ГОДИШЕН ЗБОРНИК
НА ФИЛОЗОФСКИОТ ФАКУЛТЕТ НА УНИВЕРЗИТЕТОТ ВО СКОПЈЕ
Природно-математички оддел
Книга 3 (1950), № 4

ANNUAIRE
DE LA FACULTÉ DE PHILOSOPHIE DE L'UNIVERSITÉ DE SKOPJE
Section des sciences naturelles
Tome 3 (1950), № 4

Dragoslav S. Mitrinović

O OPERACIJAMA MAX I MIN

Dragoslav S. Mitrinovitch

SUR LES OPERATIONS MAX ET MIN

Скопје — Skopje
1950

DRAGOSLAV S. MITRINOVIĆ

O OPERACIJAMA *MAX* I *MIN*

1. Posmatrajmo jedan konačan skup proizvoljnih realnih brojeva

$$E = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}.$$

Prema definiciji[1]), *max* $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ označava onaj (ili one) od n brojeva $a_1, a_2, \cdots, a_n$ koji nije premašen ni od jednog od ostalih brojeva tog skupa. Na analogi način definiše se operacija *min* $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

U skupu E operacije *max* i *min* uvek su izvodljive, drugim rečima skup E uživa *grupnu osobinu*[2]) ili, kako se to drukčije kaže, skup E zadovoljava *grupni stav*[3]) (prvi postulat).

Da bismo uprostili pisanje, označimo sa a, b, c tri ma koja elementa skupa E. Lako se pokazuje da operacije *max* i *min* zadovoljavaju ove zakone[4]):

I. *Idempotentni zakon:*

$$\max(a, a) = a, \quad \min(a, a) = a;$$

II. *Komutativni zakon:*

$$\max(a, b) = \max(b, a), \qquad \min(a, b) = \min(b, a);$$

III. *Asocijativni zakon:*

$$\max\{\max(a, b), c\} = \max\{a, \max(b, c)\},$$
$$\min\{\min(a, b), c\} = \min\{a, \min(b, c)\};$$

IV. *Apsorpcioni zakon:*

$$\max\{a, \min(a, b)\} = a,$$
$$\min\{a, \max(a, b)\} = a;$$

---

1) [1], str. XVI. Brojevi u zagradama odnose se na bibliografiju datu iza rezimea.

2) [2], paragraf 185.

3) [3], str. 10, paragraf 1.

4) [4], str. 104.

V. *Distributivni zakon:*

$$\max\{a, \min(b,c)\} = \min\{\max(a,b), \max(a,c)\},$$

$$\min\{a, \max(b,c)\} = \max\{\min(a,b), \min(a,c)\}.$$

Dakle, svaka od operacija *max* i *min* je komutativna, asocijativna i distributivna u odnosu na drugu operaciju.

Prenumerisavanjem uvek se može podesiti da su elementi $a_1, a_2, \cdots, a_n$ takvi da je

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n; \tag{1}$$

tada je za operaciju *max* jedinični element a_1, jer je, za svako $k\,(1 \leqslant k \leqslant n)$,

$$\max(a_1, a_k) = a_k.$$

Taj jedinični element je u isti mah i levi i desni.

Pod pretpostavkom (1), za *min* u skupu E jedinični element je a_n, jer je

$$\min(a_k, a_n) = a_k$$

za svako $k\ (1 \leqslant k \leqslant n)$. I u ovom slučaju a_n je dvostrani jedinični element.

Za operaciju *max* kao i za operaciju *min* skup E čini grupu u slučaju kada su elementi a_i međusobno jednaki, tj. $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Navešćemo sada jednu interesantnu osobinu operacija *max* i *min* koju algebrista O. Ore[5] naziva *neobična* (peculiar) *osobina*. Ona se može ovako formulisati:

Za tri ma koja realna broja a, b, c koji pripadaju skupu E važi relacija

$$\begin{aligned} &\min\{\max(a,b),\ \max(a,c),\ \max(b,c)\} \\ &= \max\{\min(a,b),\ \min(a,c),\ \min(b,c)\}, \end{aligned} \tag{2}$$

prema kojoj izraz što se nalazi na jednoj strani zadržava svoju vrednost kada se operacije max *i* min *međusobno razmene.*

2. U prethodnom paragrafu izneli smo nekoliko, većim delom poznatih osobina operacija *max* i *min*, i to iz ovih razloga:

1° što u matematičkoj literaturi na jezicima jugoslovenskih naroda o ovome nije ništa pisano;

[5] [4], str. 107.

2^0 što bismo želeli da od napred izloženog i od onog što sleduje stvorimo jednu celinu[6] o operacijama *max* i *min*.

U vezi sa relacijom (2) može se postaviti pitanje o tome da li ima izraza opštijih od izraza

$$\min\{\max(a,b),\ \max(a,c),\ \max(b,c)\}$$

koji uživaju *neobičnu* osobinu da im vrednost ostaje invarijantna ako se operacije *max* i *min* međusobno razmene. Na ovo pitanje odgovor je potvrdan, kao što će niže biti pokazano.

3. Iz skupa E uzmimo p ma kojih različitih elemenata

$$A_1, A_2, \cdots, A_p \qquad (p \leqslant n) \tag{3}$$

koje smo pre novog označavanja uredili tako da je

$$A_1 < A_2 < \cdots < A_p \tag{4}$$

i obrazujmo sve kombinacije bez ponavljanja klase k $(1 \leqslant k \leqslant p)$. Tako ćemo dobiti $\binom{p}{k}$ kombinacija

$$\begin{matrix} A_1, A_2, \cdots, A_k; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{p-k+1}, A_{p-k+2}, \cdots, A_p. \end{matrix} \tag{5}$$

Primenom operacija *max* i *min* na sve kombinacije (5), mogu se obrazovati ova dva izraza

$$M = \max\{\min(A_1, A_2, \cdots, A_k), \cdots, \min(A_{p-k+1}, A_{p-k+2}, \cdots, A_p)\}, \tag{6}$$

$$N = \min\{\max(A_1, A_2, \cdots, A_k), \cdots, \max(A_{p-k+1}, A_{p-k+2}, \cdots, A_p)\}. \tag{7}$$

---

[6]) A. Suškevič [6] i M. Fedoseev [7] bavili su se sistemima sa dve operacije za koje važe dva distributivna zakona. Za ilustraciju teorije uzimali su operacije *max* i *min*. Sa radovima Suškeviča i Fedoseeva upoznali smo se preko referata koje su doneli:

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik (Bd. 60, Jahrgang 1934, S. 902, referent Wielandt); i

Mathematical Reviews (Vol. 3, 1942, p. 36, referent Knebelman).

Ukoliko je to bilo mogućno, koristili smo navedene referate da bismo osobine operacija *max* i *min* izneli što potpunije.

Poslednje dve relacije, vodeći računa o (4), postaju respektivno

$$M = \max(A_1, \cdots, A_{p-k+1}) = A_{p-k+1}, \tag{8}$$

$$N = \min(A_k, \cdots, A_p) = A_k. \tag{9}$$

Izrazi M i N biće jednaki ako je

$$k = p - k + 1,$$

tj. kada je

$$p = 2k - 1,$$

što znači da je p neparan broj.

Prema tome, može se formulisati ovaj rezultat:

Teorema.[7] *Kada je p jedan neparan broj, tada p proizvoljnih brojeva $A_1, A_2, \cdots, A_p$, koji pripadaju skupu realnih brojeva, zadovoljavaju relaciju*

$$\min\{\max(A_1, A_2, \cdots, A_k), \cdots, \max(A_{p-k+1}, A_{p-k+2}, \cdots, A_p)\} \tag{10}$$

$$= \max\{\min(A_1, A_2, \cdots, A_k), \cdots, \min(A_{p-k+1}, A_{p-k+2}, \cdots, A_p)\}$$

gde su operacije max *i* min *koje se javljaju u zagradama* { } *primenjene na sve kombinacije klase k* $(k = (p+1)/2)$, *obrazovane od p navedenih brojeva* (3).

Relacija (10) obuhvata, kao partikularni slučaj, poznatu relaciju (2). Zaista, ako se u (10) stavi $p = 3$, što povlači za sobom $k = 2$, dobija se relacija (2).

Za $p = 5$, $k = 3$ imamo ovu relaciju:

$$\min\{\max(a, b, c), \max(a, b, d), \max(a, b, e), \max(a, c, d), \max(a, c, e), \max(a, d, e), \max(b, c, d), \max(b, c, e), \max(b, d, e), \max(c, d, e)\}$$

$$= \max\{\min(a, b, c), \min(a, b, d), \min(a, b, e), \min(a, c, d), \min(a, c, e), \min(a, d, e), \min(b, c, d), \min(b, c, e), \min(b, d, e), \min(c, d, e)\}$$

[7]) Ovu smo teoremu objavili u jednom kratkom članku koji je prikazan na sednici Akademije nauka u Parizu [5].

4. Analiziranjem relacija (8) i (9) dolazi se do ovih nejednakosti

$$(11) \qquad M > N$$

za $1 \leqslant k \leqslant \left[\frac{p+1}{2}\right]$, gde je p prirodan paran broj,

za $1 \leqslant k < \frac{p+1}{2}$, gde je p prirodan neparan broj;

$$(12) \qquad M < N$$

za $\left[\frac{p+1}{2}\right] < k \leqslant p$, gde je p prirodan paran broj,

za $\frac{p+1}{2} < k \leqslant p$, gde je p prirodan neparan broj.

U ovim formulama $\left[\frac{p+1}{2}\right]$ znači najveći ceo broj sadržan u $\frac{p+1}{2}$.

5. Gore navedenu teoremu formulisali smo, pošto smo prethodno dokazali teoremu koja će niže biti navedena.

Posmatrajmo jedan skup M i njegove ma koje parcijalne skupove

$$(13) \qquad M_1, M_2, \cdots, M_n.$$

Iz skupa (13) izdvojimo p $(1 \leqslant p \leqslant n)$ proizvoljnih parcijalnih skupova M_i koje ćemo označiti sa

$$A_1, A_2, \cdots, A_p,$$

i od njih formirajmo sve kombinacije bez ponavljanja klase k $(1 \leqslant k \leqslant p)$. Na taj način dobijamo $\binom{p}{k}$ skupova

$$(14) \qquad \begin{gathered} \{A_1, A_2, \cdots, A_k\}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \{A_{p-k+1}, A_{p-k+2}, \cdots, A_p\}. \end{gathered}$$

Primenom operacija $\wedge$ (*presek*) i $\vee$ (*unija*) na (14), možemo obrazovati dva nova skupa:

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{gathered} P_1 = A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_s = A_{p-k+1} \wedge A_{p-k+2} \wedge \cdots \wedge A_p; \end{gathered}$$

$$
\text{(II)} \qquad \begin{aligned} Q_1 &= A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_k, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Q_s &= A_{p-k+1} \vee A_{p-k+2} \vee \cdots \vee A_p, \end{aligned}
$$

gde je $s = \binom{p}{k}$.

Uzimajuči u obzir uvedene oznake, može se formulisati ova

Teorema. Kada je p *neparan broj*, k $= (p+1)/2$, $s = \binom{p}{k}$, *tada postoji jednakost*

$$
(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \vee \cdots \vee (A_{p-k+1} \wedge A_{p-k+2} \wedge \cdots \wedge A_p)
$$

$$
= (A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_k) \wedge \cdots \wedge (A_{p-k+1} \vee A_{p-k+2} \vee \cdots \vee A_p),
$$

gde svaka strana jednakosti sadrži s *izraza između zagrada* ( ) *i gde je, na primer,* $A_1, A_2, \cdots, A_k$ *jedna od kombinacija klase* k *formiranih od* p *parcijalnih skupova jednog datog skupa* A.

Poslednja relacija sadrži, kao partikularni slučaj, Dedekind-ovu aksiomu[8])

$$
(A_1 \wedge A_2) \vee (A_1 \wedge A_3) \vee (A_2 \wedge A_3)
$$

$$
= (A_1 \vee A_2) \wedge (A_1 \vee A_3) \wedge (A_2 \vee A_3).
$$

---

[8]) [8], str. 51; [9], str. 133, obrazac L 6; [10], str. 239, obrazac 8. Napomenimo da je Dedekind dao svoj uslov u obliku

$$
(A+(B-C)) - (B+C) = (A-(B+C)) + (B-C),
$$

gde su A, B, C tri ma kakva modula i gde

$A+B$ znači najveći zajednički delilac (suma = unija);
$A-B$ znači najmanji zajednički sadržalac (presek).
Oznake koje su sada u upotrebi praktičnije su.