NORMALA I TANGENTA SINTETSKIH POVRŠI

Risto Taševski[1]

Rezime

Urađen je geometrijski i matematički model i kompjuterski algoritam normale i tangente sintetskih površi formiranih iz splajn-kriva (spline) u dva pravca. Sintetske površi koriste se u geometrijskom i inženerskom dizajnu, a najviše u CAD/CAM sistemima. Izrada složenih sintetskih površi vrši se suvremenim NC mašinama koje sadrže visoko sofisticirane kontrolere i alate. Alat za obradu mora biti postavljen normalno na svaku tačku sintetske površi po kojoj se kreće. Neophodno je određivanje položaja alata pomoću matematičkog aparata.

Ključne reči: *sintetska površ, splajn-kriva*

1. UVOD

Za postizanje prefinjenih oblika mašinskih delova sa složenim geometrijskim oblikom u suvremenim dizajnerskim kućama neizbežna je primena takozvanih sintetskih površi. Sintetske površi pretstavljaju 3D površi, koje su spoj (sinteza) više sintetskih kriva u dva pravca, koje se

[1] Risto Taševski, D-r, Prof., Mašinski fakultet, Univerzitet "Sv. Kiril i Metodij", P.O. Box 464, 1000 Skopje, Republika Makedonija

karakterišu glatkom (neizlomljenom) krivolinijskom formom. Aktuelne su sintetske površi sastavljene iz splajn-kriva u dva pravca. Sintetska površ može se pretstaviti jednostavnim parametarskim izrazom. Parametarsko pretstavljanje sintetskih površi nastaje kontinuiranim funkcijama sa dva parametra *t* i *u*, koji se mogu menjati od minimalne do maksimalne vrednosti. Promenom vrednosti parametara *t* i *u* dobijaju se različne tačke kriva. Znači da *t* i *u* se ponašaju kao lokalne (parametarske) koordinate tačaka sintetske površi. Parametri *t* i *u* menjaju se u intervalu od *0* do *1*. Parametarski izraz sintetske površi:

$$P(t,u) = [xyz]^T = [x(t,u)y(t,u)z(t,u)]^T$$

gde $0 \le u \le 1$ i $0 \le t \le 1$

ili zbirom mreže kontrolnih tačaka u pravcu uzdužnih i naprečnih izvodnica:

$$P(t,u) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \left[x_{[i][j]}(t,u)\, y_{[i][j]}(t,u)\, z_{[i][j]}(t,u) \right]$$

Susedne kontrolne tačke povezuju se splajn-krivama u dva pravca:

$$f_{(xy)}(t) = \sum_{i=0}^{n} \left[x_{[i]}(t)\, y_{[i]}(t)\, z_{[i]}(t) \right]$$

$$f_{(xz)}(u) = \sum_{j=0}^{m} \left[x_{[j]}(u)\, y_{[j]}(u)\, z_{[j]}(u) \right]$$

Splajn-krive se definišu dopunskim tačkama dobijenih sledećim matematičkim izrazima koji zavise od parametara *u* i *t*:

$$x = x_0 B_0(t) + x_1 B_1(t) + x_2 B_2(t) + x_3 B_3(t)$$
$$y = y_0 B_0(t) + y_1 B_1(t) + y_2 B_2(t) + y_3 B_3(t)$$
$$z = z_0 B_0(t) + z_1 B_1(t) + z_2 B_2(t) + z_3 B_3(t)$$

gde

x,y,z - koordinate tačaka kriva

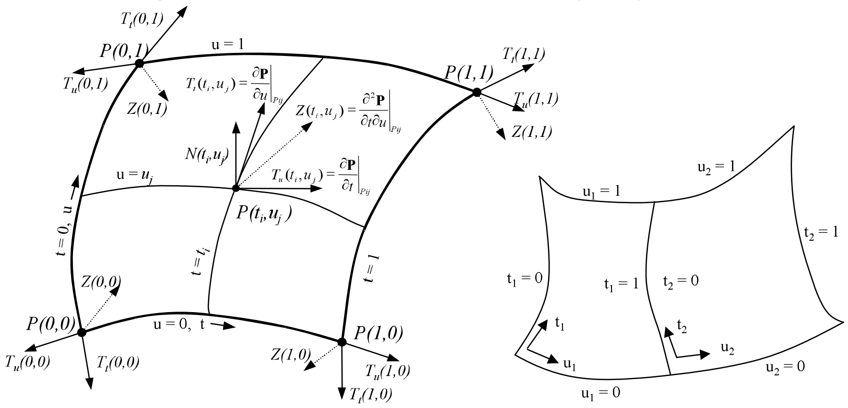
Bo(t) - (*Blending function*) funkcija spajanja

t – parametar

Broj dopunskih tačaka zavisi od vida primenjene krive, t.j. od funkcije spajanja kontrolnih tačaka kriva. U zavisnosti funkcije spajanja razlikujemo različite splajn-krive: *B-spline, Cubic B-spline*, Bezierova itd.

2. MATEMATIČKI IZRAZ TANGENTE I NORMALE SINTETSKE POVRŠI

Sintetska površ je omeđena delovima spljan-kriva dobijenih vrednostima parametara *t=0*, *t=1, u=0* i *u=1* (sl.1.).



Sl.1. Sintetska površ omeđena sa 4 splajn-krive i dve spojene sintetske površi

Sintetske površi mogu se definirati množestvom tačaka kroz koje prolaze splajn-krive. Pored tačaka kroz koje prolaze splajn-krive zadaju se granični uslovi. Za četvorougaonik, granični uslovi su pretstavljeni sa 16 vektora i 4 splajn-kriva. Četiri vektora položbe temena *P(0,0), P(0,1), P(1,0), P(1,1)*, osam tangentnih vektora (dva u svakom temenu) i četiri vektora zakrivljenosti (jedan u svakom temenu).

Kod raznih operacija i aplikacija vezanih za sintetske površi, potrebno je u pojedinim tačkama površi proračunati tangente *(*T_t i T_u*)*, normalu *(N)* i zakrivljenost *(Z)*.

Tangente u proizvoljnoj tački određuju se kao tangente parametarskih kriva koje prolaze kroz tačku. Parametarski izraz jedne krive dobija se iz opšte jednačine *P(t,u)*, za $t=t_i$, a druga za $u=u_j$, tako da t_i i u_j su parametarske koordinate tačaka površi (sl.1.). Tangente T_u i T_t dobijaju se određivanjem prvih izvoda dvuh kriva u proizvoljnoj tački. Normala površi *N* određuje se kao vektorski proizvod dvuh tangenta u proizvoljnoj tački. Zakrivljenost *Z* u proizvoljnoj tački je dupli izvod po *t* i *u*.

Ako je površ zadata u obliku *f(x,y,z)=0* onda jednačina tangentne ravni u proizvoljnoj tački *M(x,y,z)* će glasiti:

$$(X-x)\frac{\partial f}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial f}{\partial y}+(Z-z)\frac{\partial f}{\partial z}=0$$

Prava normalna tangentnoj ravni površi u tački *M* je normala površi:

$$\frac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

3. GEOMETRIJSKI I KOMPJUTERSKI ALGORITAM TANGENTE I NORMALE SINTETSKE POVRŠI

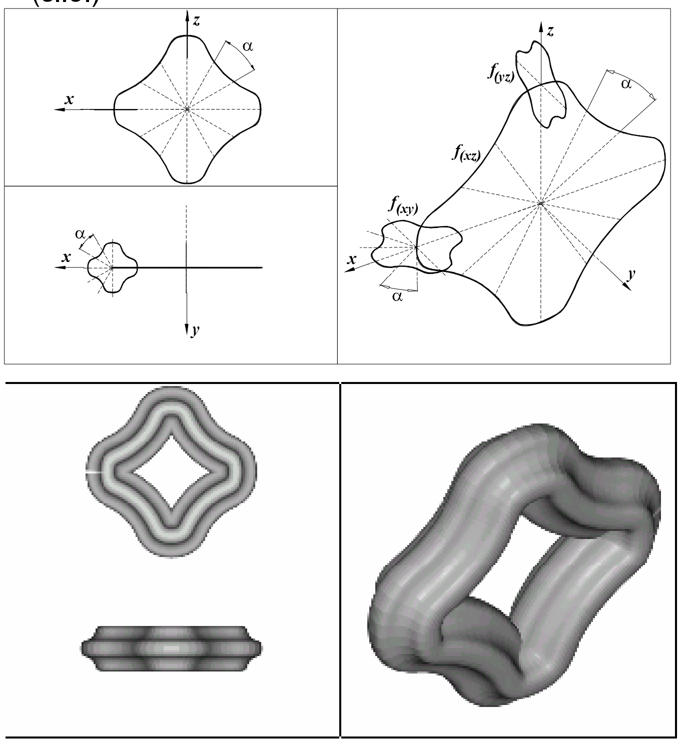
Problem postavlanja alata NC mašina normalno na površ komplikuje se time što projektovana površ nemora biti sintetska površ niti geometrijska funkcija. Kompjuterski algoritam dobijanje tangente i normale mora obuhvatiti sve možne varijante projektovanih površi. Kompjuterski algoritam mora zadavoljiti univerzalnost, odnosno importiranje površi koja može biti kreirana u bilo kojem crtačkom paketu.

Izvršena je analiza proizvolne sintetske površi, dobijene sintezom *Cubic B-spline* kriva u dva pravca. Sintetska površ dobija se klizanjem splajn-krive $f_{(xy)}$ koja leži u ravni *xy* po splajn-krivi $f_{(xz)}$ koja leži u ravni *xz* (sl.2.).

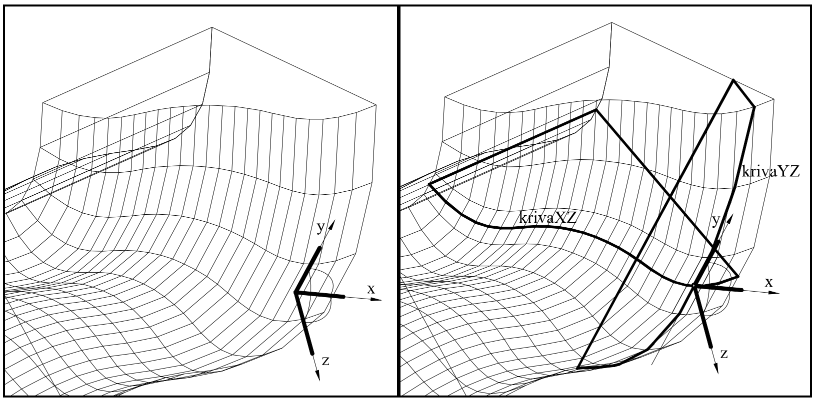
Geometrijski algoritam tangente i normale u određenoj tački sintetske površi sastoji se iz nekoliko operacija:

- presek sintetske površi u ravni *yz*
- povlačenje tangente i normale na dobijenu presečnu krivu $f_{(yz)}$

- presek sintetske površi u ravni *xz*
- povlačenje tangente i normale na dobijenu presečnu krivu $f_{(xz)}$ (sl.3.)

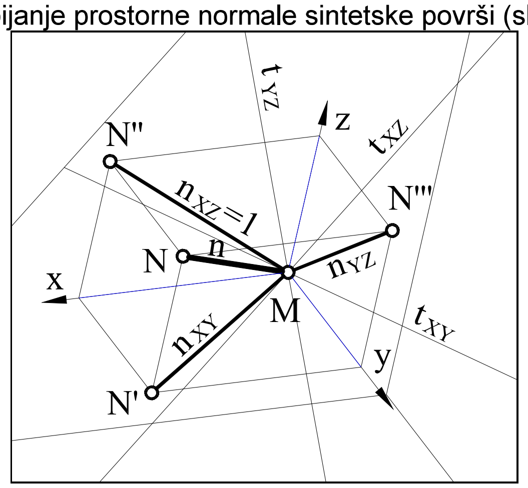


Sl. 2. *Sintetska površ formirana iz Cubic B-spline kriva* $f_{(xy)}$ *i* $f_{(xz)}$



Sl. 3. *Presečne krive $f_{(xz)}$ i $f_{(yz)}$ sintestske površi*

- dobijanje prostorne normale sintetske površi (sl.4.)



Sl. 4. *Dobijanje prostrne normale n u tački M sintetske površi*

Kompjuterski algoritam ima istu strukturu kao geometrijski algoritam, t.j. sastoji se iz istih operacija ili procedura. Softverska implementacija ostvaruje se softverskim paketom *Visual C++* korisćenjem biblioteka za programiranje *ADSRX*, koje su sastavni deo grafičkog paketa *AutoCAD*. Programiranje procedura korisćenjem *ADSRX* biblioteka e prezentovano u delu listinga 1 i 2.

Listing 1. *Presek sintetske površi u ravni yz*

```
ads_command      (RTSTR, "_section",
                 RTENAME, Mdel,
                 RTSTR, "",                 <presek površi (Mdel) u
ravni YZ>
                 RTSTR, "YZ",
                 RTSTR, "",
                 RTNONE);
Res = ads_entlast (KrivaYZ);               <dobijena presečna kriva YZ>
ads_command      (RTSTR, "_ucs",
                 RTSTR, "y",
                 RTSTR, "90",               <povratak UCS-a>
                 RTSTR, "",
                 RTNONE);
```

Listing 2. *Presek sintetske površi u ravni xz*

```
ads_command      (RTSTR, "_section",
                 RTENAME, Mdel,
                 RTSTR, "",                 <presek površi (Mdel) u
ravni XZ>
                 RTSTR, "XZ",
                 RTSTR, "",
                 RTNONE);
Res = ads_entlast (KrivaXZ);               <dobijena presečna kriva XZ>
ads_command      (RTSTR, "_ucs",
                 RTSTR, "x",
                 RTSTR, "90",               <povratak UCS-a>
                 RTSTR, "",
                 RTNONE);
```

4. ZAKLJUČAK

Aktuelnost istraživanja proizlazi iz potrebe izrade proizvoda formiranih iz sintetskih površi. Izrada proizvoda obavlja se pomoću prethodno pripremljenim programom (NC kodom) koji se importira u kompjuter NC mašine. Kretanje alata NC mašine je strogo definiran, odnosno alat mora biti postavljen normalno na svaku tačku površi. Kreiran je kompjuterski algoritam koji ima mogućnost importiranja objekata formiranih iz sintetskih površi. Kompjuterski program potpomognut ADSRX bibliotekama koristi grafički interfejs komercijalnog softverskog paketa AutoCAD. Procedura određivanja normale i tangente u svakoj tački sintetskih površi sadrži geometrijski i kompjuterski algoritam, i relativno ednostavne matematički izraze.

5. LITERATURA

1. Richard H. Bartels, John C. Beatty and Brian A. Barksy: *An Introduction to Splines for Use in Computer Graphics & Geometric Modeling,* CA: Morgan Kaufmann, Los Altos, 1987
2. Lyle Ramshaw, *Blossoming: A Connect-the-Dots Approach to Splines.* Technical Report 19. Digital Systems Research Center, June 21, 1987.
3. Jorge Stolfi: *Oriented Projective Geometry. A Framework for Geometric Computations.* Academic Press, Boston, 1991.
   Gerald Farin: *Curves and Surfaces for CAGD.* 3rd