

# ANALIZA LINEARNE I LUČNE APROKSIMACIJE SINTETSKIH POVRŠI

Risto Taševski<sup>1</sup>, Vladimir Dukovski<sup>1</sup>, Sofija Sidorenko<sup>1</sup>

*Urađena je analiza i matematički model linearne i lučne aproksimacije sintetskih površi formiranih iz splajn-kriva (spline) u dva pravca. Sintetske površi koriste se u geometrijskom i inženjerskom dizajnu, a najviše u CAD/CAM sistemima. Izrada složenih sintetskih površi vrši se suvremenim NC mašinama koje sadrže visoko sofisticirane kontrolere. Kontroleri starijih NC mašina ne sadrže funkcije za prepoznavanje splajn-kriva. Kod ovih mašina je neophodna prethodna aproksimacija određene krive pomoću matematičkog aparata.*

**Ključne reči:** sintetska površ, splajn-kriva

## ANALYSIS OF LINEAR AND ARC APPROXIMATION OF SYNTHETIC SURFACES

Risto Tashevski<sup>1</sup>, Vladimir Dukovski<sup>1</sup>, Sofija Sidorenko<sup>1</sup>

*In this paper, an analysis, a geometric and a mathematical model for linear approximation of the synthetic surfaces are presented. Synthetic surfaces are composed of splines in two directions. Synthetic surfaces are used in engineering design for describing parts with aerodynamic or other functional and esthetic shapes. Synthetic surfaces can be represented with majority of contemporary CAD systems. The modern NC machines contain highly sophisticated controllers, which provide complex synthetic surfaces manufacturing. The controllers of the older NC machines do not have functions for spline identification. It is necessary to perform a mathematical approximation of synthetic surface form of splines in two directions.*

**Key words:** synthetic surface, spline

### 1. UVOD

U suvremenim dizajnerskim kućama, gde se modeliraju automobili, avioni, brodovi ili energetska postrojenja primenjuju se mašinski delovi sa složenim geometrijskim oblikom. Oblik ili forma proizlazi iz potrebe da se postigne estetska ili aerodinamična linija proizvoda. Za postizanje takvih prefinjenih oblika neizbežna je primena takozvanih sintetskih površi [1]. Sintetske površi predstavljaju 3D površi, koje su spoj (sinteza) više sintetskih kriva u dva pravca, koje se karakterišu glatkom (neizlomljenom) krivolinijskom formom. Sintetske krive koje se protežu u jednom pravcu su uzdužne izvodnice, a u drugom pravcu naprečne izvodnice. Sintetske krive mogu biti krive drugog, trećeg i višeg reda. U industriji koriste se najjednostavnije krive drugog reda, takozvane konike i trećeg reda, takozvane kubike. Krive drugog reda ili konike su krug, elipsa, hiperbola i parabola. Krive trećeg reda su splajn-krive. Sintetska površ može se predstaviti jednostavnim parametarskim izrazom [1,4]:

$$P(t, u) = [xyz]^T = [x(t, u) y(t, u) z(t, u)]^T$$

gde  $0 \leq u \leq 1$  i  $0 \leq t \leq 1$

ili zbirom mreže kontrolnih tačaka u pravcu uzdužnih i naprečnih izvodnica:

---

<sup>1</sup> Doc. Dr. Risto Tashevski, Prof. Dr. Vladimir Dukovski, Ass. Dr. Sofija Sidorenko, The "Sts. Cyril and Methodius" University, Faculty of Mechanical Engineering, Karpos II b.b., P.O. Box 464, 91001 Skopje, Macedonia, Phone.: +389-2-399-261, fax: +389-2-362-298, E-mail: risto@mf.ukim.edu.mk

$$P(t, u) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m [x_{[i][j]}(t, u) y_{[i][j]}(t, u) z_{[i][j]}(t, u)]$$

Susedne kontrolne tačke povezuju se splajn-krivama u dva pravca:

$$f_{(xy)}(t) = \sum_{i=0}^n [x_{[i]}(t) y_{[i]}(t) z_{[i]}(t)]$$

$$f_{(xz)}(u) = \sum_{j=0}^m [x_{[j]}(u) y_{[j]}(u) z_{[j]}(u)]$$

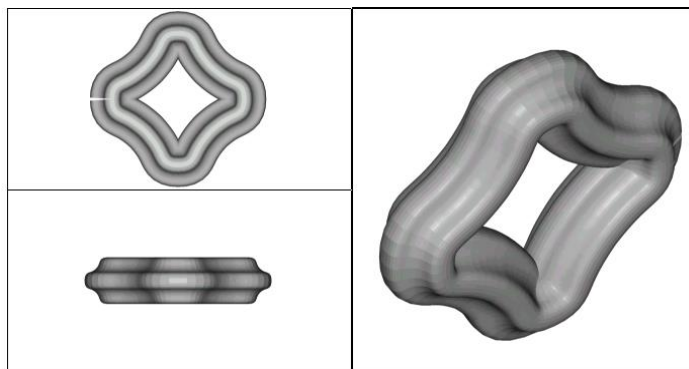
Splajn-krive se definišu dopunskim tačkama dobijenih sledećim matematičkim izrazima koji zavise od parametara  $u$  i  $t$ :

$$\begin{aligned} x &= x_0 B_0(t) + x_1 B_1(t) + x_2 B_2(t) + x_3 B_3(t) \\ y &= y_0 B_0(t) + y_1 B_1(t) + y_2 B_2(t) + y_3 B_3(t) \\ z &= z_0 B_0(t) + z_1 B_1(t) + z_2 B_2(t) + z_3 B_3(t) \end{aligned} \quad \text{kde} \quad \begin{array}{l} x, y, z - \text{ koordinate tačaka kriva} \\ B_0(t) - (\textit{Blending function}) \text{ funkcija spajanja} \\ t - \text{ parametar} \end{array}$$

Broj dopunskih tačaka zavisi od vida primenjene krive, t.j. od funkcije spajanja kontrolnih tačaka kriva. U zavisnosti funkcije spajanja razlikujemo različite splajn-krive: *B-spline*, *Cubic B-spline*, *Bezierova* itd. [1,2,3,4].

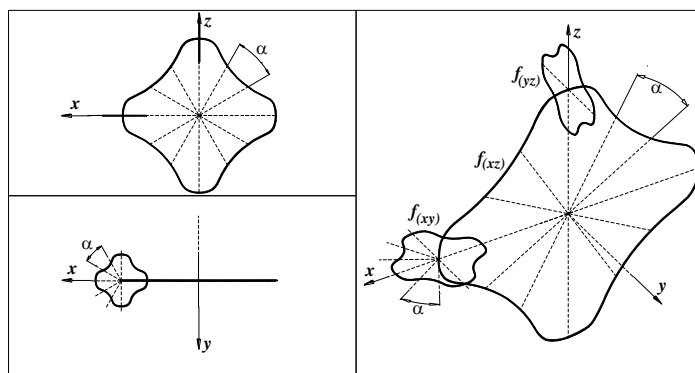
## 2. APROKSIMACIJA SINTETSKIH POVRŠI

Problem aproksimacije površi sastavljenih iz splajn-kriva u dva pravca postaje vrlo aktuelan zbog starijih *NC* mašina, koje ne mogu da kontrolišu funkciju *spline* [4].



Sl. 1. Sintetska površ formirana iz *Cubic B-spline* kriva u dva pravca

Izvršena je analiza proizvolne sintetske površi, dobijene sintezom *Cubic B-spline* kriva u dva pravca (sl.1.). Sintetska površ dobija se klizanjem splajn-krive  $f_{(xy)}$  koja leži u ravni  $xy$  po splajn-krivi  $f_{(xz)}$  koja leži u ravni  $xz$  (sl.2.). Aproksimacija površi sastoji se u pojedinačnoj aproksimaciji splajn-kriva u dva pravca. Splajn-krive mogu se aproksimirati linearnom i lučnom linijom. Aproksimirana linija kao jedna izvodnica iz sintetske površi dobija se korišćenjem postupka koji se sastoji iz radialno postavljenih prava, koje polaze od težišta splajn-krive, pod uglom  $\alpha$  i seku se sa njom u tački  $T_0, T_1 \dots T_n$ . Dobijene tačke povezuju se pravom ili lukom i dobija se aproksimirana linija. Očigledno je da će od broja tačaka zavisiti preciznost dobijene aproksimacije. Povećanjem broja presečnih tačaka, odnosno smanjenjem ugla  $\alpha$  dobijaju se manji segmenti, što doprinosi većoj preciznosti aproksimacije.



Sl. 2. Sintetska površ formirana iz *Cubic B-spline* kriva  $f_{(xy)}$  i  $f_{(xz)}$

Upoređenje sintetske površi aproksimirane površi dobijene linearnom ili lučnom aproksimacijom izvršava se statističkom analizom razlika njihovih zapremina. Zapremina površi, izražena funkcijom  $f(x,y,z)$  ograničenom trodimenzionalnom oblašću  $J_3$  iznosi:

$$V_S = \iiint_{J_3} f(x, y, z) dx dy dz$$

a zapremina aproksimirane površi izražena funkcijom  $g(x,y,z)$  iznosi:

$$V_L = \iiint_{J_3} g(x, y, z) dx dy dz$$

Razlika zapremina definiše se matematičkim izrazom:

$$\Delta V = V_S \cup V_L - V_S \cap V_L$$

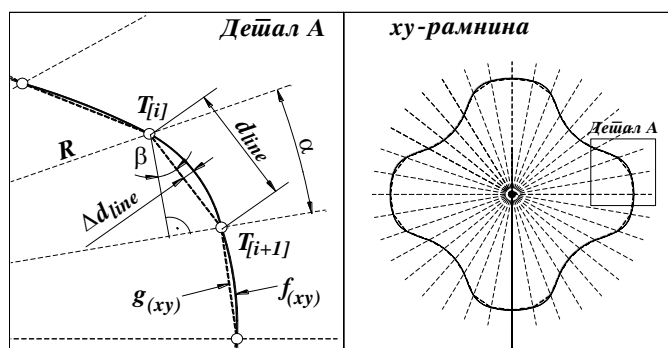
Sličnost zadate i aproksimirane površi određuje se odnosom zapremina:

$$S_{\Delta V} = \frac{V_S - \Delta V}{V_S}$$

Sličnost površi je najveća, ako razlika zapremina površi je jednaka nuli  $\Delta V=0$ .

## 2.1. Linearna aproksimacija

Linearnom aproksimacijom splajn-kriva pretvara se u izlomljenu poligonalnu liniju. Poligonalna linija predstavlja spoj tačaka dobijenih presekom segmenta i splajn-krive (sl.3.). Rastojanje tačke do susedne tačke na poligonalnoj liniji obeležava se sa  $d_{line}$  a najveće odstupanje splajn-krive do poligonalne linije sa  $\Delta d_{line}$ .



Sl. 3. Linearna aproksimacija Cubic B-spline krive  $f(xy)$

Tabela 1 Linearna aproksimacija

Broj tačaka ili segmenta $T_n$	Ugao $\alpha$ [°]	Odstupanje $\Delta d_{line(max)}$ [mm]	Otsečak segmenta $d_{line(max)}$ [mm]	Sličnost $S_{\Delta d}$	Razlika zapremina $\Delta V$ [mm³]	Sličnost $S_{\Delta V}$
Ravanj $xy$	Rav. $xy$	Ravanj $xy$	Ravanj $xy$	Ravanj $xy$	$V_S = 157169.788$	0.1141719
Ravanj $xz$	Rav. $xz$	Ravanj $xz$	Ravanj $xz$	Ravanj $xz$		
12	30	6.6148	29.6742	0.8461674	139225.4018	0.1141719
12	30	16.2277	92.7911	0.8701784	19057.9900	0.8787426
36	10	1.1313	12.2047	0.9736906		
36	10	2.3639	38.0947	0.9810888	2324.5141	0.9852101
120	3	0.1386	3.7880	0.9967767		
120	3	0.6389	12.1662	0.9948888	333.8120	0.9978761
360	1	0.0652	1.3123	0.9984837		
360	1	0.1972	4.1460	0.9984224		
↓ ~∞	↓ ~0	↓ ~0	↓ ~0	↓ ~1	↓ ~0	↓ ~1

Sličnost poligonalne linije i splajn-krive može se analizirati odnosom maksimalne dužine odstupanja  $\Delta d_{line(max)}$  i rastojanjem tačke do težišta površi  $R_{(xy)}$ :

$$S_{\Delta d(xy)} = \frac{R_{(xy)} - \Delta d_{line(max)}}{R_{(xy)}}$$

Sličnost izvodnica površi u drugom pravcu ili u ravni  $xz$  iznosi:

$$S_{\Delta d(xz)} = \frac{R_{(xz)} - \Delta d_{line(max)}}{R_{(xz)}}$$

Upoređenje površi formirane iz splajn-kriva i površi formirane iz poligonalnih linija je urađeno statističkom analizom pretstavljenom u tabeli 1. Iz statističke analize vidi se da preciznost raste sa povećanjem broja tačaka ili segmenta. Sličnost zavisi od zakrivljenja kriva. Ako je zakrivljenje krive veće, neophodna je primena većeg broja segmenata. Postavlja se pitanje na koliko segmenta podeliti krivu, t.j. koliko da iznosi ugao  $\alpha$ . Prvo se definiše sličnost splajn-krive i poligonalne linije, odnosno jedne od izvodnica sintetske površi  $S_{\Delta d(xy)} = S_{\Delta d(xz)} = 0.999$  i dobija se dozvoljeno odstupanje u ravni  $xy$   $\Delta d_{line(max)} = 0.043$  [mm], a u ravni  $xz$   $\Delta d_{line(max)} = 0.125$  [mm]. Zakrivljenost splajn-krive izražava se preko uvedenog koeficijenta zakrivljenosti, koji pretstavlja odnos  $\Delta d_{line(max)}/d_{line(max)}$ . Analizirajući koeficijent zakrivljenosti u ravni  $xy$  dobija se niz brojeva:  $0.2229 \rightarrow 0.0927 \rightarrow 0.0571 \rightarrow 0.0497$ . Za ugao  $\alpha = 1^\circ$  odstupanje je  $\Delta d_{line(max)} = 0.0652$  [mm], koeficijent zakrivljenosti je  $0.0497$ , što znači da se za zadovoljavanje prethodnih uslova, ujedno prateći težnju brojeva niza, pretpostavlja koeficijent zakrivljenosti  $0.04$ . Od koeficijenata zakrivljenosti u ravni  $xz$  dobija se niz brojeva:  $0.1749 \rightarrow 0.0621 \rightarrow 0.0525 \rightarrow 0.0476$ . Pretpostavlja se koeficijent zakrivljenosti  $0.04$ . Time smo odredili zakrivljenost splajn-krive u dva pravca. Koristeći podatke zakrivljenosti krive, određuje se  $d_{line(max)} = 0.87$  [mm] u ravni  $xy$  i  $d_{line(max)} = 2.63$  [mm] u ravni  $xz$ . Zatim, određuje se potrebni ugao  $\alpha$  i broj segmenata neophodnih za postizanje unapred definisane veličine sličnosti sintetskih površi:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{d_{line(max)} \cos \beta}{R}\right)$$

U slučaju da se zadovolji unapred definisana sličnost površi, ugao treba da je  $\alpha = 0.848^\circ$  u ravni  $xy$  i  $\alpha = 0.852^\circ$  u ravni  $xz$ .

## 2.1. Lučna aproksimacija

Postupak dobijanja lučno aproksimirane površi slična je kao kod linearne aproksimacije. Razlika je u tome što dobijene presečne tačke segmentnih linija sa splajn-krivama povezuju se lukovima, odnosno delovima kružnice. Spoj susednih presečnih tačaka pretstavlja tetivu kružnice sa radiusom  $R_k$ . Centar luka dobija se presekom normala susednih tetiva:

$$(x_{R[i]}, y_{R[i]}) = n_{[i]} \cap n_{[i+1]},$$

a radius luka ednakav je na:

$$R_{k[i]} = \sqrt{(x_{R[i]} - x_{[i]})^2 + (y_{R[i]} - y_{[i]})^2}$$

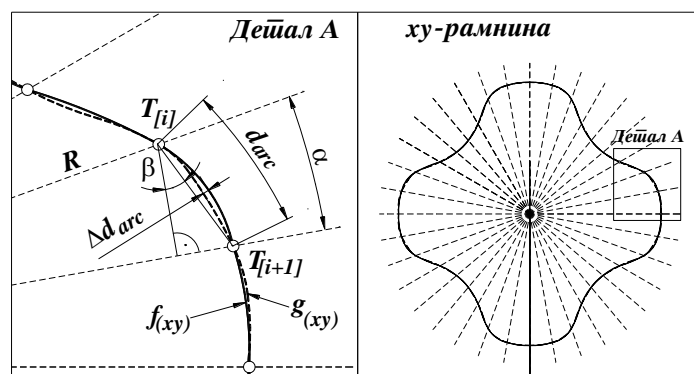
Lučno rastojanje od tačke do susedne tačke na lučnoj liniji obeležava se sa  $d_{arc}$  a najveće odstupanje splajn-krive do poligonalne linije sa  $\Delta d_{arc}$  (sl.4). Sličnost lučne linije i splajn-krive može se analizirati odnosom maksimalne dužine odstupanja  $\Delta d_{arc(max)}$  i rastojanjem tačke do težišta površi  $R_{(xy)}$ :

$$S_{\Delta d(xy)} = \frac{R_{(xy)} - \Delta d_{arc(max)}}{R_{(xy)}}$$

Sličnost izvodnica površi u drugom pravcu ili u ravni  $xz$  iznosi:

$$S_{\Delta d(xz)} = \frac{R_{(xz)} - \Delta d_{arc(max)}}{R_{(xz)}}$$

Upoređenje površi formirane iz splajn-kriva i površi formirane iz lučnih linija je urađeno statističkom analizom pretstavljenom u tabeli 2. Iz statističke analize vidi se da preciznost raste sa povećanjem broja tačaka ili segmenta. Sličnost zavisi od zakrivljenja kriva. Ako je zakrivljenje krive veće, neophodna je primena većeg broja segmenata. Postavlja se pitanje na koliko segmenta podeliti krivu, t.j. koliko da iznosi ugao  $\alpha$ . Prvo se definiše sličnost splajn-krive i lučne linije, odnosno jedne od izvodnica sintetske površi  $S_{\Delta d(xy)} = S_{\Delta d(xz)} = 0.999$  i dobija se dozvoljeno odstupanje u ravni  $xy$   $\Delta d_{arc(max)} = 0.043$  [mm], a u ravni  $xz$   $\Delta d_{arc(max)} = 0.125$  [mm]. Zakrivljenost splajn-krive izražava se preko uvedenog koeficijenta zakrivljenosti, koji pretstavlja odnos  $\Delta d_{arc(max)}/d_{arc(max)}$ . Analizirajući koeficijent zakrivljenosti u ravni  $xy$  dobija se niz brojeva:  $0.2069 \rightarrow 0.0433 \rightarrow 0.0302 \rightarrow 0.0130$ . Za ugao  $\alpha = 1^\circ$  odstupanje je  $\Delta d_{arc(max)} = 0.0171$  [mm], koeficijent zakrivljenosti je  $0.0130$ , što znači da se za zadovoljavanje prethodnih uslova, ujedno prateći težnju brojeva niza, pretpostavlja koeficijent zakrivljenosti  $0.02$ .



Sl. 4. Lučna aproksimacija Cubic B-spline krive  $f_{(xy)}$

Tabela 2 Lučna aproksimacija

Broj tačaka ili segmenta $T_n$	Ugao $\alpha$ [°]	Otstupanje $\Delta d_{arc(max)}$ [mm]	Otsečak segmenta $d_{arc(max)}$ [mm]	Sličnost $S_{Ad}$	Razlika zapremina $\Delta V$ [mm <sup>3</sup> ]	Sličnost $S_{AV}$
Ravanj $xy$	Rav. $xy$	Ravanj $xy$	Ravanj $xy$	Ravanj $xy$	$V_S = 157169.788$	0.1490147
Ravanj $xz$	Rav. $xz$	Ravanj $xz$	Ravanj $xz$	Ravanj $xz$		
12	30	6.1425	29.6742	0.8571511	133749.1715	0.1490147
12	30	15.8527	92.7911	0.8731784		
36	10	0.5287	12.2047	0.9877046	13960.0633	0.9111784
36	10	2.1567	38.0947	0.9827464		
120	3	0.1145	3.7880	0.9973372	793.0180	0.9949544
120	3	0.3719	12.1662	0.9970248		
360	1	0.0171	1.3123	0.9996023	101.1100	0.9993567
360	1	0.1192	4.1460	0.9990464		
↓ ~∞	↓ ~0	↓ ~0	↓ ~0	↓ ~1	↓ ~0	↓ ~1

Od koeficijenta zakrivljenosti u ravni  $xz$  dobija se niz brojeva:  $0.1708 \rightarrow 0.0566 \rightarrow 0.0306 \rightarrow 0.0287$ . Pretpostavlja se koeficijent zakrivljenosti  $0.03$ . Time smo odredili zakrivljenost splajn-krive u dva pravca. Koristeći podatke zakrivljenosti krive, određuje se  $d_{arc(max)} = 2.15$  [mm] u ravni  $xy$  i  $d_{arc(max)} = 4.17$  [mm] u ravni  $xz$ . Zatim, određuje se potrebni ugao  $\alpha$  i broj segmenata neophodnih za postizanje unapred definisane veličine sličnosti sintetskih površi:

$$\alpha = \frac{180 \cdot d_{arc(max)} \cos \beta}{\pi R}$$

U slučaju da se zadovolji unapred definisana sličnost površi, ugao treba da je  $\alpha = 2.028$  [°] u ravni  $xy$  i  $\alpha = 1.351$  [°] u ravni  $xz$ .

### 3. ZAKLJUČAK

Aktuelnost istraživanja aproksimacije sintetskih površi, formiranih iz splajn-kriva u dva pravca, proizlazi iz njene svakodnevne primene u industriskom dizajnu. Urađen je geometrijski i matematički model za aproksimaciju sintetskih površi, formiranih iz splajn-kriva u dva pravca. Koriscenjem poznatog postupka, splajn-krive dele se na određen broj segmenta, koji se potom spajaju linearnom ili lučnom linijom. Uporedna analiza splajn-kriva sa linearno i lučno aproksimiranom linijom, pokazuje kako podeliti segmente da bi se postigla određena sličnost. Prezentiran je proračun ugla segmentnih linija neophodnih za aproksimaciju. Metod proračuna ugla segmenta baziran je na uvedeni koeficijent zakrivljenosti kriva, što rezultira većom preciznošću.

### 4. LITERATURA

1. Richard H. Bartels, John C. Beatty and Brian A. Barksy, *An Introduction to Splines for Use in Computer Graphics & Geometric Modeling*, CA: Morgan Kaufmann, Los Altos, 1987
2. Lyle Ramshaw, *Blossoming: A Connect-the-Dots Approach to Splines*. Technical Report 19. Digital Systems Research Center, June 21, 1987.
3. Jorge Stolfi, *Oriented Projective Geometry. A Framework for Geometric Computations*. Academic Press, Boston, 1991.
4. Gerald Farin, *Curves and Surfaces for CAGD*. 3rd edition. Academic Press, Boston, 1993.