ЈОЖЕ УЛЧАР

ЕДНО ГЕОМЕТРИСКО ТОЛКУВАЊЕ ЗА СРЕДНАТА КРИВИНА

(Примено на 30 јануари 1950 год.)

ЈОЖЕ УЛЧАР

ЕДНО ГЕОМЕТРИСКО ТОЛКУВАЊЕ ЗА СРЕДНАТА КРИВИНА

Целта на овој труд е давање обопштување на едно геометриско толкување на флексијата при просторните криви за средната кривина при површнините, какво што не сретнав во литературата што ми беше достапна.

1. Иследувајќи ја една дадена крива $\mathfrak{x}=\mathfrak{x}(s)$, каде што s е природниот параметар, околу една нејзина точка A, од која што го мериме и лакот s, добиваме со каноничко претставување[1]) на кривата околу таа точка за растојањето d на произволната точка M од кривата до нејзината ректификациона рамнина во A развитието

$$d=\frac{1}{2\rho}\cdot s^2-\frac{\rho'}{6\rho^2}\cdot s^3+\cdots,$$

каде што $\frac{1}{\rho}$ е флексијата, а $\rho'=\frac{d\rho}{ds}$, за точката A. Оттука следува

$$\frac{1}{\rho}=\lim_{s\to 0}\frac{2d}{s^2}. \tag{1}$$

2. Релацијата (1) уште не е подесна за обопштување. Затоа од неа ќе изведеме друга, прилагодена за тоа.

Нека е r растојање на ортогоналната проекција M' од точката M на спомenатата ректификациона рамнина до точката A. Тогаш, поради

$$\lim_{s\to 0}\frac{r}{|s|}=1,$$

---

1) Види на пр.: W. Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie* Bd. I, Berlin, 1945, S. 26.

што лесно се покажува, важи освен (1) и релацијата

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{r\to 0} \frac{2d}{r^2}. \tag{2}$$

3. Сега можеме да покажеме дека при површината $z = z(x, y)$ за нејзината средна кривина H во секоја точка за која што функцијата $z(x, y)$ дозволува развивање[1]), важи релацијата, сосем аналогна на (2).

Важи имено

$$\boxed{H = \lim_{r\to 0} \frac{2\,d_{cp}}{r^2}}, \tag{3}$$

каде што d_{cp} е средно растојање на оние точки од површината што се на исто растојање r од нормалата на површината во A, до тангенцијалната рамнина на таа површина во A.

Доказ:

Правоаглата координатна система ја поставуваме така да во развитието на функцијата $z(x, y)$ околу тачката A, за која што не интересува средната кривина на површината, одпадне константниот, линеарните и мешаниот квадратен член. Равенката па површината — нејзиното каноничко развитие — е тогаш

$$z = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2) + \cdots. \tag{4}$$

Површината (4) ја има xy - координатната рамнина како своја тангенцијална рамнина во A, x- и y- оски како главни правци во A, а главните кривини за таа точка се

$$\frac{1}{R_1} = a, \quad \frac{1}{R_2} = b.$$

Прејдувајќи кон поларните координати

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi$$

добиваме, за $r = \text{const.}$,

$$2\pi r d_{cp} = \int_0^{2\pi} z\, r\, d_{cp} = \frac{\pi}{2} r^3 (a+b) + r^4(\cdots),$$

или

$$2\,d_{cp} = r^2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + r^3(\cdots)$$

и, поради $H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$, и релацијата (3).

1) Доволно би било да се претпостави само дека функцијата има во некоја околина на таа точка непрекинати парцијални изводи до вклучително трети ред.

И. УЛЧАР

ОДНА ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЫ

(*Вывод*)

В этой работе дано обобщение одной геометрической интерпретации флексии пространственных кривых для средней кривизны поверхности.

Исходя от известной релации

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{s \to 0} \frac{2d}{s^2},$$

где $\frac{1}{\rho}$ представляет флексию данной кривой линии в некоторой точке A, d расстояние произвольной точки M кривой до её ректификационной плоскости в точке A, а s длину дуги кривой линии от A до M, — приходим к реляции

$$H = \lim_{r \to 0} \frac{2d_{cp}}{r^2},$$

где H средняя кривизна данной поверхности в некоторой точке A, а d_{cp} — среднее расстояние точек, находящихся на растоянии r от нормали к поверхности в точке A, до касательной плоскости к поверхности в точке A.

JOŽE ULČAR

EINE GEOMETRISCHE DEUTUNG DER MITTLEREN KRÜMMUNG

(*Auszug*)

Hier handelt es sich um eine Verallgemeinerung einer geometrischen Deutung der ersten Krümmung der Raumkurven auf die mittlere Krümmung der Flächen, welche ich in der mir zugänglichen Literatur nicht begegnet habe.

1. Für eine gegebene Kurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$, wo s ihr Bogen, gemessen aus einem ihren Punkte A, ist, gibt uns ihre kanonische Darstellung für die Entfernung d eines beliebigen Punktes M der Kurve von ihrer rektifizierenden Ebene in A die Entwichlung

$$d = \frac{1}{2\rho} \cdot s^2 - \frac{\rho'}{6\rho^2} \cdot s^3 + \cdots$$

wobei $\frac{1}{\rho}$ die erste Krümmung, $\rho' = \frac{d\rho}{ds}$, für den Punkt A ist. Demnach wird

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{s \to 0} \frac{2d}{s^2}. \tag{1}$$

2. Aus der Relation (1), die noch nicht für Verallgemeinerung geeignet ist, bekommt man, wenn man mit r die Entfernung der Ortogonalprojektion M' des Punktes M auf die erwähnte rektifizierende Ebene vom Punkte A bezeichnet, wegen

$$\lim_{s \to 0} \frac{r}{|s|} = 1,$$

was man leicht nachweist, die für Verallgemeinerung angepaßte Relation

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{r \to 0} \frac{2d}{r^2}. \tag{2}$$

3. Man beweist jetzt gleich daß es bei der Fläche $z = z(x, y)$ für ihre mittlere Krümmung H in jedem ihren Punkte, wo die Funktion $z(x, y)$ Entwicklung erlaubt – oder mindestens in einer Nähe dieses Punktes partielle stetige Ableitungen bis einschließlich dritter Ordnung hat – eine der Relation (2) ganz analoge Beziehung besteht.

Es gilt nämlich

$$\boxed{H = \lim_{r \to 0} \frac{2d_m}{r^2}}, \tag{3}$$

wo d_m die Mittelentfernung der im Abstand r von der Flächennormale durch A sich befindenden Flächenpunkte von der Tangentialebene der Fläche im A ist.

In der Tat, wählt man die Tangentialebene in A als xy–Koordinatenebene, dann bekommt man bei geeigneter Wahl der x- und y- Achse für die Flächengleichung ihre kanonische Entwicklung

$$z = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2) + \cdots,$$

wo $a = \frac{1}{R_1}$ und $b = \frac{1}{R_2}$ die Hauptkrümmungen der Fläche in A sind. Geht man dann zu den Polarkoordinaten

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

über, bekommt man bei $r = \text{const.}$

$$2\pi r d_m = \int_0^{2\pi} z r d\varphi = \frac{\pi}{2} r^3 (a + b) + r^4(\cdots),$$

oder

$$2d_m = r^2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + r^3(\cdots)$$

und, wegen $H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$, die Beziehung (3).