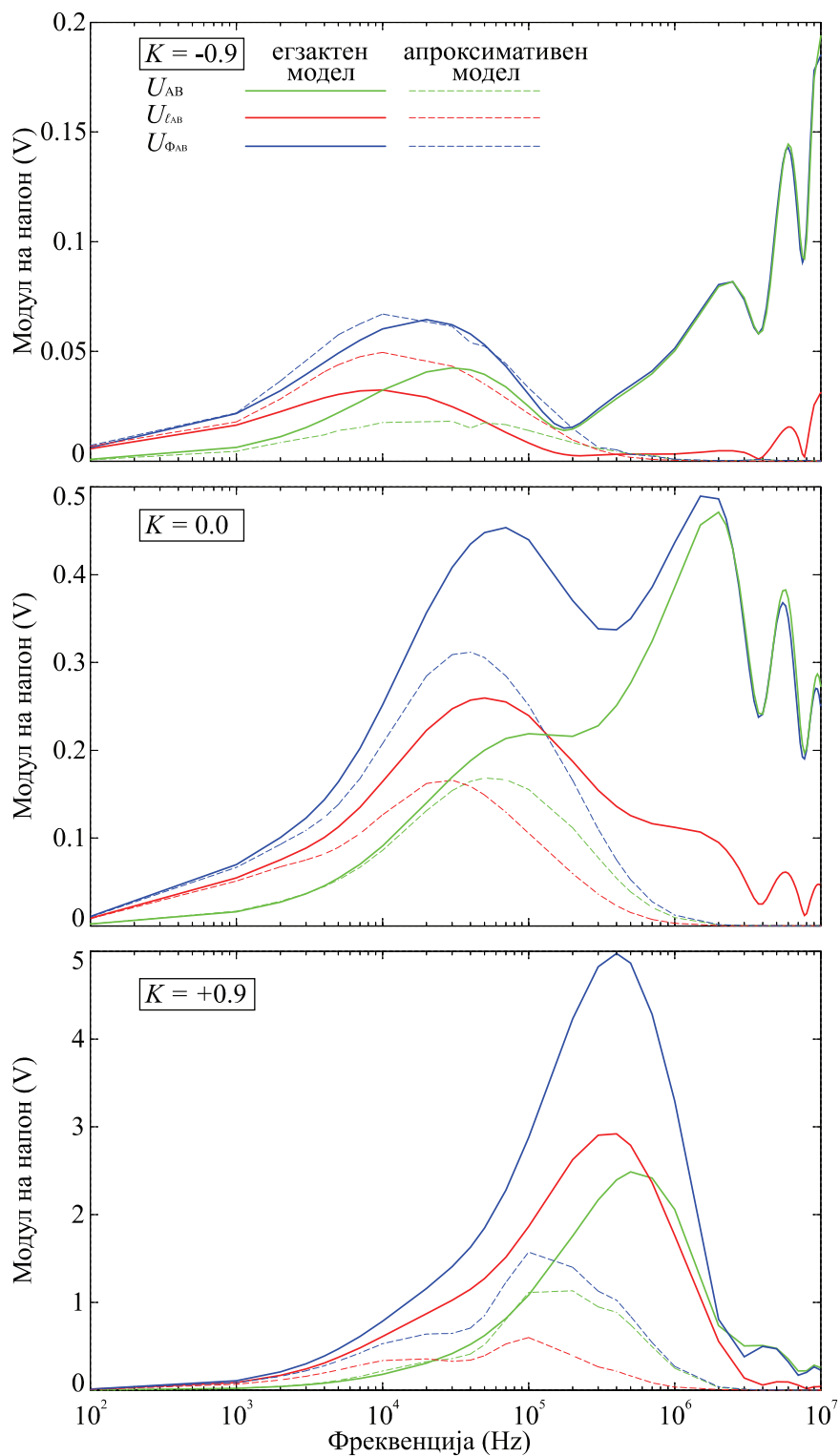
На Слика 8.5 со полна линија се прикажани напоните меѓу крајните точки на профилот со патека ℓ_1 , во фреквенциски домен и за различни карактеристики на двослојна земја, пресметани со примена на егзактна форма на Гриновите функции за потенцијали.

За многу ниски фреквенции, компонентата $U_{\phi_{AB}}$ тежи кон нула како резултат на речиси еквипотенцијалниот карактер на заземјувачот и тлото над него, додека компонентата $U_{\ell_{1AB}}$ тежи кон нула како резултат на малата промена на магнетно поле во единица време. Во опсегот на фреквенции до 2 MHz, вкупниот напон меѓу крајните точки на профилот има пониска вредност од одделните компоненти $U_{\phi_{AB}}$ или $U_{\ell_{1AB}}$, што укажува на нивно меѓусебно редуцирано дејство [Grc96b], [Cig13]. За фреквенции над 2 MHz, доминира компонентата $U_{\phi_{AB}}$ која претставува разлика на електричните скалар потенцијали во крајните точки на профилот.

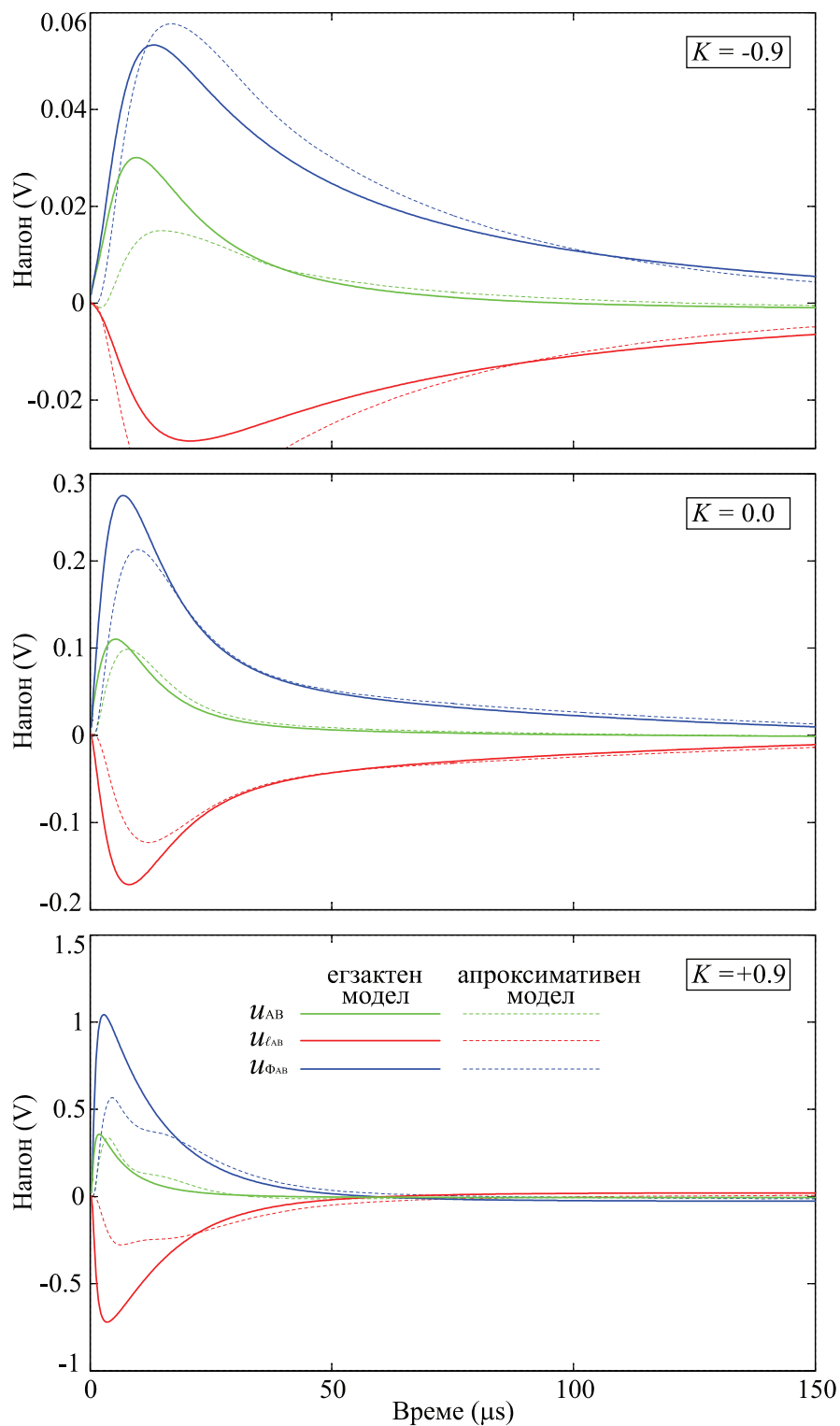
На истите граfiци, со испрекината линија, се прикажани и резултатите добиени со примена на нискофреквентна апроксимација на Гриновите функции од формулација С. Пресметаните напони со двата пристапи се приближно исти само за фреквенции до 1 kHz. Над оваа фреквенција, пресметаните напони со примена на нискофреквентна апроксимација се со значително послаб интензитет, особено во доменот на високите фреквенции над 1 MHz каде што целосно се губат високофреквентните компоненти на пресметаните напони. Тоа значи дека во анализа на заземјувачи при високофреквентна побуѓа, пресметаните напони со примена на нискофреквентна апроксимација се потценети, односно нивната примена не обезбедува сигурност на анализите.

На Слика 8.6 и Слика 8.7 се прикажани напоните меѓу крајните точки на профилот, ℓ_1 во временски домен, пресметани за струјни импулси чиј облик одговара на прв и последователен удар на гром, соодветно. Од прикажаните граfiци може да се констатира дека при прв удар на гром постојат мали разлики во пресметаните напони со егзактна и апроксимативната форма на Гриновите функции во случај на хомогена земја и на двослојна земја со голема специфична отпорност на долниот слој, односно при $K = 0.0$ и $+0.9$. Во сите останати случаи за прв и последователен удар на гром, напоните пресметани со нискофреквентна апроксимација значително се разликуваат и ги потценуваат пресметаните напони со примена на егзактна форма на Гриновите функции за потенцијали од формулација С. Овие разлики се особено изразени кај пресметаните напони при последователен удар на гром, каде што се изразени придонесите на високофреквентните компоненти на струјниот импулс. Тоа значи дека примената на овие апроксимации не обезбедува сигурност на анализите.

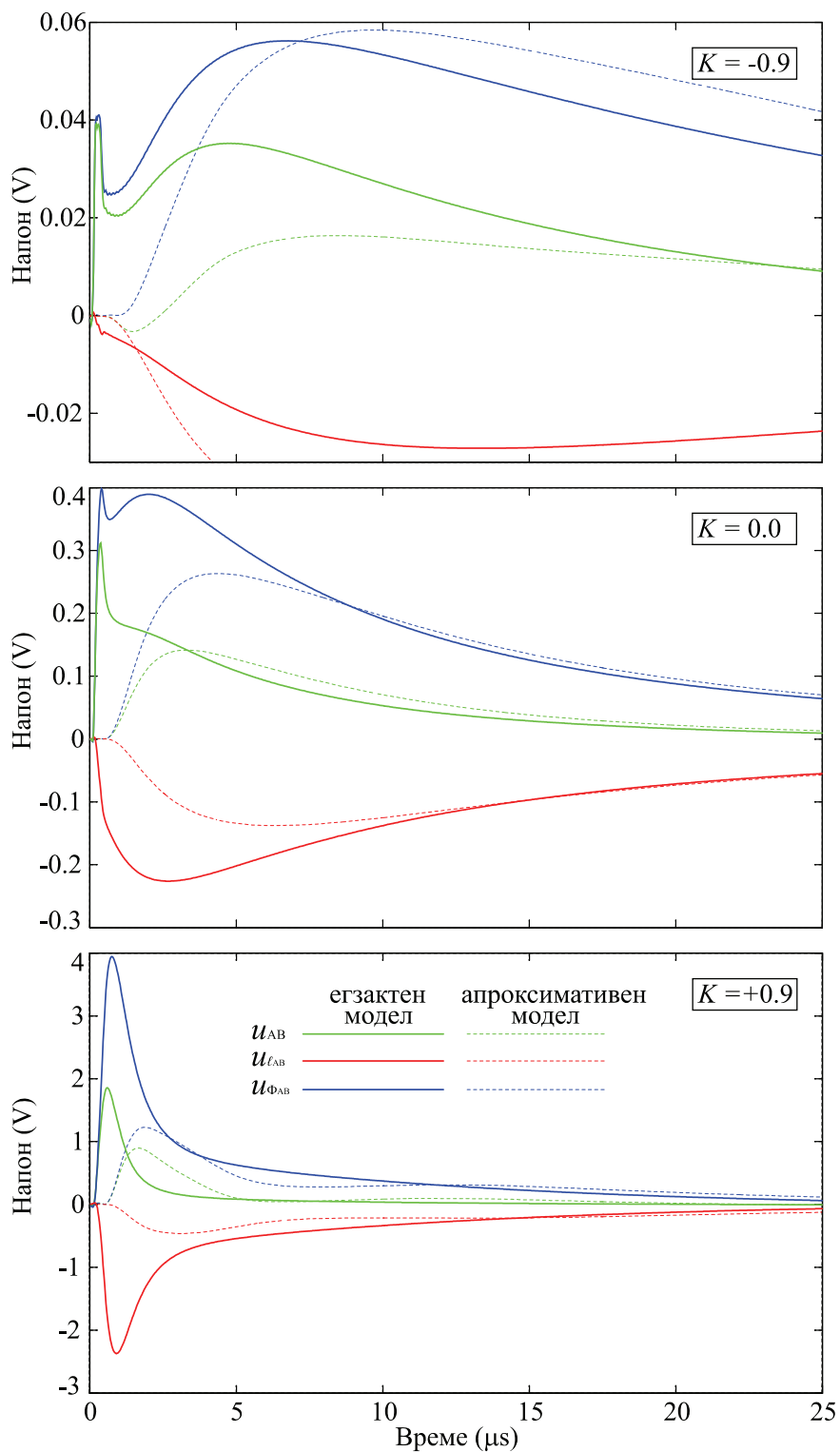
На Слика 8.8 - Слика 8.10 се прикажани напони меѓу точките А и В, пресметани по два профила кои на Слика 8.1 се означени со ℓ_1 и ℓ_2 . Напоните се претставени во фреквенциски домен, а потоа и во временски домен за струјни импулси со максимална вредност од 1 А, кои одговараат на прв и последователен удар на гром. Со прикажаните резултати се покажува дека изборот на патека по која би се водел кабел во околина на заземјувачот може да има големо влијание врз индуцираните напони на неговите краеве. Пресметаните напони по профилот ℓ_1 се речиси двојно поголеми од пресметаните напони по профилот ℓ_2 , а според прикажаните резултати овие меѓусебни разлики се независни од карактеристиките на земјата. Разликите се должат различните придонеси на променливото магнетното поле, изразени преку компонентата $U_{\ell_{AB}}$.



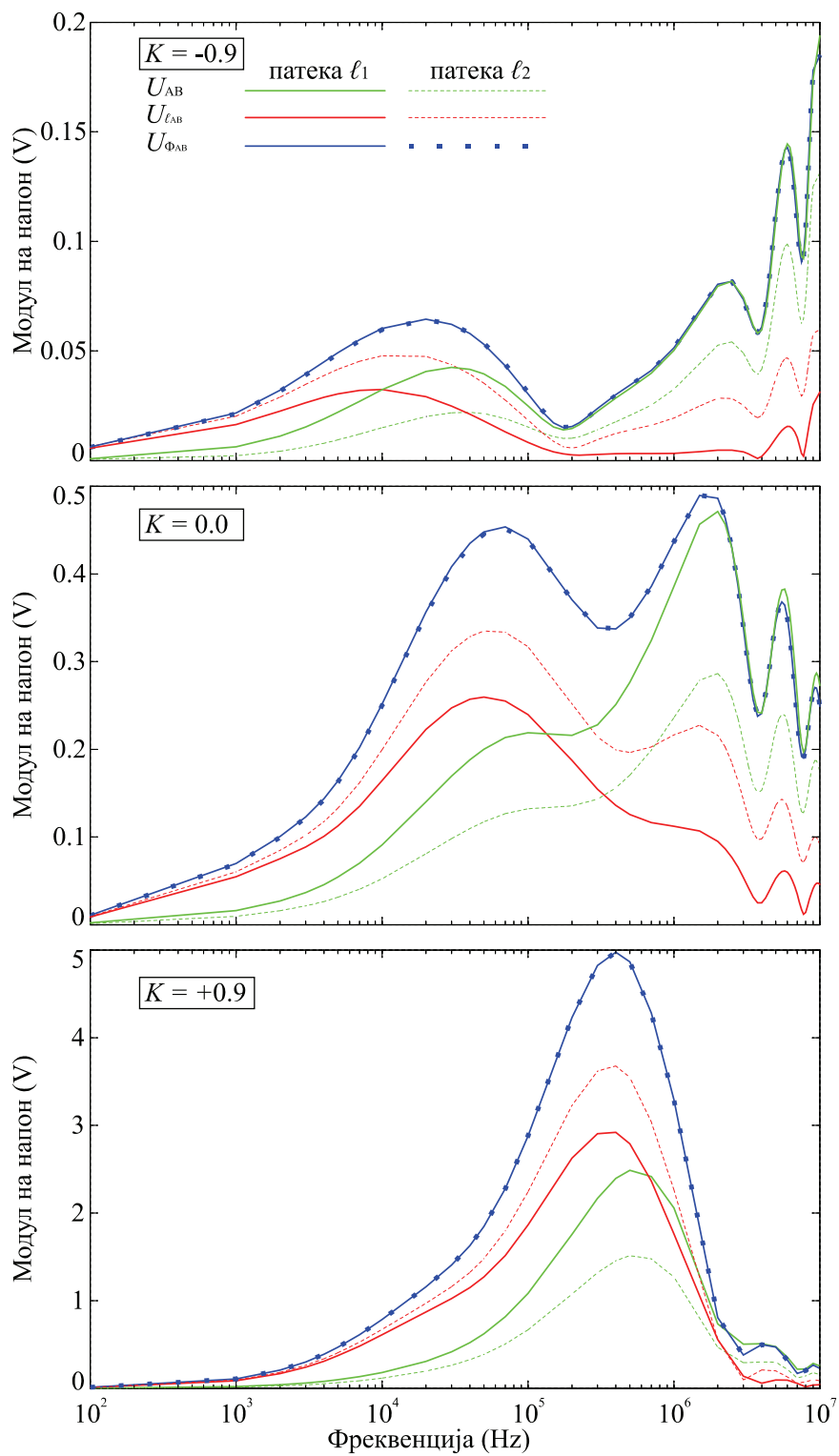
Слика 8.5 Напони во фреквенциски домен, пресметани меѓу крајни точки на профил со егзактна форма и нискофреквентна апроксимација на Гриновите функции.



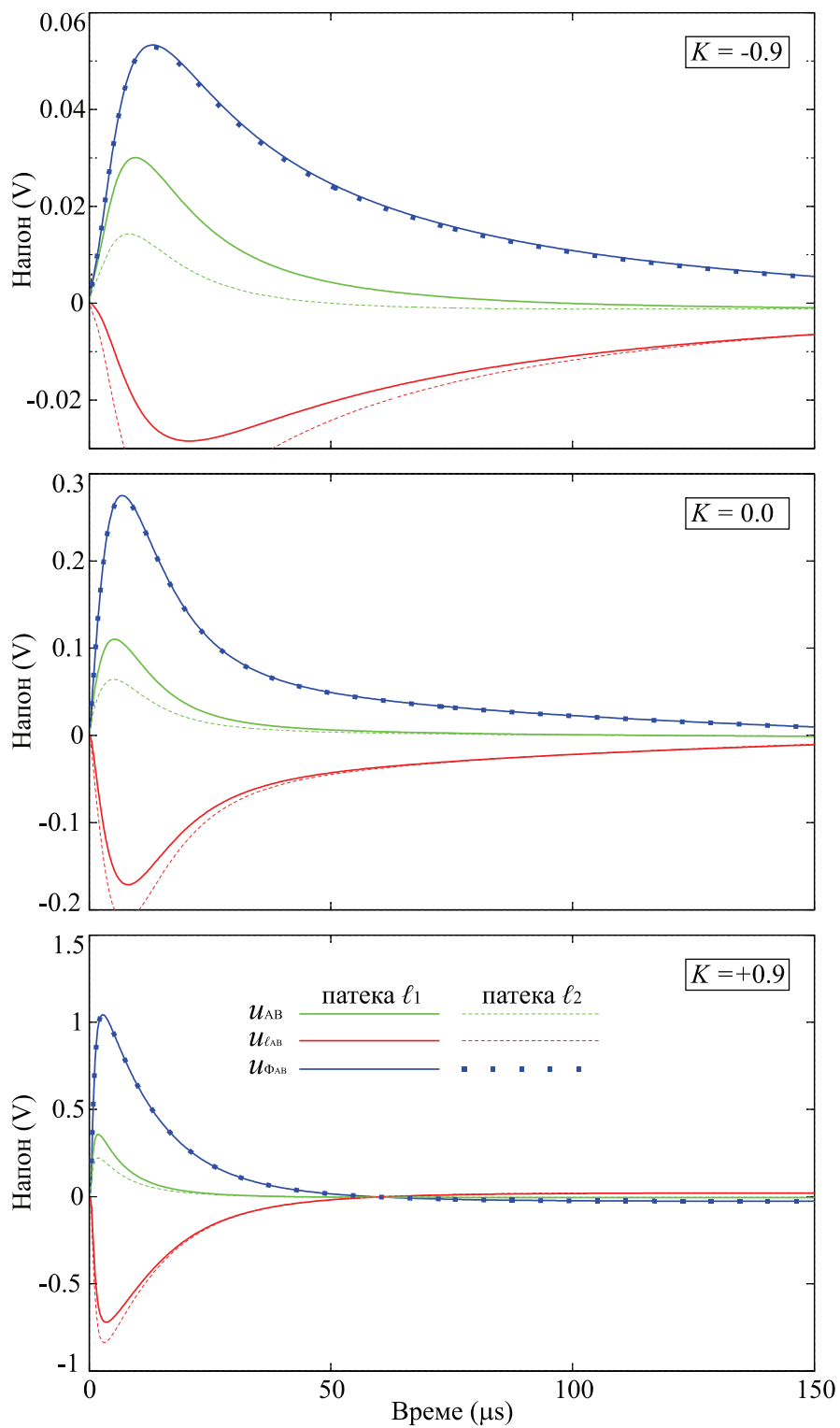
Слика 8.6 Напони при прв удар на гром, пресметани меѓу крајни точки на профил со егзактна форма и нискофреквентна апроксимација на Гриновите функции.



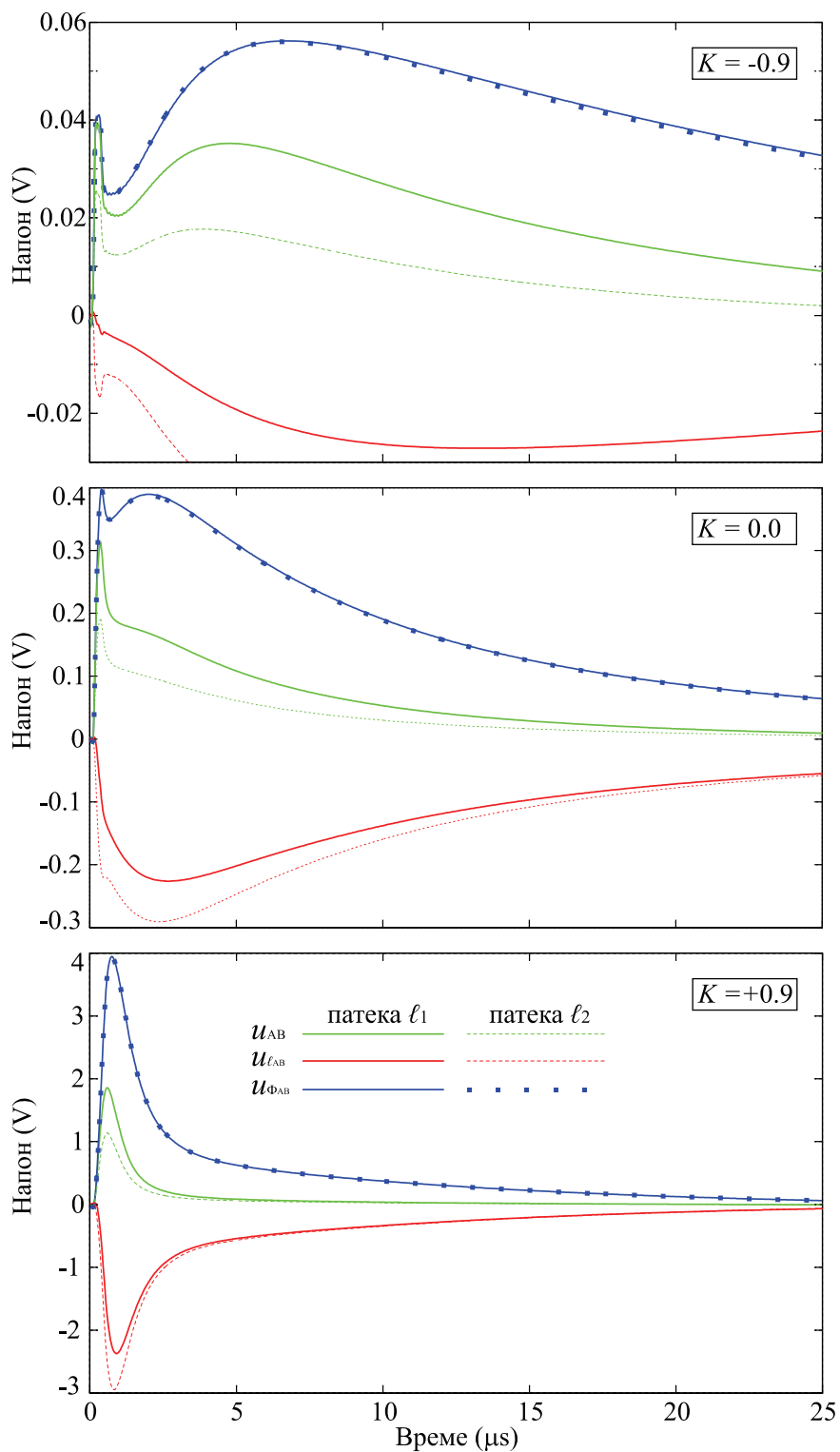
Слика 8.7 Напони при последователен удар на гром, пресметани меѓу крајни точки на профил со егзактна форма и нискофреквентна апроксимација на Гриновите функции.



Слика 8.8 Напони во фреквенциски домен, пресметани меѓу точки А и В по две различни патеки l_1 и l_2 .



Слика 8.9 Напони при прв удар на гром, пресметани меѓу точки А и В по две различни патеки l_1 и l_2 .



Слика 8.10 Напони при последователен удар на гром, пресметани меѓу точки А и В по две различни патеки ℓ_1 и ℓ_2 .

Глава 9

Заклучок

Главната цел на истражувањата во рамки на оваа докторска дисертација беше да се воспостави егзактен и пресметковно-ефикасен електромагнетен модел за прецизна анализа на високофреквентни и преодни појави кај големи заземјувачки системи, со сложени конфигурации на електроди, кои се наоѓаат во слоевита земја.

Во таа насока беше извршено унапредување на постојниот електромагнетен модел за анализа на заземјувачи во хомогена земја, кој се базира врз интегралната равенка за електрично поле со мешани потенцијали и примена на метод на моменти. Притоа за прв пат во електромагнетниот модел се воведени математички егзактни Гринови функции за потенцијали во слоевита средина, за различни формулации во МРПЕ (традиционална и т.н. А, В и С формулација) со што е овозможена анализа на електромагнетни проблеми кај заземјувачи во спроводна слоевита средина, со произволна конфигурација и ориентација на електроди кои се протегаат низ еден или повеќе слоеви. Со цел да се надмине проблемот на долготрајноста на нумеричкото решавање на интегралните равенки од Сомерфелдов тип, применети се постапки за подобрување на конвергенцијата и сингуларниот карактер на интегралните равенки, а потоа е применета интерполација на нивните решенија. На тој начин е постигнато значително забрзување на пресметките во хомогена и повеќеслојна земја, преку редуцирање на бројот на Сомерфелдови интегрални кои се решаваат со директно нумеричко интегрирање, а притоа се добиени речиси егзактни решенија. Исто така предложени се апроксимации на Гриновите функции за потенцијали во МРПЕ со значително поголема точност во однос на постоечките апроксимации. Егзактниот електромагнетен модел е имплементиран во компјутерска програма изработена во програмскиот јазик Fortran, со која се добиени прикажаните резултати во анализите. Точноста на добиените резултати е потврдена преку верификации со други компјутерски програми за анализа на електромагнетни проблеми во слоевита средина, како и со публикувани нумерички и експериментални резултати. Со унапредувањето на електромагнетниот модел, постигнато е значително проширување на неговиот домен на примена во анализа на големи подземни но и надземни тенкожичани структури, како и за анализа на нивните меѓусебни влијанија. Со тоа се отворени нови перспективи за истражувачка работа како и можности за поширока примена на електромагнетниот модел во инженерски цели.

Истражувањата поврзани со докторската дисертација резултираа со дваесеттина трудови кои беа објавени во меѓународни списанија или беа презентирани на меѓународни или домашни конференции.

9.1 Придонеси во областа на истражување

Врз основа на спроведените истражувања во рамки на докторската дисертација, можат да се резимираат следните придонеси:

- Со воведувањето на математички егзактни Гринови функции за потенцијали за формулација А и С, постигнато е проширување на доменот на примена на егзактниот електромагнетен модел за анализа на сложени геометрии на заземјувачи, со хоризонтални и вертикални електроди кои се протегаат низ еден или повеќе слоеви во слоевита земја. Со постојниот егзактен електромагнетен модел базиран на МРІЕ и МоМ беа овозможени анализи на заземјувачи во хомогена земја, анализи на хоризонтални заземјувачи кои се ограничени во рамки на еден слој од двослојна земја и вертикални заземјувачи со пробив низ двослојна земја.
- Подобрена е ефикасноста на решавање на интегралните равенки од Сомерфелдов тип за анализи на заземјувачи во хомогена и слоевита земја, со што е постигнато значително забрзување на пресметките и е олеснета анализата големи заземјувачки системи. Со тоа е надминат проблемот со долгото време на извршување на пресметките, кој претставуваше една од главните пречки за примена на егзактна електромагнетна теорија за анализа на големи заземјувачи.
- Со унапредувањето на егзактниот електромагнетен модел и постапките за негово ефикасно решавање, овозможено прецизно утврдување на влијанието на слоевитата средина врз параметри кои се од практичен интерес кај големи заземјувачи, во случај на високофреквентна побуда или при транзиенти. Досегашните анализи кај големи заземјувачи вообичаено беа базирани на примена на нискофреквентни апроксимации.
- Предложени се нискофреквентни апроксимации на Гриновите функции во МРІЕ, за хомогена и двослојна земја, изведени врз база на изборот на вектор потенцијали кој е предложен од Ертеза и Парк. Презентираните резултати покажуваат дека овие апроксимации овозможуваат значително повисока точност на анализите, споредено со постојните апроксимации кои се базираат на Сомерфелдовиот избор на потенцијали. Со тоа е овозможено проширување на доменот на примена на нискофреквентните апроксимации и за анализи при повисоки фреквенции.
- Претставени се прецизни анализи на голем мрежест заземјувач (со димензии 300 x 270 m) во двослојна земја, во кои е прикажано влијанието на карактеристиките на двослојна земја врз пресметаните импеданси кон земја, преоден потенцијал во точката на побуда и напоните кои можат да се воспостават меѓу две точки на заземјувачкиот систем, во фреквенциски домен за опсег на фреквенции од 100 Hz до 10 MHz и во временски домен за струјни

импулси чиј облик одговара на прв и последователен удар на гром. Анализите се извршени со примена на егзактна форма на Гринови функции за формулација C на потенцијалите во МРПЕ.

- Горенаведените анализи се повторени и со примена на нискофреквентна апроксимација на Гриновите функции за формулација C , притоа се покажува дека во речиси сите случаи, пресметаните напони со оваа апроксимација значително се разликуваат и се пониски од пресметаните напони со примена на егзактна форма на Гринови функции. Со тоа се покажува дека примената на оваа апроксимација во анализи на големи заземјувачи не обезбедува сигурност во анализите.
- Со параметарска анализа се покажува дека примената на ефикасниот електромагнетен модел за анализа на големи мрежести заземјувачи во двослојна земја резултира со значително пократко пресметковно време во однос на примената на нискофреквентните апроксимации, особено во доменот на ниските фреквенции. Според тоа, примената на нискофреквентни апроксимации на Гриновите функции за потенцијали може да се смета за оправдана во анализи на заземјувачи само со цел да се избегнат комплексните постапки за нумеричко решавање на Сомерфелдовите интегралите, но не и да се зголеми ефикасноста на пресметките. Исклучок од оваа констатација е примената на нискофреквентни апроксимации при анализи во хомогена земја во кои може да постои само еден рефлектиран лик на изворот, што ги прави анализите значително побрзи во однос на останатите пристапи за извршување на анализите.

9.2 Насоки за идна истражувачка работа

Во текот на изработката на докторската дисертација се воочени можности за понатамошно подобрување на ефикасноста на претставениот модел, преку:

- имплементација на методи за поефикасно нумеричко интегрирање на Сомерфелдовите интегралите,
- имплементација на поефикасни методи за интерполација,
- паралелизација на пресметките на повеќејадрен процесор или на графичка картичка.

Во истражувањата спроведени во рамки на докторската дисертација, акцентот е ставен на анализа на заземјувачи, меѓутоа со одредени дополнувања како:

- воведување на можност за анализа на изолирани спроводници,

- поврзување на електромагнетниот модел со модели базирани на теорија на преносни водови,
- поврзување на електромагнетниот модел со програми за анализирање на големи енергетски системи, како на пример ЕМТР.

доменот на примената на моделот може да се прошири и за анализа на големи системи кои вклучуваат изолирани спроводници и структури над и под земја како далеководи, столбови, телекомуникациски водови, енергетски кабли, цевководи итн. Со тоа би се овозможила анализа на меѓусебната интеракција на овие системи при нормални или абнормални услови на работа, вклучувајќи и високофреквентни појави како што е удар на гром, што е од голема практична важност при проектирање на заштитата на системите од аспект на безбедност на луѓе и опрема.

Додаток А

Изведување на Гринови функции во спектрален и во просторен домен

Алтернативен пристап на изразување на Гриновите функции за потенцијали во МРПЕ е претставен во [Mic89], [Mic90a], [Mic97], а истиот се базира на аналогија меѓу простирањето на електромагнетни бранови во слоевита средина и распределбата на струи и напони во преносен вод. Преносниот вод со кој се еквивалентира слоевитата средина е поделен на повеќе секции, колку што има слоеви во слоевитата средина, а елементите на секоја секција со индекс n се конструираат според карактеристиките на соодветниот слојот со индекс n . На тој начин, проблемот на определување на електрично и магнетно поле се сведува на определување на струи и напони во водот.

Проблемот се анализира преку два одделни преносни водови, еден за бранови со ТЕ поларизација, а друг за бранови со ТМ поларизација. Параметрите со кои се конструирани тие преносни водови се со горен индекс h и e , соодветно. Струите и напоните во преносниот вод се изразуваат преку Гринови функции, кои всушност претставуваат одзив на струја или напон во преносниот вод за единечна импулсна побуда со напонски или струен извор. Струјата и напонот во точка z од секцијата m , како резултат на сериски напонски извор од 1 V во точка z' од секцијата i , се изразени преку Гриновите функции за струја и напон во преносниот вод $I_{v_{m,i}}^{h/e}(z, z')$ и $V_{v_{m,i}}^{h/e}(z, z')$, соодветно. На сличен начин струјата и напонот во точка z од секцијата m , како резултат на паралелен струен извор од 1 A во точка z' од секцијата i , се изразени преку Гриновите функции за струја и напон во преносниот вод $I_{i_{m,i}}^{h/e}(z, z')$ и $V_{i_{m,i}}^{h/e}(z, z')$, соодветно.

Доколку анализата се задржи само на извори и точки на набљудување во ист слој, т.е. $m = i$, тогаш повикувајќи се на [Mic97], Гриновите функции за струите и напоните во преносните водови можат да се изразат како ($p = h$ или e):

$$I_v^p = \frac{Y_m^p}{2} \left[e^{-jk_{m,z}|z-z'|} - \frac{1}{D_m^p} \left(\bar{\Gamma}_m^p e^{-jk_{m,z}(-2h_{m-1}-(z+z'))} + \bar{\Gamma}_m^p e^{-jk_{m,z}(2h_m+(z+z'))} \right) \right] \quad (\text{A.1})$$

$$V_v^p = \frac{1}{2} \left[\frac{z-z'}{|z-z'|} e^{-jk_{m,z}|z-z'|} + \frac{1}{D_m^p} \left(\bar{\Gamma}_m^p e^{-jk_{m,z}(-2h_{m-1}-(z+z'))} - \bar{\Gamma}_m^p e^{-jk_{m,z}(2h_m+(z+z'))} \right) \right] \quad (\text{A.2})$$

$$I_i^p = \frac{1}{2} \left[\frac{z-z'}{|z-z'|} e^{-jk_{m,z}|z-z'|} + \frac{1}{D_m^p} \left(-\bar{\Gamma}_m^p e^{-jk_{m,z}(-2h_{m-1}-(z+z'))} + \bar{\Gamma}_m^p e^{-jk_{m,z}(2h_m+(z+z'))} \right) \right] \quad (\text{A.3})$$

$$V_i^p = \frac{Z_m^p}{2} \left[e^{-jk_{m,z}|z-z'|} + \frac{1}{D_m^p} \left(\bar{\Gamma}_m^p e^{-jk_{m,z}(-2h_{m-1}-(z+z'))} + \bar{\Gamma}_m^p e^{-jk_{m,z}(2h_m+(z+z'))} \right) \right] \quad (\text{A.4})$$

каде што $\bar{\Gamma}_m^p$ и $\bar{\Gamma}_m^p$ имаат значење на коефициенти на рефлексија на напон или струја (во зависност дали се пресметуваат V_v^p и V_i^p или I_v^p и I_i^p), во насока на секција во преносниот вод, која се однесува на слој над или под слојот m , соодветно:

$$\bar{\Gamma}_m^p = \frac{\Gamma_{m-1,m}^p + \bar{\Gamma}_{m-1}^p e^{-2jk_{m-1,z}d_{m-1}}}{1 + \Gamma_{m-1,m}^p \bar{\Gamma}_{m-1}^p e^{-2jk_{m-1,z}d_{m-1}}}, \quad \bar{\Gamma}_m^p = \frac{\Gamma_{m+1,m}^p + \bar{\Gamma}_{m+1}^p e^{-2jk_{m+1,z}d_{m+1}}}{1 + \Gamma_{m+1,m}^p \bar{\Gamma}_{m+1}^p e^{-2jk_{m+1,z}d_{m+1}}} \quad (\text{A.5})$$

а останатите членови се дадени со изразите:

$$D_m^p = 1 - \bar{\Gamma}_m^p \bar{\Gamma}_m^p e^{-jk_{m,z}2d_m}, \quad \Gamma_{j,k}^p = \frac{Z_j^p - Z_k^p}{Z_j^p + Z_k^p}, \quad Z_j^e = \frac{k_{j,z}}{\omega \underline{\epsilon}_j}, \quad Z_j^h = \frac{\omega \mu_j}{k_{j,z}} \quad (\text{A.6})$$

Постои следната аналогија меѓу коефициентите на рефлексија во преносниот вод $\bar{\Gamma}_n^p$ и $\bar{\Gamma}_n^p$ и генерализираните коефициенти на рефлексија $\tilde{R}_{n,n+1}^{TE, TM}$ и $\tilde{R}_{n,n-1}^{TE, TM}$ со кои се опишува простирањето на електромагнетни бранови во слоевита средина:

$$\bar{\Gamma}_m^h = \tilde{R}_{m,m-1}^{TE}, \quad \bar{\Gamma}_m^h = \tilde{R}_{m,m+1}^{TE}, \quad \bar{\Gamma}_m^e = -\tilde{R}_{m,m-1}^{TM}, \quad \bar{\Gamma}_m^e = -\tilde{R}_{m,m+1}^{TM} \quad (\text{A.7})$$

Доколку генерализираните коефициенти на рефлексија (4.16) и (4.17) се применат во (A.1) - (A.4), тогаш преку соодветно преуредување на членовите, Гриневите функции за струи и напони во преносните водови можат да се изразат преку A-D коефициентите (4.18)-(4.21):

$$I_v^h = \frac{k_{m,z}}{2\omega \mu_m} \left[e^{-jk_{m,z}|z-z'|} - B_m^{TE} e^{jk_{m,z}(z-z')} + D_m^{TE} e^{-jk_{m,z}(z-z')} \right] \quad (\text{A.8})$$

$$I_v^e = \frac{\omega \underline{\epsilon}_m}{2k_{m,z}} \left[e^{-jk_{m,z}|z-z'|} + A_m^{TM} e^{jk_{m,z}(z-z')} + C_m^{TM} e^{-jk_{m,z}(z-z')} \right] \quad (\text{A.9})$$

$$V_v^h = \frac{1}{2} \left[\frac{z-z'}{|z-z'|} e^{-jk_{m,z}|z-z'|} + B_m^{TE} e^{jk_{m,z}(z-z')} + D_m^{TE} e^{-jk_{m,z}(z-z')} \right] \quad (\text{A.10})$$

$$V_v^e = \frac{1}{2} \left[\frac{z-z'}{|z-z'|} e^{-jk_{m,z}|z-z'|} - A_m^{TM} e^{jk_{m,z}(z-z')} + C_m^{TM} e^{-jk_{m,z}(z-z')} \right] \quad (\text{A.11})$$

$$I_i^h = \frac{1}{2} \left[\frac{z-z'}{|z-z'|} e^{-jk_{m,z}|z-z'|} - A_m^{TE} e^{jk_{m,z}(z-z')} + C_m^{TE} e^{-jk_{m,z}(z-z')} \right] \quad (\text{A.12})$$

$$I_i^e = \frac{1}{2} \left[\frac{z-z'}{|z-z'|} e^{-jk_{m,z}|z-z'|} + B_m^{TM} e^{jk_{m,z}(z-z')} + D_m^{TM} e^{-jk_{m,z}(z-z')} \right] \quad (\text{A.13})$$

$$V_i^h = \frac{\omega \mu_m}{2k_{m,z}} \left[e^{-jk_{m,z}|z-z'|} + A_m^{TE} e^{jk_{m,z}(z-z')} + C_m^{TE} e^{-jk_{m,z}(z-z')} \right] \quad (\text{A.14})$$

$$V_i^e = \frac{k_{m,z}}{2\omega \epsilon_m} \left[e^{-jk_{m,z}|z-z'|} - B_m^{TM} e^{jk_{m,z}(z-z')} + D_m^{TM} e^{-jk_{m,z}(z-z')} \right] \quad (\text{A.15})$$

Врз база на применетата аналогија, компонентите на дијагичната Гринава функција од Сомерфелдовиот избор на вектор потенцијали [Som49], во спектрален домен, се претставени како:

$$\tilde{G}_A^{xx} = \tilde{G}_A^{yy} = \frac{1}{j\omega} V_i^h \quad (\text{A.16})$$

$$\tilde{G}_A^{zx} = \frac{jk_x \mu_m}{k_\rho^2} (I_i^e - I_i^h) \quad (\text{A.17})$$

$$\tilde{G}_A^{zy} = \frac{jk_y \mu_m}{k_\rho^2} (I_i^e - I_i^h) \quad (\text{A.18})$$

$$\tilde{G}_A^{zz} = \frac{1}{j\omega} \frac{\mu_m}{\epsilon_m} I_v^e \quad (\text{A.19})$$

додека компонентите на дијагичната Гринава функција за изборот на магнетните вектор потенцијали предложен од Ертеза и Парк [Ert69], во спектрален домен се претставени како:

$$\tilde{G}_A^{xx} = \frac{1}{j\omega k_\rho^2} \left(\frac{k_m^2 k_x^2}{k_{m,z}^2} V_i^e + k_y^2 V_i^h \right) \quad (\text{A.20})$$

$$\tilde{G}_A^{yy} = \frac{1}{j\omega k_\rho^2} \left(\frac{k_m^2 k_y^2}{k_{m,z}^2} V_i^e + k_x^2 V_i^h \right) \quad (\text{A.21})$$

$$\tilde{G}_A^{xy} = \tilde{G}_A^{yx} = \frac{k_x k_y}{j\omega k_\rho^2} \left(\frac{k_m^2}{k_{m,z}^2} V_i^e - V_i^h \right) \quad (\text{A.22})$$

$$\tilde{G}_A^{zz} = \frac{1}{j\omega} \frac{\mu_m}{\epsilon_m} I_v^e \quad (\text{A.23})$$

Гриновите функции во просторен домен се добиваат со примена на инверзна Фуријеова трансформација на спектралните компоненти, користејќи ги следните трансформации [Миc90a]:

$$F^{-1}\{\tilde{G}(k_\rho)\} = S_0[\tilde{G}(k_\rho)] \quad (\text{A.24})$$

$$F^{-1}\{jk_x\tilde{G}(k_\rho)\} = \cos\varphi S_1[\tilde{G}(k_\rho)] \quad (\text{A.25})$$

$$F^{-1}\{jk_y\tilde{G}(k_\rho)\} = \sin\varphi S_1[\tilde{G}(k_\rho)] \quad (\text{A.26})$$

$$F^{-1}\{k_x^2\tilde{G}(k_\rho)\} = -\frac{1}{2}\{\cos(2\varphi)S_2[\tilde{G}(k_\rho)] - S_0[k_\rho^2\tilde{G}(k_\rho)]\} \quad (\text{A.27})$$

$$F^{-1}\{k_y^2\tilde{G}(k_\rho)\} = \frac{1}{2}\{\cos(2\varphi)S_2[\tilde{G}(k_\rho)] + S_0[k_\rho^2\tilde{G}(k_\rho)]\} \quad (\text{A.28})$$

$$F^{-1}\{k_x k_y \tilde{G}(k_\rho)\} = -\frac{1}{2}\sin(2\varphi)S_2[\tilde{G}(k_\rho)] \quad (\text{A.29})$$

каде што $S_n[\tilde{G}(k_\rho)]$ се интегрални равенки од Сомерфелдов тип:

$$S_n[\tilde{G}(k_\rho)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \tilde{G}(k_\rho) J_n(k_\rho \rho) k_\rho^{n+1} dk_\rho, \quad (\text{A.30})$$

а $\tilde{G}(k_\rho)$ е Гринова функција во спектрален домен.

Оваа постапка ќе биде применета на (A.20), како еден од посложените случаи за трансформација од спектрален во просторен домен, а постапката на сличен начин се применува и за другите компоненти на Гриновите функции, за различни избори на потенцијали:

$$\begin{aligned}
G_A^{xx} &= F^{-1} \left\{ \frac{1}{j\omega k_\rho^2} \left(\frac{k_m^2 k_x^2}{k_{m,z}^2} V_i^e + k_y^2 V_i^h \right) \right\} \\
&= F^{-1} \left\{ \frac{\mu_m}{2} \left[\frac{e^{-jk_{m,z}|z-z'|}}{jk_{m,z}} + \frac{k_x^2}{k_\rho^2 jk_{m,z}} \left(-B_m^{TM} e^{jk_{m,z}(z-z')} + D_m^{TM} e^{-jk_{m,z}(z-z')} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{k_y^2}{k_\rho^2 jk_{m,z}} \left(A_m^{TE} e^{jk_{m,z}(z-z')} + C_m^{TE} e^{-jk_{m,z}(z-z')} \right) \right] \right\} \\
&= \frac{\mu_m}{2} \left\{ F^{-1} \left[\frac{e^{-jk_{m,z}|z-z'|}}{jk_{m,z}} \right] + F^{-1} \left[\frac{k_x^2}{k_\rho^2 jk_{m,z}} \left(-B_m^{TM} e^{jk_{m,z}(z-z')} + D_m^{TM} e^{-jk_{m,z}(z-z')} \right) \right] \right\} \\
&\quad + F^{-1} \left[\frac{k_y^2}{k_\rho^2 jk_{m,z}} \left(A_m^{TE} e^{jk_{m,z}(z-z')} + C_m^{TE} e^{-jk_{m,z}(z-z')} \right) \right] \left. \right\} \\
&= \frac{\mu_m}{2} \left\{ S_0 \left[\frac{e^{-jk_{m,z}|z-z'|}}{jk_{m,z}} \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \left\{ \cos(2\varphi) S_2 \left[\frac{1}{k_\rho^2 jk_{m,z}} \left(-B_m^{TM} e^{jk_{m,z}(z-z')} + D_m^{TM} e^{-jk_{m,z}(z-z')} \right) \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - S_0 \left[k_\rho^2 \frac{1}{k_\rho^2 jk_{m,z}} \left(-B_m^{TM} e^{jk_{m,z}(z-z')} + D_m^{TM} e^{-jk_{m,z}(z-z')} \right) \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \left\{ \cos(2\varphi) S_2 \left[\frac{1}{k_\rho^2 jk_{m,z}} \left(A_m^{TE} e^{jk_{m,z}(z-z')} + C_m^{TE} e^{-jk_{m,z}(z-z')} \right) \right] \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + S_0 \left[k_\rho^2 \frac{1}{k_\rho^2 jk_{m,z}} \left(A_m^{TE} e^{jk_{m,z}(z-z')} + C_m^{TE} e^{-jk_{m,z}(z-z')} \right) \right] \right. \right. \left. \left. \right\} \right\} \\
&= \frac{\mu_m}{2} \left\{ S_0 \left[\frac{e^{-jk_{m,z}|z-z'|}}{jk_{m,z}} \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left\{ \cos(2\varphi) S_2 \left[\left(A_m^{TE} + B_m^{TM} \right) \frac{e^{jk_{m,z}(z-z')}}{k_\rho^2 jk_{m,z}} + \left(C_m^{TE} - D_m^{TM} \right) \frac{e^{-jk_{m,z}(z-z')}}{k_\rho^2 jk_{m,z}} \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + S_0 \left[\left(A_m^{TE} - B_m^{TM} \right) \frac{e^{jk_{m,z}(z-z')}}{jk_{m,z}} + \left(C_m^{TE} + D_m^{TM} \right) \frac{e^{-jk_{m,z}(z-z')}}{jk_{m,z}} \right] \right. \right. \left. \left. \right\} \\
&= \frac{\mu_m}{4\pi} \left\{ \int_0^\infty \frac{e^{-jk_{m,z}|z-z'|}}{jk_{m,z}} J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left\{ \cos(2\varphi) \int_0^\infty \left[\left(A_m^{TE} + B_m^{TM} \right) \frac{e^{jk_{m,z}(z-z')}}{jk_{m,z}} + \left(C_m^{TE} - D_m^{TM} \right) \frac{e^{-jk_{m,z}(z-z')}}{jk_{m,z}} \right] J_2(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_0^\infty \left[\left(A_m^{TE} - B_m^{TM} \right) \frac{e^{jk_{m,z}(z-z')}}{jk_{m,z}} + \left(C_m^{TE} + D_m^{TM} \right) \frac{e^{-jk_{m,z}(z-z')}}{jk_{m,z}} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right. \right. \left. \left. \right\}
\end{aligned}$$

(A.31)

Додаток Б

Изведување на Гринови функции за формулација С преку традиционалната формулација и Лоренцов услов

Еден од начините да се изведат Гриновите функции за магнетен вектор потенцијал од ВЕД во формулација С е преку постапка која се базира на примена на Лоренцовиот услов [Gay97], каде G_A^{uz} се елементите на третата колона во дијагичната Гринова функција на магнетниот вектор потенцијал во традиционалната формулација, дадена со (4.32), а G_ϕ^h и G_ϕ^v се Гриновите функции за електричен скалар потенцијал од ХЕД и ВЕД во традиционалната формулација на потенцијали:

$$K_A^{c,uz} = G_A^{uz} + \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial u \partial z'} (G_\phi^h - G_\phi^v), \quad u = x, y, z \quad (\text{Б.1})$$

Овде ќе биде претставена постапката за изведување на трите компоненти $K_A^{c,mz}$ за извор и точка на набљудување во ист слој, а врз база на релацијата (Б.1).

Гриновите функции за електричен скалар потенцијал од хоризонтален и вертикален електричен дипол, за извор и поле во ист слој m , се дадени со (4.42) и (4.43), а овде се повторени поради комплетност на постапката:

$$G_\phi^h = \frac{j\omega}{4\pi\sigma_m} \left\{ \mathbf{g}_d + \int_0^\infty \left(\frac{k_{m,z}^2 B^{TM} + k_m^2 A^{TE}}{k_\rho^2} \frac{e^{jk_{m,z}(z-z')}}{jk_{m,z}} + \frac{k_m^2 C^{TE} - k_{m,z}^2 D^{TM}}{k_\rho^2} \frac{e^{-jk_{m,z}(z-z')}}{jk_{m,z}} \right) J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right\} \quad (\text{Б.2})$$

$$G_\phi^v = \frac{j\omega}{4\pi\sigma_m} \left\{ \mathbf{g}_d + \int_0^\infty \left[D^{TM} \frac{e^{-jk_{m,z}(z-z')}}{jk_{m,z}} - B^{TM} \frac{e^{jk_{m,z}(z-z')}}{jk_{m,z}} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right\} \quad (\text{Б.3})$$

Првите два чекори при определување на било која од компонентите на $K_A^{c,uz}$ се однесуваат на определување на разликата помеѓу G_ϕ^h и G_ϕ^v , а потоа и на прв парцијален извод на таа разлика по променливата z' :

$$G_{\phi}^h - G_{\phi}^v = \frac{k_m^2}{4\pi\epsilon_m} \int_0^{\infty} \frac{1}{k_{\rho}^2 j k_{m,z}} \left(A_m^{TE} e^{jk_{m,z}(z-z')} + B_m^{TM} e^{jk_{m,z}(z-z')} \right. \\ \left. + C_m^{TE} e^{-jk_{m,z}(z-z')} - D_m^{TM} e^{-jk_{m,z}(z-z')} \right) J_0(k_{\rho}\rho) k_{\rho} dk_{\rho} \quad (\text{Б.4})$$

$$\frac{\partial}{\partial z'} (G_{\phi}^h - G_{\phi}^v) = \frac{\omega^2 \mu_m}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{k_{\rho}^2} \left(B_m^{TE} e^{jk_{m,z}(z-z')} + A_m^{TM} e^{jk_{m,z}(z-z')} \right. \\ \left. + D_m^{TE} e^{-jk_{m,z}(z-z')} - C_m^{TM} e^{-jk_{m,z}(z-z')} \right) J_0(k_{\rho}\rho) k_{\rho} dk_{\rho} \quad (\text{Б.5})$$

Сега u - компонентата на модифицираните Гринови функции за магнетен вектор потенцијал од ВЕД во формулација С се изразува преку парцијален извод на равенката (Б.5) по променливата u (поради сличност на постапките за определување на K_A^{xz} и K_A^{yz} овде е прикажана само постапката за определување на K_A^{xz}):

$$K_A^{xz} = G_A^{xz} + \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\omega^2 \mu_m}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{k_{\rho}^2} \left[(B_m^{TE} + A_m^{TM}) e^{jk_{m,z}(z-z')} \right. \right. \\ \left. \left. + (D_m^{TE} - C_m^{TM}) e^{-jk_{m,z}(z-z')} \right] J_0(k_{\rho}\rho) k_{\rho} dk_{\rho} \right\} \\ = 0 + \frac{\mu_m}{4\pi} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{1}{k_{\rho}^2} \left[(B_m^{TE} + A_m^{TM}) e^{jk_{m,z}(z-z')} \right. \right. \\ \left. \left. + (D_m^{TE} - C_m^{TM}) e^{-jk_{m,z}(z-z')} \right] \frac{\partial}{\partial x} \left[J_0 \left(k_{\rho} \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \right) \right] k_{\rho} dk_{\rho} \right\} \\ = \frac{\mu_m}{4\pi} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{1}{k_{\rho}^2} \left[(B_m^{TE} + A_m^{TM}) e^{jk_{m,z}(z-z')} \right. \right. \\ \left. \left. + (D_m^{TE} - C_m^{TM}) e^{-jk_{m,z}(z-z')} \right] \left[-k_{\rho} \frac{(x-x')}{\rho} J_1(k_{\rho}\rho) \right] k_{\rho} dk_{\rho} \right\} \\ = -\frac{(x-x')}{\rho} \frac{\mu_m}{4\pi} \left\{ \int_0^{\infty} \left[(B_m^{TE} + A_m^{TM}) e^{jk_{m,z}(z-z')} \right. \right. \\ \left. \left. + (D_m^{TE} - C_m^{TM}) e^{-jk_{m,z}(z-z')} \right] J_1(k_{\rho}\rho) dk_{\rho} \right\} \\ = -\cos \varphi \frac{\mu_m}{4\pi} \int_0^{\infty} \left[(B_m^{TE} + A_m^{TM}) e^{jk_{m,z}(z-z')} + (D_m^{TE} - C_m^{TM}) e^{-jk_{m,z}(z-z')} \right] J_1(k_{\rho}\rho) dk_{\rho}$$

$$K_A^{yz} = -\sin \varphi \frac{\mu_m}{4\pi} \int_0^{\infty} \left[(B_m^{TE} + A_m^{TM}) e^{jk_{m,z}(z-z')} + (D_m^{TE} - C_m^{TM}) e^{-jk_{m,z}(z-z')} \right] J_1(k_{\rho}\rho) dk_{\rho} \quad (\text{Б.7})$$

$$\begin{aligned}
K_A^{zz} &= G_A^{zz} + \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\omega^2 \mu_m}{4\pi} \int_0^\infty \frac{1}{k_\rho^2} \left[(B_m^{TE} + A_m^{TM}) e^{jk_{m,z}(z-z')} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (D_m^{TE} - C_m^{TM}) e^{-jk_{m,z}(z-z')} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right\} \\
&= G_A^{zz} + \frac{\mu_m}{4\pi} \int_0^\infty \frac{1}{k_\rho^2} \left[(B_m^{TE} + A_m^{TM}) \frac{\partial}{\partial z} \left\{ e^{jk_{zm}(z-z')} \right\} \right. \\
&\quad \left. + (D_m^{TE} - C_m^{TM}) \frac{\partial}{\partial z} \left\{ e^{-jk_{zm}(z-z')} \right\} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \\
&= G_A^{zz} + \frac{\mu_m}{4\pi} \int_0^\infty \frac{1}{k_\rho^2} \left[jk_{zm} (B_m^{TE} + A_m^{TM}) e^{jk_{zm}(z-z')} \right. \\
&\quad \left. - jk_{zm} (D_m^{TE} - C_m^{TM}) e^{-jk_{zm}(z-z')} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \\
&= \frac{\mu_m}{4\pi} \left\{ \frac{e^{-jk_m r_d}}{r_d} + \int_0^\infty \frac{1}{jk_{zm}} (C_m^{TM} e^{-jk_{zm}(z-z')} + A_m^{TM} e^{jk_{zm}(z-z')}) J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty \frac{jk_{zm}}{k_\rho^2} \left[(B_m^{TE} + A_m^{TM}) e^{jk_{zm}(z-z')} - (D_m^{TE} - C_m^{TM}) e^{-jk_{zm}(z-z')} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right\} \tag{B.8} \\
&= \frac{\mu_m}{4\pi} \left\{ \frac{e^{-jk_m r_d}}{r_d} + \int_0^\infty \left[\left(\frac{1}{jk_{zm}} C_m^{TM} - \frac{jk_{zm}}{k_\rho^2} (D_m^{TE} - C_m^{TM}) \right) e^{-jk_{zm}(z-z')} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{1}{jk_{zm}} A_m^{TM} + \frac{jk_{zm}}{k_\rho^2} (B_m^{TE} + A_m^{TM}) \right) e^{jk_{zm}(z-z')} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right\} \\
&= \frac{\mu_m}{4\pi} \left\{ \frac{e^{-jk_m r_d}}{r_d} + \int_0^\infty \left[\left(C_m^{TM} + \frac{k_{zm}^2}{k_\rho^2} (D_m^{TE} - C_m^{TM}) \right) \frac{e^{-jk_{zm}(z-z')}}{jk_{zm}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(A_m^{TM} - \frac{k_{zm}^2}{k_\rho^2} (B_m^{TE} + A_m^{TM}) \right) \frac{e^{jk_{zm}(z-z')}}{jk_{zm}} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right\} \\
&= \frac{\mu_m}{4\pi} \left\{ \frac{e^{-jk_m r_d}}{r_d} + \int_0^\infty \left[\left(2C_m^{TM} - D_m^{TE} + \frac{k_m^2}{k_\rho^2} (D_m^{TE} - C_m^{TM}) \right) \frac{e^{-jk_{zm}(z-z')}}{jk_{zm}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(2A_m^{TM} + B_m^{TE} - \frac{k_m^2}{k_\rho^2} (B_m^{TE} + A_m^{TM}) \right) \frac{e^{jk_{zm}(z-z')}}{jk_{zm}} \right] J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right\}
\end{aligned}$$

Изразите кои се изведени во (Б.6) и (Б.8) се идентични со оние претставени во поглавјето 4.2.1.1. Слична постапка може да се примени и за определување на компонентите K_A^{uz} за извор и точка на набљудување во различни слоеви, а врз база на соодветните Гринови функции за магнетен вектор и електричен скалар потенцијал од традиционалната формулација на потенцијали, дадени во поглавјето 4.2.1.2.

Додаток В

Изразување на интегрални равенки од Сомерфелдов тип во аналитички облик

Сомерфелдовиот идентитет и неговата физичка интерпретација беа претставени во Глава 4.1, а го има следниот облик:

$$g = \int_0^{\infty} \frac{e^{-jk_z h}}{jk_z} J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho = \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (\text{B.1})$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + h^2}, \quad k_z = \sqrt{k^2 - k_\rho^2}, \quad \text{Im}\{k_z\} \leq 0 \text{ и } h > 0 \quad (\text{B.2})$$

каде што ρ и h се радијално и вертикално растојание меѓу изворот или негов лик и точката на набљудување, а k , k_ρ и k_z претставуваат бранов број и неговата радијална и вертикална компонента, соодветно.

Врз основа на Сомерфелдовиот идентитет, во аналитичка форма можат да се претстават и други интегрални равенки од Сомерфелдов тип. Тука се прикажани три идентитети кои се применуваат во рамки на оваа дисертација. Исто така прикажани се чекорите за нивно изведување како и постапките за третман на нивните сингуларитети за случаи кога $\rho = 0$ m.

$$\int_0^{\infty} e^{-jk_z h} J_1(k_\rho \rho) dk_\rho = \frac{1}{\rho} [e^{-jkh} - hg] \quad (\text{B.3})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-jk_z h}}{jk_z} J_1(k_\rho \rho) dk_\rho = \frac{1}{jk\rho} [e^{-jkh} - e^{-jkr}] \quad (\text{B.4})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-jk_z h}}{jk_z} J_2(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho = \frac{2}{jk\rho^2} (e^{-jkh} - rg) - g \quad (\text{B.5})$$

В.1 Постапка за изведување на интегралните равенки од Сомерфелдов тип во аналитички облик

Аналитички облик на левата страна на (В.3) се добива со примена на метод на интегрирање по делови $\int_0^{\infty} u dv = uv|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} v du$, каде:

$$u = e^{-jk_z h}, \quad dv = J_1(k_\rho \rho) dk_\rho, \\ du = (-k_\rho h e^{-jk_z h}) / jk_z, \quad v = \int J_1(k_\rho \rho) dk_\rho = [1 - J_0(k_\rho \rho)] / \rho \quad (\text{В.6})$$

Идентитетот (В.4) се добива со интегрирање на двете страни на (В.3) во однос на променливата h и со користење на релациите:

$$\int e^{-jk_z h} dh = -\frac{e^{-jk_z h}}{jk_z}, \quad \int e^{-jk h} dh = -\frac{e^{-jk h}}{jk}, \\ \int z \frac{e^{-jk \sqrt{\rho^2 + h^2}}}{\sqrt{\rho^2 + h^2}} dh = -\frac{e^{-jkr}}{jk} \quad (\text{В.7})$$

Доколку Беселовата функција од втор ред во (В.5) се изрази преку Беселови функции од прв и нулти ред:

$$J_2(k_\rho \rho) = \frac{2J_1(k_\rho \rho)}{k_\rho \rho} - J_0(k_\rho \rho) \quad (\text{В.8})$$

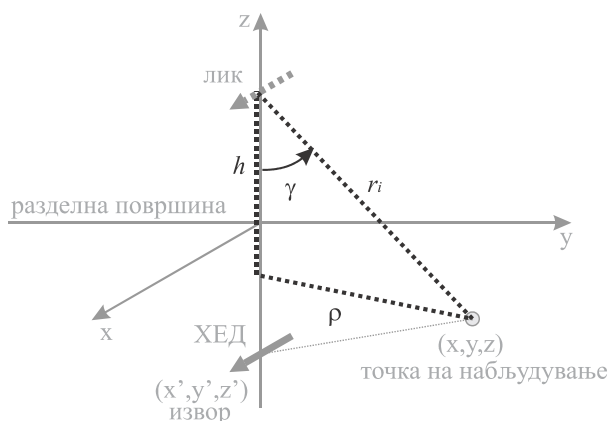
тогаш интегралната равенка во (В.5) може да се изрази како:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-jk_z z}}{jk_z} J_2(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho = \frac{2}{\rho} \int_0^{\infty} \frac{e^{-jk_z |z+z'|}}{jk_z} J_1(k_\rho \rho) dk_\rho - \int_0^{\infty} \frac{e^{-jk_z |z+z'|}}{jk_z} J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \quad (\text{В.9})$$

па нејзината аналитичката форма се добива преку замена на двете интегрални равенки од десната страна на (В.9) со соодветните идентитети, дадени во (В.4) и (В.1).

В.2 Третман на сингуларитети во аналитичките изрази

Аналитичките изрази во (В.3) и (В.5) стануваат нумерички нестабилни за мали радијални растојанија меѓу изворот и точката на набљудување, односно за $\rho \rightarrow 0$ m и сингуларни за $\rho = 0$ m, што е вообичаен случај при анализа на вертикални електроди. За понатамошен третман на сингуларниот карактер на двата изрази се зема предвид геометриската поставеност на точката на набљудување и ликот на изворот, која е илустрирана на Слика А.1.



Слика В.1 Геометриската поставеност на точката на набљудување и ликот на изворот

Доколку се искористат следните замени $h = r \cos \gamma$ и $S = jkr$, за $r = r_i$, тогаш изразот (В.3) може да се претстави во следната форма:

$$\frac{1}{\rho} e^{-jkh} - \frac{h}{\rho} \frac{e^{-jkr}}{r} = \frac{e^{-S}}{r} \left(\frac{1}{\sin \gamma} e^{S(1-\cos \gamma)} - \frac{1}{\tan \gamma} \right) \quad (\text{В.10})$$

а со развој на делот во заградите во Тајлоров ред, во $\gamma = 0$, изразот (В.3) може да се претстави во форма која не е сингуларна за $\rho = 0$, односно за $\gamma = 0$ [Sch03]:

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\rho} (e^{-jkh} - hg) \right) &= \\ &= \frac{e^{-jkr}}{r} \left(\frac{1}{2} (jkr + 1) \gamma + \frac{1}{24} (3(jkr)^2 + jkr + 1) \gamma^3 + \dots \right) \end{aligned} \quad (\text{В.11})$$

На сличен начин и со примена на истите замени се третира сингуларниот карактер на (В.5) за $\rho \rightarrow 0$:

$$\frac{2}{jk\rho^2} (e^{-jkh} - e^{-jkr}) - \frac{e^{-jkr}}{r} = \frac{e^{-S}}{rS} \left(\frac{2}{\sin^2 \gamma} (e^{-S(\cos \gamma - 1)} - 1) - S \right) \quad (\text{В.12})$$

а со развој на делот во заградите во Тајлоров ред, во $\gamma = 0$, изразот (В.5) може да се претстави во форма која не е сингуларна за $\rho = 0$, односно за $\gamma = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\frac{2}{jk\rho^2} (e^{-jkh} - rg) - g \right) &= \\ &= \frac{e^{-jkr}}{r} \left(\frac{1}{4} (jkr + 1) \gamma^2 + \frac{1}{24} (-k^2 r^2 + jkr + 1) \gamma^4 + \dots \right) \end{aligned} \quad (\text{В.13})$$

Додаток Г

Гринови функции за магнетни вектор потенцијали во хомогена земја при 0 Hz

Нискофреквентните апроксимации на Гриновите функции за магнетни вектор потенцијали во хомогена земја беа дадени со изразите (5.26) - (5.28) за традиционалната формулација и со изразите (5.39) - (5.41) за формулациите А и В кои се базираат на алтернативниот избор на потенцијали. Врз основа на наведените апроксимации, тука се изведени Гриновите функции за потенцијали во статички случај, односно за фреквенција $f = 0$ Hz. Со изведените Гринови функции за статички случај се покажува дека истите овозможуваат пресметка на магнетното поле и при фреквенција од 0 Hz, а притоа пресметаното магнетно поле е независно од применетата формулација за потенцијали. Анализата е извршена за хомогена земја, како наједноставен случај за средина во која се анализираат заземјувачи при што и равенките се со наједноставна форма, меѓутоа на сличен начин постапката може да се прошири и за двослојна земја.

Кога $f = 0$ Hz, според (4.8), за брановите броеви и нивните z -компоненти важи $k_0 = k_1 = 0$ и $k_{0,z} = k_{1,z} = -k_p^2$. Доколку овие изрази се заменат во (4.10) и (4.11), статичките Френелови коефициенти за рефлексивност на бранови со ТЕ и ТМ поларизација, од горната разделна површина добиваат вредности $R_{1,0(DC)}^{TM} = -1$ и $R_{1,0(DC)}^{TE} = 0$.

При овие околности, Гриновите функции за магнетни вектор потенцијали според традиционалната формулација го добиваат следниот облик:

$$G_{A(DC)}^{xx} = \frac{1}{r_d} \quad (\text{Г.1})$$

$$\frac{G_{A(DC)}^{zx}}{\cos \varphi} = \frac{G_{A(DC)}^{zy}}{\sin \varphi} = -\frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{|z+z'|}{r_i} \right) \quad (\text{Г.2})$$

$$G_{A(DC)}^{zz} = \frac{1}{r_d} - \frac{1}{r_i} \quad (\text{Г.3})$$

каде што $r_d = \sqrt{\rho^2 + (z-z')^2}$ и $r_i = \sqrt{\rho^2 + (z+z')^2}$

Гриновите функции претставуваат потенцијали од точкаст извор, па според тоа со равенките (Г.1) - (Г.3) всушност се изразени магнетните вектор потенцијали од точкаст извор, во случајов еднонасочен струен елемент, во хомоген полу простор (членовите во изразот за магнетен вектор потенцијал кои се однесуваат на интензитетот на струјата, магнетната пермеабилност и коефициентот $1/(4\pi)$ се извлечени пред Гриновите

функции за вектор потенцијали). Овој проблем е подетално третиран во [Ban53] за ХЕД и [Jon97] за ХЕД и ВЕД, за Сомерфелдовиот избор на вектор потенцијали.

Гриновите функции во статички случај, за магнетните вектор потенцијали за формулација А и В кои се базираат на алтернативниот избор на потенцијали, го добиваат следниот облик:

$$K_{A(DC)}^{a/b,xx} = \frac{1}{r_d} + \frac{1}{2} \frac{1}{r_i} - \frac{1}{2} \cos(2\varphi) \left[\frac{2}{\rho^2} (r_i - |z + z'|) - \frac{1}{r_i} \right] \quad (\Gamma.4)$$

$$K_{A(DC)}^{a/b,yy} = \frac{1}{r_d} + \frac{1}{2} \frac{1}{r_i} + \frac{1}{2} \cos(2\varphi) \left[\frac{2}{\rho^2} (r_i - |z + z'|) - \frac{1}{r_i} \right] \quad (\Gamma.5)$$

$$K_{A(DC)}^{a/b,xy} = -\frac{1}{2} \sin(2\varphi) \left[\frac{2}{\rho^2} (r_i - |z + z'|) - \frac{1}{r_i} \right] \quad (\Gamma.6)$$

$$K_{A(DC)}^{a/b,zz} = G_{A(DC)}^{zz} \quad (\Gamma.7)$$

Иако Гриновите функции за магнетни вектор потенцијали и нивните компоненти се разликуваат за различните формулации, со помош на изразот (2.20) може да се покаже дека магнетното поле е идентично независно од усвоената формулација. Во Табела Г.1 е прикажано изразувањето на компонентите на векторот на магнетна индукција од ХЕД и ВЕД, за различни формулации на Гринови функции.

Табела Г.1 Компоненти на вектор на магнетна индукција од ХЕД и ВЕД изразени преку различни формулации на Гринови функции.

	традиционална	А и В формулација
$B^{xx} =$	$\frac{\partial A_z}{\partial y}$	$\frac{\partial A_y}{\partial z}$
$B^{yx} =$	$\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$	$\frac{\partial A_x}{\partial z}$
$B^{zx} =$	$-\frac{\partial A_x}{\partial y}$	$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$
$B^{xz} =$	$\frac{\partial A_z}{\partial y}$	$\frac{\partial A_z}{\partial y}$
$B^{yz} =$	$-\frac{\partial A_z}{\partial x}$	$-\frac{\partial A_z}{\partial x}$
$B^{zz} =$	0	0

Независно од избраната формулација се добиваат изразите за статичко магнетно поле во хомоген полу простор, кои се дадени во [Chi80] и [Jon97], а нивната примена во анализи на заземјувачи е третирана во [Grc11], [Mar11] и [Mar13].

Додаток Д

Изведување на нискофреквентна апроксимација на Гринова функција за електричен скалар потенцијал во двослојна земја

Главните чекори и претпоставки во постапката за изведување на нискофреквентни апроксимации на Гриновите функции за потенцијали во МРПЕ беа претставени во Глава 5. Во овој дел е даден подетален опис на постапката, која е применета за изведување на нискофреквентна апроксимација на Гриновата функција за електричен скалар потенцијал во формулација С, за извор и точка на набљудување во горниот слој на двослојна земја. Постапката се базира на усвоените претпоставки дадени во Глава 5.

Гриновата функција за електричен скалар потенцијал за формулација С, за извор и точка на набљудување во ист слој е дадена со изразот (4.42). Доколку се примени за $m = i = 1$, егзактниот облик на оваа Гринова функција се изразува како:

$$G_{\phi}^h = \frac{j\omega}{4\pi\sigma_1} \left\{ g_d^1 + \int_0^{\infty} \left(\frac{k_{1,z}^2 B_1^{TM} + k_1^2 A_1^{TE}}{k_{\rho}^2} \frac{e^{jk_{1,z}(z-z')}}{jk_{1,z}} + \frac{k_1^2 C_1^{TE} - k_{1,z}^2 D_1^{TM}}{k_{\rho}^2} \frac{e^{-jk_{1,z}(z-z')}}{jk_{1,z}} \right) J_0(k_{\rho}\rho) k_{\rho} dk_{\rho} \right\} \quad (Д.1)$$

Во горниот израз се појавуваат А-Д коефициентите (4.18)-(4.22) кои овде се изведени за слојот со индекс 1, притоа земајќи ги предвид генерализираните коефициенти на рефлексија кои за двослојна земја се претставени со (5.7)-(5.9):

$$A_1^{TE} = R_{1,0}^{TE} e^{-jk_{1,z}(d_1-(z'+h_1))} \left[e^{-jk_{1,z}(d_1-(z'+h_1))} + R_{1,2}^{TE} e^{-jk_{1,z}(d_1+(z'+h_1))} \right] M_1^{TE} \quad (Д.2)$$

$$B_1^{TM} = R_{1,0}^{TM} e^{-jk_{1,z}(d_1-(z'+h_1))} \left[e^{-jk_{1,z}(d_1-(z'+h_1))} - R_{1,2}^{TM} e^{-jk_{1,z}(d_1+(z'+h_1))} \right] M_1^{TM} \quad (Д.3)$$

$$C_1^{TE} = R_{1,2}^{TE} e^{-jk_{1,z}(z'+h_1)} \left[e^{-jk_{1,z}(z'+h_1)} + R_{1,0}^{TE} e^{-jk_{1,z}(2d_1-(z'+h_1))} \right] M_1^{TE/TM} \quad (Д.4)$$

$$D_1^{TM} = R_{1,2}^{TM} e^{-jk_{1,z}(z'+h_1)} \left[-e^{-jk_{1,z}(z'+h_1)} + R_{1,0}^{TM} e^{-jk_{1,z}(2d_1-(z'+h_1))} \right] M_1^{TM} \quad (Д.5)$$

$$M_1^{TE/TM} = [1 - R_{1,0}^{TE/TM} R_{1,2}^{TE/TM} e^{-jk_{1,z} 2d_1}]^{-1} \quad (Д.6)$$

Доколку се земе предвид дека $h_1 = d_1$ (според Слика 5.1) кои можат да се изразат само преку d , и се усвојат упростувањата кои важат за фреквенција $f \rightarrow 0$ Hz (претставени во поглавјето 5.1), тогаш се добиваат нискофреквентните апроксимации на Гриновата функција и на А-D коефициентите:

$$G_{\Phi(LF)}^h = \frac{j\omega}{4\pi\sigma_1} \left\{ g_d^1 + \int_0^\infty \left(\frac{k_{1,z}^2 B_{1(LF)}^{TM} + k_1^2 A_{1(LF)}^{TE}}{k_\rho^2} \frac{e^{jk_{1,z}(z-z')}}{jk_{1,z}} + \frac{k_1^2 C_{1(LF)}^{TE} - k_{1,z}^2 D_{1(LF)}^{TM}}{k_\rho^2} \frac{e^{-jk_{1,z}(z-z')}}{jk_{1,z}} \right) J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right\} \quad (Д.7)$$

$$M_{1(LF)}^{TM} = [1 - R_{1,0} R_{1,2} e^{-jk_{1,z} 2d}]^{-1} \approx \sum_{p=0}^\infty (R_{1,0} R_{1,2})^p e^{-jk_{1,z} 2dp} \quad \text{според (5.21)} \quad (Д.8)$$

$$A_1^{TE} = 0 \quad (Д.9)$$

$$B_{1(LF)}^{TM} = -R_{1,0} \left[e^{-jk_{1,z}(-2z')} + R_{1,2} e^{-jk_{1,z}(2d)} \right] M_{1(LF)}^{TM} \\ \approx -R_{1,0} \left[e^{-jk_{1,z}(-2z')} + R_{1,2} e^{-jk_{1,z}(2d)} \right] \sum_{p=0}^\infty (R_{1,0} R_{1,2})^p e^{-jk_{1,z} 2dp} \quad (Д.10)$$

$$C_1^{TE} = 0 \quad (Д.11)$$

$$D_{1(LF)}^{TM} = R_{1,2} \left[e^{-jk_{1,z}(2d+2z')} + R_{1,0} e^{-jk_{1,z}(2d)} \right] M_{1(LF)}^{TM} \\ \approx R_{1,2} \left[e^{-jk_{1,z}(2d+2z')} + R_{1,0} e^{-jk_{1,z}(2d)} \right] \sum_{p=0}^\infty (R_{1,0} R_{1,2})^p e^{-jk_{1,z} 2dp} \quad (Д.12)$$

Гриновата функција во (Д.7) може да се поедностави доколку се земат предвид релацијата (4.9), нискофреквентните апроксимации на А-D коефициентите и претпоставката $k_1 \ll k_\rho$ при $f \rightarrow 0$ Hz:

$$G_{\Phi(LF)}^h = \frac{j\omega}{4\pi\sigma_1} \left\{ g_d^1 - \int_0^\infty \left(B_{1(LF)}^{TM} \frac{e^{jk_{1,z}(z-z')}}{jk_{1,z}} - D_{1(LF)}^{TM} \frac{e^{-jk_{1,z}(z-z')}}{jk_{1,z}} \right) J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right\} \quad (Д.13)$$

Во следниот чекор се третира делот во малите загради од подинтегралната функција во (Д.13). Најпрво се заменуваат нискофреквентните апроксимации на А-D коефициентите, а потоа преку манипулации со експоненцијалните членови и бесконечната сума која произлегува од (Д.8), делот во заградите се доведува во форма која овозможува (Д.13) да се изрази како сума на интегрални равенки кои можат да се претстават во аналитичка форма:

$$\begin{aligned}
 & \left(B_{1(LF)}^{TM} \frac{e^{jk_{1,z}(z-z')}}{jk_{1,z}} - D_{1(LF)}^{TM} \frac{e^{-jk_{1,z}(z-z')}}{jk_{1,z}} \right) = \\
 & = - \left\{ \begin{aligned} & \left[R_{1,0} e^{-jk_{1,z}(-2z')} + R_{1,0} R_{1,2} e^{-jk_{1,z}(2d)} \right] \sum_{p=0}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \frac{e^{-jk_{1,z}(2dp-(z-z'))}}{jk_{1,z}} \\ & \left[R_{1,2} e^{-jk_{1,z}(2d+2z')} + R_{1,0} R_{1,2} e^{-jk_{1,z}(2d)} \right] \sum_{p=0}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \frac{e^{-jk_{1,z}(2dp+(z-z'))}}{jk_{1,z}} \end{aligned} \right. \\
 & = - \left\{ \begin{aligned} & R_{1,0} \sum_{p=0}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \frac{e^{-jk_{1,z}(2dp-(z+z'))}}{jk_{1,z}} + R_{1,0} R_{1,2} \sum_{p=0}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \frac{e^{-jk_{1,z}(2dp+2d-(z-z'))}}{jk_{1,z}} \\ & + R_{1,2} \sum_{p=0}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \frac{e^{-jk_{1,z}(2dp+2d+(z+z'))}}{jk_{1,z}} + R_{1,0} R_{1,2} \sum_{p=0}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \frac{e^{-jk_{1,z}(2dp+2d+(z-z'))}}{jk_{1,z}} \end{aligned} \right. \\
 & = - \left\{ \begin{aligned} & R_{1,0} \sum_{p=0}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \frac{e^{-jk_{1,z}(2dp-(z+z'))}}{jk_{1,z}} + R_{1,0} R_{1,2} \sum_{p=0}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \frac{e^{-jk_{1,z}(2d(p+1)-(z-z'))}}{jk_{1,z}} \\ & + R_{1,2} \sum_{p=0}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \frac{e^{-jk_{1,z}(2d(p+1)+(z+z'))}}{jk_{1,z}} + R_{1,0} R_{1,2} \sum_{p=0}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \frac{e^{-jk_{1,z}(2d(p+1)+(z-z'))}}{jk_{1,z}} \end{aligned} \right. \\
 & = - \left\{ \begin{aligned} & R_{1,0} \sum_{p=0}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \frac{e^{-jk_{1,z}(2dp-(z+z'))}}{jk_{1,z}} + \sum_{p=0}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^{p+1} \frac{e^{-jk_{1,z}(2d(p+1)-(z-z'))}}{jk_{1,z}} \\ & + \frac{1}{R_{1,0}} \sum_{p=0}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^{p+1} \frac{e^{-jk_{1,z}(2d(p+1)+(z+z'))}}{jk_{1,z}} + \sum_{p=0}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^{p+1} \frac{e^{-jk_{1,z}(2d(p+1)+(z-z'))}}{jk_{1,z}} \end{aligned} \right. \\
 & = - \left\{ \begin{aligned} & R_{1,0} \frac{e^{-jk_{1,z}(-(z+z'))}}{jk_{1,z}} + R_{1,0} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \frac{e^{-jk_{1,z}(2dp-(z+z'))}}{jk_{1,z}} + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \frac{e^{-jk_{1,z}(2dp-(z-z'))}}{jk_{1,z}} \\ & + \frac{1}{R_{1,0}} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \frac{e^{-jk_{1,z}(2dp+(z+z'))}}{jk_{1,z}} + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \frac{e^{-jk_{1,z}(2dp+(z-z'))}}{jk_{1,z}} \end{aligned} \right. \\
 & = - \left\{ \begin{aligned} & R_{1,0} \frac{e^{-jk_{1,z}(-(z+z'))}}{jk_{1,z}} + R_{1,0} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \frac{e^{-jk_{1,z}h_{3,p}}}{jk_{1,z}} + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \frac{e^{-jk_{1,z}h_{4,p}}}{jk_{1,z}} \\ & + \frac{1}{R_{1,0}} \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \frac{e^{-jk_{1,z}h_{1,p}}}{jk_{1,z}} + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0} R_{1,2})^p \frac{e^{-jk_{1,z}h_{2,p}}}{jk_{1,z}} \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

(D.14)

Со замена на (Д.14) во (Д.13) и со помош на Сомерфелдовите идентитети дадени со (5.3)-(5.5) и поврзаните параметри дадени со (5.6), се добива крајниот облик на нискофреквентната апроксимација на Гриновата функција за електричен скалар потенцијал за извор и точка на набљудување во горниот слој од двослојна земја.

$$G_{\Phi(LF)}^h = \frac{j\omega}{4\pi\sigma_1} \left\{ \begin{aligned} &g_d^1 + R_{1,0}g_{3,0}^1 \\ &+ \sum_{p=1}^{\infty} (R_{1,0}R_{1,2})^p \left[\frac{1}{R_{1,0}} g_{1,p}^1 + g_{2,p}^1 + R_{1,0}g_{3,p}^1 + g_{4,p}^1 \right] \end{aligned} \right\} \quad (Д.15)$$

Во случај на хомогена земја $R_{1,2} = 0$, па според тоа вториот ред во (Д.15) се изедначува со нула, а Гриновата функција добива значително поедноставен облик:

$$G_{\Phi(LF)}^h = \frac{j\omega}{4\pi\sigma_1} \{ g_d^1 + R_{1,0}g_{3,0}^1 \} \quad (Д.16)$$

На сличен принцип се изведуваат нискофреквентните апроксимации на останатите Гринови функции, за различни формулации и позиции на точката со извор и точката на набљудување, за двослојна и хомогена земја.

Додаток Ѓ

Математички опис на постапката за тродимензионална кубна интерполација

Применетата постапка за тродимензионална кубна интерполација може да се реализира во три чекори, односно преку три последователни едnodимензионални кубни интерполации (шематски дијаграм на постапката е прикажан на Слика 6.6):

1. Најпрво се пресметуваат коефициентите и решенијата на 16 кубни полиноми за вертикалната позиција на точката со извор z' , за секоја табелирана вредност на вертикална позиција на точката на набљудување $z = z_M$ и нејзиното радијално растојание до изворот, $\rho = \rho_K$, каде што $M = \{m, \dots, m+3\}$ и $K = \{k, \dots, k+3\}$:

$$f_{M,K} = \frac{1}{6} [a_{M,K} Z'^3 + b_{M,K} Z'^2 + c_{M,K} Z'] + d_{M,K} \quad (\text{Ѓ.1})$$

$$a_{M,K} = I_{M,n+3,K} - I_{M,n,K} + 3(I_{M,n+1,K} - I_{M,n+2,K}) \quad (\text{Ѓ.2})$$

$$b_{M,K} = 3[I_{M,n,K} - 2I_{M,n+1,K} + I_{M,n+2,K}] \quad (\text{Ѓ.3})$$

$$c_{M,K} = 6I_{M,n+2,K} - 2I_{M,n,K} - 3I_{M,n+1,K} - I_{M,n+3,K} \quad (\text{Ѓ.4})$$

$$d_{M,K} = I_{M,n+1,K} \quad (\text{Ѓ.5})$$

каде што индекси m , n и k имаат точките со минимална вредност за оските z , z' и ρ , соодветно, за мрежата од $4 \times 4 \times 4$ точки во чиј централен регион се наоѓа точката со позиција (z, z', ρ) во која се бара решение со интерполација. $I_{M,N,K}$ се табелирани вредности за интегралната равенка во $z = z_M, z' = z'_N$ и $\rho = \rho_K$, а вредностите за M, N и K се дадени погоре. Z' се пресметува како:

$$I_{M,N,K} = I(z_M, z'_N, \rho_K) \quad (\text{Ѓ.6})$$

$$Z' = (z' - z'_{n+1}) / \Delta z' \quad (\text{Ѓ.7})$$

2. Во вториот чекор, се пресметуваат коефициентите на 4 кубни полиноми за вертикалната позиција на точката на набљудување, z , за секоја $z-z'$ рамнина, од табелирани вредности $\rho = \rho_K$, каде $K = \{k, \dots, k+3\}$. Како влезни големини се користат решенијата на полиномите од претходниот чекор:

$$F_K(z, z') = \frac{1}{6} [A_K Z^3 + B_K Z^2 + C_K Z] + D_K \quad (\acute{G}.8)$$

$$A_K = f_{m+3,K} - f_{m,K} + 3[f_{m+1,K} - f_{m+2,K}] \quad (\acute{G}.9)$$

$$B_K = 3[f_{m,K} - 2f_{m+1,K} + f_{m+2,K}] \quad (\acute{G}.10)$$

$$C_K = 6f_{m+2,K} - 2f_{m,K} - 3f_{m+1,K} - f_{m+3,K} \quad (\acute{G}.11)$$

$$D_K = f_{m+1,K} \quad (\acute{G}.12)$$

каде што Z се пресметува како:

$$Z = (z - z_{m+1})/\Delta z \quad (\acute{G}.13)$$

3. Во третиот чекор, се определува интерполираната решение на интегралот $I(z, z', \rho)$ преку еден кубен полином, за радијалното растојание ρ меѓу изворот и точката на набљудување. Како влезни големини се користат решенијата на четирите полиноми од претходниот чекор:

$$I(z, z', \rho) = \frac{1}{6} [uR^3 + vR^2 + wR] + x \quad (\acute{G}.14)$$

$$u = F_{k+3} - F_k + 3[F_{k+1} - F_{k+2}] \quad (\acute{G}.15)$$

$$v = 3[F_k - 2F_{k+1} + F_{k+2}] \quad (\acute{G}.16)$$

$$w = 6F_{k+2} - 2F_k - 3F_{k+1} - F_{k+3} \quad (\acute{G}.17)$$

$$x = F_{k+1} \quad (\acute{G}.18)$$

каде што R е изразено како:

$$R = (\rho - \rho_{k+1})/\Delta \rho \quad (\acute{G}.19)$$

Листа на објавени трудови од најтесната област на докторската дисертација

Трудови во списанија

- [Grc11] L. Grcev, B. Markovski, S. Grceva, “On inductance of buried horizontal bare conductors,” *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 53, no. 4, pp. 1083-1087, Nov. 2011.
- [Mar15] B. Markovski, L. Grcev, V. Arnautovski-Toseva and M. Kacarska, “Transient performance of interconnected wind turbine grounding systems,” *Przeglad Elektrotechniczny*, R.91 NR 6/2015, pp. 72-75, ISSN 0033-2097.
- [Mar17] B. Markovski, L. Grcev, “Analysis of electromagnetic influence on steel pipelines from the elements of electric power system,” *Journal of Electrical Engineering and Information Technologies*, vol. 2, no. 2, pp. 89–96 (2017), ISSN 2545–4250.
- [Grc18a] L. Grcev, A. Kuhar, V. Arnautovski-Toseva, B. Markovski, “Evaluation of high-frequency circuit models for horizontal and vertical grounding electrodes,” *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 33, no. 6, pp. 3065-3074, Dec. 2018.
- [Mar18a] B. Markovski, L. Grcev and V. Arnautovski-Toseva, “Accurate low-frequency approximation for wires within a conducting half-space,” *IEEE Trans. Electromagn. Compat.* (Early Access), DOI 10.1109/TEMC.2018.2881932, pp. 1-4, 2018.
- [Grc18b] L. Grcev, A. Kuhar, B. Markovski and V. Arnautovski-Toseva, “Generalized network model for energization of grounding electrodes,” *IEEE Trans. Electromagn. Compat.* (Early Access), DOI: 10.1109/TEMC.2018.2880929, pp. 1-9, 2018.
- [Kuh18] A. Kuhar, V. Arnautovski-Toševa, L. Ololoska-Gagoska, L. Grcev, B. Markovski, “Influence of segmentation on the precision of circuit based methods,” *Journal of Electrical Engineering and Information Technologies*, vol. 3, no. 1–2, pp. 21–30, Oct. 2018, ISSN 2545–4250.
- [Mar19] B. Markovski, L. Grcev, V. Arnautovski-Toseva, J. Angelevska Kostadinovska, A. Kuhar, “Improving efficiency of full-wave electromagnetic analysis of grounding systems within homogeneous earth”, *Przeglad Elektrotechniczny*, R. 95 NR 5/2019, pp. 9-13, ISSN 0033-2097.

Рецензирани статии и реферати во зборници

- [Mar11] B. Markovski, L. Grcev, S. Grceva, V. Arnautovski-Toseva, "Inductance of horizontal bare conductor immersed in homogeneous lossy half-space," Proc. of 10th International Conference on Applied Electromagnetics (ПЕЕС 2011), Niš, Serbia, 2011, pp. 1-4.
- [Mar12a] B. Markovski, L. Grcev, V. Arnautovski-Toseva, K. Drissi, S. Grceva, K. Kerroum and A. Kuhar, "Comparison of transmission line and electromagnetic approaches to modeling of buried horizontal wires of finite length," in Proc of Advanced Electromagnetic Symposium (AES 2012), Paris, France, 2012, pp. 1-5.
- [Grc12a] L. Grcev, B. Markovski, A. Kuhar, V. Arnautovski-Toseva, K. El Khamlichi Drissi and K. Kerroum, "Modeling of Horizontal Grounding Electrodes for Lightning Studies - Comparison of Electromagnetic and Transmission Line Models in Frequency Domain," in Proc of EUROEM 2012 Symposium, Toulouse, France, 2012, pp. 125.
- [Mar12b] B. Markovski, L. Grcev, V. Arnautovski-Toseva, "Transient characteristics of wind turbine grounding, Frequency dependent and soil ionization effects," in Proc. 31st Int. Conf. on Lightning Protection (ICLP 2012), Vienna, Austria, 2012, pp. 1-6.
- [Grc12b] L. Grcev, B. Markovski, V. Arnautovski-Toseva, K. E. K. Drissi, "Transient analysis of grounding systems without computer," in Proc. 31st Int. Conf. on Lightning Protection (ICLP 2012), Vienna, Austria, 2012, pp. 1-6.
- [Mar12c] B. Markovski, L. Grcev, V. Arnautovski-Toseva, "Step and touch voltages near wind turbine grounding during lightning strokes," in Proc. Int. Symp. Electromagn. Compat. (EMC Europe 2012), Rome, Italy, 2012, pp. 1-6.
- [Mar13] B. Markovski, R. Jankoski, L. Grcev and V. Arnautovski-Toseva, "Inductance calculations of buried wires in semi-infinite conducting medium," in Proc. of 7th International PhD Seminar on Computational Electromagnetics and Bioeffects of Electromagnetic Fields (CEMBEF 2013), Nis, Serbia, 2013, pp. 25-28.
- [Jan13a] R. Jankoski, A. Kuhar, B. Markovski, M. Kacarska, L. Grcev, "Application of the electric circuit approach in the analysis of grounding conductors" in Proc. of The 5-th International Symposium on Applied Electromagnetics (SAEM 2014), Skopje, Macedonia, 2014, pp. 1-7.
- [Jan13b] R. Jankoski, V. Arnautovski-Toseva, M. Kacarska, A. Kuhar, B. Markovski, L. Grcev, "Electric field calculation using partial element equivalent circuit and mixed potential integral equation" in Proc. of The 5-th International Symposium on Applied Electromagnetics (SAEM 2014), Skopje, Macedonia, 2014, pp. 1-6.

- [Kuh17] A. Kuhar, L. Grcev and B. Markovski, “Improved TL Inductivity Formula for Analysis of Grounding Conductors” in Proc. of the 17th IEEE International Conference on Smart Technologies (IEEE EUROCON 2017), Ohrid, Macedonia, 2017, pp. 1-6.
- [Mar17a] Б. Марковски, Л. Грчев, “Електромагнетно влијание на високонапонски преносни водови и останати елементи на ЕЕС врз подземни метални цевководи за транспорт на нафта и гас,” Десетто советување на МАКО СИГРЕ 2017, С4-039R, Охрид, Македонија, 2017, стр. 1-8.
- [Pav17] С. Павлиша, З. Ангеловски, Б. Марковски, “Заштита на челични цевководи од еднонасочни и индуцирани наизменични напони,” Десетто советување на МАКО СИГРЕ 2017, В5-124R, Охрид, Македонија, 2017, стр. 1-6.
- [Mar18b] B. Markovski, L. Grcev, V. Arnautovski-Toseva, J. Angelevska, A. Kuhar, “Efficient full-wave electromagnetic analysis of arbitrary grounding systems,” Proc. 7th Symposium on Applied Electromagnetics SAEM’18, Podčetrtek, Slovenia, 17-20 Jun., 2018.
- [Mar18c] B. Markovski, L. Grcev, V. Arnautovski-Toseva and A. Kuhar, “Comparison of approximate models for high-frequency analysis of grounding systems in uniform earth,” XIV International Conference ETAI 2018, 20 – 22 September 2018, Struga, Republic of Macedonia.

Користена литература

- [Ada73] A. T. Adams, B. J. Strait, D. E. Warren, D. C. Kuo, T. E. Baldwin, "Near fields of wire antennas by matrix methods," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-21, pp. 602-610, Sept. 1973.
- [Ada74] A. T. Adams, *An Introduction to the Method of Moments*. Report RADC-TR-73-217, vol. 1, Syracuse University, 1974.
- [Alp08] A. Alparslan, *Study of Green's functions of potentials and fields in layered media composed of left-handed and right-handed materials*. M. Eng, Thesis, Koc University, 2008.
- [Alp10] A. Alparslan, M. I. Aksun, K. A. Michalski, "Closed-form Green's functions in planar layered media for all ranges and materials," *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques*, vol. 58, no. 3, pp. 602-613, Mar. 2010.
- [Ame15] A. Ametani, Ed., *Numerical Analysis of Power System Transients and Dynamics*. London, UK: IET, 2015.
- [Arn04a] В. Арнаутовски-Тошева, *Придонес кон анализата на заземјувачките системи во слоевита земја во фреквенциски домен*. Докторска дисертација, Универзитет "Св. Кирил и Методиј" – Скопје, Електротехнички факултет, Скопје, 2004.
- [Arn04b] V. Arnautovski-Toseva, L. Grcev, "Electromagnetic analysis of horizontal wire in two-layered soil," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 168, no. 1-2, pp. 21-29, 2004.
- [Arn05] V. Arnautovski-Toseva, L. Grcev, "Transient analysis of grounding grids in two-layer soil," 7th International Conference on Applied Electromagnetics (PES 2005), pp. 360-370, May 2005
- [Arn10a] V. Arnautovski-Toseva, L. Grcev and K. K. Drissi, "Comparison of exact and image formulation of the electric field due to Hertz dipole in two-layer soil," *Studies in Applied Electromagnetics and Mechanics*, vol. 34, pp. 621-629, Jan. 2010.
- [Arn10b] V. Arnautovski-Toseva, K. Kerroum, K. K. Drissi, S. Grceva and L. Grcev, "Comparison of exact, image and TL model of a horizontal wire above two-layer soil," 20-th International Conference on Applied Electromagnetics and Communications, pp. 1-4, Sept. 2010,
- [Arn11a] V. Arnautovski-Toševa, "Approximate closed-form solution of the electric field due to HED within finitely conductive earth," 2011 International Conference on

- Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA '11), pp. 870-873, Sept. 2011.
- [Arn11b] V. Arnautovski-Toseva, L. Grcev, "Image and exact models of a vertical wire penetrating a two-layered earth," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 53, no. 4, pp. 968-976, Nov. 2011.
- [Arn11c] V. Arnautovski-Toseva, K. K. Drissi, K. Kerroum, "HF comparison of image and TL models of a horizontal thin-wire conductor in finitely conductive earth," 2011 International Conference on Software, Telecommunications and Computer Networks (SOFTCOM 2011), pp. 1-5, Sep. 2011.
- [Arn12a] V. Arnautovski-Toseva, K. K. Drissi, K. Kerroum, L. Grcev, "Comparison of approximate models of horizontal wire conductor above homogeneous ground," 6th European Conference on Antennas and Propagation (EUCAP 2012), pp. 1-5, Mar. 2012.
- [Arn12b] V. Arnautovski-Toseva, K. E. K. Drissi, K. Kerroum, S. Grceva, L. Grcev, "Comparison of image and transmission line models of energized horizontal wire above two-layer soil," *Automatika*, vol. 53, no. 1, pp. 38-48, Apr. 2012.
- [Arn12c] V. Arnautovski-Toseva, K. K. Drissi and L. Grcev, "Effects of quasi-static approximation of Green's functions in the model of a horizontal wire conductor in homogeneous soil," Advanced Electromagnetics Symposium AES 2012, pp. 1-9, Apr. 2012.
- [Arn12d] V. Arnautovski-Toseva, K. K. Drissi, K. Kerroum, "On the transmission line and quasi-static image modeling of transient plane wave coupling to horizontal conductor buried in homogeneous lossy ground," 16e Colloque International et Exposition sur la Compatibilité Electromagnétique, pp. 1-6, Apr. 2012.
- [Arn16] V. Arnautovski-Toseva and L. Grcev, "On the image model of a buried horizontal wire," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 58, no. 1, pp. 278-286, Feb. 2016.
- [Aru16] I. Arun, M. Venkatapathi, "Analysis of numerical solutions to Sommerfeld integral relation of the half-space radiator problem," *Applied Mathematics*, vol. 106, pp. 79-97, 2016.
- [Atk10] P. R. Atkins and W. C. Chew, "Fast computation of the dyadic Green's function for layered media via interpolation," *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 9, pp. 493-496, 2010.
- [Bab16] Y. Baba, R. A. Rakov, *Electromagnetic Computation Methods for Lightning Surge Protection Studies*. New York: Wiley, 2016.
- [Bak08] C. L. Bak, K. E. Einarsdóttir, E. Andresson, J. M. Rasmussen, J. Lykkegaard, W. Wiechowski, "Overvoltage protection of large power transformers—a real-life study case," *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 23, no. 2, pp. 657–666, Apr. 2008.

- [Ban53] A. Banos and J. P. Wesley. (1953, Sep.). The horizontal electric dipole in a conducting half-space. Scripps Inst. Oceanogr., Marine Phys. Lab., Univ. Cal., Rep. 53-33, ch. 4 [Online]. Available: <http://repositories.cdlib.org/sio/reference/53-33>.
- [Bew76] R. M. Bewensee, *WF-SYR/LLL1: A thin-wire computer code for antennas or scatterers with pulse expansion functions for currents*. Report UCRL-52028, Lawrence Livermore Laboratory, Livermore, CA, Feb. 1976
- [Bia16] G. Bianconi, J. Pinto and S. Chakraborty, "Efficient and robust dyadic Green's function evaluation algorithm for the analysis of IC packages and printed circuit boards," 2016 IEEE 25th Conference on Electrical Performance Of Electronic Packaging And Systems (EPEPS), pp. 215-217, Oct. 2016.
- [Bia18] G. Bianconi and S. Chakraborty, "Efficient and accurate multi-dimensional layered media Green's function interpolation algorithm for the analysis of printed circuit boards," 2018 IEEE 27th Conference on Electrical Performance of Electronic Packaging and Systems (EPEPS), pp. 115-117, Oct. 2018.
- [Bri77] J. N. Brittingham, E. K. Miller, J. T. Okada, "Bivariate interpolation approach for efficiently and accurately modelling antennas near a half-space," *Electronics Letters*, vol. 13, no. 23, pp. 690-691, Nov. 1977.
- [Bur81a] G. J. Burke, A. J. Poggio. *Numerical Electromagnetic Code (NEC) – Method of Moments, Part II: Program Description – Code*, (Technical report), Lawrence Livermore Laboratory, 1981.
- [Bur81b] G. J. Burke, E. K. Miller, J. N. Brittingham, D. L. Lager, R. J. Lytle and J. T. Okada, "Computer modeling of antennas near the ground," *Electromagnetics*, vol. 1, pp. 29-49, 1981.
- [Bur83] G. J. Burke and E. K. Miller, *Modeling Antennas Near to and Penetrating a Lossy Interface*, (Technical report), Lawrence Livermore Laboratory, 1983.
- [Bur84] G. J. Burke, E. K. Miller, "Modeling antennas near to and penetrating a lossy interface," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-32, no. 10, pp. 1040-1049, Oct. 1984.
- [Bre60] L. M. Brekhovskikh, *Waves in Layered Media*. New York: Academic, 1960.
- [Cha70] H. H. Chao, B. J. Strait, *Computer Programs for Radiation and Scattering by Arbitrary Configurations of Bent Wires*, Scientific Report no. 7, AFCRL-70-0374, Electrical Engineering Department, Syracuse University, Syracuse, 1970.
- [Che95] W. C. Chew, *Waves and Fields in Inhomogeneous Media*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1990. Reprinted by IEEE Press, 1995.

- [Che00] J. Chen, A. A. Kishk and A. W. Glisson, “A 3D interpolation model for the calculation of the Sommerfeld integrals to analyze dielectric resonators in a multilayered medium,” *Electromagnetics*, vol. 20, no. 1, pp. 1–15, 2000.
- [Chi80] L. K. Chi, B. R. Hood, F. A. Shove. (1980, Aug.). Magnetic fields of a horizontal electric dipole in a semi-infinite medium. Applied Science Department, U. S. Naval Academy, Rep. AS-1-80, [Online]. Available: <https://apps.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a094933.pdf>.
- [Cid00] J. Cidras, A. F. Otero and C. Garrido, “Nodal frequency analysis of grounding systems considering the soil ionization effect,” *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 15, no. 1, pp. 103–107, Jan. 2000.
- [Cig13] EMC within power plants and substations. Tech. Brochure 535. Paris, France: CIGRÉ, Apr. 2013
- [Daw79a] F. Dawalibi and D. Mukhedikar, “Parametric analysis of grounding grids,” *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-98, no. 5, pp. 1659-1668, Sept./Oct. 1979.
- [Daw79b] F. Dawalibi and D. Mukhedikar, “Influence of ground rods on grounding grids,” *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-98, no. 6, pp. 2089-2097, Nov./Dec. 1979.
- [Daw94] F. P. Dawalibi, J. Ma and R. D. Southey, “Behaviour of grounding systems in multilayer soils: a parametric analysis,” *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 9, no. 1, pp. 334-342, Jan. 1994.
- [Din13] J. Ding, *Efficient techniques for electromagnetic modeling in multilayered media*. PhD Thesis, The University of Arizona, 2013.
- [Dur95] G. Dural and M. I. Aksun, “Closed –form Green’s functions for general sources in stratified media,” *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 43, no.7, pp. 1545-1552, Jul. 1995.
- [Enx05] L. Enxiao, *Electrical performance analysis of high-speed interconnects and circuits by numerical modeling methods*, Ph.D Dissertation, Xi’an Jiaotong University, P. R. China, 2005.
- [Ert69] A. Erteza and B. K. Park, “Nonuniqueness of resolution of Hertz vector in presence of a boundary, and a horizontal dipole problem,” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-17, pp. 376-378, May 1969.
- [FEK09] EM Software and Systems-S.A. (Pty) Ltd., FEKO, Stellenbosch, South Africa, 2009. [Online]. Available: <http://www.feko.info>

- [Fir10] Z. H. Firouzeh, G. A. E. Vandenbosch, R. Moini, S. H. H. Sadeghi, R. Faraji-Dana, "Efficient evaluation of Green's functions for lossy half-space problems," *Progress In Electromagnetics Research*, vol. 109, pp. 139–157, 2010.
- [For09] S. Fortin, Y. Yang, J. Ma, F. Dawalibi, "Electromagnetic fields of energized conductors in multilayer medium with recursive methodology," 2009 Asia-Pacific Power and Energy Engineering Conference, Wuhan, pp. 1-4, Mar. 2009.
- [Fra11] M. A. Francavilla, D. R. Wilton, S. Paulotto and D. R. Jackson, "3-Simplex interpolation of the mixed-potential Green's functions in layered media," Proceedings of the 5th European Conference on Antennas and Propagation (EUCAP), pp. 2711-2715, Apr. 2011.
- [Gay97] P. Gay-Balmaz and J. R. Mosig, "Three-dimensional planar radiating structures in stratified media," *International Journal of Microwave/Millimeter wave Computer-Aided Engineering*, vol. 3, pp. 330-343, 1997.
- [Ger99] A. Geri, "Behavior of grounding systems excited by high impulse currents: the model and its validation," *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 14, no. 3, pp. 1008 – 1017, Jul. 1999.
- [Gon99] I. F. Gonos, F. V. Topalis, I. A. Stathopoulos, "Transient impedance of grounding rods," Proc. Eleventh International Symposium on High Voltage Engineering, (IEE Conf. Publ. No. 467), vol. 2, pp. 272 -275, 1999.
- [Grc86] L. Grcev, *Proracun tranzijentne impedancija uzemljivackih sistema*. Doktorska disertacija, Elektrotehnicki fakultet Sveucilista u Zagrebu, Zagreb, 1986.
- [Grc88] L. Grcev, Z. Haznadar, "A novel technique of numerical modelling of impulse current distribution in grounding systems," in *Proc. Int. Conf. Lightning Protection*, Graz, Austria, 1988, pp. 165-169.
- [Grc90] L. Grcev and F. Dawalibi, "An electromagnetic model for transients in grounding systems," *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 5, no. 4, pp. 1773–1781, Oct. 1990.
- [Grc96a] L. Grcev, "Computer analysis of transient voltages in large grounding systems," *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 11, no. 2, pp. 815–823, Apr. 1996.
- [Grc96b] L. Grcev, "Transient voltages coupling to shielded cables connected to large substation earthing systems due to lightning," International Conference on Large High Voltage Electric Systems, pp. 1-6, Aug. 1996.
- [Grc98] L. Grcev, V Arnautovski, "Comparison between simulation and measurement of frequency dependent and transient characteristics of power transmission line grounding" in *Proc. Int. Conf. Lightning Protect*, Birmingham, U.K., 1998, pp. 524-529.

- [Grc09a] L. Grcev, "Modeling of grounding electrodes under lightning currents," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 51, no. 3, pp. 559-570, Aug. 2009.
- [Grc09b] L. Grcev, "Time- and frequency-dependent lightning surge characteristics of grounding electrodes," *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 24, no. 4, pp. 2186-2196, Oct. 2009.
- [Har67] R. F. Harrington, "Matrix methods for field problems", *Proc. IEEE*, vol. 55, no. 2, pp. 136–149, Feb. 1967.
- [Har93] R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*. New York: Macmillan, 1968; New York: Wiley, 1993.
- [Has93] P. Hasse and J. Wiesinger, *Handbook for Lightning and Grounding*, (in German), 4th ed. Munich, Germany: Pflaum, 1993.
- [Hei97] M. Heimbach, L. Grcev, "Grounding system analysis in transients programs applying electromagnetic field approach," *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 12, no. 1, pp. 186-193, January 1997.
- [He13] J. He, R. Zeng and B. Zhang, *Methodology and Technology for Power System Grounding*. New York: Wiley, 2013.
- [Hu06] X. Hu, *Full-wave analysis of large conductor systems over substrate*. PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2006.
- [IEC10] *Protection Against Lightning – Part I: General Principles*, (EN 62305-1:2010). Brussels: CENELEC, 2010.
- [IEE80] *IEEE Guide for Safety in AC Substation Grounding* (IEEE 80-2013), 2013.
- [Jin93] J. Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics*. New York: John Wiley and Sons, 1993.
- [Jof11] E. B. Joffe, K-S Lock, *Grounds for Grounding: A Circuit to System Handbook*. New York: Wiley, 2011
- [Jon97] D. L. Jones and C. P. Burke, "The DC field components of horizontal and vertical electric dipole sources immersed in three stratified media," *Ann. Geophys.*, vol. 15, no. 4, pp. 503–510, 1997.
- [Kar17] H. Karami, K. Sheshyekani, and F. Rachidi, "Mixed-potential integral equation for full-wave modeling of grounding systems buried in a lossy multilayer stratified ground," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 59, no. 5, Oct. 2017.
- [Kin05] N. Kinayman, M. I. Aksun, *Modern Microwave Circuits*. Norwood, US: Artech House Publishers, 2005.
- [Kun93] K. Kunz and R. Luebber, *The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics*. Boca Raton, FL: CRC Press, 1993.

- [Liu01] Y. Liu, M. Zitnik, R. Thottappillil, “An improved transmission-line model of grounding system,” *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 43, no. 3, pp. 348 – 355, Aug. 2001.
- [Lyt74] R. J. Lytle. and D. L. Lager, *Numerical Evaluation of Sommerfeld Integrals*. Lawrence Livermore National Laboratory, Report UCRL-51688, 1974.
- [Max91] J. C. Maxwell. *A Treatise on Electricity and Magnetism* (third ed.). Oxford, Clarendon, 1891.
- [Mel88] A. P. Meliopoulos, *Power System Grounding and Transients*. New York, NY, USA: Marcel Dekker, 1988.
- [Men94] F. E. Menter, L. Grcev, “EMTP-based model for grounding system analysis,” *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 9, no. 4, pp. 1838-1849, Oct. 1994.
- [Mer92] B. Merheim, “Modellierung von hochspannungs-erdersystemen und vergleich mit messungen ihres dynamischen verhaltens,” (in English), Dipl.Ing. thesis, Diplomaufgabe, Inst. Allgemeine ochspannungstechnik, Technischen Hochschule, Aachen, Germany, 1992.
- [Mic85] K. A. Michalski, “The mixed-potential electric field integral equation for objects in layered media,” *Archiv für elektronik und übertragungstechnik*, vol. 39, no. 5, pp. 317-322, Sep./Oct. 1985.
- [Mic87] K. A. Michalski, “On the scalar potential of a point charge associated with a time-harmonic dipole in a layered medium,” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-35, pp. 1299-1301, Nov. 1987.
- [Mic89] K. A. Michalski and D. Zheng, *Modeling Antennas and Scatterers of Arbitrary Shape Embedded in Layered Dielectric Media*. Office of Naval Research technical report, Contract no N00014-87-K-0688, Nov. 1989.
- [Mic90a] K. A. Michalski and D. Zheng, “Electromagnetic scattering and radiation by surfaces of arbitrary shape in layered media, Part I: Theory,” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 38, no. 3, pp. 335-344, Mar. 1990.
- [Mic90b] K. A. Michalski and D. Zheng, “Electromagnetic scattering and radiation by surfaces of arbitrary shape in layered media, Part II: Implementation and results for contiguous half-spaces,” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 38, no. 3, pp. 345-352, Mar. 1990.
- [Mic97] K. A. Michalski and J. R. Mosig, “Multilayered media Green’s functions in integral equation formulations,” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 45, no. 3, pp. 508–519, Mar. 1997
- [Mic98] K. A. Michalski, “Extrapolation methods for sommerfeld integral tails,” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 46, no. 10, pp. 1405-1418, Oct. 1998.

- [Mic16] K. A. Michalski and J. R. Mosig, “Efficient computation of Sommerfeld integral tails – methods and algorithms,” *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 30, no. 3, pp. 281–317, 2016.
- [Mil70] E. K. Miller, “A variable integral width quadrature technique based on Romberg’s method,” *Journal of Computational Physics*, vol. 5 pp. 265-279, 1970.
- [Nek95] B. Nekhoul, C. Guerin, P. Labie, G. Meunier, R. Feuillet and X. Brunotte, “A finite element method for calculating the electromagnetic fields generated by substation grounding systems,” *IEEE Trans. Magnetics*, vol. 31, no. 3, pp. 2150-2153, May 1995.
- [Nix99] K. J. Nixon, I. R. Jandrell and J. M. Van Coller, “Consideration of the relative effect of soil ionization and mutual interaction of components on the partial lightning current distribution in earth electrode systems,” Proc. Eleventh International Symposium on High Voltage Engineering, (IEE Conf. Publ. No. 467), vol. 2, pp. 284 –287, 1999.
- [Ols96] R. G. Olsen, M. C. Willis, “A comparison of exact and quasi-static methods for evaluating grounding systems at high frequencies”, *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 11, no. 2, pp. 1071-1081, Apr. 1996.
- [Ols15] R. G. Olsen and L. Grcev, “Analysis of high-frequency grounds: Comparison of theory and experiment,” *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 51, no. 6, pp. 4889–4899, Nov./Dec. 2015.
- [Ote99] A. F. Otero, J. Cidras and J. L. del Alamo, “Frequency-dependent grounding system calculation by means of a conventional nodal analysis technique,” *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 14, no. 3, pp. 873 –878, Jul. 1999.
- [Pin11] D. Pingping, *Fast solution of dyadic Green’s functions for planar multilayered media*. PhD Thesis, National University of Singapore and Ecole Superieure D’Electricite, 2011.
- [Pog74] A. Poggio, R. Bevensee and E. K. Miller, “Evaluation of some thin wire computer programs” in *Proc. IEEE Antennas Propag. Symp.*, 1974, vol. 12, pp. 181–184.
- [Pop89] B. D. Popovic, *Elektromagnetika* (Trece izdanje). Beograd: Gradjevinska knjiga, 1989.
- [Pop15] M. Popov, L. Grcev, H. K. Høidalen, B. Gustavsen, V. Terzija, “Investigation of the overvoltage and fast transient phenomena on transformer terminals by taking into account the grounding effects”, *IEEE Trans. Industry Appl.*, vol. 51, no. 6, pp. 5218-5227, Nov./Dec. 2015.
- [Ram93] S. Ramo, J. H. Whinnery, and T. Van Duzer, *Fields and Waves in Communication Electronics*, 3rd Ed. New York: Wiley, 1993.

- [Roc93] H. Rochereau and B. Merheim, “Application of the transmission lines theory and EMTP program for modelisation of grounding systems in high frequency range,” in *Collection de notes internes de la Direction des Etudes et Recherches Electricité de France*. vol. 93NR00059, Paris, France: EDF, May 1993, pp. 1–31.
- [Sch03] M. Schoeman, “Mixed-potential integral equation technique for hybrid microstrip-slotline multi-layered circuits with horizontal and vertical shielding walls,” M. Eng. Thesis, Univ. Stellenbosch, 2003.
- [She14] K. Sheshyekani, M. Akbari, B. Tabei, R. Kazemi, “Wideband modeling of large grounding systems to interface with electromagnetic transient solvers,” *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 29, no. 4, pp. 1868–1876, Aug. 2014.
- [Sim06] E. Simsek, Q. H. Liu and B. Wei, “Singularity subtraction for evaluation of Green’s functions for multilayer media,” *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques*, vol. 54, no. 1, pp. 216–225, Jan. 2006.
- [Som49] A. Sommerfeld, *Partial Differential Equations in Physics*. New York: Academic, 1949.
- [Sto98] Z. Stojkovic, M. S. Savic, J. M. Nahman, D. Salamon and B. Bukorovic, “Sensitivity analysis of experimentally determined grounding grid impulse characteristics,” *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 13, no. 4, pp. 1136–1142, Oct. 1998.
- [Str41] J. Stratton, *Electromagnetic Theory*. McGraw-Hill, 1941.
- [Sun19] A. Sunjerga, D. S. Gazzana, D. Poljak, H. Karami, K. Sheshyekani, M. Rubinstein and F. Rachidi, “Tower and path-dependent voltage effects on the measurement of grounding impedance for lightning studies,” *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 61, no. 2, pp. 409–418, Apr. 2019.
- [Taf00] A. Taflove and S. C. Hagness, *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*, 2nd ed., Norwood, MA: Artech House, 2000.
- [Tan01] K. Tanabe, “Novel method for analyzing dynamic behavior of grounding systems based on the finite-difference time-domain method,” *IEEE Power Engineering Review*, vol. 21, no. 9, pp. 55–57, Sept. 2001.
- [Tan05] Wee-Hua Tang, *Efficient integral equation method for 2.5d microwave circuits in layered media*. PhD Thesis, University of Kentucky, Lexington, KY, 2005. [Online]. Available: https://uknowledge.uky.edu/gradschool_diss/345
- [Tes97] F. M. Tesche, M. Ianoz, and T. Karlsson, *EMC Analysis Methods and Computational Models*. New York, NY, USA: Wiley, 1997
- [Vra02] M. Vrancken, *Full wave integral equation based electromagnetic modelling of 3D metallic structures in planar stratified media*, Ph.D Dissertation, Katholieke Universiteit Leuven, Leuven, Belgium, Dec. 2002.

- [Wan91] J. J. H. Wang, *Generalized Moment Methods in Electromagnetics: Formulation and Computer Solution of Integral Equations*. USA: John Wiley and Sons, 1991
- [Zha05] B. Zhang, X. Cui, Zz Zhao, J. He and L. Li, "Numerical analysis of the influence between large grounding grids and two-end grounded cables by the moment method coupled with circuit equations," *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 20, no. 2, pp. 731-737, Apr. 2005.