ГОДИШЕН ЗБОРНИК
НА ФИЛОЗОФСКИОТ ФАКУЛТЕТ НА УНИВЕРЗИТЕТОТ ВО СКОПЈЕ
Природно-математички оддел
Книга 5 (1952), № 2 .
ANNUAIRE
DE LA FACULTÉ DE PHILOSOPHIE DE L'UNIVERSITÉ DE SKOPJE
Section des sciences naturelles
Tome 5 (1952), № 2

Благој С. Попов

ФОРМИРАЊЕ КРИТЕРИУМИ ЗА РЕДУКТИБИЛНОСТ НА НЕКОИ КЛАСИ ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

B. S. Popov

FORMATION DES CRITÉRIUMS DE RÉDUCTIBILITÉ DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES AYANT DES FORMES DONNÉES À L'AVANCE

Скопје — 1952

СОДРЖАЈ

БЛАГОЈ С. ПОПОВ

ФОРМИРАЊЕ КРИТЕРИУМИ ЗА РЕДУКТИБИЛНОСТ НА НЕКОИ КЛАСИ ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

УВОД

Големата примена на линеарните диференцијални равенки во анализата и посебно во применетета математика е наложила, од диференцијалните равенки тие да бидат најдобро изучени. Меѓутоа класите линеарни диференцијални равенки интеграбилни со квадратури, т. е. оние чии што општи интеграл е алгебарска функција или може да се изрази со класичните трансцедентни функции, се многу ограничени. Тоа значи дека во општ случај не е можно според формата на една линеарна диференцијална равенка, да се познае дали таа равенка е интеграбилна или не е. Поради тоа по различни начини се установуваат методи за решавање на извесни класи диференцијални равенки*.

Во основата на оваа работа се наоѓа аналогијата што постои меѓу алгебарските и линеарните диференцијални равенки. Како што е познато, проблемот за решение на една диференцијална равенка се состои во тоа, да се најде таква функција од независно променливата што ја идентично задоволува. Тоа е пак особината на коренот на една алгебарска равенка. Уште повеќе, бројот на основните функции, кој го определуваат општиот интеграл, се сложува со редот на диференцијалната равенка, што е случај и со бројот на корените на алгебарската равенка. Овие околности, и многу други, како теоријата за симетричните функции, теоријата за инваријантите, теоријата за групите, за алгебарските равенки, раширени и на линеарните диференцијални равенки, се условили извесна аналогија помеѓу нив.

Особините за разложливост и редуктибилност на линеарните хомогени диференцијални равенки од споменатата аналогија ќе бидат ползувани во предложената работа за

* Доведувајќи ја линеарната диференцијална равенка во врска со групите на S. Lie, Vessiot[1]) покажува дека таа во општ случај не е интеграбилна.

установување општи критериуми на редуктибилност на некоj класи линеарни диференциjални равенки.

Интересните истражувања[2]) на проф. Митриновиќ, во врска со проблемот за разложливост и редуктибилност на линеарните диференциjални равенки, ни се дали интерес со удобноста на методите да ги исползваме за добивање на тие општи критериуми на редуктибилност. Тие методи на Митриновиќ се укажуваат нарочно ефикасни, ако се применат на диференциjални равенки чии што коефициенти се рационални функции од независно променливата или се сведуваат на такви.

Во првиот дел ние модифицираме некоj докази и развиваме особено познати разгледувања, воведуваjќи многу посредни расудувања, што следуваат од споменатата аналогиjа меѓу линеарните диференциjални равенки и алгебарските. При тоа jа користиме методата на симболичните оператори, што се голем успех се употребува, како што е познато во теориjата на линеарните диференциjални равенки со постоjани коефициенти, и каде што доаѓа до израз аналогиjата меѓу диференциjалниот полином и алгебарскиот.

Во овоj дел го разгледуваме проблемот за наоѓање заедничко решение на две диференциjални равенки, како и особината за разложливост на еден линеарен диференциjален полином на линеарни симболични фактори. Се разгледува и особината за редуктибилност на една равенка и основните принципи на тоj поим.

За даден диференциjален полином од n-ти ред ($n > 1$), разложлив на n симболични фактори ги даваме законите за формирање на коефициентите му во функции од коефициентите на симболичните фактори. Како последица на овие формули следува и обликот на еден диференциjален полином разложлив на симболични фактори

$$L(x,D)y \equiv \Pi\left(f_{i1}\,D + f_{i1}\,D\lg\frac{f_{11}\,f_{21}\cdots f_{i-1,1}\,W_i}{W_{i-1}}\right)y, \quad D = \frac{d}{dx}$$

каде што W_i се Вронскиани образувани од соодветните системи интеграли. Така добиените формули претставуваат извесно уопштување на тие дадени од Vincent[3]), Floquet[4]) и Mammana[5]).

Исто така се разгледува и обликот на една диференциjална равенка од n-ти ред, кога таа има n конjугирани во смисол на Brassin решениjа.

Вториот дел, користеjќи jа особината за разложливост на една линеарна диференциjална равенка од n-ти ред на линеарни диференциjални равенки од први ред по методот на Митриновиќ, ни дава формирање критериуми на редуктибилност на некоj класи диференциjални равенки од втори ред. Бидејќи пак секоја диференцијална равенка од втори ред, редуктибилна во смисол на Frobenius[6]) е и интеграбилна, добиените критериуми претставуваат такви и за интеграбилноста на посматраните диференцијални равенки. Тешкотиите на кој се наидува при ова се од алгебарска природа, па е предност на посматраната метода што успева сите операции да ги сведе на алгебарски. Користената метода има интерес и заради тоа што го дава системот равенки на кој се сведува дадената диференцијална равенка во експлицитна форма.

Диференцијалните равенки чии интеграли се специјални функции претставуваат предмет на третиот дел од оваа работа. За хипергеометриската, Besselовата, Weberовата, конфлуентната хипергеометриска равенка, како и за равенките на Hermite, Darboux и др. ги наоѓаме условите за редуктибилност а со тоа и системите линеарни равенки од прв ред на кој се сведуваат тие равенки при најдените услови.

Напомнуваме, дека критериумите за интеграбилност добиени од нас за посматраните класи диференцијални равенки претставуваат за тие равенки најопшти критериуми и дека *сите досега познати интеграбилни диференцијални равенки од истиот вид се добиваат како партикуларни случаи од оние од нас добиени.* Тоа е и проверено на многубројни примери систематски изложени со решениа во многу познатата книга на Kamke - *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, Bd.* 1.

Во последниот дел од работата покажуваме како може методата дадена од Митриновиќ да се примени и за диференцијални равенки од по висок ред и дека тешкотиите при това се пренасаат на решавање алгебарски системи од равенки.

Сметам за должност да ја искажам својата благодарност на проф. Митриновиќ за покажаното особено интересување при изработување на оваа работа.

I ДЕЛ

НЕКОЈ ОПШТИ ОСОБИНИ НА ЛИНЕАРНИТЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ВО ВРСКА СО АНАЛОГИЈАТА МЕЃУ АЛГЕБАРСКИТЕ И ЛИНЕАРНИТЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛИ РАВЕНКИ

1. Линеарната хомогена диференцијална равенка

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(x)\, y^{(n-\nu)} = 0, \tag{1. 1}$$

чии што коефициенти се по претпоставка холоморфни функции од променливата x во еден интервал (α, β) и $a_0 \neq 0$, може да се посматра и како

$$L(x, D)y \equiv \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(x) D^{n-\nu} y \equiv \left[\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(x) D^{n-\nu}\right] y = 0, D = \frac{d}{dx},$$

каде што изразот

$$L \equiv L(x, D) \equiv \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(x) D^{n-\nu}, \tag{1. 2}$$

се вика обичен линеарен диференцијален оператор n-ти ред.

Изразот пак

$$L y \equiv \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(x) D^{n-\nu} y,$$

го викаме диференцијален или операторски полином од n-ти ред.

2. Земајќи ги предвид горните означувања, изразот

$$LM \equiv \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu D^{n-\nu} M, \tag{1. 3}$$

покажува дека операторскиот симбол (1. 2) е извршен над M. Претставува ли пак M втор линеарен диференцијален оператор

$$M \equiv \sum_{k=0}^{m} b_k(x) D^{m-k},$$

производот LM претставува нов операторски симбол N од ред $n+m$ и пишеме

$$N(x, D) \equiv L(x, D)\, M(x, D).$$

Викаме дека диференцијалниот оператор N се добива со извршувањето на означените операции во L над M и дека N е составен од диференцијалните оператори L и M земени во тој ред.

Повториме ли ги истите разгледувања за M, ќе имаме

$$M(x, D) \equiv Q(x, D)\, R(x, D)$$

каде што Q и R се диференцијални оператори чии симболичен производ е M. Внесена оваа вредност за M во (1. 3) дава

$$L[Q(R)] \equiv L\,Q\,R$$

По таков начин дефиницијата за симболичен производ од два диференцијални оператора може да се прошири за повеќе оператори. Лесно се заклучува дека овој производ е асоцијативен и дистрибутивен но не и комутативен т. е.

$$LM \neq ML$$

3. Нека се дадени диференцијалните оператори

$$L(x, D) \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\, D^{n-i}$$

$$M(x, D) \equiv \sum_{k=0}^{m} b_k(x)\, D^{m-k}$$

каде што е $n > m$ и $n - m = s$.

Да означиме со P диференцијалниот оператор

$$P(x, D) \equiv \sum_{i=0}^{s} p_i(x)\, D^{s-i}.$$

Тогај L може да се напише во обликот

$$L = PM + R. \tag{1.4}$$

R е диференцијален оператор од исти вид како и L, M и P и од ред помал од s.

Навистина, ако за таа цел M се помножи симболично со $p_0 D^s$ од лево и извади од L, диференцијалниот оператор што го добиваме

$$L - p_0 D^s M \tag{1. 5}$$

е од $n-1$ ред. Одново помножен операторот M со $p_1 D^{s-1}$ и изваден овој производ од (1. 5) дава

$$L - p_0 D^s M - p_1 D^{s-1} M$$

што претставува диференцијален оператор од $n-2$ ред. Продолжувајќи така доаѓаме до

$$L - \sum_{i=0}^{s} p_i(x) D^{s-i} M = R$$

од каде се гледа дека R е диференцијален оператор од $s-1$ ред. Последната пак релација е токму равенството (1. 4).

Ако се земат наместо операторите L, M и P респективно равенките $Ly=0$, $My=0$ и $Py=0$, ќе имаме спрема (1. 4)

$$Ly = PMy + Ry = 0.$$

Од тука ги имаме познатите следствиа:

Ако равенките $Ly=0$ и $My=0$ имаат еден општ интеграл, тогаш тој интеграл е и на $Ry=0$, и обратно. Притежава ли пак $Ly=0$ сите интеграли на $My=0$, тогај очевидно е $Ry\equiv 0$, т. е. сите коефициенти на Ry се нули.

Во тој случај е

$$L(x, D) = P(x, D)\, M(x, D)$$

односно

$$L(x, D) = \sum_{i=0} p_i(x) D^{s-i} \sum_{k=0} b_k(x) D^{m-k}$$

$$= \sum_i p_i(x) \sum_k \sum_r \binom{s-i}{r} b_k(x) D^{m-k-r}$$

Од добиениот резултат следува и теоремата дадена од Libri[7])

Ако две линеарни диференцијални равенки $Ly=0$ и $Py=0$ ја имаат особината, сите решенија на втората да се решенија и на првата равенка, тогај и без интеграција може да се најде една трета равенка $My=0$ од ред $m>0$ така, равенката $Ly=0$ од $m+s=n$-ти ред да се разложува на две равенки од m-ти и s-ти ред.

4. Разлагањето на диференцијалниот полином на такви од понизок ред, нè води по аналогија со разлагањето на алгебарските полиноми на линеарни фактори, до особини нови и заеднички, една од кој е поимот за *редуктибилност* на линеарната диференцијална равенка.

Линеарната диференцијална равенка, на којашто коефициентите во определена област се еднозначни функции од променливата x, *се вика* ***иредуктибилна*** *според* ***Frobenius***, *кога таа ни со една хомогена линеарна диференцијална равенка од понизок ред, чии коефициенти се со истите особини како и на дадената, нема заедничко решение; во обратен случај таа се вика редуктибилна. Секоа линеарна диференцијална равенка од први ред е иредуктибилна*[8]*)*.

Треба да се одбележи дека поимот за иредуктибилност не се ограничува само на линеарните диференцијални равенки. Така нпр. алгебарската диференцијална равенка

$$\Phi\,(x, y, y', \cdots y^{(m)})=0, \quad y^{(k)}=\frac{d^k y}{dx^k},$$

каде што Φ е цела рационална функција по x, y, и неговите изводи, се вика иредуктибилна, кога таа во однос на $y^{(m)}$ е во алгебарски смисол иредуктибилна т. е. Φ не може да се разложи на производ од две равенки од понизок ред спрема $y^{(m)}$ и со коефициенти рационални по однос на

$$y, y', y'', \cdots$$

и ако нема со никаква диференцијална равенка од понизок ред и со исти карактер

$$\Psi\,(x, y, y', \cdots y^{(p)})=0,$$

заеднички интеграл.

5. Прашањето за наоѓање заеднички решенија на две дадени диференцијални равенки со споменатата аналогија не наведува на прашањето од алгебрата за наоѓање најголема заедничка мера за два цели броја или за две цели функции.

Според кажаното во т. 3 заедничките решенија на $My=0$ и $R_1 y=0$ ќе бидат заеднички решенија и на $R_2 y=0$ и $My=0$, па имаме

$$M=P_1 R_1+R_2.$$

По истиот начин се добива

$$R_i = P_{i+1} R_{i+1}+R_{i+2},$$

$$i=1, 2, \cdots k-1.$$

P_i и R_i имаат коефициенти со исти особини како P и секога постоат неравенките

$$n \geqslant \sigma_k > \sigma_{k+1},$$

каде што σ_k го означува редот на R_k.

R_{k+1} или е равен на $\omega(x)$ па дадените равенки имаат заедничко само тривиалното решение $y=0$, или е нула па е заедничкиот интеграл на $Ly=0$ и на $My=0$ е интегралот на $R_{k+1}\, y=0$.

Врз основа на кажаното се заклучува:

Потребен и доволен услов за да биде една диференцијална равенка редуктибилна е да може да се напише во обликот

$$L(x, D)\, y \equiv P(x, D)\, M(x, D)\, y,$$

каде што сумата од редовите на $P(x, D)$ и на $M(x, D)$ е равна на редот на $L(x, D)$.

Наоѓањето на равенката што има за решенија сите решениа на две дадени равенки[9])

$$P(x, D)\, y \equiv \sum_{k=0}^{n} p_k(x)\, D^{n-k}\, y=0,$$

$$Q(x, D)\, y \equiv \sum_{k=0}^{m} q_k(x)\, D^{m-k}\, y=0,$$

станува практично по следниот начин. Зимаме си диференцијалните полиноми

$$A(x, D)\,y \equiv \sum_{s=0}^{m} a_s(x)\,D^{m-s}\,y,$$

$$B(x, D)\,y \equiv \sum_{s=0}^{n} b_s(x)\,D^{n-s}\,y,$$

и образуваме новите полиноми

$$Ry = BPy \equiv \sum_{s=0}^{m} b_s\,D^{m-s} \sum_{k=0}^{n} p_k\,D^{n-k}\,y,$$

$$R_1\,y = AQy \equiv \sum_{s=0}^{n} a_s\,D^{n-s} \sum_{k=0}^{m} q_k\,D^{m-k}\,y.$$

При горната претпоставка, овие два полинома претставуваат еден ист од ред $m+n$, т. е.

$$Ry \equiv R_1 y$$

или по внесување на десните страни

$$\Bigg[\sum_{s=0}^{m} b_s \sum_{k=0}^{n} \sum_{r=0}^{m-s} \binom{m-s}{r} p_k^{(r)}\,D^{m+n-r-s}$$

$$-\sum_{s=0}^{n} a_s \sum_{k=0}^{m} \sum_{r=0}^{n-s} \binom{n-s}{r} q_k^{(r)}\,D^{m+n-r-s}\Bigg]\,y \equiv 0.$$

Подредиме ли ја десната страна на оваа равенка по изводите на y и ставиме сите коефициенти да се рамни на нула, добиваме $m+n+1$ равенка со $m+n+2$ непознати a_s и b_s. Со едната непозната можеме или да ги разделиме равенките па добиваме исти број на непознати како и равенки, или да ги определиме првите непознати од првата равенка

$$a_0\,q_0 - b_0\,p_0 = 0.$$

Ако ставиме $a_0 = p_0$ ќе имаме $b_0 = q_0$. Системот равенки се сведува на $m+n$ равенки со толку непознати.

Детерминантата на системата линеарни равенки треба да биде различна од нула, за да ги еднозначно определиме коефициентите на $Ay=0$ и $By=0$. Ако е детерминантата рамни на нула равенките $Py=0$ и $Qy=0$ имаат заеднички интеграли. Нпр. ако е $n=3$, $m=2$, имаме

$$P(x,D)\,y \equiv (p_0 D^3 + p_1 D^2 + p_2 D + p_3)\,y,$$

$$Q(x,D)\,y \equiv (q_0 D^2 + q_1 D + q_2)\,y,$$

$$A(x,D)\,y \equiv (a_0 D^3 + a_1 D^2 + a_2 D + a_3)\,y$$

$$B(x,D)\,y \equiv (b_0 D^2 + b_1 D + b_2)\,y$$

За определување коефициентите ги имаме од идентитетот

$$[(b_0 D^2 + b_1 D + b_2)(p_0 D^3 + p_1 D^2 + p_2 D + p_3) - (a_0 D^3 + a_1 D^2 + a_2 D + a_3)(q_0 D^2 + q_1 D + q_2)]\,y \equiv 0$$

следните равенки

$$b_0 p_0 - a_0 q_0 = 0$$

$$b_0 (2p_0' + p_1) + b_1 p_0 - a_0 (3q_0' + q_1) - a_1 q_0 = 0$$

$$b_0 (p_0'' + 2p_1' + p_2) + b_1 (p_0' + p_1) + b_2 p_0 - a_0 (3q_0'' + 3q_1' + q_2) - a_1 (2q_0' + q_1) - a_2 q_0 = 0$$

$$b_0 (p_1'' + 2p_2' + p_3) + b_1 (p_1' + p_2) + b_2 p_1 - a_0 (q_0''' + 3q_1'' + 3q_2') - a_1 (q_0'' + 2q_1' + q_2) - a_2 (q_0' + q_1) - a_3 q_0 = 0$$

$$b_0 (p_2'' + 2p_3') + b_1 (p_2' + p_3) + b_2 p_2 - a_0 (q_1''' + 2q_1'') - a_1 (q_1'' + 2q_2') - a_2 (q_1' + q_2) - a_3 q_1 = 0$$

$$b_0 p_3'' + b_1 p_3' + b_2 p_3 - a_0 q_2''' - a_1 q_2'' - a_2 q_2' - a_3 q_2 = 0$$

Обликот на детерминантата оставувајќи првата од равенките е

$$D = \begin{vmatrix} p_0 & 0 & q_0 & 0 & 0 \\ p_0' + p_1 & p_0 & 2q_0' + q_1 & q_0 & 0 \\ p_1' + p_2 & p_1 & q_0'' + 2q_1' + q_2 & q_0' + q_1 & q_0 \\ p_2' + p_3 & p_2 & q_1'' + 2q_2' & q_1' + q_2 & q_1 \\ p_3' & p_3 & q_2'' & q_2' & q_2 \end{vmatrix}$$

6. Претставува особен интерес случајот кога еден линеарен диференцијален полином од произволен ред ($n > 1$), може да се разложи на симболични фактори од први ред односно на линеарни диференцијални полиноми од први ред. Ќе го изведеме тоа не како директно следствие на погоре покажаниот начин ами како што следува.

Ако ни е дадена диференцијалната равенка (1. 1), чија што основна система интеграли е $y_1, y_2, y_3 \cdots y_n$, тогај спрема дефиницијата за редуктибилност, полиномот може да се напише во обликот[10])

$$(1.\ 6) \qquad Ly = L_n y = L_1^n L_{n-1} y,$$

каде што е $L_{n-1} y = 0$, диференцијална равенка од $n-1$ ред, чии интеграли се y_k, $k = 1, 2, \cdots n-1$, а L_1^n линеарен диференцијален полином од први ред*

По истиот начин равенката $L_{n-1} y = 0$ е редуктибилна и полиномот може да се напише како

$$L_{n-1} y = L_1^{n-1} L_{n-2} y,$$

или зимајќи предвид (1. 6)

$$Ly = L_1^n L_1^{n-1} L_{n-2} y.$$

Продолжавајќи така, добиваме

$$Ly = L_1^n \cdots L_1^3 L_1^2 L_1^1 y.$$

По таков начин, дадениот диференцијален полином од n-ти ред го разложивме на n симболични фактори од први ред. Да забележиме дека коефициентите на овие фактори се од иста природа како и коефициентите на равенката (1. 1).

* Долниот индекс ни покажува редот на полиномот а горниот неговото место во производот.

Горното разложување Vincent[3]) го добива вршејќи ја постепено смената $y' = ay + y_1$, каде што a е решение на равенката а y_1 новата функција.

7. Аналогно, како што при алгебарските равенки, знаењето на корените позволува да се напише равенката, и тука знаењето на системата основни интеграли ни позволува со помошта на раставување диференцијалната равенка на симболични фактори, да ја најдеме равенката што е задоволена од таа система интеграли. Но на ова место нас не интересира следниот проблем. Бидејќи дадена диференцијална равенка

$$L(x, D)\, y \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k\, D^{n-k}\, y = 0, \tag{1. 7}$$

за којашто претполагаме дека може да се пише во обликот

$$L(x, D)\, y \equiv \prod_{i=n}^{1} (f_{i,1} D + f_{i,2})\, y = 0, \tag{1. 8}$$

да ја најдеме врската меѓу коефициентите a_k и f_{ij} т. е. да ги најдеме коефициентите a_k во функции од f_{ij}.

Од редуктибилноста на диференцијалната равенка се добива

$$Ly = L_{n-m}\, L_m\, y$$

или ако се земе

$$L_{n-m} = \sum_{s=0}^{n-m} b_s(x)\, D^{n-m-s}\,; \quad L_m = \sum_{i=0}^{m} C_i\,(x)\, D^{m-i}$$

ќе имаме

$$Ly = \sum_{s=0}^{n-m} b_s\, D^{n-m-s} \sum_{i=0}^{m} C_i\, D^{m-i}\, y \tag{1. 9}$$

$$= \sum_{s=0}^{n-m} b_s \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n-m-s} \binom{n-m-s}{k} C_i^{(k)}\, y^{(n-i-s-k)}$$

По упоредување на коефициентите пред еднаквите изводи, имаме

$$
(1.\ 10)\qquad
\begin{aligned}
a_0 &= b_0 c_0,\\
a_1 &= b_0 c_1 + \binom{n-m}{1} b_0 c_0' + b_1 c_0,\\
a_2 &= b_0 c_2 + \binom{n-m}{1} b_0 c_1' + \binom{n-m}{2} b_0 c_0''\\
&\quad + b_1 c_1 + \binom{n-m-1}{1} b_1 c_0'\\
&\quad + b_2 c_0,\\
a_3 &= b_0 c_3 + \binom{n-m}{1} b_0 c_2' + \binom{n-m}{2} b_0 c_1'' + \binom{n-m}{3} b_0 c_0'''\\
&\quad + b_1 c_2 + \binom{n-m-1}{1} b_1 c_1' + \binom{n-m-1}{2} b_1 c_1''\\
&\quad + b_2 c_1 + \binom{n-m-2}{1} b_2 c_0'\\
&\quad + b_3 c_0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Ако сега ја примениме формулата (1. 9) на симболичниот производ

$$L_{n-1} L_1^1\, y \equiv (b_0 D^{n-1} + b_1 D^{n-2} + \cdots + b_{n-1})(f_{11} D + f_{12})\, y,$$

добиваме спрема (1. 10)

$$
\begin{aligned}
a_0 &= b_0 f_{11},\\
a_1 &= b_0 f_{12} + \binom{n-1}{1} b_0 f_{11}' + b_1 f_{11},\\
a_2 &= \binom{n-1}{1} b_0 f_{12}' + \binom{n-1}{2} b_0 f_{11}'' + b_1 f_{12} + \binom{n-2}{1} b_1 f_{11}' + b_2 f_{11},\\
a_3 &= \binom{n-1}{2} b_0 f_{12}'' + \binom{n-1}{3} b_0 f_{11}''' + \binom{n-2}{1} b_1 f_{12}' + \binom{n-2}{2} b_1 f_{11}''\\
&\quad + b_2 f_{12} + \binom{n-3}{1} b_2 f_{11}' + b_3 f_{11}.
\end{aligned}
$$

Два пати употребена таа формула (1. 9) ни дава за производот

$$L_{n-2} L_1^2 L_1^1\, y \equiv (q_0 D^{n-2} + q_1 D^{n-3} + \cdots + q_{n-2})(f_{21} D + f_{22})(f_{11} D + f_{12})\, y$$

следните равенки

$$a_0 = q_0 f_{21} f_{11},$$

$$a_1 = \binom{n-1}{1} q_0 f_{21} f_{11}' + \binom{n-2}{1} q_0 f_{21}' f_{11} + q_0 f_{11} f_{22} + q_0 f_{21} f_{12} + q_1 f_{21} f_{11},$$

$$a_2 = \binom{n-1}{2} q_0 f_{21} f_{11}'' + \binom{n-2}{2} q_0 f_{21} f_{11} + \binom{n-2}{1}^2 q_0 f_{21}' f_{11}' + \binom{n-1}{1} q_0 f_{21} f_{12}'$$

$$+ \binom{n-2}{1} q_0 f_{22} f_{11}' + \binom{n-2}{1} q_0 f_{21} f_{11}' + q_0 f_{22} f_{11} +$$

$$+ \binom{n-1}{1} q_1 f_{21}' f_{12} + \binom{n-3}{1} q_1 f_{21} f_{11} + f_{22} f_{11} q_1 + q_1 f_{21} f_{12} + q_2 f_{21} f_{11},$$

. . . .

Последователно формирајќи симболичните производи

$$L_{n-3} L_3 = L_{n-3} L_2 L_1^1 = L_{n-3} L_1^3 L_1^2 L_1^1,$$

. . . .

$$L_{n-k} L_k = L_{n-k} L_{k-1} L_1 = \cdots = L_{n-k} \cdots L_1^k L_1^{k-1} \cdots L_1^1,$$

. . . . ;

$$L_1^n L_{n-1} = L_1^n L_{n-2} L_1^1 = \cdots = L_1^n L_1^{n-1} \cdots L_1^2 L_1^1,$$

и упоредувајќи ги коефициентите пред еднаквите изводи, ги добиваме конечно бараните релации

$$a_0 = f_{n1} f_{n-1,1} \cdots f_{21} f_{11} = \prod_{k=1}^{1} f_{k1},$$

$$(1.\ 11)\qquad a_1=\prod_{k=n}^{1} f_{k1}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{f_{i2}}{f_{i1}}+\sum_{i=1}^{n}\binom{n-i}{1}\frac{f'_{i1}}{f_{i1}}\right],$$

$$a_2=\prod_{k=n}^{1} f_{k1}\left[\sum_{i,k=1}^{n}\frac{f_{i2}}{f_{i1}}\frac{f_{i+k,2}}{f_{i+k,1}}+\sum_{i=1}^{n}\binom{n-i}{2}\frac{f''_{i1}}{f_{i1}}+\sum_{i=2}^{n}\binom{n-i}{2}\frac{f'_{i-1,1}}{f_{i-1,1}}\frac{f'_{i1}}{f_{i1}}\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-i-1}{1}\binom{n-k-2}{1}\frac{f'_{i1}}{f_{i1}}\frac{f'_{i+k,1}}{f_{i+k,1}}+\sum_{i=1}^{n}\binom{n-i}{1}\frac{f'_{i2}}{f_{i1}}$$

$$+\frac{f'_{11}}{f_{11}}\binom{n-2}{1}\sum_{i=2}^{n}f_{i2}+\binom{n-3}{1}\frac{f'_{21}}{f_{21}}\sum_{i=3}^{n}f_{i2}+\cdots+\binom{1}{1}\frac{f'_{n-1,1}}{f_{n-1,1}}$$

$$\left.+\frac{f_{12}}{f_{11}}\sum_{i=2}^{n}\binom{n-i}{1}\frac{f'_{i1}}{f_{i1}}+\frac{f_{22}}{f_{21}}\sum_{i=0}^{n}+\cdots+\frac{f_{n-2,2}}{f_{n-2,1}}\sum_{i=n-1}^{n}\frac{f'_{i1}}{f_{i1}}\right],$$

$$a_3=\prod_{k=n}^{1} f_{k1}\left[\sum_{i,k,s=1}^{n}\frac{f_{i2}}{f_{i1}}\frac{f_{i+k,2}}{f_{i+k,1}}\frac{f_{i+s,2}}{f_{i+s,1}}+\sum_{i=1}^{n}\binom{n-i}{3}\frac{f'''_{i1}}{f_{i1}}\cdot\right.$$

$$+\sum_{i=3}^{n}\binom{n+i}{1}^3\frac{f'_{i-2,1}}{f_{i-2,1}}\frac{f'_{i-1,1}}{f_{i-1,1}}\frac{f'_{i1}}{f_{i1}}+\sum_{i=1}^{n}\binom{n-i}{2}\frac{f''_{i2}}{f_{i1}}$$

$$+\sum_{i=2}^{n}\binom{n-i}{1}^2\frac{f'_{i1}}{f_{i1}}\frac{f'_{i+1,1}}{f_{i+1,1}}+$$

$$+\binom{n-2}{2}\frac{f''_{11}}{f_{11}}\sum_{i=2}^{n-1}f_{i2}+\binom{n-3}{2}\frac{f'_{21}}{f_{21}}\sum_{i=3}^{n}f_{i2}+\cdots+\frac{f''_{n-1,1}}{f_{n-1,1}}$$

$$+\sum_{i=2}^{n}\binom{n-i}{2}\binom{n-i-1}{1}\frac{f''_{i-1,1}}{f_{i-1,1}}\frac{f'_{i+1,1}}{f_{i+1,1}}+\cdots$$

$$+\sum_{i=2}^{n}\binom{n-i}{2}\frac{f''_{i1}}{f_{i1}}+\cdots$$

. . . .

. . . .

8. Нека ни е дадена диференцијалната равенка (1. 7), на којашто системата интеграли е $y_1, y_2, \cdots y_n$. Спрема кажаното во т. 6 соответниот полином е разложлив на симболичен производ (1. 8).

Ќе покажиме, дека симболичниот производ (1. 8) може да се пише и како

$$L(x, D) \equiv \prod_{i=n}^{1}\left[f_{i1}\, D + f_{i1}\, D\, lg\, \frac{f_{11}\, f_{21}\cdots f_{i-1,1}\, W_i}{W_{i-1}}\right], \tag{1. 12}$$

каде што W_i претставуваат Вронскианите образувани од функциите y_i,

$$W_i = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \cdots y_i \\ y_1' & y_2' \cdots y_i' \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{vmatrix}.$$

Системата интеграли y_i може да се добие последователно со смената

$$y = v_1 \int v\, dx.$$

Навистина, добиваме

$$y_1 = v_1,\, y_2 = v_1 \int v_2\, dx,\, y_3 = v_1 \int v_2\, dx \int v_3\, dx, \cdots y_n = v_1 \int dx \int \cdots \int v_n\, dx,$$

каде што е

$$v_1 = exp\left(-\int \frac{f_{12}}{f_{11}}\, dx\right);$$

$$v_i = \frac{1}{f_{i-1,1}}\, exp \int\left(\frac{f_{i-1,2}}{f_{i-1,1}} - \frac{f_{i,2}}{f_{i,1}}\right) dx,\, i = 2, \cdots n.$$

Според формулата на Liouville

$$W_i = C \exp\left(-\int \frac{P_1^i}{P_0^i} dx\right),$$

и зимајќи предвид (1. 11)

$$P_1^k = f_{11} f_{21} \cdots f_{k1} \left[\sum_{i=0}^{k} \frac{f_{i2}}{f_{i1}} + (k-i) \frac{f_{i1}'}{f_{i1}} \right],$$

$$P_0^k = f_{11} f_{21} \cdots f_{k1},$$

имаме*

$$W_i = \frac{C}{f_{11}^{i-1} f_{21}^{i-2} \cdots f_{i-1,1}} \exp\left[-\int \left(\frac{f_{12}}{f_{11}} + \frac{f_{22}}{f_{21}} + \cdots + \frac{f_{i2}}{f_{i1}} \right) dx \right].$$

Со згодно избирање на константите, ќе имаме за количникот

$$\frac{W_i}{W_{i-1}} = \frac{1}{f_{11} f_{21} \cdots f_{i-1,1}} \exp\left(-\int \frac{f_{i2}}{f_{i1}} dx\right),$$

од каде следува

$$f_{12} = -f_{i1} D \lg \frac{f_{11} f_{21} \cdots f_{i-1,1} W_i}{W_{i-1}}.$$

Внесена оваа вредност за f_{i2} во (1. 8) ни дава токму (1. 12).

9. При алгебарските полиноми, линеарните множители можат да разменат местата си, нешто кое при диференцијаните како што рековме во т. 2 не е можно, т. е. симболичните фактори не можат да разменат местата, освен во случај кога се коефициентите на даден полином константи.

Да ги побараме условите што треба да ги задоволуваат коефициентите на симболичните фактори f_{ik} за да овие бидат комутативни.

Означиме ли со

$$K = \prod_{i=1}^{k-2} (f_{i1} D + f_{i2})$$

ќе имаме

* По технички причини f е заменето со f.

$$(f_{k1} D + f_{k2})(f_{k-1,1} D + f_{k-1,2}) K = f_{k1} f_{k-1,1} K''$$

$$+ \left[f_{k1} f'_{k-1,1} + f_{k2} f_{k-1,1} + f_{k1} f_{k-1,2} \right] K' + \left[f_{k1} f'_{k-1,2} + f_{k2} f_{k-1,2} \right] K,$$

и

$$(f_{k-1,1} D + f_{k-1,2})(f_{k,1} D + f_{k2}) K = f_{k1} f_{k-1,1} K''$$

$$+ \left[f_{k-1,1} f_{k,2} + f_{k-1,1} f'_{k,1} + f_{k1} f_{k-1,2} \right] K' + \left[f_{k-1,2} f_{k,2} + f_{k-1,1} f'_{k2} \right] K.$$

Упоредувајќи ги изразите пред K, K' и K'' добиваме*

$$f_{k1} = C f_{k-1,1}, \quad f_{k2} = C f_{k-1,2} + C_1.$$

10. Ако во диференцијалниот полином Ly разложлив на симболични фактори (1. 8), го земеме случајот

$$f_{i1} = 1, \quad f_{i2} = \omega(x), \quad i = 1, 2, \cdots n,$$

Соодветната диференцијална равенка ќе биде сводлива на системот линеарни равенки

$$(D + \omega) y_i = y_{i+1}, \quad y_0 = y, \quad y_{n+1} = 0.$$
$$(i = 1, 2, \cdots n).$$

Изврши ли се во овој систем смената

$$y_i = z_i \, exp\,(-\int \omega \, dx) \tag{1. 13}$$

го добиваме системот

$$D z_i = z_{i+1}, \quad z_0 = z, \quad z_{n+1} = 0,$$
$$(i = 1, 2, \cdots n),$$

што одговара на равенката

$$D^n z = 0.$$

Општиот интеграл на оваа равенка е

$$z = \sum_{i=1}^{n} C_i \, x^{n-i}, \quad C_i = const.,$$

или на дадената, зимајќи предвид (1. 13)

$$y = z \, exp\,(-\int \omega \, dx),$$

---

* C и C_1 се произволни константи.

Диференцијалната равенка (1. 7) може да се пише во обликот[11])

$$D^n exp\left(\int \omega\, dx\right) y = 0,$$

или

$$(D + \omega)^n y = 0. \tag{1. 14}$$

Системата решенија во овој случај, наречени од Brassine[12]) конјугирани решенија, аналогни се на многоструките корени на една алгебарска равенка. Тоа се заклучува направо ако се земе n-ти извод од левата страна на (1. 14), зимајќи изводите како степени. Добиваме

$$n!\,(D + \omega)\,y = 0,$$

од каде имаме заедничкиот интеграл, даден со

$$(D + \omega)\,y = 0.$$

Врските помеѓу коефициентите на равенката $L(x, D)\,y = 0$ и ω се следните

$$a_0 = \binom{n}{0}$$

$$a_1 = \binom{n}{1}\omega$$

$$a_2 = \binom{n}{2}(\omega^2 + \omega')$$

$$a_3 = \binom{n}{3}\ \omega^3 + 3\,\omega\,\omega' + \omega''$$

. . . .

II ДЕЛ

ФОРМИРАЊЕ КРИТЕРИУМИ ЗА РЕДУКТИБИЛНОСТ НА КЛАСАТА ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

$$y'' + (\alpha f(x) + \beta)\,y' + (A f^2(x) + B f(x) + C)\,y = 0.$$

1. Спомнатата во уводот метода дадена од Митриновиќ за формирање критериуми на редуктибилност за линеарните диференцијални равенки се состои во следното.

Напоредно со однапред дадената диференцијална равенка од n-ти ред

(2. 1) $$\sum_{i=0}^{n} \Phi_i(x) y^{(n-i)} = 0,$$

ја зимаме системата линеарни равенки од прв ред

(2. 2) $$\varphi_{k1} y_{k-1} + \varphi_{k2} y_{k-1} = y_k,$$
$$\varphi_{n1} y_{n-1} + \varphi_{n2} y_{n-1} = 0,$$
$$(y_0 = y;\ k = 1, 2, \cdots n-1),$$

каде што φ_{ik} се функции со исти особини како и Φ_i.

Еден случај на редуктибилност ќе имаме, ако на равенката (2. 1) може да се учини соодветен системот (2. 2), кој по елиминација на y_i $(i = 1, 2, \cdots n-1)$, се сведува на равенката (2. 1).

Така нпр. за диференцијалната равенка

(2. 3) $$y'' + (ax + b) y' + (Ax^2 + Bx + C) y = 0,$$

ако го учиниме соодветен системот

$$f(x) y' + g(x) y = y_1, \quad y_1' + h(x) y_1 = 0,$$

каде што се

$$f(x) \equiv \prod_{\nu=1}^{s} (x - k_\nu); \quad g(x) \equiv \sum_{\nu=1}^{s+2} \lambda_\nu y^{s+2-\nu}, \quad h(x) = \mu_1 x + \mu_2$$

и ги потчиниме параметрите s, k_ν, λ_ν, μ_ν на услови добиени од условот за делење на полиномите $f' + g + fh$, $g' + gh$ со f без остаток, добиваме општи критериуми за редуктибилност на (2. 3). Користејќи го овој метод, Митриновиќ ги наоѓа за равенката (2. 3) условите за интеграбилност за $s = 0$, 1.

2. Проширувајќи ги и комплетирајќи резултатите добиени од Митриновиќ за диференцијалната равенка (2. 3), во овој дел ќе разгледаме некој типови од класата линеарни диференцијални равенки

(2. 4) $$y'' + (\alpha f + \beta) y' + (A f^2 + B f + C) y = 0,$$

каде што $f = f(x)$ е произволна, непрекината функција што има изводи до n-ти ред заклучно и α, β, A, B и C се произволни константи.

Ние покажавме во т. 6 глава прва, дека потребен и доволен услов за да е равенката (2. 4) редуктибилна е, таа да може во обликот

$$\left(D+\frac{\varphi'}{\varphi}+\chi\right)\left(D+\frac{\psi}{\varphi}\right)y=0 \tag{2. 5}$$

$$\varphi=\varphi(f)\neq 0,\ \psi=\psi(f),\ \chi=\chi(f),\ D=\frac{d}{dx},$$

да се пише

За поголема удобност, во натамошните разгледувања равенката (2. 5) ја зимаме многу често и во обликот

$$(D+\chi)(\varphi D+\psi)y=z \tag{2. 6}$$

добиена од (2. 5) по множење со φ, односно како систем од равенки

$$(\varphi D+\psi)y=z,$$

$$(D+\chi)z=0.$$

Да предположиме дека равенката (2. 4) редуктибилна* т. е. дека таа може да се пише во обликот (2. 5).

Нашата задача е да побараме еден општ услов што треба да го задоволуваат коефициентите α, β, A, B, C на (2. 4) за да биде таа редуктибилна.

За таа цел постапуваме по следниот начин.

Функциите φ, ψ и χ ги зимаме респективно во обликот

$$\varphi(f)=f^n+a_1 f^{n-1}+a_2 f^{n-2}+\cdots+a_n=\prod_{i=1}^{n}(f-r_i)$$

$$\psi(f)=b_0 f^{n+1}+b_1 f^n+b_2 f^{n-1}+\cdots+b_{n+1}, \tag{2. 7}$$

$$\chi(f)=c_0 f+c_1,$$

a_i, b_j, c_k, r_i $(i=1, 2, \cdots n;\ j=1, 2, \cdots n+1;\ k=1, 2)$ се произволни параметри.

Полиномите $\varphi(f)$ и $\psi(f)$ немаат заеднички нули, т. е. резултантата R на равенките

$$\varphi(f)=0 \text{ и } \psi(f)=0,$$

е различна од нула. Во противен случај би могли системата равенки (2. 6) да ја разделиме со $(f-r_i)$ и воведувајќи нова непозната функција

---

* Очевидно е, дека оваа претпоставка е во согласие со познатата теорема дадена од Liouville: *Една линеарна диференцијална равенка од втори ред за да биде интеграбилна со квадратури, потребно и доволно е логаритамскиот и извод на еден од нејните интеграли да биде рационален.*

$$(f - r_i)\, z' = z,$$

да добиеме нова система равенки од облик (2. 6).

4. Од (2. 4) и (2. 5) добиваме по упоредување

$$\text{(2. 8)}\qquad \begin{aligned} &\varphi' + \psi + \chi\,\varphi - \varphi\,(\alpha f + \beta) \equiv 0,\\ &\psi' + \chi\psi - \varphi\,(A\, f^2 + Bf + C) \equiv 0, \end{aligned}$$

или зимајќи предвид (2. 7)

$$(b_0 + c_0)\, f^{n+1} + (b_1 + c_0\, a_1 + c_1)\, f^n + (b_2 + c_0\, a_2 + c_1\, a_1)\, f^{n-1} + \cdots$$

$$+ n f^{n-1}\, f' + (n-1)\, a_1\, f^{n-2}\, f' + \cdots + a_{n-1}\, f' - \alpha f^{n+1} - (\alpha\, a_1 + \beta)\, f^n \cdots a_n\, \beta \equiv 0$$

$$b_0\, c_0\, f^{n+2} + (b_1\, c_0 + b_0\, c_1)\, f^{n+1} + (b_2\, c_0 + b_1\, c_1)\, f^n + \cdots + (n+1)\, b_0\, f^n\, f'$$

$$+ n\, b_1\, f^{n-1}\, f' + \cdots + b_n\, f' - A\, f^{n+2} - (A a_1 + B)\, f^{n+1} \cdots a_n\, C \equiv 0.$$

Внесеме ли ги за f последователно вредностите $f = r_i$ $(i = 1, 2, \cdots n)$, од идентитетите (2. 8) добиваме

$$b_0\, r_1^{\,n+1} + b_1\, r_1^{\,n} + \cdots + b_{n+1} = -f'\,(r_1 - r_2)\,(r_1 - r_3) \cdots (r_1 - r_n)$$

$$b_0\, r_2^{\,n+1} + b_1\, r_2^{\,n} + \cdots + b_{n+1} = -f'\,(r_2 - r_1)\,(r_2 - r_3) \cdots (r_2 - r_n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b_0\, r_n^{\,n+1} + b_1\, r_n^{\,n} + \cdots + b_{n+1} = -f'\,(r_n - r_1)\,(r_n - r_2) \cdots (r_n - r_{n-1})$$

и

$$(n+1)\, b_0\, r_1^{\,n} + n\, b_1\, r_1^{\,n-1} + \cdots + b_n = -\frac{1}{f'}\,(c_0\, r_1 + c_1)\,(b_0\, r_1^{\,n+1} + b_1\, r_1^{\,n} + \cdots + b_{n+1})$$

$$(n+1)\, b_0\, r_2^{\,n} + n\, b_1\, r_2^{\,n-1} + \cdots + b_n = -\frac{1}{f'}\,(c_0\, r_2 + c_1)\,(b_0\, r_2^{\,n+1} + b_1\, r_2^{\,n} + \cdots + b_{n+1})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(n+1)\, b_0\, r_n^{\,n} + n\, b_1\, r_n^{\,n-1} + \cdots + b_n = -\frac{1}{f'}\,(c_0\, r_n + c_1)\,(b_0\, r_n^{\,n+1} + b_1\, r_n^{\,n} + \cdots + b_{n+1}).$$

5. Ќе разгледаме сега некоj релации меѓу параметрите a_i, b_j, c_k заеднички за сите равенки од обликот (2. 4), потребни во натамошните разгледувања.

Од (2. 8) имаме

$$\psi'(r_i) = \chi(r_i)\,\varphi'(r_i),$$

односно следните n релации

$$(n+1)\,b_0 r_1^n + n\,b_1 r_1^{n-1} + \cdots + b_n = (c_0 r_1 + c_1)(r_1 - r_2)\cdots(r_1 - r_n)$$

$$(n+1)\,b_0 r_2^n + n\,b_1 r_2^{n-1} + \cdots + b_n = (c_0 r_2 + c_1)(r_2 - r_1)\cdots(r_2 - r_n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(n+1)\,b_0 r_n^n + n\,b_1 r_n^{n-1} + \cdots + b_n = (c_0 r_n + c_1)(r_n - r_1)\cdots(r_n - r_{n-1}).$$

На овие релации може да се даде обликот

$$\text{(2. 9)} \qquad \sum_{i=0}^{n} (n+1-i)\,b_i\,S_{n-i}^{k} = (c_0 r_k + c_1)\prod (r_k - r_\alpha),$$

$$k = 1, 2, \cdots n;\ \alpha = 1, 2, \cdots n;\ \alpha \neq k$$

каде што е

$$\begin{aligned} S_{n-r}^{1,2,\ldots p,q} = {} & r_1^{n-r} + r_2^{n-r} + \cdots + r_p^{n-r} + r_q^{n-r} \\ & + r_1^{n-r-1} r_2 + r_1^{n-r-1} r_3 + \cdots + r_1^{n-r-1} r_p + r_1^{n-r-1} r_q \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + r_1 r_2^{n-r-1} + r_1 r_3^{n-r-1} + \cdots + r_1 r_p^{n-r-1} + r_1 r_q^{n-r-1} \\ & + r_2^{n-r-1} r_3 + r_2^{n-r-1} r_4 + \cdots + r_2^{n-r-1} r_p + r_2^{n-r-1} r_q + \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + r_p r_q^{n-r-1}. \end{aligned}$$

Вадејќи од првата релација (2. 9) останатите и делејќи при тоа секоа со $(r_1 - r_i)$, $i = 2, 3, \cdots n$, ги добиваме следните $n-1$ релации

$$\sum_{i=0}^{n-1} (n+1-i)\,b_i\,S_{n-i-1}^{1,k} = \sum_{s=1,k} (c_0 r_s + c_1) \prod (r_s - r_\alpha),$$

$$k = 2, 3, \cdots n;\ \alpha = 2, 3, \cdots n,\ \alpha \neq k$$

По истиот начин, ако од првата од овие равенки ги извадиме останатите, по разделување со $(r_2 - r_i)$, $i = 3, 4, \cdots n$, имаме

$$\sum_{i=0}^{n-2}(n+1-i)\,b_i\,S_{n-i-2}^{1,2,k}=\sum_{s=1}^{2,k}(c_0 r_s-c_1)\prod(r_s-r_\alpha),$$

$$k=3,4,\cdots n;\ \alpha=3,4,\cdots n;\ \alpha\neq k,$$

Во општ случај по p операции изведени по горниот начин добиваме

$$\sum_{i=0}^{n-p}(n+1-i)\,b_i\,S_{n-i-p}^{1,2,\cdots p,k}=\sum_{s=1}^{2,\cdots p,k}(c_0 r_s+c_1)\prod(r_s-r_\alpha),$$

$$k=p+1,\ p+2,\cdots n;\ \alpha=p+1,\cdots n;\ \alpha\neq k,$$

Постапиме ли со овие $n-p$ релации по истиот начин, добиваме по разделување со (r_p-r_i), $i=p+2,\cdots n$,

$$\sum_{i=0}^{n-p-1}(n+1-i)\,b_i\,S_{n-i-p-1}^{1,2,\cdots p+1,k}=\sum_{s=1}^{p+1,k}(c_0 r_s+c_1)\prod(r_s-r_\alpha),$$

$$(k=p+2,\ p+3,\cdots n\ \ \alpha=p+2,\ p+3,\cdots n),\ k\neq\alpha,$$

Продолжавајќи така, добиваме

$$\sum_{i=0}^{1}(n+1-i)\,S_{1-i}^{1,2,\cdots n-1,k}=\sum_{s=1}^{n-1,k}(c_0 r_s+c_1),$$

$$k=n;\ \alpha=n;\ \alpha\neq k,$$

или зимајќи во предвид (2. 9) имаме

$$b_1-c_1=\frac{a_1}{n}\left[(n+1)\,b_0-c_0\right]. \tag{2. 10}$$

6. Да го земеме случајот $f'=1$ т. е. $f=x$ (*). Диференцијалната равенка (2. 4) го има обликот

$$y''+(\alpha x+\beta)\,y'+(Ax^2+Bx+C)\,y=0. \tag{2. 11}$$

* Интеграционата константа ја зимаме за нула.

Од (2. 8) ја имаме системата равенки

$$-\alpha+b_0+c_0=0,$$

$$c_1-\beta-\alpha a_1+b_1+c_0 a_1=0,$$

. . . .

(2. 12) $$(n-k+2)\,a_{k-2}+a_{k-1}c_1-\beta a_{k-1}-\alpha a_k+b_k+c_0 a_k=0,$$

. . . .

$$a_{n-1}+a_n c_1-\beta a_n+b_{n+1}=0,$$

$$-A+c_0 b_0=0,$$

. . . .

(2. 12′) $$(n-k+2)\,b_{k-1}+c_1 b_k+c_0 b_{k+1}-Aa_{k+1}-Ba_k-Ca_{k-1}=0,$$

. . . .

$$b_n+c_0 b_{n+1}-Ca_n=0,$$

за определување на $2n+5$ непознати параметри a_i, b_j, c_k и n, во зависност од константите α, β, A, B, C. Како пак n претставува природен број, релацијата што го определува, претставува бараниот критериум за редуктибилност на равенката (2. 11).

Од равенките (2. 12) и (2. 12′) добиваме

$$2\,b_0=\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4\,A},$$

$$c_0=\alpha-b_0,\quad c_1=\frac{1}{2n}\Big[n\beta+a_1(\alpha-2\,b_0)\Big],$$

$$(k+1)\,a_{k+1}=\frac{n-k}{n}\,a_1 a_k+\frac{(n-k)(n-k+1)}{\alpha-2\,b_0}\,a_{k-1},$$

$$a_{-1}=0,\quad a_0=1,\quad a_1=n\,\frac{\alpha\beta-2\,B}{\beta^2-4\,A},$$

$$b_k=b_0 a_k+\frac{a_{k-1}}{2\,n}\Big[n\beta-a_1(\alpha-2\,b_0)\Big]-(n-k+2)\,a_{k-2},$$

$$(k=1,2,\cdots n+1).$$

Природниот број n, определен е од релацијата

(2. 14) $$(\alpha\beta-2B)^2+(\alpha^2-4A)(4C-2\alpha-\beta^2)=\pm 2(2n+1)(\alpha^2-4A)^{3/2}.$$

Тоа е пак како што рековме, бараниот критериум за редуктибилност на диференцијалната равенка (2. 11), што во овој случај може да се пише како

$$\left[D+(c_0x+c_1)\right]\left[\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} D+\sum_{i=0}^{n+1} b_i x^{n+1-i}\right]y=0.$$

По таков начин го имаме следниот резултат:

Потребен и доволен услов за да биде диференцијалната равенка (2. 11) *редуктибилна е релацијата* (2. 14) *меѓу константите* α, β, A, B и C *и природниот број* n *да е задоволена.*

7. *Пример.*— За диференцијалната равенката

(2. 15) $$y''+(3x+2)y'+(2x^2+3x+c)y=0,$$

имаме спрема (2. 14)

$$c=3+n \text{ или } c=2-n.$$

Во првиот случај $c=3+n$, имаме

$$ka_k=-(n-k+1)(n-k+2)a_{k-2},$$

$$b_k=2a_k+a_{k-1}-(n-k+2)a_{k-2},$$

од каде е*

$$b_0=2,\ c_0=1,\ c_1=1,$$

$$a_{2k}=(-1)^k(2k-2)!!\binom{n}{2k};\ a_{2k+1}=0,$$

$$b_{2k}=(-1)^k(2k-3)!!\binom{n}{2k-2}\frac{(n-2k+2)(n-k+1)}{k};\ b_{2k+1}=a_{2k}.$$

Во вториот случај $c=2-n$,

* Симболот !! означува производ од парни респективно непарни природни броеви. нпр, $2n!!=2n\,(2n-2)\,(2n-4)\ldots 4.\ 2.$

од каде е*

$$k a_k = (n-k+1)(n-k+2)\, a_{k-2},$$

$$b_k = a_k + a_{k-1} - (n-k+2)\, a_{k-2},$$

$$b_0 = 1,\ c_0 = 2,\ c_1 = 1,$$

$$a_{2k} = (2k-1)!! \binom{n}{2k},\quad a_{2k+1} = 0,$$

$$b_{2k} = (2k-3)!! \binom{2k-2}{n} \frac{(n-2k+2)(n-4k+1)}{2k},\quad b_{2k+1} = a_{2k},$$

За $n=3$ ги имаме респективно системите

$$(2.\ 16)\qquad (x^3+3x)\,y' + (x^4+x^3+3x-3)\,y = z,$$

$$z' + (2x+1)\,z = 0,$$

и

$$(2.\ 17)\qquad (x^3-3x)\,y' + (2x^4+x^3-9x^2-3x+3)\,y = z,$$

$$z' + (x+1)\,z = 0,$$

добиени од (2. 13), чии што општи интеграли се дадени со

$$y\, exp\left(\frac{x^2}{2}+x\right) = C_1(x^3+3x) + C_2(x^3+3x)\int (x^3+3x)^{-2} exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

и

$$y\, exp(x^2+x) = C_1(x^3\quad 3x) + C_2(x^3-3x)\int (x^3-3x)^{-2} exp\left(\frac{x^2}{2}\right) dx$$

Елиминацијата на константите C_1 и C_2 од овие интеграли односно на помошната функција z од системите (2. 16) и (2. 17) нè води до диференцијалните равенки

$$y'' + (3x+2)\,y' + (2x^2+3x-1)\,y = 0$$

и

$$y'' + (3x+2)\,y' + (2x^2+3x+6)\,y = 0$$

што можат да се добијат и направо од (2. 15) за $n=3$.

---

* Лесно се установува дека полиномот со коефициенти a_i претставува Hermite-ов полином.

8. Да посматраме некој специјални случаеви.

1°. Ако е

$$2B = \alpha\beta,$$

ќе имаме од (2. 14), за критериумот на редуктибилност

$$4c - 2\alpha - \beta^2 = \pm 2(2n+1)(\alpha^2 - 4A)^{1/2}.$$

Од (2. 13) заклучуваме дека е

$$a_1 = 0 \text{ или } \alpha - 2b_0 = 0.$$

a) $a_1 = 0$. Во тој случај параметрите a_k, b_k, c_k се дадени респективно со

$$2b_0 = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4A}, \quad c_0 = \alpha - b_0, \quad c_1 = \frac{\beta}{2},$$

$$a_k = \frac{(n-k+1)(n-k+2)}{k(\alpha - 2b_0)} a_{k-2}, \quad a_1 = 0, \quad a_0 = 1,$$

$$b_k = \frac{n-k+2}{k(\alpha - 2b_0} \Big[(n+k+1)b_0 - k\alpha\Big] a_{k-2} + \frac{\beta}{2} a_{k-1},$$

Диференцијалната равенка е од облик

$$y'' + (\alpha x + \beta)y' + \left[Ax^2 + \frac{\alpha\beta}{2}x + c\right]y = 0.$$

b) $\alpha - 2b_0 = 0$. Параметрите a_i, b_j, c_k се дадени со

$$2c_0 = \alpha, \; 2c_1 + \beta, \; b_j = 0, \; j = 1, 2, \cdots n-1, \; b_n = \frac{\alpha}{2}, \; b_{n+1} = \frac{\beta}{2}.$$

Диференцијалната равенка

$$y'' + (\alpha x + \beta)y' + \frac{1}{4}\Big[(\alpha x + \beta)^2 + 2\alpha\Big] y = 0.$$

има конјугирани решенија

$$y_1 = exp\left(-\frac{\alpha x^2}{4} - \frac{\beta x}{2}\right), \quad y_2 = xy_1.$$

2°. Ако е $\alpha^2 - 4A = 0$, како гледаме од (2. 14) секога е и $\alpha\beta - 2B = 0$. Случајот е очевидно сводлив на претходниот под b).

9. Ако во (2. 4) земеме $f' = f^2$, ја добиваме равенката*

$$x^2 y'' + (\beta x - \alpha) xy' + (A - Bx + Cx^2) y = 0. \tag{2. 18}$$

Идентитетите (2. 8), што во овој случај се

$$(b_0 + c_0 + n - \alpha) f^{n+2} + (b_1 + a_1 c_0 + c_1 + (n-1-\alpha) a_1 - \beta) f^{n+1} + \cdots$$
$$+ \cdots + (b_{n+1} + a_n c_1 - a_n \beta) \equiv 0$$

$$(b_0 c_0 + (n-1) b_0 - A) f^{n+2} + (b_1 c_0 + b_0 c_1 + n b_1 - A a_1 - B) f^{n+1} + \cdots$$
$$+ \cdots + (b_{n+1} c_1 - C a_n) \equiv 0$$

ни го даваат следниот систем равенки

$$\begin{aligned} &(c_1 - \beta) a_{k-1} + (n - k + c_0 - \alpha) a_k + b_k = 0, \\ &c_1 b_{k-1} + (n - k + 1 + c_0) b_k - A a_k - B a_{k-1} - C a_{k-2} = 0, \end{aligned} \tag{2. 19}$$
$$(k = 0, 1, 2, \cdots n+1),$$

кои заедно со (2. 10) ни служат за определување произволните параметри a_k, b_k, c_k и природниот број n во зависност од A, B, C, α и β.

Ќе имаме

$$2 b_0 = (\alpha + 1) \pm \sqrt{(\alpha+1)^2 - 4A},$$

$$c_0 = \alpha - b_0 - n, \; c_1 = \frac{1}{2n}\Big[n\beta + a_1(\alpha - 2b_0)\Big],$$

(2. 20)

$$a_{k+1} = \frac{(\alpha - 2b_0)(k-n)}{n(k+1)(2b_0 - \alpha + k)} a_1 a_k, \; a_0 = 1, \; a_1 = \pm n \frac{\sqrt{\beta^2 - 4c}}{\alpha - 2b_0}$$

$$b_{k+1} = \frac{a_k}{2n}\Big[n\beta - a_1(\alpha - 2b_0)\Big] + (b_0 + k + 1) a_{k+1},$$
$$(k = 0, 1, \cdots n).$$

Природниот број n, определен е со релацијата

---

* Интеграционата константа ја зимаме да е нула.

$$(2.\ 21)\qquad 2B-\alpha\beta=\mp\sqrt{\beta^2-4C}\left[2n+1\pm\sqrt{(\alpha+1)^2-4A}\right],$$

што претставува и бараниот критериум за интеграбилност односно редуктибилност на диференцијалната равенка (2. 18).

Диференцијалната равенка (2. 18) сводлива е во тој случај на системот линеарни равенки

$$(2.\ 22)\qquad \begin{aligned} &\left(a_n-\frac{a_{n-1}}{x}+\frac{a_{n-2}}{x^2}\cdots\right)y'+\left(b_{n+1}-\frac{b_n}{x}+\frac{b_{n-1}}{x^2}\cdots\right)y=z,\\ &z'+\left(c_1-\frac{c_0}{x}\right)z=0. \end{aligned}$$

По таков начин го имаме следниот резултат:

Потребен и доволен услов диференцијалната равенка (2. 18) за да биде редуктибилна е, условот (2. 21) да биде задоволен. n претставува природен број.

10. До истиот резултат се доаѓа, ако напоредно со диференцијалната равенка

$$(2.\ 23)\qquad x^2y''+(\alpha x+\beta)xy'+(Ax^2+Bx+C)y=0,$$

се посматра системот

$$x\Phi_1 y'+\Phi_2 y=xu,\quad xu'+\Phi_3 u=0,$$

добиен од (2. 22) со смената $xz=u$, каде што се Φ_i респективно полиномите

$$\Phi_i(x)=\sum_{k=0}^{n+1}\omega_{ik}x^{n-k+1},\quad \omega_{2,1}=1,\quad \omega_{2,0}=\omega_{3,k}=0,\quad k=1,2,\cdots n-1.$$

За определување параметрите ω_{ik} ја имаме системата

$$(n-k+2)\,\omega_{2,k-2}+\omega_{3,n+1}\,\omega_{2,k-2}+\omega_{1,k-1}\,\omega_{3,n}+\omega_{1,k-1}-\alpha\omega_{2,k-1}-\beta\omega_{2,k-2}=0$$

$$(n-k+2)\,\omega_{1,k-2}+\omega_{3,n+1}\,\omega_{1,k-2}+\omega_{2,k-1}\,\omega_{3,n}-A\omega_{2,k-1}-B\omega_{2,k-2}-C\omega_{2,k-3}=0$$

$$(k=1,2,\cdots n+2).$$

Условот за редуктибилност на равенката (2. 23) ќе биде спрема (2. 21)

$$(2.\ 24)\qquad 2B-\alpha\beta=\pm\sqrt{\alpha^2-4A}\left(2n+1-\sqrt{(\beta-1)^2-4C}\right).$$

11. За диференцијалната равенка

$$(2.\ 25)\qquad x^2y''+(3x+2)xy'+(2x^2+3x+\nu)y=0,$$

го имаме следниот услов за редуктибилност

$$\nu=-n(n+1).$$

Параметрите a_k, b_k, c_k се

$$b_0=-(n+1),\ c_0=-1,\ c_1=2,$$

$$a_{k+1}=\frac{k-n}{(k-2n)(k+1)}a_k,\ a_0=1,$$

$$b_k=a_{k-1}-\frac{(n-k+1)^2}{k(2n-k+1)}a_{k-1},$$

$$(k=0,1,2,\cdots n+1).$$

Нпр. за $n=2$, имаме спрема (2. 21), зимајќи предвид претходните формули

$$\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x}+\frac{1}{12}\right)y'+\left(\frac{3}{x^3}-\frac{5}{x}+\frac{1}{12}\right)y=z,$$

$$z'+\left(\frac{1}{x}+2\right)z=0,$$

од која система по елиминација на помошната функција z, лесно се уверуваме дека ја добиваме диференцијалната равенка (2. 25) за $\nu=-6$.

12. Специјални случаи.

a) $2B=\alpha\beta$. Ќе имаме

$$\beta^2-4C=0\ \text{или}\ 2n+1+\sqrt{(\alpha+1)^2-4A}=0,$$

b) $\beta^2 - 4C = 0$. Диференцијалната равенка (2. 18), сводлива е на системот равенки

$$y' + \left(\frac{b_0}{x} + \frac{\beta}{2}\right) y = z,$$

$$z' + \left(\frac{\alpha - b_0}{x} + \frac{\beta}{2}\right) z = 0,$$

c) $4A = (\alpha + 1)^2 - (2n + 1)^2$. Диференцијалната равенка

$$x^2 y'' + (\beta x - \alpha)\, xy' + \left[\left(\frac{\alpha + 1}{2}\right)^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\alpha\beta}{2}\, x + C x^2\right] y = 0,$$

секога е редуктибилна на систем (2. 22) каде што коефициентите се дадени со

1°.

$$a_{k+1} = \pm \frac{(k-n)\sqrt{\beta^2 - 4C}}{(k+1)(2n+k)}\, a_k, \quad a_0 = 1,$$

$$b_{k+1} = \frac{\beta \mp \sqrt{\beta^2 - 4C}}{2}\, a_k + \left(\frac{\alpha}{2} - n + k + 1\right) a_{k+1}, \quad b_0 = \frac{\alpha - 2n}{2},$$

$$c_0 = \frac{\alpha}{2}, \quad c_1 = \frac{1}{2}\left(\beta \mp \sqrt{\beta^2 - 4C}\right),$$

$$(k = 0, 1, 2, \cdots n).$$

2°.

$$a_{k+1} = \pm \frac{(k-n)\sqrt{\beta^2 - 4C}}{(k+1)(2n+2-k)}\, a_k, \quad a_0 = 1,$$

$$b_{k+1} = \left[\beta \mp \sqrt{\beta^2 - 4C}\right] \frac{a_k}{2} + \left[\frac{\alpha}{2} + n + k + 2\right] a_{k+1}, \quad b_0 = \frac{\alpha}{2} + n + 1,$$

$$c_0 = \frac{\alpha}{2} - 2(n+1), \quad c_1 = \frac{1}{2}\left[\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4C}\right],$$

$$(k = 0, 1, 2, \cdots n).$$

13. За $f' = f$, равенката (2. 4) е од облик*,

$$y'' + (\alpha e^x + \beta)\, y' + (Ae^{2x} + Be^x + C)\, y = 0 \tag{2. 26}$$

и соодветната система за определување параметрите a_i, b_j и c_k добиена од (2. 8) е

$$(n - k + 1 + c_1 - \beta)\, a_{k-1} + (c_0 - \alpha)\, a_k + b_k = 0,$$

$$Aa_k + Ba_{k-1} + Ca_{k-2} + c_0 b_k + (c_1 - n + k - 2)\, b_{k-1} = 0,$$

$$(k = 0, 1, 2, \cdots n+1).$$

Од тука добиваме, зимајќи ја предвид релацијата (2. 10)

$$2\, b_0 = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4A},$$

$$c_0 = \alpha - b_0, \quad c_1 = \frac{1}{2n}\left[n\beta + a_1(\alpha - 2\, b_0)\right] - \frac{n}{2},$$

$$(k+1)\, a_{k+1} = \left[\frac{2n-k}{2n}\, a_1 + \frac{k(k-n)}{\alpha - 2\, b_0}\right] a_k, \tag{2. 27}$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{n \pm \sqrt{\beta^2 - 4C}}{\alpha - 2\, b_0}\, n,$$

$$b_k = b_0\, a_k + \left[n\beta - a_1(\alpha - 2\, b_0) - n^2 + 2n(k-1)\right] \frac{a_{k-1}}{2n},$$

$$(k = 0, 1, \cdots n+1).$$

За определување на природниот број n ја имаме релацијата

$$\alpha\beta - 2B + \alpha = \mp \sqrt{\alpha^2 - 4A}\left[2n + 1 - \sqrt{\beta^2 - 4C}\right], \tag{2. 28}$$

од каде го заклучуваме следниот резултат:

Потребен и доволен услов равенката (2. 26) за да биде редуктибилна е коефициентите A, B, C, α, β *да ја задоволуваат релацијата (2. 28).* n *претставува природен број.*

---

* Произволната интеграциона константа ја зимаме нула, што не ја намалува општноста на разгледаниот вопрос.

Диференцијалната равенка (2. 26) во тој случај може да се пише во обликот

$$\left[D+\sum_{k=0}^{1} c_k \, exp(1-k)x\right]\left[\sum_{i=0}^{n} a_i \, exp(n-i)\,x\,D \right.$$

$$\left. +\sum_{j=0}^{n+1} b_j \, exp(n+1-j)x\right] y=0,$$

каде што a_i, b_j и c_k се параметри по горе определени.

14. Ако ја посматраме равенката

$$y''+(\alpha e^{kx}+\beta)\,y'+(Ae^{2kx}+Be^{kx}+C)\,y=0, \tag{2. 29}$$

каде што k е произволна константа, лесно се установува дека со смената $kx=z$, таа го добива обликот (2. 26).

Општиот услов на редуктибилност на оваа равенка (2. 29) ќе биде

$$\alpha\beta-2B+k\alpha=\mp\sqrt{\alpha^2-4A}\left[k(2n+1)-\sqrt{\beta^2-4C}\right]. \tag{2. 30}$$

Нпр. за равенката

$$e^{2x}y''+(\alpha e^x+\beta)\,e^x y'+(Ae^{2x}+Be^x+C)\,y=0,$$

го имаме условот за редуктибилност

$$2B-\alpha\beta+\beta=\mp\sqrt{\beta^2-4C}\left[2n+1-\sqrt{\alpha^2-4A}\right],$$

што претставува според напред реченото и услов за интеграбилност.

15. Лесно се установува дека некои познати услови за интеграбилност на диференцијалната равенка (2. 26) односно (2. 29) или на специјални случаи од нив, произлегуваат од условот (2. 30) даден од нас.

Така нпр. условите

$$A=-p(\alpha+p),\ B=-(\alpha q+\beta p+2pq+p),\ C=-q(\beta+q),$$

каде што се p и q произволни константи, дадени од Görtler[13]) за диференцијалната равенка (2. 26) се специјален случај од (2. 28) за $n=0$, во кое се уверуваме по елиминација на p и q.

16. Да ја земеме функцијата f така да е

$$f' = f^2 + 1.$$

Диференцијалната равенка* (2. 4) е

$$y'' + (\alpha\, tg\, x + \beta)\, y' + (A\, tg^2 x + B\, tg\, x + C)\, y = 0 \tag{2. 31}$$

и ги имаме следните равенки за определување параметрите a_i, b_j и c_k во функции од A, B, C, α, β

$$(n - k + 2)\, a_{k-2} + (c_1 - \beta)\, a_{k-1} + (n - k + c_0 - \alpha)\, a_k + b_k = 0,$$

$$C a_{k-2} + B a_{k-1} + A a_k + (k - n - 3)\, b_{k-2} - c_1 b_{k-1} + (k - n - 1 - c_0)\, b_k = 0,$$

$$(k = 0, 1, 2, \cdots n+1, n+2).$$

Тоа определување станува по аналоген пат како во претходните примери, зимајќи ја во предвид релацијата (2. 10). Така имаме

$$2 b_0 = \alpha + 1 \pm \sqrt{(\alpha + 1)^2 - 4A},$$

$$c_0 = \alpha - n - b_0, \quad c_1 = \frac{1}{2n}\Big[n\beta + a_1(\alpha - 2 b_0)\Big],$$

$$\Big[(n - k)\, a_k + (n - k + 2)\, a_{k-2}\Big] \frac{\alpha - 2 b_0}{n}\, a_1 = (k + 1)(\alpha - 2 b_0 - k)\, a_{k+1}$$

$$\begin{aligned} - \Big[&(n - k + 2)(2 b_0 - \alpha + 2k - 1) + (\alpha - 2 b_0 + k) \\ &+ \frac{n-1}{n}(\alpha - 2 b_0)\, a_1^2 - (\alpha - 2 b_0 - 1)(2 a_2 - n)\Big]\, a_{k-1} \\ &- (n - k + 3)(n - k + 2)\, a_{k-3}, \end{aligned} \tag{2. 32}$$

$$a_1 = \frac{(\alpha\beta - 2B)\, n}{(\alpha - 2 b_0)(\alpha - 2 b_0 - 2n)},$$

$$b_k = \Big[n\beta - a_1(\alpha - 2 b_0)\Big] \frac{a_{k-1}}{2n} - (n - k + 2) + (b_0 + k)\, a_k,$$

---

* Интеграционата константа ја зимаме нула.

Релацијата за определување на природниот број n што го претставува во саштност критериумот за редуктибилност е

$$(2.\ 33)\quad 4C-\beta^2+\frac{(\alpha\beta-2B)^2}{\left(2n+1\pm\sqrt{(\alpha+1)^2-4A}\right)^2}\left[1+\frac{4n(n-1}{1\pm\sqrt{(\alpha+1)^2-4A}}\right]$$

$$=2\left[(\alpha+1)\pm\sqrt{(\alpha+1)^2-4A}\right]-4\left[2\pm\sqrt{(\alpha+1)^2-4A}\right](2a_2-n).$$

каде што a_2 е определено од (2. 32).

По таков начин заклучуваме:

Потребен и доволен услов за да биде диференцијалната равенка (2. 31) редуктибилна е константите A, B, C α, β да ја зедоволуваат релацијата (2. 33).

17. Со усложнувањето на изразот за f, експлицитното определување на параметрите a_i, b_j и c_k се усложнува, но се изведува по истиот начин и не претставува тешкотија.

Да го земеме случајот $n=3$.

Условот за редуктибилност тогаш е

$$4C-\beta^2+\frac{(\alpha\beta-2B)^2}{\left(7\pm\sqrt{(\alpha+1)^2-4A}\right)^2}-2\left[(\alpha+1)\pm\sqrt{(\alpha+1)^2-4A}\right]$$

$$=24+12\left(1\pm\sqrt{(\alpha+1)^2-4A}\right).$$

Диференцијалната равенка (2. 31) ќе биде сводлива на системот равенки

$$a_0\,tg^3x+a_1\,tg^2x+a_2\,tg\,x+a_3)\,y'$$

$$+(b_0\,tg^4x+b_1\,tg^3x+b_2\,tg^2x+b_3\,tgx+b_4)\,y=z,\ z'+(c_0\,tg\,x+c_1)\,z=0$$

каде што параметрите a_i, b_j, c_k $(i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ j=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ k=0,\ 1)$ се дадени со

$$2b_0=(\alpha+1)\pm\sqrt{(\alpha+1)^2-4A},$$

$$c_0=\alpha-b_0-3,\quad c_1=\frac{1}{6}\left[3\beta+a_1(\alpha-2b_0)\right],$$

$$a_0=1,\quad a_1=\frac{3(\alpha\beta-2B,}{(\alpha-2b_0)(\alpha-2b_0-6)},$$

$$a_2 = \frac{a_1^2(\alpha - 2b_0) + 9}{3(\alpha - 2b_0 - 1)},$$

$$a_3 = \frac{a_1 a_2 (7\alpha - 14 b_0 - 6) - 2 a_1^3 (\alpha - 2 b_0) - 12 a_1}{9(\alpha - 2 b_0 - 2)},$$

$$b_1 = \frac{1}{6}\Big[3\beta - a_1(\alpha - 2b_0)\Big] + a_1(b_0 + 1),$$

$$b_2 = \frac{a_1}{6}\Big[3\beta - a_1(\alpha - 2b_0)\Big] + a_2(b_0 + 2) - 3,$$

$$b_3 = \frac{a_2}{6}\Big[3\beta - a_1(\alpha - 2b_0)\Big] + a_3(b_0 + 3) - 2a_1,$$

$$b_4 = \frac{a_4}{6}\Big[3\beta - a_1(\alpha - 2b_0)\Big] - a_2.$$

18. За диференцијалната равенка[14])

$$4y'' + 4\,tg\,x\; y' - (5\,tg^2 x + 2)\,y = 0,$$

наоѓаме од (2. 33)

$$a_1'(1 - n) = 0.$$

Равенката ќе биде сводлива на системите

a) $a_1 = 0$,

$$y' - \frac{1}{2}\,tg\,x\,y = z,$$

$$z' + \frac{3}{2}\,tg\,x\,z = 0.$$

b) $n = 1$,

$$(tg\,x \pm i)\,y' - \frac{1}{2}\left(tg^2 x \pm i\,tg\,x\right) y = z,$$

$$z' + \left(\frac{1}{2}\,tg\,x \pm i\right) z = 0.$$

19. Во оваа точка ќе дадеме врз основа на изведеното погоре за равенката (2. 31) едно по општо решение за диференцијалната равенка

$$y'' + a \operatorname{tg} x \, y' + b\, y = 0, \tag{2. 34}$$

од тоа дадено од Halm[14]),

Од (2. 32) имаме

$$b_0 = 0 \text{ или } b_0 = a + 1,$$

I. $b_0 = 0$,

Во тој случај е

$$a_1 a (a - 2n) = 0,$$

и имаме

$$c_0 = a - n, \; c_1 = \frac{a a_1}{2n},$$

$$b = (a-1)(2a_2 - n) - \frac{a^2 a_1^2}{4n^2} - \frac{n-1}{n} a_1^2 a.$$

I_1. $a_1 = 0$,

Критериумот за редуктибилност е

$$b = (a-1)(2a_2 - n),$$

а параметрите a_i, b_j и c_k се респективно определени со

$$(k+1)(a-k)a_{k+1} + \Big[(n-k+2)(2k-1-a) + (a-b-k)\Big] a_{k-1}$$
$$= (n-k+3)(n-k+2)\, a_{k-3},$$

$$b_k = k a_k - (n-k+2)\, a_{k-2}, \; c_0 = a - n, \; c_1 = 0,$$
$$(k = 0, 1, 2, \cdots n+1).$$

I_{11}. $n = 1$.

Системата равенки на кои е сводлива, диференцијалната равенка (2. 34) е

$$\operatorname{tg} x \; y' + \frac{b}{a-1} y = z,$$

$$z' + (a-1)\, z = 0, \qquad b = 1 - a.$$

I_{12}. $n=2$.

Системата равенки е

$$\left[tg^2 x+\frac{b+2(a-1)}{2(a-1)}\right]y'+\frac{b}{a-1}\,tg x\, y=z,$$

$$z'+(a-2)\,tg x\; z=0,$$

$$[b=2(2-a)].$$

I_{13}. $n=3$.

Диференцијалната равенка (2. 34) е сводлива на системот

$$\left[tg^3 x+\frac{b+3(a-1)}{2(a-1)}\,tg x\right]y'+\left[\frac{b}{a-1}\,tg^2 x-\frac{b+3(a+1)}{2(a-1)}\right]y=z,$$

$$z'+(a-3)\,tg x\; z=0,$$

$$[b=3(a-3)].$$

I_2. $a=2n$.

Критериумот за редуктибилност е од облик

$$b=(2n-1)(2a_2-n-a_1^2),$$

а параметрите a_k, b_k, c_k ги определуваме од

$$c_0=n,\; c_1=a_1,$$

$$2a_1\left[(n-k)a_k+(n-k+2)a_{k-2}\right]=(2n-k)(k+1)a_{k+1}$$
$$-(n-k+2)(n-k+3)a_{k-3}$$
$$+\left[(2k-1)(2n-k+2)-a_1^2-2n-k-n(2n-1)-b\right]a_{k-1},$$

$$b_k=-a_1a_{k-1}+ka_k-(n-k+2)a_{k-2},$$
$$(k=0,2,\cdots n+1).$$

I_{21}. $n=1$.

Диференцијалната равенка (2. 34) сводлива е на системот

$$(tg\,x \pm i\,\omega)\,y' + (\omega^2 - 1)\,y = z,$$

$$z' + (tg\,x \pm i\,\omega)\,z = 0,$$

$$(\omega^2 = b + 1).$$

I_{22}. $n = 2$.

За равенката (2. 34), ја имаме системата равенки

$$\left[tg^2 x \pm v\,i\,tg\,x - \frac{v^2-1}{3}\right] y' + \left[\frac{v^2-4}{3}\,tg\,x \pm \frac{(v^2-4)\,v}{3}\right] y = z,$$

$$z' + (2\,tg\,x \pm v\,i)\,z = 0,$$

$$[b + 4 = v^2].$$

II. $b_0 = a + 1,\ a_1(a+2)(a+2+2n) = 0.$

Во овој случај го имаме критериумот за редуктибилност

$$b + \frac{(a+2)^2}{4n^2}\,a_1{}^2 + (a+3)(2\,a_2 + n) = \frac{n-1}{n}\,(a+4)\,a_1{}^2 + a + 1.$$

Параметрите a_i, b_j и c_k ги определуваме респективно со

$$c_0 = -(n+1),\ c_1 = -\frac{a+2}{2n}\,a_1,$$

$$\left[(n-k)\,a_k + (n-k+2)\,a_{k-2}\right]\frac{a+2}{n}\,a_1 = (k+1)(a+2-k)\,a_{k+1}$$

$$-\left[(n-k+2)(a+1+2k) - (a+k+2) - \frac{(a+2)^2}{4n^2}\,a_1{}^2 + (a+1)\right] a_{k-1}$$

$$+ (n-k+2)(n-k+3)\,a_{k-3},$$

$$b_k = \frac{a \times 2}{2n}\,a_1\,a_{k-1} + (a+1+k)\,a_k - (n-k+2)\,a_{k-2},$$
$$(k = 0, 1, 2, \cdots n+1).$$

II_1. $a_1 = 0$.

Критериумот за редуктибилност е

$$b = (a+1) - (a+3)(2\,a_2 - n).$$

Параметрите a_i, b_j, c_k се определени со

$$c_0 = -(n+1),\ c_1 = 0,$$

$$(a+2+k)(k+1)\,a_{k+1} + (n-k+2)(n-k+3)\,a_{k-3}$$
$$= \Big[(n-k+2)(a+1+2k) - (b+1+k)\Big]\,a_{k-1},$$

$$b_k = (a+k+1)\,a_k - (n-k+2)\,a_{k-2},$$
$$(k = 0, 1, 2, \cdots n+1).$$

II_{11}. $n = 1$.

Диференцијалната равенка (2. 34) може да се пише како

$$\Big[D - 2\,tg\,x\Big]\Big[tg\,x\,D + (a+1)\,tg^2 x - \frac{2(a+2)}{2(a+2)}\Big]\,y = 0,$$

$$[b = 2(a+2)].$$

II_{12}. $n = 2$.

Во овој случај равенката (2. 34) е

$$\Big[D - 3\,tg\,x\Big]\Big[\Big(tg^2 x + \frac{3a+7-b}{2(a+3)}\Big)\,D + (a+1)\,tg^3 x$$
$$+ \frac{3(a+1)-b}{2}\,tg\,x\Big]\,y = 0,$$

$$[b = 3(a+3)].$$

II_{13}. $n = 3$.

Равенката (2. 34) е сводлива на систем равенки и може да се пише како

$$\Big(D - 4\,tg\,x\Big)\Big[\Big(tg^3 x + \frac{4a+10-b}{2(a+3)}\,tg\,x\Big)\,D + (a+1)\,tg^4 x$$
$$+ \frac{4(a+1)-b}{2}\,tg^2 x - \frac{4a+10-b}{2(a+3)}\Big]\,y = 0,$$

$$[b = 4(a+4)].$$

II_2. $a = -2(n+1)$.

Критериумот за редуктибилност е

$$b+(2n-1)a_1^2+(2n+1)+(2n-1)(2a_2-n)=0.$$

Параметрите a_i, b_j и c_k ги определуваме од

$$2a_1\Big[(n-k)a_k+(n-k+2)a_{k-2}\Big]=(k+1)(2n-k)a_{k+1}$$

$$-(n-k+3)(n-k+2)a_{k-3}+\Big[2(n-1)a_1^2+(n-k+2)(2k-2n-1)$$

$$+(2n-k)-(2n-1)(2a_2-n)\Big]a_{k-1},$$

$$b_k=-a_1a_{k-1}+(k-2n-1)a_k-(n-k+2)a_{k-2},$$

$$c_0=-(n+1),\quad c_1=a_1.$$

$$(k=0,1,2,\cdots n+1).$$

II_{21}. $n=0$.

Равенката (2. 34) се пишува во обликот

$$(D-tgx)(D-tgx)y=0.$$

II_{22}. $n=1$.

Равенката во овој случај е

$$\Big[D-(tgx\mp\omega i)\Big]\Big[(tgx\pm\omega i)D-(3tg^2x\pm3\omega i\,tgx+1-\omega^2)\Big]y=0,$$

$$(\omega^2=b+4).$$

III ДЕЛ

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ЧИИ РЕШЕНИЈА СЕ СПЕЦИЈАЛНИТЕ ФУНКЦИИ

Во овој дел ќе разгледаме некои диференцијални равенки чие што решавање во општ случај се сведува со специјални функции и кои равенки претставуваат партикуларни случаеви од посматраните од нас во претходниот дел диференцијални равенки. Ќе покажеме дека методата дадена од Митриновиќ по таков начин позволува да се најдат сите познати критериуми на интеграбилност за овие диференцијални равенки.

1. Bessel-овата диференцијална равенка[15])

(3. 1) $$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0,$$

каде што ν е произволна константа претставува специјален случај од равенката (2. 23). Едно решение на оваа равенка дадено е со цилиндричната функција

$$J_\nu = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum \frac{\left(\frac{i\,x}{2}\right)^{2k}}{k!\,\Gamma(\nu + k + 1)}.$$

Од критериумот за редуктибилност на диференцијалната равенка (2. 23) имаме за равенката (3. 1)

$$2\nu = 2n + 1, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

во кој случај како што е познато цилиндричните функции се сведуваат на елементарни од обликот

$$J_{n+{}^1\!/_2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x^{n+{}^1\!/_2} \left(-\frac{1}{x}\, D\right)^n \frac{\sin x}{x}.$$

Општиот интеграл на равенката (3. 10) е

$$y = C_1 J_{n+{}^1\!/_2} + C_2 J_{n-{}^1\!/_2},$$
$$(C_1,\ C_2 = \mathrm{const}).$$

Bessel-овата диференцијална равенка ќе може во тој случај да биде пишувана во обликот

$$(xD + xD\, lg\, \Phi_2 + \Phi_1)\left(xD + \frac{\Phi_3}{\Phi_2}\right) y = 0,$$

каде што се

$$\Phi_1 = \mp i x - \frac{2n+1}{2}, \quad i = \sqrt{-1},$$

(3. 2) $$\Phi_2 = x^n \sum_{k=0}^{n} (\pm 1)^k \frac{\left[n + \frac{1}{2}, k\right]}{(2xi)^k},$$

$$\Phi_3 = x^n \sum_{k=0}^{n} (\pm 1)^k \frac{\left[n+\frac{1}{2}, k\right]}{(2xi)^k} \left(\pm i x + \frac{2k+1}{2}\right),$$

и каде што сме усвоиле за скратување симболот на Hankel

$$\left[n+\frac{1}{2}, k\right] \equiv \frac{\left[(2n+1)^2-1^2\right]\left[(2n+1)^2-3^2\right]\cdots\left[(2n+1)^2-(2k-1)^2\right]}{2^{2k}\,.\,k!},$$

$$\left[n+\frac{1}{2}, 0\right] \equiv 1, \quad k=1, 2, 3, \cdots$$

Приметуваме дека функциjата Φ_2 е поврзана со функциjата на Hankel H од прва и втора врста со релациjата

$$\Phi_2(x) = x^n e^{\pm ix} i^{\mp(n+1)} H^{2,1}_{n+1/2}.$$

2. Hermite-ови диференциjални равенки. — Тоа се диференциjалните равенки[16])

$$y'' + x y' + (n+1) y = 0 \tag{3. 3}$$

и

$$y'' + x y' - n y = 0 \tag{3. 4}$$

што претставуваат партикуларни случаеви од (2. 11). Лесно се проверува дека за овие равенки е изполнет условот (2. 14), па по наоѓање параметрите a_i, b_j, c_k, од системата (2. 12) ги имаме респективно системите линеарни равенки на кои се сведуваат (3. 3) и (3. 4)

$$y' + He_{n+1}(x) / He_n(x)\, y = z, \quad z' + D \lg He_n(x)\, z = 0,$$

каде што е

$$He_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} D^n \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$

и

$$y' + Q(x) / He_n(ix)\, y = z, \quad z' + D \lg He_n(ix)\, z + xz = 0,$$

каде што е

$$Q(x) = -n\, He_{n-1}(ix).$$

3. Weber-овата диференцијална равенка[14])

(3. 5) $$4y'' = (x^2 + a)y,$$
$$(a = \text{const}).$$

е сводлива на систем равенки од прв ред ако спрема (2. 14) е

$$a = \mp 2(2n + 1),$$

што претставува познатиот услов за интеграбилност на оваа равенка.

Равенката (3. 5) може во тој случај да се пише како

$$He_n(x)\, y' + R(x)\, y = z, \quad 2z' - xz = 0,$$

каде што е

$$R(x) = \frac{1}{2} x^{n+1} - \binom{n}{1} \frac{n+3}{4} x^{n-1} + 3\binom{n}{3} \frac{n+5}{8} x^{n-3} \ldots$$

4. Laplace-ова диференцијална равенка.

1° Во специалниот случај за $A = 0$, диференцијалната равенка (2. 11) претставува тип Laplace-ова диференцијална равенка од облик

$$y'' + (\alpha x + \beta)\, y' + (Bx + C)\, y = 0,$$
$$(\alpha, \beta, B, C = \text{const}).$$

Критериумот за редуктибилност на оваа равенка ќе биде

$$B^2 + \alpha^2 c - \alpha\beta B = k\alpha^3,$$

каде што k претставува цел позитивен или негативен број. Тогај таа може да се пише како

$$(x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n)\, y' + (b_0 x^{n+1} + b_1 x^n + \cdots + b_{n+1})\, y = z,$$
$$z' + (c_0 x + c_1)\, z = 0,$$

каде што a_r, b_r, c_r, се дадени со

$$(r+1)\, a_{r+1} = \frac{n-r}{n} a_1 a_r + \frac{(n-r)(n-r+1)}{\alpha} a_{r-1}, \; a_0 = 1, \; a_1 = \frac{\alpha\beta - 2B}{\alpha^2} n,$$

$$b_r = \frac{a_{r-1}}{2n}(n\beta - a_1 \alpha) - (n - r + 2)\, a_{r-2}, \; b_0 = 0, \; c_0 = \alpha, \; c_1 = \frac{n\alpha\beta - B}{n\alpha},$$

или

$$(r+1)\,a_{r+1}=\frac{n-r}{n}\,a_1\,a_r-\frac{(n-r)(n-r+1)}{\alpha}\,a_{r-1},\ a_0=1,\ a_1=\frac{\alpha\beta-2B}{\alpha^2}\,n,$$

$$b_r=\alpha\,a_r+\frac{n\beta+a_1\alpha}{2n}\,a_{r-1}-(n-r+2)\,a_{r-2},\ b_0=\alpha,\ c_0=0,\ c_1=\frac{B}{\alpha},$$

$$(r=1,2,\cdots n+1).$$

2°. Laplace-овата диференцијална равенка

$$xy''+(\alpha x+\beta)\,y'+(Ax+B)\,y=0, \qquad (3.\ 15)$$

ќе биде редуктибилна, ако спрема (2. 21) е

$$2B-\alpha\beta=\mp\beta\,(2n+1\pm\sqrt{(\alpha+1)^2-4A}.$$

Параметрите a_i, b_j, c_k, на системата равенки (2. 22) на кој се сведува (3. 15) се

$$a_{k+1}=\pm\frac{\beta(k-n)}{(k+1)(2b_0-\alpha+k)}\,a_k,\ a_0=1,$$

$$b_{k+1}=\frac{(\beta\mp\beta)}{2}\,a_k+(b_0+k+1)\,a_{k+1},$$

$$c_0=\alpha-b_0-n,\ c_1=\frac{1}{2}\,(\beta\pm\beta),$$

$$(k=0,1,\cdots n).$$

5. *Конфлуентната хипергеометриска диференцијална равенка*[17])

$$xy''+(b-x)\,y'-a\,y=0, \qquad (3.\ 6)$$

$$(a,\ b=\text{const}),$$

има еден интеграл од облик

$$y={}_1F_1\,(a,b,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(b)_n}\,\frac{x^n}{n!}.$$

$$(a)_n=a\,(a+1)\cdots(a+n-1),\ (a)_0=1,$$

a, b, претставуваат произволни константи.

Од (2. 21) се добиваат условите

$$b - a = n + 1, \text{ или } a = n + 1$$

за редуктибилност на оваа равенка, што претставуваат познатите услови за интеграбилност на истата равенка со елементарни функции.

Диференцијалната равенка во случај $a = b - (n+1)$ е сводлива на системот линеарни равенки

$$\text{(3. 7)} \qquad \begin{aligned} & x^{-n} L_n^{(1-b)}(x)\, y' - x^{-n-1}(n+1-b)\, L_n^{(-b)}(x)\, y = z \\ & z' + \left(\frac{1+n}{x} - 1\right) z = 0 \end{aligned}$$

каде што

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{(-x)^k}{k!}$$

се Laguerre-ови полиноми.

6. Riccati-евата диференцијална равенка[18])

$$\text{(3. 8)} \qquad y' + b\, y^2 = a\, x^m,$$

$$(a,\, b,\, m = \text{const}).$$

со смената

$$by = \frac{v'}{v}, \quad x^q = qz, \quad q = \frac{m+2}{2},$$

го добива обликот

$$zv'' + \frac{m}{m+2} v' - abzv = 0.$$

За оваа пак равенка го имаме спрема (2. 21) следниот услов за редуктибилност

$$\text{(3. 9)} \qquad m = -\frac{4n}{2n \pm 1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

што претставува познатиот услов за интеграбилност на диференцијалната равенка (3. 8).

7. Görtler покажува дека диференцијалната равенка

$$\text{(3. 12)} \qquad y'' + ay' + (be^x + c)\, y = 0$$

се интеграли со цилиндрични функции од облик $Z_\nu(2\sqrt{b}, e^{\frac{x}{2}})$. Од (2. 28) имаме пак дека оваа диференцијална равенка ќе биде редуктибилна па спрема тоа и интеграбилна со елементарни функции ако е

$$a^2 - 4c = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \tag{3. 13}$$

Параметрите a_i, b_j, c_k, се дадени со (2. 27) зимајќи ја во предвид релацијата (2. 10).

8. Darboux-овата диференцијална равенка[20])

$$y'' \cos^2 x = \left[a \cos^2 x + b(b-1)\right] y \tag{3. 14}$$

$$(a, b = \text{const}).$$

е партикуларен случај од (2. 31). Од (2. 33) го добиваме условот за нејната редуктибилност:

$$b = n \text{ или } b = 1 - n$$

1°. $b = n$

Диференцијалната равенка (3. 14) е сводлива на систем линеарни равенки од обликот (2. 7) каде што параметрите a_k b_k и c_k се определени соодветно со

$$a_{k+1} = \frac{n(3n+1) - 2k(k-2) + a - 2}{(k+1)(2n+k)} a_{k-1} - \frac{(n-k+2)(n-k+3)}{(k+1)(2n+k)} a_{k-3}$$

$$a_0 = 1, \; a_1 = 0$$

$$b_{k+1} = (n+k+1) a_{k+1} - (n-k+1) a_{k-1}$$

$$c_0 = -2n, \; c_1 = 0,$$

$$(k = 0, 1, 2, \cdots n).$$

2°. $b = 1 - n$.

Параметрите на соодветните линеарни равенки a_k, b_k, c_k се дадени со

$$a_{k+1} = \frac{n(n-1) - 2(k-1)(2n-k) - (a+1)}{(k+1)(2n-2-k)} a_{k-1} + \frac{(n-k+2)(n-k+3)}{(k+1)(2n-k-2)} a_{k-3}$$

$$a_0 = 1,\ a_1 = 0$$

$$b_{k+1} = (k+2-n)\,a_{k+1} - (n-k+1)\,a_{k-1}$$

$$c_0 = -1,\ c_1 = 0,$$

$$(k = 0, 1, 2, \cdots n).$$

9. За хипергеометриската диференцијална равенка

$$L(\alpha, \beta, \gamma)\,y \equiv \Big[x(x-1)\,D^2 + \big[(\alpha+\beta+1)\,x - \gamma\big]\,D + \alpha\beta\Big]\,y = 0,\quad D = \frac{d}{dx}$$

(α, β, γ = произволни константи)

следејќи го напред покажаниот метод, го имаме установено[22]) следниот резултат.

Ако еден од броевите $\alpha, \beta, \gamma-\alpha, \gamma-\beta$ е позитивен или негативен цел број, диференцијалната равенка е редуктибилна.

Во тој случај имаме

1°. $L(\alpha, \beta, \alpha-n) \equiv$

$$\Big[x\,D + x\big(lg\,F(-n, 1-\alpha, \beta-\alpha+1, 1/x)\big)' + \alpha\Big]\Big[(x-1)\,D + \frac{\beta\,F(-n, -\alpha, \beta-\alpha+1, 1/x)}{F(-n, 1-\alpha, \beta-\alpha+1, 1/x)}\Big].$$

2°. $L(\alpha, \beta, \beta+n+1) \equiv$

$$\Big[(x-1)\big(D + (lg\,F(n, \beta, \beta-\alpha+1, 1/x))'\big) + \alpha + \frac{n}{x}\Big]\Big[x\,D + \frac{F(-n, \beta+1, \beta-\alpha+1, 1/x)}{F(-n, \beta, \beta-\alpha+1, 1/x)}\,\beta\Big].$$

3°. $L(-n, \beta, \gamma) \equiv$

$$\Big[(x-1)\Big(D + \frac{n}{x}\big(lg\,F(-n, 1-\gamma-n, 1-\beta-n, 1/x)\big)'\Big) + \frac{1-\gamma-(n-\beta)\,x}{x}\Big]\Big[x\,D - n\,\frac{F(1-n, 1-\gamma-n, 1-\beta-n, 1/x)}{F(-n, 1-\gamma-n, 1-\beta-n, 1/x)}\Big].$$

4°. $L(n+1,\beta,\gamma)\equiv$

$$\left[(x-1)\left(D+\frac{n}{x}+(lg\,F(-n,\gamma-n-1,\beta-n,1/x))'\right)+1\right]\left[xD+\right.$$
$$\left.\frac{\beta x}{x-1}\,\frac{F(-n-1,\gamma-n-1,\beta-n,1/x)}{F(-n,\gamma-n-1,\beta-n,1/x)}\right].$$

n е природен број и $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$, хипергеометриската функција

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=\sum_{n}\frac{(\alpha)_n\,(\beta)_n}{(1)_n\,(\gamma)_n}\,x^n,$$

$$(\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1),$$

$$(\alpha)_0=1.$$

IV ДЕЛ

РЕДУКТИБИЛНОСТ НА ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД n-ти РЕД

1. Нека ни е дадена линеарната хомогена диференцијална равенка,

$$(4.\ 1)\qquad A(x,D)y\equiv\sum_{i=0}^{n}a_i(x)\,D^{n-i}\,y=0,\ \ a_0(x)=1,$$

чии што коефициенти се холоморфни финкции по x во еден интервал $(\alpha,\ \beta)$.

Рековме, за да биде оваа равенка редуктибилна, потребно и доволно е таа да може да се напише во обликот

$$(4.\ 2)\qquad A(x,D)\,y\equiv B(x,D)\,C(x,D)\,y=0,$$

каде што збирот од редовете на $By=0$ и $Cy=0$ е равен на редот од $Ay=0$.

Методата установена од Митриновиќ за формирање критериуми на редуктибилност на линеарните диференцијални равенки, може со успех да се примени и за равенки од повисок ред.

Интеграцијата на диференцијалната равенка во тој случај се сведува на такви од понизок ред.

2. Да предположиме дека соодветниот диференцијалниот оператор на дадената диференцијална равенка (4. 1) може да се разложи на симболичен производ (4. 2), т. е. може да се најде систем линеарни равенки

$$(4.\ 3) \qquad c_0 y' + c_1 y = z, \quad b_0 z^{n-1} + b_1 z^{n-2} + \cdots + b_{n-1} z = 0,$$

кореспондентен на линеарната равенка (4. 1). Коефициентите c_i, b_k се соодветно згодно избрани функции, по природа исти како и функциите a_i.

По упоредување на (4. 1) и (4. 3) зимајќи предвид (1.8) ги добиваме респективно идентитетите

$$(b_1 - a_1) c_0 + b_0 c_1 + (n-1) b_0 c_0' \equiv 0,$$

$$(4.\ 4) \qquad (b_2 - a_2) c_0 + b_0 c_2 + (n-1) b_0 c_1' + \binom{n-1}{2} b_0 c_0'' + (n-2) b_1 c_0' = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

од каде се добиваат условите за редуктибилност на равенката (4. 1).

Диференцијалната равенка (4. 1) и првата од равенките (4. 3) имаат еден заеднички интеграл

$$(4.\ 5) \qquad y = exp\left(-\int \frac{c_1}{c_0}\, dx\right)$$

3. Особен интерес меѓутоа претставува случајот, диференцијалниот полином

$$A \equiv A(x, D)\, y;$$

кога може да се разложи на n линеарни симболични фактори, т. е. на диференцијалната равенка (4. 1) да може да се учини соодветен систем од линеарни диференцијални равенки од обликот (2. 2).

Во тој случај очевидно е дека дадената диференцијална равенка е и интеграбилна, па добиените услови за редуктибилност се такви и за интеграбилност на равенката, што во општ случај не е верно.

Навистина, ако ни е дадена линеарната диференцијална равенка

$$A(x, D)\, y = 0,$$

да предложиме дека постои соодветна система линеарни равенки

$$f_{k1}\, y'_{k-1} + f_{k2}\, y_{k-1} = y_k,$$

$$(y_n = 0,\ y_0 = y,\ k = 1, 2, \cdots n).$$

По упоредување добиваме (1. 11). Во првиот дел од оваа работа ние ги определивме коефициентите a_i во функции од f_{ik}. Но бидејќи нам ни е дадена однапред диференцијалната равенка (4. 1), нашата задача е да ги определиме коефициентите f_{ik} во функции од a_i. Меѓутоа оваа задача како можиме да се увериме веќе со диференцијална равенка од втори ред нерешлива е, во општ случај.

Навистина, да предположиме дека диференцијалната равенка

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$$

може да биде пишана во обликот

$$(D + \xi)\,(D + \eta)\, y = 0,$$

$$(\xi = \xi\,(x),\ \eta = \eta\,(x).).$$

По упоредување коефициентите на овие две равенки имаме

$$p = \xi + \eta,$$

$$q = \xi\,\eta + \eta',$$

односно, решени по ξ и η не водат до Рикатијевата равенка

$$\eta' - \eta^2 + \eta\, p - q = 0.$$

4. Ако за равенката (4. 1) предположиме дека коефициентите a_i се респективно полиноми, тогај условите (1.11) нѐ водат до системи алгебарски равенки нелинеарни, коишто од своја страна претставуваат бараните услови за редуктибилност. Меѓутоа решението и на овне системи алгебарски равенки не претставува во општ случај лесна задача.

5. *Пример.* Да ја посматраме диференцијалната равенка

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{\omega}{\nu} P_{n(x)}^{(\nu)}\, D^{(n-\nu)}\, y = 0, \quad D = \frac{d}{dx}, \tag{4. 6}$$

каде што се

$$\binom{\omega}{0}=1,\ P_{(x)}=\prod_{\nu=n}^{1}(x-\alpha_\nu).$$

Предположиме ли дека соодветниот полином е разложлив на симболични фактори од облик

$$(p_i D+q_i)\,y \tag{4. 7}$$

спрема реченото во дел I, т. 8 таа притежава системата основни интеграли

$$y_k=R_1\int\frac{R_2}{q_1R_1}\,dx\int\frac{R_3\,dx}{q_2R_2}\cdots\int\frac{R_k}{q_{k-1}R_{k-1}}\,dx,$$

каде што се

$$R_k(x)=exp\int\frac{q_k}{p_k}\,dx,\quad k=1,2,\cdots n.$$

За диференцијалната равенка (4. 6) ќе имаме соодветно

$$p_\nu=(x-\alpha_\nu),\ q_\nu=m-n+\nu$$

па спрема това може да и се даде и обликот

$$\prod_{\nu=n}^{1}\Big[(x-\alpha_\nu)\,D+(\omega+\nu-n)\Big]\,y=0.$$

Системата основни интеграли во тој случај е

a) $\omega\neq n-\nu,\ \nu=1,2,3,\cdots n-1$

$$y_k=(x-\alpha_k)^{n-\omega-1},\quad k=1,2,\cdots n.$$

b) $\alpha=\alpha_\nu\ \ \nu=1,2,\cdots n.$

$$y_k=(x-\alpha)^{n-\omega-k},\quad k=1,2,\cdots n.$$

Blagoj S. Popov

FORMATION DES CRITÉRIUMS DE RÉDUCTIBILITÉ DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES AYANT DES FORMES DONNÉES À L'AVANCE

(Résumé)

Le présent travail a pour base l'analogie, constatée par les mathématiciens depuis longtemps, entre les équations algébriques et différentielles linéaires. Nous nous servirons de cette analogie pour former des critériums de réductibilité de certaines classes d'équations différentielles linéaires, de formes données à l'avance.

Ce qui a attiré notre attention sur ce sujet c'est un procédé de Mitrinovitch [2], dont nous tirerons un bon parti dans ce qui suivra.

Partant du fait que toute équation différentielle linéaire du second ordre réductible est aussi intégrable, nous donnons des critériums d'intégrabilité les plus généraux des équations de formès considérées. Nous complétons ainsi le plus possible les résultats déjà connus relatifs aux cas spéciaux de ces équations. On l'a d'ailleurs vérifié sur de nombreux exemples que l'on trouve, avec leurs solutions, dans le livre bien connu de Kamke — *Differentialgleichungen — Lösungsmethoden und Lösungen, Bd. I, Leipzig, 1944.*

Puis nous arrivons facilement aux critériums de réductibilité et, par conséquent, aux critériums d'intégrabilité, sous leurs formes les plus générales, des équations différentielles, dont les solutions sont des fonctions spéciales, telle que équations: de Bessel, hypergéométrique confluente, de Hermite, de Laplace, hypergéométrique, ainsi que d'autres équations.

2. C'est Frobenius [1] qui a le premier, introduit la notion de réductibilité dans la théorie des équations différentielles et de la manière suivante.

Une équation différentielle linéaire, dont les coefficients sont des fonctions uniformes de la variable x, dans une domaine déterminé, sera dite *irréductible* si elle n'a pas d'intégrale commune avec une autre équation différentielle, d'ordre moindre, à coefficients du même cartactère. Dans le cas contraire l'équation sera dite réductible.

Toute équation linéaire du premier ordre est irréductible.

Quant aux équations différentielles linéaires, on connaît le résultat suivant:

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$L(x, D)y = \sum_{i=0}^{n} a_i D^{n-i} y, \quad D = \frac{d}{dx}$$

soit réductible est que L puisse s'écrire sous la forme

$$L(x, D)y = P(x, D)\, Q(x, D)\, y,$$

où P et Q sont d'opérateurs différentiels, dont la somme d'ordres est égale à l'ordre de l'opérateur L.

3. Le procédé de Mitrinovitch, cité précédemment, relatif à la formation du critère de réductibilité des équations différentielles linéaires revient à ceci.

Etant donnée l'équation différentielle

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{n} \Phi_k(x) y^{(n-k)} = 0,$$

on considère simultanément le système d'équations linéaires

$$(2) \qquad \varphi_{k1} y'_{k-1} + \varphi_{k2} y_{k-1} = y_k,$$

$$(y_0 = y,\ y_n = 0,\ k = 1, 2, \cdots n).$$

Si le système (2) est correspondant pour l'équation (1), on aura pour celle-ci un cas de réductibilité. Mais l'équation (1) sera aussi intégrable, dans ce cas là, ce qui est évident du système (2), auquel se réduit cette équation.

4. Considérons l'équation différentielle

$$(3) \qquad y'' + (\alpha f + \beta) y' + (A f^2 + B f + C) y = 0,$$

ou $f = f(x)$ est une fonction arbitraire, continue et différentiable dans un intervalle déterminé, et α, β, A, B, C des paramètres arbitraires.

Cherchons les conditions auxquelles doivent satisfaire ces paramètres pour que l'équation (3) soit réductible pour les différents cas de la fonctions f.

Pour cela nous supposerons que l'équation (3) est réductible. D'après ce qui vient d'être dit, on peut l'écrire sous la forme

$$(4) \qquad \left(D + \frac{\varphi'}{\varphi} + x\right)\left(D + \frac{\psi}{\varphi}\right) y = 0,$$

respectivement sous forme du système d'équations

$$(5) \qquad \begin{aligned} (\varphi D + \psi) y &= z, \\ (D + x) z &= 0. \end{aligned}$$

$\varphi = \varphi(f) \neq 0$, $\psi = \psi(f)$ *et* $x = x(f)$, étant des fonctions arbitraires ayant des propriétés signalées

Prenons pour ces fonctions les polynomes

$$\varphi = \sum_{i=0}^{n} a_i f^{n-i} = \prod_{i=1}^{n} (f - r_i), \quad a_0 = 1,$$

$$(6) \qquad \psi = \sum_{j=0}^{n+1} b_j f^{n+1-j},$$

$$x = \sum_{k=0}^{1} c_k f^{1-k}.$$

a_i, b_j, c_k, étant les coefficients des polynomes à déterminer.

Par la comparaison des équations (3) et (4), on a les identités

$$\varphi'+\psi+\chi\varphi-\varphi(\alpha f+\beta)\equiv 0,$$

(7)

$$\psi'+\chi\psi-\varphi(Af^2+Bf+C),$$

ou, en tenan compte de (6),

$$(b_0+c_0)f^{n+1}+(b_1+c_0a_1+c_1)f^n+(b_2+c_0a_2+c_1a_1)f^{n-1}+\cdots$$

$$+nf^{n-1}f'+(n-1)a_1f^{n-2}f'+\cdots+a_{n-1}f'-\alpha f^{n+1}-(\alpha a_1+\beta)f^n\cdots a_n\beta_0.$$

$$b_0c_0f^{n+2}+(b_1c_0+b_0c_1)f^{n+1}+(b_2c_0+b_1c_1)f^n+\cdots+(n+1)b_0f^nf'+$$

$$+nb_1f^{n-1}f'+\cdots+b_nf'-Af^{n+2}-(Aa_1+B)f^{n+2}+\cdots+a_nC=0.$$

De ces identités, pour les différants fonctions f, on aura les systèmes d'équations dont on déterminera les paramètres a_i, b_i, et c_i ainsi que les conditions de réductibilité. Pour une fonction f quelconque cependant on aura, comme on le démontre*, la relation

$$n(b_1-c_1)=a_1[(n+1)b_0-c_0]. \tag{8}$$

5. Si $f=x$, de (3) on a l'équation

$$y''+(\alpha x+\beta)y'+(Ax^2+Bx+C)y=0. \tag{9}$$

Les identites (7) nous donnent le système de $2n+5$ équation algébriques suivant

$$(n-k+2)a_{k-2}+a_{k-1}c_1-\beta a_{k-1}-\alpha a_k+b_k+c_0a_k=0.$$

$$(n-k+3)b_{k-2}+c_1b_{k-1}+c_0b_k-Aa_k-Ba_{k-1}-Ca_{k-2}=0,$$

$$(k=0,1,2,\cdots n+2),$$

pour déterminer les $2n+4$ paramètres a_k, b_k, c_k, ainsi que le nombre naturel n, fixant le degré des polynomes utilisés, en fonctions de α, β, A, B et C.

On trouve

$$2b_0=\alpha\pm(\alpha^2-4A)^{1/2},$$

$$c_0=\alpha-b_0,\ c_1=\frac{1}{2n}\left[n\beta\mp a_1(\alpha^2-4A)^{1/2}\right]$$

$$(k+1)a_{k+1}=\frac{n-k}{n}a_1a_k+\frac{(n-k)(n-k+1)}{\mp(\alpha^2-4A)^{1/2}}a_{k-1}, \tag{10}$$

$$a_{-1}=0,\ a_0=1,\ a_1=n\frac{\alpha\beta-2B}{\beta^2-4A},$$

$$b_k=b_0a_k+\frac{a_{k-1}}{2n}\left[n\beta-a_1(\alpha-2b_0)\right]-(n-k+2)a_{k-2},$$

$$(k=1,2,\cdots n+1).$$

---

* Ceci est avec détail développé dans le text macédoine de cette étude. Voir le § 5 part II.

Le nombre naturel n est donné par la relation

(11) $$(\alpha\beta-2B)^2+(\alpha^2-4A)(4C-2\alpha-\beta^2)=\pm 2(2n+1)(\alpha^2-4A)^{3/2},$$

qui représente, en réalité, le critéium de réductibilité de l'équation différentielle (9).

On peut donc dire

Propositions I. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (9) soit réductible est qu'entre les constantes* α, β, A, B *et* C *il existe la relation (11).*

L'équation (9) peut dans ce cas là, se mettre sous la forme (4) où les a_k, b_k, c_k sont déterminés par (10).

Exemple. Pour l'équation différenttielle

$$y''+(3x+2)y'+(2x^2+3x+c)y=0,$$

on a, en vertu de (11),

$$C=3+n \text{ ou } C=2-n.$$

a) $C=3+n$, les parametres a_k, b_k, c_k sont

$$b_0=2,\ c_0=1,\ c_1=1.$$

$$a_{2k}=(-1)^k(2k-2)!!\binom{n}{2k};$$

$$a_{2k+1}=0,$$

$$b_{2k}=(-1)^k(2k-3)!!\binom{n}{2k-2}\frac{(n-2k+2)(n-k+1)}{k};$$

$$b_{2k+1}=a_{2k}.$$

b) $C=2-n$,

$$b_0=1,\ c_0=2,\ c_1=1,$$

$$a_{2k}=(2k-1)!!\binom{n}{2k},$$

$$a_{2k+1}=0,$$

$$b_{2k}=(2k-3)!!\binom{n}{2k-2}\frac{n-2k+2)(n-4k+1)}{2k},\quad b_{2k+1}=a_{2k}.$$

$$2k!!=2.4.6.\cdots 2k$$

6. Pour $f=-\dfrac{1}{x}$, on a l'équation

(12) $$x^2y''+(\beta x-\alpha)xy'+(Cx^2-Bx+A)y=0.$$

Les paramètres a_i, b_i, c_i sont détermines par les système d'équations algébriques

$$(c_1-\alpha)\, a_{k-1}+(n-k+c_0-\alpha)\, a_k+b_k=0,$$

(13) $$c_1\, b_{k-1}+(n-k+1+c_0)\, b_k-Aa_k-Ba_{k-1}-Ca_{k-2}=0,$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\cdots n+1),$$

c'est-à-dire, en ayant égard à (8),

$$2\, b_0=(\alpha+1)\pm\left[(\alpha+1)^2-4\, A\right],$$

$$c_0=\alpha-b_0-n,\ \ c_1=\frac{1}{2n}\left[n\beta+a_1(\alpha-2\, b_0)\right],$$

$$a_{s+1}=\frac{(\alpha-2\, b_0)\,(s-n)}{n\,(s+1)\,(2\, b_0-\alpha+s)}\, a_1\, a_s,$$

$$a_0=1,\ \ a_1=\pm\frac{\sqrt{\beta^2-4C}}{\alpha-2\, b_0},$$

$$b_{s+1}=\frac{a_s}{2n}\left[n\,\beta-a_1\,(\alpha-2\, b_0)\right]+(b_0+s+1)\, a_{s+1},$$

$$(s=0,\ 1,\cdots n).$$

Le critérium de réductibilité de l'équation (12) cherché s'obtient du système (13) sous forme de la relation

(14) $$2\, B-\alpha\beta=\mp\sqrt{\beta^2-4C}\left[2\, n+1\pm\sqrt{(\alpha+1)^2-4A}\right],$$

d'ou

Proposition II. *La conditions nécessaire et suffisante pour que l'équation* (12) *soit réductible est que les constantss* α, β, A, B *et* C *soient liées par la relation (14).*

Il est évident qu'alors l'équation peut se mettre sous la forme (4) sous laquelle elle s'intègre directement.

Exemple. Pour l'équation différentielle

$$x^2 y''+(3\, x+2)\, xy'+(2\, x^2+3\, x+\nu)\, y=0,$$

on aura

$$\nu=-n\,(n+1).$$

Les paramètres a_s, b_s, c_s sont donnés par

$$a_{s+1}=\frac{s-n}{(s-2n)\,(s+1)}\, a_s,\ \ a_0=1,$$

$$b_s=a_s-1-\frac{(n-s+1)^2}{s\,(2n-s+1)}\, a_{s-1},\ \ b_0=-(n+1),$$

$$c_0=-1,\ \ c_1=2,$$

$$(s=0,\ 1,\ 2,\cdots n+1).$$

7. Si on prend $f=e^x$, on a de (3), l'équation différentielle de la forme

$$y''+(\alpha e^x+\beta)y'+(Ae^{2x}+Be^x+C)y=0. \tag{15}$$

Le système d'équations algébriques pour la détermination des paramètres a_s, b_s, c_s est

$$(n-s+1+c_1-\beta)\,a_{s-1}+(c_0-\alpha)\,a_s+b_s=0,$$

$$Aa_s+Ba_{s-1}+Ca_{s-}+c_0\,b_s+(c_1-n+s-2)\,b_{s-1}=0,$$

$$(s=0,\,1,\,2,\cdots n+2)$$

d'où l'on a

$$(s+1)\,a_{s+1}=\left[\frac{2n-s}{2n}\,a_1+\frac{s\,(s-n)}{\mp(\alpha^2-4A)^{1/2}}\right]a_s,$$

$$a_0=1,\;\; a_1=\frac{n\pm(\beta^2-4C)^{1/2}}{\mp(\alpha^2-4A)^{1/2}}\;n,$$

$$b_s=b_0\,a_s+\left[n\beta\pm a_1\,(\alpha^2-4A)^{1/2}-n^2+2n\,(s+1)\right]\frac{a_{s-1}}{2n},$$

$$2\,b_0=\alpha\pm(\alpha^2-4A)^{1/2}$$

$$c_0=\frac{\alpha\mp(\alpha^2-4A)^{1/2}}{2},\;\; c_1=\frac{1}{2n}\left[n\beta\pm(\beta^2-4C)^{1/2}\right]-\frac{n-1}{2},$$

$$(s=0,\,1,\cdots n+1).$$

Le critérium de réductibilité de cette équation est donné par

$$\alpha\beta-2B+\alpha=\mp(\alpha^2-4A)^{1/2}\left[2n+1-(\beta^2-4C)^{1/2}\right] \tag{16}$$

de sorte qu'on a la

Proposition III. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (15) soit réductible est qu'entre les paramètres* α, β, A, B *et* C *on ait la relation (16).*

Exemple. Pour l'équation différentielle

$$e^{2x}y''+(\alpha e^x+\beta)\,e^x y'+(Ae^{2x}+Be^x+C)y=0,$$

nous avons

$$2\beta-\alpha\beta+\beta=\mp(\beta^2-4C)\left[2n+1-(\alpha^2-4A)^{1/2}\right],$$

ce qui répresente le critérium de réductibilité de l'équation en question. Elle peut être mise, dans ce cas, sous la forme (4).

On remarque que, au moyen d'une substitution $y=u(z)\exp(-x/_2)$, $z=\exp x$, l'équation (15) ramène à une équation de forme (12).

8. Si $f=tgx$, on aura l'équation différentielle de la forme

$$y''+(\alpha\, tgx+\beta)y'+(Atg^2x+Btgx+C)y=0. \tag{17}$$

Le système d'équations pour la détermination des constantes a_i, b_i, c_i est

$$(n-s+2)\,a_{s-2}+(c_1-\beta)\,a_{s-1}+(n-s+c_0-\alpha)\,a_s+b_s=0,$$

$$Ca_{s-2}+Ba_{s-1}+Aa_s+(s-n-3)\,b_{s-2}-c_1\,b_{s-1}+(s-n-1-c_0)\,b_s,$$

$$(s=0,\ 1,\ 2,\cdots n+2).$$

D'où l'on a

$$2\,b_0=\alpha+1\pm\left[(\alpha+1)^2-4A\right]^{1/2}$$

$$c_0=\alpha-n-b_0,\quad c_1=\frac{1}{2n}\left[n\beta+a_1(\alpha-2\,b_0)\right],$$

$$\left[(n-s)\,a_s+(n-s+2)\,a_{s-2}\right](\alpha-2\,b_0)\,a_1=n\,(s+1)\,(\alpha-2\,b_0-s)\,a_{s+1},$$

$$-\Big[n\,(n-s+2)\,(2\,b_0-\alpha+2\,s-1)+n\,(\alpha-2\,b_0+s)+(n-1)\,(\alpha-2\,b_0)\,a_1^2-$$

$$-n\,(2\,a_2-n)\,(\alpha-2\,b_0-1)\Big]\,a_{s-1}-n\,(n-s+2)\,(n-s+3)\,a_{s-3},$$

$$a_1=\frac{(\alpha\beta-2\,B)\,n}{(\alpha-2\,b_0)\,(\alpha-2\,b_0-2\,n)},$$

$$b_s=\left[n\beta-a_1(\alpha-2\,b_0)\right]\frac{a_{s-1}}{2n}-(n-s+2)+(b_0+s)\,a_s,$$

$$(s=0,\ 1,\cdots n+1).$$

Le critérium de réductibilité est fourni par la relation

$$(18)\quad 4\,C-\beta^2+\frac{(\alpha\beta-2\,\beta)^2}{(2\,n+1\pm\sqrt{(\alpha+1)^2-4\,A})^2}\left[1+\frac{4\,n\,(n-1)}{1\pm\sqrt{(\alpha+1)^2-4A}}\right]=$$

$$=2\left[(\alpha+1)\pm\sqrt{(\alpha+1)^2-4A}\right]-4\left[2\pm\sqrt{(\alpha+1)^2-4A}\right](2\,a_2-n),$$

de sorte qu'on a la

Proposition IV. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (17) soit réductible est qu'entre les paramètres* α, β, A, b *et* C *on a ait la relation (18).*

Corollaire. — Les équations différentielles du second ordre, dont les solutions sont de fonctions spéciales, peuvent être traitées comme des cas spéciaux des équations considérées précédemment. Par conséquent on peut leur appliquer les résultats énoncés, et on aura ainsi leurs critériums de réductibilité. On sera de même conduit aux systèmes d'équations linéaires auxquelles elle se réduisent sous une forme explicite.

a) L'équation différentielle de Bessel [15]

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)\,y=0,$$

représente un cas spécial de l'équation (12), De (14) résulte le critérium de réductibilité de cette équation

$$2\nu = 2n+1, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

ce qui représente le cas connu d'intégrabilité au moyen des fonctions éleméntaires

Dans ce cas l'équation peut se mettre sous la forme [23]

$$(xD + x\,lg\,\Phi_2 + \Phi_1)\left(xD + \frac{\Phi_3}{\Phi_2}\right)y = 0,$$

où

$$\Phi_1 = \mp ix - \frac{2n+1}{2}, \quad i = \sqrt{-1},$$

$$\Phi_2 = x^n \sum_{s=0}^{n} (\pm 1)^s \frac{[n+1/2, s]}{(2xi)^s},$$

$$\Phi_3 = x^n \sum_{s=0}^{n} (\pm 1)^s \frac{[n+1/2, s]}{(2xi)^s}\left(\pm ix + \frac{2s+1}{2}\right),$$

avec

$$[n+1/2, s] = \frac{[(2n+1)^2 - 1^2][(2n+1)^2 - 3^2]\cdots[(2n+1)^2 - (2s+1)^2]}{2^{2s}.\ s\,!},$$

$$[n+1/2, 0] = 1. \quad s = 1, 2, \cdots$$

b) Les équations différentielles d'Hermite [16]

$$y'' + xy' + (n+1)\,y = 0,$$

$$y'' + xy' - ny = 0,$$

satisfont à la condition (11), de sorte que l'on a respectivement les systèmes d'équations

$$y' + \frac{He_{n+1}(x)}{He_n(x)}\,y = z,$$

$$z' + D\,lg\,He_n(x)\,z = 0,$$

et

$$y' - n\frac{He_{n-1}(ix)}{He_n(ix)}\,y = z,$$

$$z' + D\,lg\,He_n(ix)\,z + xz = 0.$$

ou

$$He_n(x) = (-1)\,e^{x^2/2}\,D^n\,e^{-x^2/2}.$$

c) L'équation différentielle de Weber [14]

$$4y''=(x^2+a)y,$$

$$(a=const.),$$

peut mise être sous la forme (5) si, d'aprés (11),

$$a=\mp 2(2n+1).$$

On aura

$$He_n(x)y'+R(x)y=z,$$

$$2z'-xz=0.$$

où

$$R(x)=\frac{1}{2}x^{n+1}-\binom{n}{1}\frac{n+3}{4}x^{n-1}+3\binom{n}{3}\frac{n+5}{8}x^{n-3}\ldots$$

d) L'équation différentielle de Laplace.

1°. Si $A=0$, l'équation différentielle (9) est du type de l'équation différentielle de Laplace

$$y''+(\alpha x+\beta)y'+(Bx+C)y=0,$$

$$(\alpha,\ \beta,\ B,\ \text{et sont const.}),$$

Le critérium de réductibilité de cette équation sera

$$B^2+\alpha^2 C-\alpha\beta B=s\alpha^3,$$

$$s=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$

de sorte qu'elle peut être écrite sous la forme (5), où

$$(s+1)a_{s+1}=\frac{n-s}{n}a_1 a_s+\frac{(n-s)(n-s+1)}{\alpha}a_{s-1},$$

$$a_0=1,\ a_1=\frac{\alpha\beta-2B}{\alpha^2}n,$$

$$b_s=\frac{a_{s-1}}{2n}(n\beta-a_1\alpha)-(n-r+2)a_{s-2},$$

$$b_0=0,$$

$$c_0=\alpha,\ c_1=\frac{n\alpha\beta-B}{n\alpha},$$

$$(s=1,2,\ldots n+1),$$

ou

$$(s+1)a_{s+1}=\frac{n-s}{n}a_1 a_s-\frac{(n-s)(n-s+1)}{\alpha}a_{s-1},$$

$$a_0=1,\ a_1=\frac{\alpha\beta-2B}{\alpha^2}n,$$

$$b_s = \alpha a_s + \frac{n\beta + a_1 \alpha}{2n} a_{s-1} - (n-s+2) a_{s-2},$$

$$b_0 = \alpha,$$

$$c_0 = 0, \; c_1 = \frac{B}{\alpha},$$

$$(s = 1, 2, \cdots n+1).$$

2°. Si $C=0$, l'équation différentielle (12) est aussi du type de l'équation de Laplace

$$xy'' + (\beta x - \alpha) y' + (Bx - A) y = 0,$$

dont le critérium de réductibilité devient

$$2B - \alpha\beta = \mp \beta \left(2n + 1 \pm \sqrt{(\alpha+1)^2 - 4A}\right).$$

Les paramètres a_s, b_s, c_s sont donnés par les relations

$$a_{s+1} = \pm \frac{\alpha (s-n)}{(s+1)(2b_0 - \alpha + s)} a_s, \; a_0 = 1,$$

$$b_{s+1} = \frac{(\beta \mp \beta)}{2} a_s + (b_0 + s + 1) a_{s+1},$$

$$c_0 = \alpha - b_0 - n, \; c_1 = \frac{\beta \pm \beta}{2},$$

$$(s = 0, 1, \cdots n+1).$$

e) L'équation différentielle hypergéométrique confluente [17]

$$xy'' + (b - x) y' - ay = 0,$$
$$(a, b = \text{Const}),$$

sera de même réductible sous les conditions connues

$$b - a = n+1 \text{ ou } a = n+1,$$

d'intégrabilité a l'aide des fonctions élémentaires.

Pour $b - a = n+1$ on aura

$$x^{-n} L_n^{1-b} y' - x^{-n-1} (n+1-b) L_n^{-b} y = z,$$

$$z' + \frac{1+n}{x} z = 0,$$

ou L_n^α sont de polynomes de Laguerre

$$L_n^\alpha = L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-s} \frac{(-x)^s}{k!}.$$

g) L'équation différentielle de Darboux

$$y'' \cos^2 x = \left[a \cos^2 x + b(b-1)\right] y.$$

est un cas particulier de l'équation (17). De (18) on aura comme condition de réductibilité

$$b=n \text{ ou } b=1-n.$$

1°. Pour $b=n$, les paramètres a_s, b_s, c_s, sont donnés par

$$a_{s+1}=\frac{n(3n+1)-2s(s-2)+a-2}{(s+1)(2n+s)}\,a_{s-1}-\frac{(n-s+2)(n-s+3)}{(s+1)(2n+s)}\,a_{s-3}$$

$$a_0=1 \quad a_1=0,$$

$$b_{s+1}=(n+s+1)\,a_{s+1}-(n-s+1)\,a_{s-1},$$

$$c_0=-2n, \quad c_1=0,$$

$$(s=0,\,1,\,2,\cdots n).$$

2°. Pour $b=1-n$, les paramètres a_s, b_s, c_s, sont donnés par

$$a_{s+1}=\frac{n(n-1)-2(s-1)(2n-s)-(a+1)}{(s+1)(2n-2-k)}\,a_{s-1}+\frac{(n-s+2)(n-s+3)}{(s+1)(2n-s-2)}\,a_{s-3},$$

$$a_0=1, \quad a_1=0,$$

$$b_{s+1}=(s+2-n)\,a_{s+1}-(n-s+1)\,a_{s-1},$$

$$c_0=-1, \quad c_1=0,$$

$$(s=0,\,1,\,2,\cdots n).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Vessiot, *Sur l'intégration des équations différentielles linéaires*, Ann. de l'Ec. Norm. (3), t. IX. p. 197—280. — These.

2. Mitrinovitch D. *Sur un cas de réductibilité d'équations différentielles linéaires*, C. R. t. 230 p. 1130—1132. — 1950.

3. Vincent, *Sur les analogies entre les équations différentielles linéaires et les équations algébriques*, These, Paris, Gauthier—Villars. 1874.

4. Floquet, *Sur la théorie des équations différentielles linéaires* Ann. de l'Ec. Norm. Deuxime serie, t. VIII, supplement, p. 1—131.

5. Mammana, G. *Decomposizione delle espressioni differentiali lineari omogene in prodotti di fatori simbolici e aplicazioni relativa allo studio delle equazioni differenziali lineari*, Mathematische Zeitschrift, B. 33, Heft 2, 186—231, 1931.

6. Frobenius, G. *Ueber den Begriff der Irreductibilität der Theorie der linearen Differentialgleichungen*, Journal für reine math. t. 76. 1873.

7. Pascal, *Repertorium der Höherem Mathematik* I_2, S. 542, 1927.

8. Schlesinger, L. *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*, B. I, Leipzig, S. 81, 1895.

9. Hahn, W. *Ueber lineare Differentialgleichungen, deren Lösungen einer Rekursionformel genügen. Mathematische Nachrichten* Band 4, 1950—51, S. 1—11.

10. Heffter, *Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen*, S. 236, 1894.

11. Nikolesko, M. *Sur la decomposition des polynomes differentielles en facteur du premier ordre*, Mathematische Zeitschrift B. 35. S. 612, 1932.

12. Brassine, E. *Analogie des équations différentielles linéaires a coefficients variables, avec les équations algébriques*, Note dans Cours d'analyse de l'ecole polytechnique par Stnrm, t. II, 1888, p. 345.

13. Görtler, *Ergänzungen zu Kamke Differentialglechungen: Lösungsmethoden und Lösungen, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, B. 22, 1942, S. 233.

14. Kamke, E. *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen B. I, Gewönliche Differentialgleichungen*, Leipzig, 1942.

15. Forsyth—Jacobsthal, *Lehrbuch der Differentialgleichungen*, Braunschweig, 1912, S. 125.

16. Poolo, G. E. *Introduction to the theory of linear differential equations*, Oxford, 1936, S. 152.

17. Magnus, W.—Oberhetinger, F. *Formelen und Sätze für die Specielen Funkzionen der Mathematischen Physik* Berlin 1943 S. 86.

18. Watson, *Theory of Bessel functions*, 1944, S. 123.

19. Picard, E. *Traité d'analyse*, t. III, Deuxieme edition, 1908, p. 560—561.

20. Darboux, *Théorie des surfaces* II, S. 198.

21. Laurent, H. *Traité d'analyse*, t. V. Paris, 1890.

22. Попов, Б. С. За редуктибилноста на хипергеометриската диференцијална равенка. Годишен зборник на Фил. факултет Скопје, кн. 4. 1951 № 7.

ОСТАНАЛА КОРИСТЕНА ЛИТЕРАТУРА

Lagrange, *Overes I.*

Fuchs, L. *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen*, Sitzungberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, L, 1888. S. 1273—1290.

Koenigsberger, L. *Allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen*, Leipzig, 1882.

Koenigsberger, L. *Lehrbuch der Treorie der Differentialgleichungen mit einer unabhänigen Variabeln*, Leipzig 1889.

Mammana, G. *Sopra un nuovo metodo di studio delle equazioni differenziali lineari*, Mathematische Zeitschrift, B. 25 H. 4, S. 734—748, 1926.

Mitrinovitch, D. *Sur un procédé fournissant des équatuons différentielles linéaires intégrables d'unetype assigne d'avance*, Publications de l'institut mathematique de l'Academie des sciences, t. III. p. 227—234, 950.

Митриновић, Д. *Поступак за формирање критериума интеграбилитета линеарних диференцијалних једначина чији коефицијенти имају облике унапред дате.* Годишен зборник на Фил. факултет Скопје, кн. 2. 1949, Стр. 207—246.

Nielsen, N. *Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen*, Leipzig, 1904, S. 16.

Bunicky, E. *Decomposition d'un operateur lineaire differentiel ordinaire a l'aide du systeme fondamental de l'equation differentielle corespondante*, Casopis pro postivani Matematiky a fisiky, R. 74. S. 3. 1950.

Goursat, E. *Propriétés générales de l'équation d'Euler et de Gauss*, Actualites scientifiques et industrielles, № 333 Paris, 1936.

Radl, Fr. *Ueber die verallgemeinerte Division Der Differentialpolynome*, Mathematische Zeitschrift, B. 31, S. 441—456.

Radl, Fr. *Ueber das verallgemeinerte gemeinsame Maß von zwei Differentialpolynome*, Math. Zeitschrift, B. 40, S. 375—386.

Popov, B. S., Sull'equazione di Bessel, Boll. della Unione Mathematica Italiana, Serie III, Anno VII, Num. 1 (pagg. 17—19).