

ДРАГОСЛАВ С. МИТРИНОВИЋ

О ЈЕДНОЈ ДЕТЕРМИНАНТИ
ESCHERICH-OBA ТИПА

(Примљено 17 децембра 1949 год.)

ДРАГОСЛАВ С. МИТРИНОВИЋ

О ЈЕДНОЈ ДЕТЕРМИНАНТИ Escherich-ОВА ТИПА

Нека су:

1° a и b два произвољна броја;

2° n један цео позитиван број.

Посматрајмо правоугаону матрицу¹ $(n, n+1)$ и означимо је са M :

$$M = \left\| \begin{array}{cccccccc} n & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & n-1 & & & & & \\ & & & 2 & & & & \\ & & & & n-2 & & & \\ & & & & & 3 & & \\ & & & & & & n-3 & \\ & & & & & & & 4 & \\ & & & & & & & & n-1 & \\ & & & & & & & & & 2 & \\ & & & & & & & & & & n & \\ & & & & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & & & & n \end{array} \right\| \quad (1)$$

У матрици M на двама нацртаним паралелним правим линијама налазе се редом природни бројеви који су поређани у два супротна смисла.

¹ Та матрица састоји се од n врста и $(n+1)$ колона.

Полазећи од матрице M формирајмо другу матрицу N на тај начин што ћемо матрици M дописати као прву врсту ове бројеве

$$a^n, -a^{n-1}b, a^{n-2}b^2, \dots, (-1)^{n-1}ab^{n-1}, (-1)^n b^n. \quad (2)$$

Експоненти потенција чија је основа a јесу:

$$n, n-1, n-2, \dots, 1.$$

Исто тако забележимо експоненте потенција чија је основа b :

$$1, 2, 3, \dots, n.$$

Квадратна матрица N чија је прва врста (2) има ове особине:

1° Експоненти потенција чија је основа b налазе се на кореспондентним местима на главној дијагонали матрице N ;

2° Експоненти потенција чија је основа a налазе се на кореспондентним местима на дијагонали која је суседна главној дијагонали матрице N ;

3° Вредност детерминанте матрице N везана је са изразом

$$(a+b)^n$$

релацијом

$$|N| = n! (a+b)^n.$$

Последња особина може се доказати ако се пође од Escherich-ова резултата:

Детерминанта E реда $(n+1)$:

$$E = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -y_n & x_n \end{vmatrix} \quad (3)$$

има вредности¹⁾:

¹⁾ Видети на пример,

E. Pascal, *I Determinanti*, seconda edizione, Hoepli, Milano, 1923, p. 215.

$$\begin{aligned}
 E = & a_0 x_1 x_2 \dots x_n \\
 & + a_1 y_1 x_2 \dots x_n \\
 & + a_2 y_1 y_2 x_3 \dots x_n \\
 & + \dots \dots \dots \\
 & + a_n y_1 y_2 y_3 \dots y_n.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Наша детерминанта $|N|$ спада очевидно у класу детерминаната E .

У изразу (4) којим је дефинисана детерминанта (E) члан $(k+1)$ -ви гласи:

$$\begin{aligned}
 & a_k y_1 y_2 \dots y_k x_{k+1} x_{k+2} \dots x_n \\
 & (k < n).
 \end{aligned}$$

Одговарајући члан у развитуку детерминанте $|N|$ има облик:

$$(-1)^k a^{n-k} b^k (-n) (-n+1) \dots (-n+k-1) (k+1) \dots (n-1)n,$$

...

$$(-1)^k a^{n-k} b^k (-1)^k n(n-1) \dots (n-k+1) (k+1) \dots (n-1)n,$$

...

$$a^{n-k} b^k n(n-1) \dots (n-k+1) (k+1) \dots (n-1)n.$$

Посматрајмо сада вредност израза

$$\frac{1}{n!} n(n-1) \dots (n-k+1) (k+1) \dots (n-1)n.$$

Последњи израз, ако се напише у облику

$$\frac{n(n-1) \dots (n-k+1) (k+1) \dots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k(k+1) \dots n},$$

доводи до

$$\binom{n}{k},$$

што је и требало показати.

На детерминанту $|N|$ наишли смо проучавајући једно питање из теорије обичних линеарних диференцијалних једначина.

Д. С. МИТРИНОВИЧ

ОБ ОДНОМ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕ ТИПА Escherich

(Вывод)

Рассматривается определитель данный в тексте на французском языке.

Показатели степеней, имеющих за основу b , находятся соответственно на главной диагонали этого определителя. Показатели степеней, имеющих за основу a , находятся на линии параллельной с главной диагональю.

Простым вычислением показывается, что значение этого определителя, принадлежащего типу Escherich¹⁾, дано формулой

$$n! (a+b)^n.$$

D. S. MITRINOVITCH

SUR UN DÉTERMINANT DU TYPE D'Escherich

(Résumé)

On considère le déterminant suivant:

a^n	$-a^{n-1}b$	$a^{n-2}b^2$	$a^{n-3}b^3 \dots$	$(-1)^{n-1}ab^{n-1}$	$(-1)^n b^n$
n	1	0	0 ...	0	0
0	$n-1$	2	0 ...	0	0
0	0	$n-2$	3 ...	0	0
.....					
0	0	0	0 ...	$n-1$	0
0	0	0	0 ...	1	n

Les exposants des puissances ayant la base b se trouvent respectivement sur la diagonale principale de ce déterminant. Les exposants des puissances ayant la base a se trouvent respectivement sur la ligne parallèle à la diagonale principale.

Un calcul simple montre que la valeur de ce déterminant, rentrant dans le type d'Escherich¹⁾, est donnée par la formule

$$n! (a+b)^n.$$

1) См. на пример,
E. P a s c a l, *I Determinanti*, seconda edizione, Hoepli, Milano, 1923, p. 215.