ГОДИШЕН ЗБОРНИК
НА ФИЛОЗОФСКИОТ ФАКУЛТЕТ НА УНИВЕРЗИТЕТОТ ВО СКОПЈЕ
Природно-математички оддел
Книга 3 (1950), № 1

ANNUAIRE
DE LA FACULTÉ DE PHILOSOPHIE DE L'UNIVERSITÉ DE SKOPJE
Section des sciences naturelles
Tome 3 (1950), № 1

Dragoslav S. Mitrinović

POVODOM GÖRTLER-OVIH REZULTATA O LINEARNOJ DIFERENCIJALNOJ JEDNAČINI DRUGOG REDA

Dragoslav S. Mitrinovitch

SUR LES RESULTATS DE GÖRTLER RELATIFS A L'EQUATION DIFFERENTIELLE LINEAIRE DU SECOND ORDRE

Скопје — Skopje
1950

Примено на 6 јуни 1950

DRAGOSLAV S. MITRINOVIC

POVODOM GÖRTLER-OVIH REZULTATA O LINEARNOJ DIFERENCIJALNOJ JEDNAČINI DRUGOG REDA

1. Da bi dopunio Kamke-ovu zbirku diferencijalnih jednačina[1]), Görtler[2]) je naveo četrnaest tipova integrabilnih linearnih diferencijalnih jednačina drugog reda. Kao matematičar koji se bavi pitanjima primenjene matematike, Görtler se zadržao na onim tipovima koji mogu da budu od interesa u primenama. Do svojih rezultata Görtler je došao, kako on sâm kaže, delom slučajno, delom pri proučavanju određenih problema primenjene matematike[3]). Pomenute slučajeve integrabiliteta Görtler je naveo bez ikakvih komentara tako da ne znamo kako je te rezultate dobio.

U ovom radu pokazaćemo, da svi Görtler-ovi slučajevi integrabiliteta, izuzev jednoga[4]), proističu iz činjenice: *da se linearna jednačina*

$$\varphi_0(x)\,y'' + \varphi_1(x)\,y' + \varphi_2(x)\,y = 0 \tag{1}$$

integrali pomoću kvadratura, ako se može svesti na sistem vida

$$\begin{aligned} F(x)\,y' + G(x)\,y &= z, \\ H(x)\,z' + I(x)\,z &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

koji je integrabilan kada su proizvoljne funkcije F, G, H, I *neprekidne i diferencijabilne u posmatranom intervalu promenljive* x.

---

1) E. Kamke, *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen*, Bd. I, 3. Auflage, Leipzig, 1944. — Videti naročito deo: C. *Einzel-Differentialgleichungen*, S. 289—636, 638—660.

2) H. Görtler, *Ergänzungen zu: Kamke, Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen (Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, Bd. 22, 1942, S. 233—234).

3) Ovo je doslovan citat iz navedene Görtler-ove rasprave: „Ich habe die teilweise zuffällig, teilweise im Rahmen bestimmter Fragestellungen der angewandten Mathematik gefundenen Ergebnisse nur so weit verallgemeinert, als mir dies aus Zeitgrunden gegenwä tig möglich war.“

4) Taj se slučaj odnosi na jednu jednačinu u čijem se rešenju pojavljuje cilindrička funkcija.

Koristeći se navedenom primedbom[5]), u datoj i generalisanoj formi, uspeli smo da dobijemo niz kriterijuma integrabiliteta linearnih jednačina određenog tipa, i da tim kriterijumima obuhvatimo, kao partikularne slučajeve, mnogobrojne izolovane rezultate („slučajne" rezultate). Takav je slučaj i sa Görtlerovim rezultatima, kao što će dalje biti pokazano.

2. Ako se iz sistema (2) eliminiše funkcija z, dobija se linearna jednačina drugog reda

$$FHy'' + (F'H + FI + GH)\,y' + (G'H + GI)\,y = 0. \tag{3}$$

Stavljajući

$$F \equiv 1\,,\ G \equiv f(x)\,,\ H \equiv 1\,,\ I \equiv g(x),$$

jednačina (3) postaje

$$y'' + (f + g)\,y' + (f' + fg)\,y = 0, \tag{4}$$

a to je Görtler-ova jednačina [*G*. 6; *K*. S. 643, Gl. 2.77*a*][6]).

Ako se u (3) stavi:

$$F \equiv f(x),\ G \equiv 1,\ H \equiv 1,\ I \equiv g(x),$$

dobija se

$$fy'' + (f' + fg + 1)\,y' + gy = 0, \tag{5}$$

što pretstavlja Görtler-ov slučaj [*G*. 14; *K*. S. 657, Gl. 2.444*a*].

---

[5]) 1. D. S. Mitrinovitch, *Sur un cas de réductibilité d'équations différentielles linéaires (Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 230, 1950, p. 1130—1132);

2. D. S. Mitrinović, *Postupak za formiranje kriterijuma integrabiliteta linearnih diferencijalnih jednačina čiji koeficijenti imaju oblike unapred date (Godišen zbornik na Filozofskiot fakultet na Univerzitetot vo Skopje*, knjiga 2, 1949, str. 209—246);

3. D. S. Mitrinovitch, *Sur un procédé fournissant des équations différentielles linéaires intégrables d'un type assigné d'avance (Publications de l'Institut de l'Académie serbe des sciences*, t. 3, 1950, p. 227—234).

[6]) Ova oznaka znači da je odnosna jednačina numerisana pod brojem 6 u navedenoj Görtler-ovoj raspravi i da je uneta u navedenu Kamke-ovu zbirku, na str. 643 pod № 2.77*a*. U ovoj raspravi koristićemo se nviše mahova navedenom oznakom, gde je *G*. skraćenica od *Görtler* i *K*. skraćenica od *Kamke*.

Jednačina (4) svodi se na sistem

$$y' + f(x) y = z\,,$$

$$z' + g(x) z = 0\,.$$

Jednačina (5) svodi se na sistem

$$f y' + y = z\,,$$

$$z' + g z = 0\,.$$

Jednačina (3), u slučaju kada je:

$$F \equiv x, \quad G \equiv f(x) - a, \quad H \equiv x, \quad I \equiv a - 1$$

$$(a = \text{const}),$$

postaje

$$x^2 y'' + x f y' + [a(1-a) + (a-1) f + x f'] y = 0 \tag{6}$$

i pretstavlja G ö r t l e r -ovu jednačinu [*G*. 12; *K*. S. 648, Gl. 2.218*a*].

Jednačina (6) se svodi na sistem

$$x y' + (f - a) y = z\,,$$

$$x z' + (a - 1) z = 0\,.$$

Kada je:

$$F \equiv 1, \quad G \equiv -a f(x), \quad H \equiv 1, \quad I \equiv (a+1) f(x)$$

$$(a = \text{const}),$$

jednačina (3) postaje

$$y'' + f y' - [a f' + a(a+1) f^2] y = 0,$$

i to je G ö r t l e r -ov slučaj [*G*. 5; *K*. S. 643, Gl. 2.76*a*].

Poslednja jednačina može se svesti na sistem:

$$y' - a f y = z,$$

$$z' + (a+1) f z = 0.$$

Ako je

$$F \equiv x, \quad G \equiv a + b\,x, \quad H \equiv x, \quad I \equiv f(x) - b\,x + a - 1$$

$$(a, b = \text{const}),$$

jednačina (3) dobija oblik

$$x^2 y'' + x(f + 2a)\,y' + [a(a-1) - b^2 x^2 + (a + b\,x) f]\,y = 0,$$

što je takođe Görtler-ov slučaj [*G.* 13; *K.* S. 648, Gl. 2.218*b*].

Poslednja jednačina svodljiva je na sistem

$$x\,y' + (a + b\,x)\,y = z,$$

$$x\,z' + (f - b\,x + a - 1)\,z = 0.$$

3. Jednačina (3), u slučaju kada je:

$$F \equiv 1, \quad G \equiv -f(x), \quad H \equiv 1, \quad I \equiv f(x),$$

dobija vid

(7) $$y'' = (f' + f^2)\,y.$$

Ova jednačina može da se svede na sistem

$$y' - f\,y = z,$$

$$z' + f\,z = 0.$$

Jednačina Hill-ova tipa [*G.* 1; *K.* S. 641, Gl. 2.23*a*]

(8) $$y'' = \left[\frac{a^2 + b^2}{2} + c^2 + (2ac + b)\cos x + (2bc - a)\sin x + \frac{a^2 - b^2}{2}\cos 2x + ab\sin 2x\right] y$$

$$(a, \; b, \; c = \text{const})$$

spada takođe u tip (7), gde je

$$f(x) = a\cos x + b\sin x + c.$$

Napomenimo da je mogućno, polazeći od jednačine (7), formirati integrabilne Hill-ove jednačine daleko opštijeg oblika od slučaja (8) koji je naveo Görtler.

Görtler-ova jednačina [*G.* 2; *K.* S. 640, Gl. 2.20*a*]

$$y'' = [a^2 + b(1 + 2a)e^x + b^2 e^{2x}]\, y \tag{9}$$

takođe je tipa (7), što je Kamke već konstatovao, jer je ovde

$$f(x) = a e^x + b x.$$

Jednačina (9) svodi se na sistem:

$$y' - (a e^x + b x) y = z,$$

$$z' + (a e^x + b x) z = 0.$$

4. Posmatrajmo sada jednačinu [*G.* 4 (*a*); *K.* S. 641, Gl. 2.63*a*]

$$y'' + (a + b e^x) y' + (a_1 + b_1 e^x + c_1 e^{2x}) y = 0, \tag{10}$$

gde su a, b, a_1, b_1, c_1 konstante.

Görtler je naveo da je jednačina (10) integrabilna, ako je:

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha(a - \alpha), \\ b_1 &= b\alpha + 2\alpha\beta - a\beta - \beta, \\ c_1 &= -\beta(b + \beta), \end{aligned} \tag{11}$$

$(\alpha, \beta =$ proizvoljni parametri$)$.

U jednom ranijem radu[7]) pokazali smo da je jednačina (10), uz uslove (11), svodljiva na jedan sistem oblika (2) i tom prilikom smo dobili dosta opšte rezultate za jednačinu oblika

$$y'' + (a e^{sx} + b) y' + (A e^{2sx} + B e^{sx} + C) y = 0$$

$$(s, a, b, A, B, C = \text{const})$$

koja sadrži jednačinu (10), kao partikularni slučaj.

---

[7]) Videti citat [5]) pod 2 i 3.

(10) i (11) obuhvataju, kao partikularni slučaj, rezultat: [*G.* 4; *K.* S. 641, Gl. 2.63*a*].

5. Uzmimo sada jednačinu [*G.* 8; *K.* S. 644, Gl. 2.115*b*]

$$(12)\qquad x y'' + 2(1 + b x) y' + \left[2 b + \left(b^2 - \frac{1}{4}\right) x - c^2 x e^{2x}\right] y = 0.$$

Jednačina (12) svodi se na sistem

$$x y' + \left[\left(b + \frac{1}{2}\right) x + c x e^x + 1\right] y = z,$$

$$z' + \left[\left(b - \frac{1}{2}\right) - c e^x\right] z = 0.$$

Jednačina [*G.* 9; *K.* S. 644, Gl. 2.115*c*]

$$x y'' + 2(1 + b x) y' + [2 b + b^2 x + c x e^x (1 - c e^x)] y = 0$$

svodi se na sistem

$$x y' + (b x + c x e^x + 1) y = z,$$

$$z' + (b - c e^x) z = 0.$$

Jednačina [*G.* 10; *K.* S. 647, Gl. 2.207*a*]

$$x^2 y'' + (a x + b) x y'$$

$$+ [A(a - A) x^2 + (A b + B a - 2 A B) x + B(b - B - 1)] y = 0$$

svodljiva je na sistem jednačina

$$x y' + (A x + B) y = z,$$

$$x z' + [(a - A) x + (b - B - 1)] z = 0.$$

6. Posmatrajmo sada jednačinu [*G.* 11; *K.* S. 648, Gl. 2.212*a*]

$$(13)\qquad x^2 y'' + (a x^2 + b x + c) x y' + (A x^3 + B x^2 + C x + D) y = 0,$$

gde su a, b, c, A, B, C, D proizvoljne konstante.

Ako se u (3) stavi:

$$F \equiv x^{k+2}, \quad G \equiv \lambda_1 x^{k+3} + \lambda_2 x^{k+2} + \lambda_3 x^{k+1},$$

$$H \equiv 1, \quad I \equiv \mu$$

(k, λ_1, λ_2, λ_3, μ = proizvoljne konstante),

posle skraćivanja dobija se jednačina oblika (13), gde je:

$$\begin{aligned}
a &= \lambda_1, \\
b &= \lambda_2 + \mu, \\
c &= \lambda_3 + k + 2, \\
A &= \lambda_1 \mu, \\
B &= (k+3)\lambda_1 + \lambda_2 \mu, \\
C &= (k+2)\lambda_2 + \lambda_3 \mu, \\
D &= (k+1)\lambda_3.
\end{aligned} \tag{14}$$

Iz poslednjih relacija izlazi da su od sedam koeficijenata jednačine (13) pet proizvoljni.

Da bismo naš rezultat doveli u vezu sa G ö r t l e r-ovim, rešićemo sistem (14) po

$$A, B, C, D, \lambda_1, \mu, k,$$

pa se dobija:

$$\begin{aligned}
A &= a(b-r), \\
B &= a(c-s+1) + r(b-r), \\
C &= bs + cr - 2rs, \\
D &= s(c-s-1), \\
\lambda_1 &= a, \\
\mu &= b-r, \\
k &= c-s-2.
\end{aligned}$$

Proizvoljne parametre λ_2 i λ_3 označili smo respektivno sa r i s.

Tako smo dobili Görtler-ov slučaj u obliku koji je tome rezultatu dao Kamke [*G.* 11(2); *K.* S. 648, Gl. 2.212*a* (*b*)].

Na osnovu izloženog može se formulisati ovaj rezultat: *Diferencijalna jednačina* (13), *u kojoj je:*

$$A = a(b-r), \quad B = a(c-s+1) + r(b-r),$$

$$C = bs + cr - 2rs, \quad D = s(c-s-1)$$

$$(a, b, c, r, s = \text{proizvoljni parametri})$$

svodljiva je na sistem

$$x^{c-s} y' + (a x^{c-s+1} + r x^{c-s} + s x^{c-s-1}) y = z,$$

$$z' + (b-r) z = 0.$$

Pođimo opet od jednačine (3) i neka je sada

$$F(x) \equiv x^{k+2}, \quad G(x) \equiv \lambda_1 x^{k+2} + \lambda_2 x^{k+1},$$

$$H(x) \equiv 1, \quad I(x) \equiv \mu_1 x + \mu_2.$$

Jednačina (3), u ovom slučaju, dobija oblik (13), gde je:

$$a = \mu_1,$$

$$b = \mu_2 + \lambda_1,$$

$$c = \lambda_2 + k + 2,$$

$$A = \lambda_1 \mu_1,$$

$$B = \lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1,$$

$$C = (k+2) \lambda_1 + \lambda_2 \mu_2,$$

$$D = (k+1) \lambda_2.$$

Iz poslednjeg sistema izlazi:

$$A = ar,$$

$$B = a s + r (b - r),$$

$$C = b s + c r - 2 r s,$$

$$D = s (c - s - 1),$$

$$\mu_1 = a,$$

$$\mu_2 = b - r,$$

$$k = c - s - 2.$$

Ovde je mesto λ_1 i λ_2 stavljeno respektivno r i s.
Prema tome, imamo rezultat:
Diferencijalna jednačina (13), *gde je:*

$$A = a r, \quad B = a s + r (b - r),$$

$$C = b s + c r - 2 r s, \quad D = s (c - s - 1)$$

$$(a, b, c, r, s = \text{proizvoljni parametri}),$$

svodljiva je na sistem jednačina

$$x^{c-s} y' + (r x^{c-s} + s x^{c-s-1}) y = z,$$

$$z' + [a x + (b - r)] z = 0.$$

Posmatrani slučaj je upravo G ö r t l e r-ov slučaj integrabiliteta [*G.* 11 (1); *K.* S. 648, Gl. 2.212*a* (*a*)].

7. Ako se uzme:

$$F \equiv x, \quad G \equiv \lambda_0 x^2 + \lambda_1 x + \lambda_2, \quad H \equiv 1, \quad I \equiv \mu,$$

jednačina (3) dobija oblik

$$x y'' + (a x^2 + b x + c) y' + (A x^2 + B x + C) y = 0, \tag{15}$$

gde je

$$a = \lambda_0,$$

$$b = \lambda_1 + \mu,$$

$$c = \lambda_2 + 1 ,$$

$$A = \lambda_0 \mu ,$$

$$B = 2\lambda_0 + \lambda_1 \mu ,$$

$$C = \lambda_1 + \lambda_2 \mu .$$

Na osnovu izloženog može se formulisati ovaj stav:

Diferencijalna jednačina (15), *čiji koeficijenti zadovoljavaju dva uslova*

$$\begin{aligned} &A(c-2) = a(C-b) , \\ (16) \qquad &(c-2)^2 (B-2a) = (C-b)(bc-b-C) , \end{aligned}$$

svodljiva je na sistem

$$x y' + (\lambda_0 x^2 + \lambda_1 x + \lambda_2) y = z ,$$

$$z' + \mu z = 0 ,$$

gde je:

$$\lambda_0 = a ,$$

$$\lambda_1 = \frac{bc - b - C}{c-2} ,$$

$$\lambda_2 = c - 1 ,$$

$$\mu = \frac{C-b}{c-2} .$$

Ako stavimo

$$A = a(b+r) ,$$

gde je r jedan parametar, dobijamo, na osnovu relacija (16),

$$C = b + (c-2)(b+r) ,$$

$$B = 2a - b(b+r) .$$

Dalje je:

$$\lambda_0 = a , \ \lambda_1 = -r , \ \lambda_2 = c - 1 ; \ \mu = b + r .$$

Prema tome, poslednji stav glasi:

Diferencijalna jednačina (15), *gde je:*

$$A = a(b+r),$$

$$B = 2a - b(b+r),$$

$$C = b + (c-2)(b+r)$$

$$(a, b, c, r = \text{proizvoljni parametri}),$$

svodljiva je na sistem

$$xy' + (ax^2 - rx + c - 1)y = z,$$

$$z' + (b+r)z = 0.$$

Taj slučaj je takođe dobio G ö r t l e r [*G.* 7(1); *K.* S. 646, Gl. 125c(a)].

Stavljajući zatim

$$F \equiv x^{k+1}, \quad G \equiv \lambda_0 x^{k+2} + \lambda_1 x^{k+1}, \quad H \equiv 1, \quad I \equiv \mu,$$

jednačina (3) dobija, isto tako, oblik (15), gde je

$$a = \lambda_0,$$

$$b = \lambda_1 + \mu,$$

$$c = k + 1,$$

$$A = \lambda_0 \mu,$$

$$B = (k+2)\lambda_0 + \lambda_1 \mu,$$

$$C = (k+1)\lambda_1.$$

Otuda se zaključuje: jednačina (15), čiji koeficijenti zadovoljavaju ova dva uslova

$$c(ab - A) = Ca,$$

$$(c+1)a^3 + A(ab - A) = Ba^2,$$

svodljiva je na sistem

$$x^{k+1}\, y' + (\lambda_0\, x^{k+2} + \lambda_1\, x^{k+1})\, y = z\,,$$

$$z' + \mu\, z = 0\,,$$

gde je:

$$\lambda_0 = a\,,\quad \lambda_1 = b - \frac{A}{a}\,,\quad \mu = \frac{A}{a}\,,\quad k = c - 1.$$

Da bismo ovaj rezultat sveli na Görtler-ov slučaj [G. 7(2); *K*. S. 646, Gl. 2.125c(b)], stavimo

$$A = a\,(b + r)\,,$$

tako da se dobija stav:

Diferencijalna jednačina (15), *u kojoj je:*

$$A = a\,(b + r)\,,$$

(17) $$B = a\,(c + 1) - r\,(b + r)\,,$$

$$C = -c\,r$$

(a, b, c, r = proizvoljni parametri)

svodljiva je na sistem:

(18) $$x^c\, y' + (a\, x^{c+1} - r\, x^c)\, y = z\,,$$

$$z' + (b + r)\, z = 0\,.$$

Lako se izvodi i ovaj rezultat:

Sistem

$$x\, y' + (a\, x^2 - r\, x)\, y = z\,,$$

$$x\, z' + [(b + r)\, x + c - 1]\, z = 0\,,$$

posle izbacivanja funkcije z, *dovodi takođe do jednačine* (15), *čiji su koeficijenti definisani obrascima* (17).

Da bismo dobili Görtler-ov slučaj [*G*. 7(3); *K*. S. 646, Gl. 2.125c(c)], stavimo

$$F \equiv x\,,\quad G \equiv \lambda_1\, x + \lambda_2\quad H \equiv 1\,,\quad I \equiv \mu_1\, x + \mu_2\,,$$

pa se zaključuje:

Jednačina (15), *čiji koeficijenti zadovoljavaju uslove*

$$Ba^2 = a^3(c-1) + A(ab-A),$$

$$Ca^2 = A + (c-1)(ab-A),$$

svodljiva je na sistem:

$$xy' + (\lambda_1 x + \lambda_2)y = z,$$

$$z' + (\mu_1 x + \mu_2)z = 0,$$

gde je:

$$\lambda_1 = \frac{A}{a}, \quad \lambda_2 = c-1, \quad \mu_1 = a, \quad \mu_2 = b - \frac{A}{a}.$$

Ako se stavi

$$A = -ar,$$

dolazi se do ovog stava:

Diferencijalna jednačina (15), *u kojoj je:*

$$A = -ar,$$

$$B = a(c-1) - r(b+r),$$

$$C = b(c-1) + r(c-2)$$

$(a, b, c, r =$ proizvoljni parametri)

svodi se na sistem

$$xy' + (-rx + c - 1)y = z,$$

$$z' + (ax + b + r)z = 0.$$

Da bismo izveli Görtler-ov slučaj [*G.* 7(4); *K.* S. 646, Gl. 2.125*c* (d)], poći ćemo od funkcija

$$F \equiv x^{k+1}, \quad G \equiv \lambda x^{k+1}, \quad H \equiv 1, \quad I \equiv \mu_1 x + \mu_2.$$

U ovom slučaju za jednačinu (15) izvodimo zaključak:

Diferencijalna jednačina (15), *čiji koeficijenti zadovoljavaju uslove*

$$Ba^2 = A(ab-A),$$

$$Ca = Ac,$$

svodi se na sistem

$$x^c y' + \frac{A}{a} x^c y = z,$$

$$z' + \left(a x + b - \frac{A}{a}\right) z = 0.$$

Stavljajući

$$A = -a r,$$

poslednji zaključak može se ovako formulisati:

Diferencijalna jednačina (15), *gde je*

$$A = -a r, \quad B = -r(b+r), \quad C = -c r$$

$(a, b, c, r =$ proizvoljni parametri),

svodi se na sistem

$$x^c y' - r x^c y = z,$$

$$z' + (a x + b + r) z = 0.$$

8. Gore smo pokazali da Görtler-ovi slučajevi integrabiliteta proizlaze iz jednog zajedničkog izvora, što omogućava da se svi ti slučajevi uopšte.

Primer. Pođimo od jednačine

(19) $$x y'' + (a x^2 + b x + c) y' + (A x^2 + B x + C) y = 0,$$

gde je

$$A = a(b+r),$$

$$B = a(c+1) - r(b+r),$$

$$C = -c r$$

$(a, b, c, r =$ proizvoljni parametri).

Napred smo utvrdili da je jednačina (19) svodljiva na sistem

(20) $$x y' + (a x^2 - r x) y = z,$$
$$x z' + [(b+r) x + (c-1)] z = 0.$$

Posmatrajmo sada opštiji sistem

$$f(x)\,y' + (a\,x^2 - r\,x)\,y = z\,,$$
$$(21) \qquad x\,z' + [\,(b+r)\,x + (c-1)\,]\,z = 0\,,$$

gde je $f(x)$ proizvoljna funkcija.

Ako se iz (21) eliminiše z, dobija se

$$(22) \qquad \Phi_1(x)\,y'' + \Phi_2(x)\,y' + \Phi_3(x)\,y = 0\,,$$

gde je

$$\Phi_1(x) = x\,f(x)\,,$$

$$(23) \qquad \Phi_2(x) = x\,f'(x) + [\,(b+r)\,x + (c-1)\,]\,f(x) + (ax - r)\,x^2,$$

$$\Phi_3(x) = a\,(b+r)\,x^3 + [\,a\,(c+1) - r\,(b+r)\,]\,x^2 - c\,r\,x\,.$$

Jednačina (22), koja se može svesti na sistem (21), obuhvata očevidno jednačinu (19) kao partikularni slučaj.

Pošto funkcija $f(x)$ ima proizvoljan oblik, možemo je, na primer, izabrati tako da se koeficijenat uz y' u jednačini (22) anulira, tj. da je

$$(24) \qquad x\,\frac{d\,f}{d\,x} + \Big[(b+r)\,x + (c-1)\Big]\,f + (a\,x - r)\,x^2 = 0\,,$$

odakle se $f(x)$ može lako izračunati.

Jednačina (22), gde je funkcija $f(x)$ definisana linearnom jednačinom (24), dobija oblik

$$y'' = \Phi(x)\,y\,,$$

gde je

$$\Phi(x) = \frac{1}{f(x)}\Big\{a\,(b+r)\,x^2 + \Big[\,a\,(c+1) - r\,(b+r)\Big]\,x - cr\Big\}.$$

D. S. Mitrinovitch

SUR LES RÉSULTATS DE GÖRTLER RELATIFS À L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE DU SECOND ORDRE

(Résumé)

1. Afin de compléter le Recueil de Kamke[1] d'équations différentielles, Görtler[2] a indiqué les quatorze types des équations différentielles linéaires du second ordre, intégrables par quadratures. Comme mathématicien s'intéressant aux problèmes de Mathématiques appliquées, il a porté son attention sur des équations susceptibles d'être d'un intérêt dans des applications. Aux termes de Görtler même, il est parvenu à ses résultats, en partie par hasard, en partie en traitant certains problèmes de Mathématiques appliquées. Il y a lieu d'ajouter que Görtler indique ses cas d'intégrabilité sans aucuns renseignements sur le procédé à l'aide duquel il a obtenu les résultats en question.

2. Dans cet article on montre que, sauf un, tous les cas d'intégrabilité de Görtler dérivent d'une même source simple, à savoir du fait suivant:

Toute équation linéaire

$$\varphi_0(x)y''+\varphi_1(x)y'+\varphi_2(x)y=0 \tag{1}$$

s'intègre au moyen des quadratures si elle peut être réduite au système

$$\begin{aligned} F(x)y'+G(x)y&=z, \\ H(x)z'+I(x)z&=0 \end{aligned} \tag{2}$$

qui est intégrable toutes les fois que les fonctions F, G, H, I *sont continues et dérivables dans l'intervalle considéré de la variable* x.

3. A titre d'exemple, considérons l'équation de Görtler

$$x^2y''+(ax^2+bx+c)xy'+(Ax^3+Bx^2+Cx+D)y=0 \tag{3}$$

avec

$$A=a(b-r),\ B=a(c-s+1)+r(b-r),$$

$$C=bs+cr-2rs,\ D=s(c-s-1),$$

a, b, c, r, s étant des paramètres indépendants de x.

L'équation (3), dont l'intégrabilité est constatée par Görtler, est réductible, comme cela suit du notre procédé, au système intégrable

$$x^{c-s}y'+\left(ax^{c-s+1}+rx^{c-s}+sx^{c-s-1}\right)y=z, \tag{4'}$$

$$z'+(b-r)z=0. \tag{4''}$$

Il est évident que l'équation (3) se généralise si l'on part du dernier système d'équations et si l'on admet que les coefficients dans ces équations dépendent des fonctions arbitraires de x. Ainsi, par exemple, on aura une généralisation, si, au lieu de l'équation (4''), on prend l'équation

$$(4''') \qquad f(x)\, z' + (b - r)\, z = 0,$$

où $f(x)$ désigne une fonction arbitraire.

Par l'élimination de z des relations (4') et et (4), on obtient une équation de la forme (1) contenant l'équation (3) comme cas particulier pour $f(x) \equiv 1$.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

[1] E. Kamke, Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, Bd. I, Dritte Auflage, Leipzig, 1944. — Voir particulièrement la partie intitulée: C. Einzel - Differentialgleichungen, S. 289—636, 638—660.

[2] H. Görtler, Ergänzungen zu: Kamke, Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen (*Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, Bd. 22, 1942, S. 233—234).