ДРАГОСЛАВ С. МИТРИНОВИЋ

О ЛИНЕАРНОЈ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОЈ ЈЕДНАЧИНИ ДРУГОГ РЕДА КОЈА СЕ ПОЈАВЉУЈЕ У ЈЕДНОМ ПРОБЛЕМУ МАТЕМАТИЧКЕ ФИЗИКЕ

(Примљено 17 децембра 1949 год.)

ДРАГОСЛАВ С. МИТРИНОВИЋ

О ЛИНЕАРНОЈ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОЈ ЈЕДНАЧИНИ ДРУГОГ РЕДА КОЈА СЕ ПОЈАВЉУЈЕ У ЈЕДНОМ ПРОБЛЕМУ МАТЕМАТИЧКЕ ФИЗИКЕ

1. Проблем којим се бавио професор Миланковић у расправи *Zur Theorie der Strahlenabsorption in der Atmosphäre*[1]) своди се, у крајњој анализи, на одређивање функције $\varepsilon(x)$ помоћу једне линеарне диференцијалне једначине другог реда којој одговара ова хомогена једначина:

$$\frac{d^2\varepsilon}{dx^2} - 3\left(\frac{d}{dx}\log a\right)\frac{d\varepsilon}{dx} \tag{1}$$

$$+\left[\frac{da}{dx} - a\frac{d}{dx}\log a + 2\left(\frac{d}{dx}\log a\right)^2 - \frac{d^2}{dx^2}\log a\right]\varepsilon = 0.$$

У тој једначини a означава једну функцију од x којом се може располагати произвољно.

Професор Миланковић, на крају поменуте расправе, навео је један случај интеграбилитета једначине (1), наиме:

$$a(x) = k_1\, e^{k_2 x},$$

где су k_1 и k_2 константе. У овом случају, општи интеграл једначине (1) дат је изразом

$$\varepsilon(x) = C_1\, e^{k_2 x} + C_2\, e^{2k_2 x}, \tag{2}$$

где C_1 и C_2 претстављају интеграционе константе.

2. Показаћемо да је могућно интегралити једначину (1) за ма какав облик функције $a(x)$.

---

[1]) *Annalen der Physik,* vierte Folge, Bd. 43, 1914, S. 623—638. Видети нарочито стр. 634.

Диференцијалној једначини (1) може се дати овај једноставнији облик:

$$\frac{d^2\varepsilon}{dx^2} - 3\frac{a'}{a}\frac{d\varepsilon}{dx} + \left(3\frac{a'^2}{a^2} - \frac{a''}{a}\right)\varepsilon = 0, \tag{3}$$

$$\left(a' = \frac{da}{dx}, \quad a'' = \frac{d^2a}{dx^2}\right).$$

Очевидно је да је функција

$$a(x)$$

једно партикуларно решење једначине (3).

Друго партикуларно решење једначине (3) дато је изразом:

$$a(x)\int a(x)\,dx.$$

Према томе, опште решење једначине (3) приказано је релацијом

$$\varepsilon(x) = C_1\,a(x) + C_2\,a(x)\int a(x)\,dx, \tag{4}$$

где су C_1 и C_2 интеграционе константе.

За случај када је

$$a(x) = k_1\,e^{k_2 x},$$

добија се, према (4),

$$\varepsilon(x) = C_1 k_1 e^{k_2 x} + C_2\frac{k_1^2}{k_2}e^{2k_2 x},$$

што је у складу са резултатом (2) проф. Миланковића.

3. У једначини (3) место функције $a(x)$ ставимо функцију $A(x)$ помоћу везе

$$a(x) = e^{A(x)}.$$

Једначина (3) добија тада облик

$$\frac{d^2\varepsilon}{dx^2} - 3A'\frac{d\varepsilon}{dx} + (2A'^2 - A'')\varepsilon = 0. \tag{5}$$

Ако се овде стави

$$A = -\frac{1}{3}\int f(x)\,dx,$$

једначина (5) постаје

$$\frac{d^2\varepsilon}{dx^2} + f(x)\frac{d\varepsilon}{dx} + \left[\frac{2}{9}f^2(x) + \frac{1}{3}f'(x)\right]\varepsilon = 0. \tag{6}$$

Ова једначина јесте партикуларни случај једначине

$$\varepsilon'' + f\varepsilon' - [\lambda(\lambda+1)f^2 + \lambda f']\varepsilon = 0 \tag{7}$$

$$[f = f(x),\ \lambda = \text{const.}]$$

коју је интегралио H. Görtler[1]).

Заиста, ако се у (7) стави

$$\lambda = -\frac{1}{3}$$

добија се управо једначина (6).

Görtler-ов резултат претставља партикуларни случај овог нашег става:

Диференцијална једначина

$$FHy'' + (F'H + FI + GH)y' + (G'H + GI)y = 0 \tag{8}$$

$$(F, G, H, I = \text{функције од } x)$$

може се свести на интеграбилан систем једначина

$$\begin{aligned} Fy' + Gy &= z, \\ Hz' + Iz &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Ако се у (8) стави

$$F \equiv 1, \quad G \equiv -\lambda f(x), \quad H \equiv 1, \quad I \equiv (\lambda+1)f(x)$$

добиће се наведени Görtler-ов случај.

Математички институт
Универзитет у Скопљу

Фебруара 1949

---

[1]) *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, Bd. 22, 1942, S. 233, Differentiagleichung (5).

Видети тако исто:

E. Kamke, *Differentialgleichungen: Lösungsmehtoden und Lösungen.* Bd. 1: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, dritte Auflage, Leipzig, 1944, S. 643, Differentialgleichung 2.76a.

Д. С. МИТРИНОВИЧ

О ЛИНЕЙНОМ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА, КОТОРОЕ ПОЯВЛЯЕТСЯ В ОДНОМ ВОПРОСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

(*Вывод*)

Диференциальное уравнение

$$\frac{d^2\varepsilon}{dx^2}-3\left(\frac{d}{dx}\log a\right)\frac{d\varepsilon}{dx} \tag{1}$$

$$+\left[\frac{da}{dx}-a\frac{d}{dx}\log a+2\left(\frac{d}{dx}\log a\right)^2-\frac{d^2}{dx^2}\log a\right]\varepsilon=0,$$

где a функция от x, появляется в одном вопросе, рассматриваемом Миланковичем.[1])

Миланкович указывает, что уравнение (1) интегрируемо в случае, если:

$$a(x)=k_1 e^{k_2 x}$$

$$(k_1,\ k_2=\text{const}).$$

В настоящей статье показываем что уравнение (1) может быть интегрировано и в случае произвольной функции $a(x)$, так как $a(x)$ – одно партикулярное решение уравнения (1), т. е.

$$\varepsilon_1(x)=a(x).$$

D. S. MITRINOVITCH

SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE DU SECOND ORDRE INTERVENANT DANS UN PROBLÈME DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

(*Résumé*)

1. L'équation différentielle (1)*), où a désigne une fonction de x dont on peut disposer arbitrairement, intervient dans un problème, considéré par Milankovitch[2]).

---

1) *Annalen der Physik*, vierte Folge, Bd. 43, 1914, S. 623—638. Смотреть особенно стр. 634.

*) Les formules numérotées par chiffres arabes se rapportent au texte en langue serbe.

2) *Annalen der Physik*, vierte Folge, Bd. 43, 1914, S. 623—638. *Cf.* notamment page 634.

Milankovitch a indiqué un cas d'intégrabilité de l'équation (1), à savoir

$$a(x)=k_1 e^{k_2 x}$$
$$(k_1,\ k_2=\text{const.}).$$

Dans cette Note nous montrons que l'équation (1), qui s'écrit plus simplement sous la forme (3), s'intègre pour une forme quelconque de la fonction $a(x)$.

En effet, l'équation (3) admet la fonction

$$\varepsilon_1=a(x)$$

comme une solution particulière.

La solution générale de l'équation (3) est donnée par (4), où C_1 et C_2 désignent des constantes d'intégration.

2. Si l'on pose

$$a(x)=exp\left(-\frac{1}{3}\int f(x)\,dx\right),$$

l'équation (3) prend la forme (6) et présente un cas particulier de l'équation (7), intégrée par H. Görtler[1]). Or, en posant

$$\lambda=-\frac{1}{3}$$

l'équation (7) est précisément l'équation (6).

Le résultat de Görtler en question présente un cas particulier de notre proposition suivante:

L'équation différentielle

$$FHy''+(F'H+FI+GH)y'+(G'H+GI)y=0$$
$$(F,\ G,\ H,\ I=\text{fonctions de } x)$$

est réductible au système intégrable

$$Fy'+Gy=z,$$
$$Hz'+Iz=0.$$

Si l'on pose

$$F\equiv 1,\quad G=-\lambda f(x),\quad H\equiv 1,\quad I\equiv(\lambda+1)f(x)$$

on retrouve le cas mentionné de Görtler.

---

1) *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik,* Bd. 22, 1942, S. 233, Differentialgleichung (5).