

PROJEKCIJE 4D POVRŠI

Risto Taševski¹

Rezime

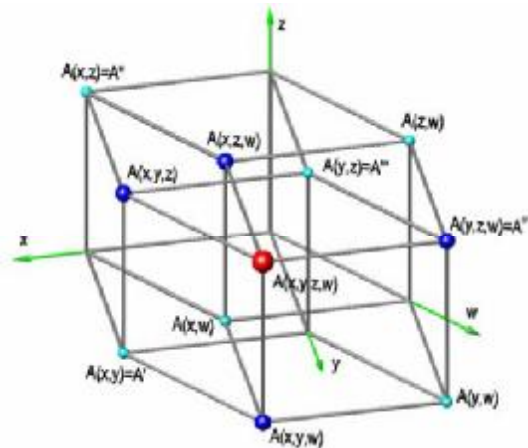
Urađen je geometrijski, matematički model i kompjuterski algoritam projekcija 4D površi zadatih funkcijama sa dve promenljive. Pretstavljjanje 4D površi svodi se na pretstavljjanje 4D tačkaka u 4D geometrijskom prostoru, tačke se transformiraju u 3D i u 2D prostor i prikazuju se na ekran. Dobijene tačke povezuju se u mrežu horizontalnih i vertikalnih izvodnica. Izvršena je analiza projekcija 4D površi i urađena je analogija između 3D površi i 4D površi.

Ključne reči: 4D geometrija, 4D prostor, 4D površ

1. 4D TAČKA

Tačka se definiše određenim brojem koordinata ili parametara od zavisnosti u kojem se prostoru nalazi. U 1D prostoru opredeljena je jednom koordinatom $A(x)$, u 2D prostoru sa dve koordinate $A(x,y)$, u 3D prostoru sa tri koordinate $A(x,y,z)$, u 4D prostoru sa četiri koordinate $A(x,y,z,w)$. Ako se tačka 4D prostora $A(x,y,z,w)$ projektuje u 3D prostor dobijaju se 4 projekcije na koordinatnim hiperravninama $A(x,y,z)$, $A(x,y,w)$, $A(x,z,w)$ i $A(y,z,w)$ i 6 projekcija na koordinatnim ravninama $A(x,y)$, $A(x,z)$, $A(y,z)$, $A(x,w)$, $A(y,w)$ i $A(z,w)$ (sl.1).

¹ Risto Taševski, Dr, prof., Univerzitet "Sv.Kiril i Metodij", Mašinski fakultet Skopje, R.Makedonija



Sl. 1. 4D tačka

2. 4D POVRŠI I KOMPJUTERSKI ALGORITAM

4D površi su površi kod kojih je pozicija svake tačke opredeljena sa četiri koordinate. Pretavljanje 4D površi svodi se na predavljanje tačaka u 4D prostoru. 4D tačke $T(x,y,z,w)$ transformiraju se u 3D i 2D tačke $T(x,y)$ i prikazuju se na ekran. Za kreiranje kompjuterskog algoritama koriste se matrice za 4D transformacije - skaliranje, translaciju i rotaciju.

Matrica za skaliranje je

$$\begin{vmatrix} Sx & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Sz & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Sw & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

matrica za translaciju

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ Tx & Ty & Tz & Tw & 1 \end{vmatrix},$$

matrica za rotaciju oko ravnine xy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Matrice za rotaciju oko ostalih ravnina xz, xw, yz, yw i zw dobijaju se analogno na prethodnu.

4D površ definisana je 4D funkcijom

$$f(x,y,z,w)=0,$$

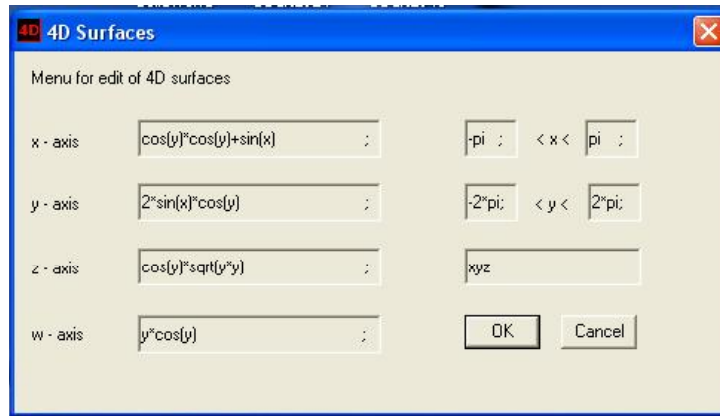
koja se može zadati sa 2 promenljive

$$z(x,y)=0 \text{ i } w(x,y)=0,$$

nakon čega se određuju koordinate 4D tačaka $T(x,y,z,w)$ koje se transformiraju i povezuju pomoću jednostavnog algoritma:

```
Begin
s1=x2-x1/bragli;
s2=y2-y1/brrad;
  for(i=0; i<s1; i++){
    for(j=0; j<s2; j++){
      funkcija = f(x,y,z,w);
      line(T(x[i],y[j]), T(x[i+1],y[j+1]));
    }
  }
end
```

4D tačke povezuju se u mrežu horizontalnih (*bragli*) i vertikalnih (*brrad*) izvodnica. Preko korisničkog menija kreiranog kompjuterskog programa zadaju se granice promenljivih $x_1 < x < x_2$ i $y_1 < y < y_2$ i koordinatna hiperravnina u koju se izvodi projektovanje (sl.2.).



SI.2. Koristički meni zadavanja 4D površi

3. PROVERA KOMPJUTERSKOG PROGRAMA

Provera kompjuterskog programa izvedena je pomoću zadavanja jednostavnih ili poznatih 2D i 3D tvorevina. Urađena je analogija između 2D tvorevine - parabola, 3D tvorevine - hiperboličan paraboloid i 4D tvorevine - 4D hiperboličan paraboloid.

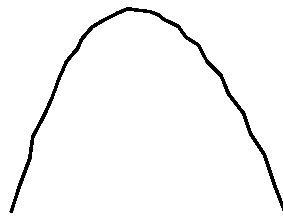
Opšta jednačina parabole je

$$x^2 = 2py$$

Ako $2p=1$, tada se jednačina svodi na $x^2 = y$ iz koje proizlaze 2D tačke

$$f(x, y, z, w) = (x, x^2, 0, 0); x \in R$$

u granicama $-\pi < x < \pi$ i $-\pi < y < \pi$ dobija se slika 3.



SI.3. Parabola $f(x, y, z, w) = (x, x^2, 0, 0)$ za $-\pi < x < \pi$ i $-\pi < y < \pi$

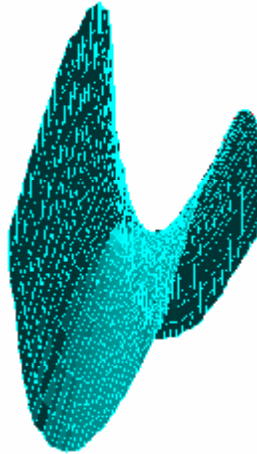
Hiperboličan paraboloid dobija se klizanjem hiperbole po paraboli. Predstavljen kanoničnom vrstom jednačine je

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$$

Ako $p = q = \frac{1}{2}$, tada se jednačina svodi na $z = x^2 - y^2$ iz koje proizlaze 3D tačke

$$f(x, y, z, w) = (x, y, x^2 - y^2, 0); x, y \in R$$

u granicama $-\pi < x < \pi$ i $-\pi < y < \pi$ dobija se slika 4.

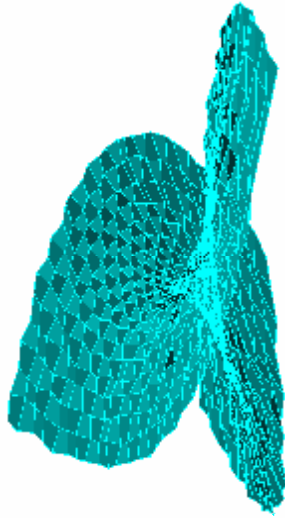


Sl.4. Hiperboličan paraboloid $f(x, y, z, w) = (x, y, x^2 - y^2, 0)$ za $-\pi < x < \pi$ i $-\pi < y < \pi$

Projekcija hiperboličnog paraboloida na xz koordinatnu ravan je parabola, a na yz koordinatnu ravan je hiperbola. Analogno projekcija 4D hiperboličnog paraboloida na xyz koordinatnu hiperravninu je hiperboličan paraboloid. Znači x, y, z koordinate moraju imati vrednosti kao kod hiperboličnog paraboloida i dodaje se w koordinata od čega proizlazi jednačina, odnosno 4D tačke

$$f(x, y, z, w) = (x, y, x^2 - y^2, 2xy); x, y \in R$$

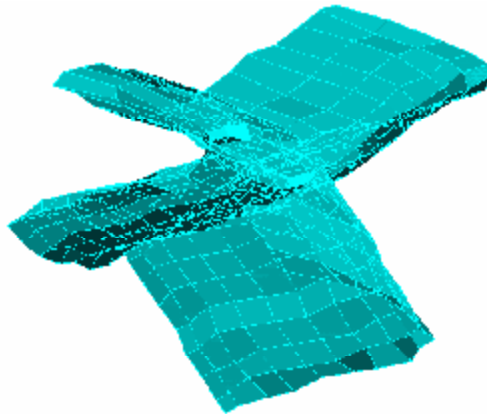
u granicama $-\pi < x < \pi$ i $-\pi < y < \pi$ dobija se slika 5.



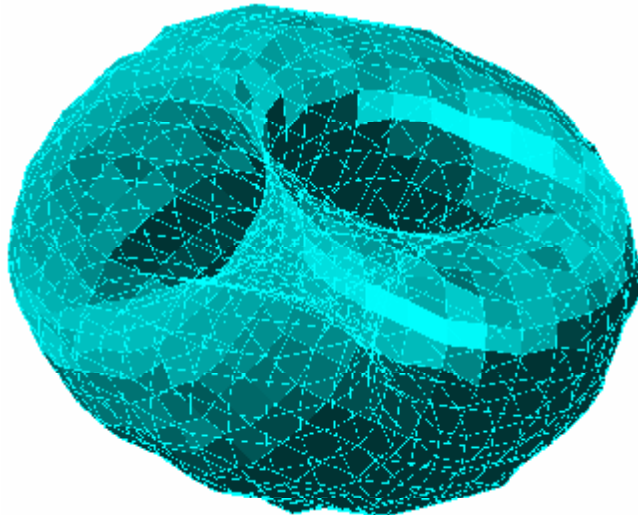
SI.5. 4D hiperboličan paraboloid $f(x,y,z,w)=(x,y,x^2-y^2,2xy)$
za $-\pi < x < \pi$ i $-\pi < y < \pi$

4. GEOMETRIJSKA ANALIZA 4D POVRŠI

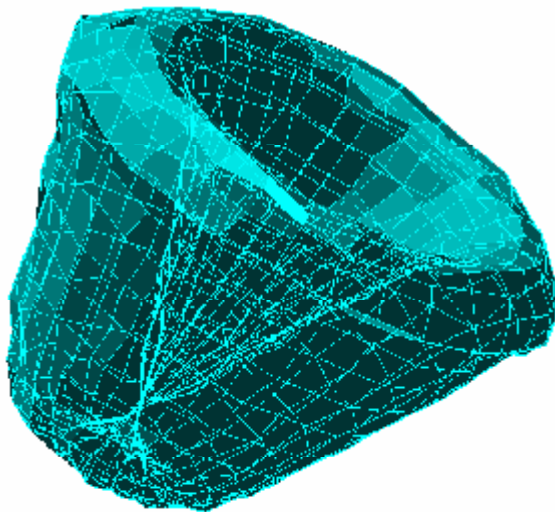
Geometrijska analiza sastoji se od prikazivanja projekcija složenijih 4D površi projektovanih u xyz koordinatnu hiperravan (sl.6.-sl.9.).



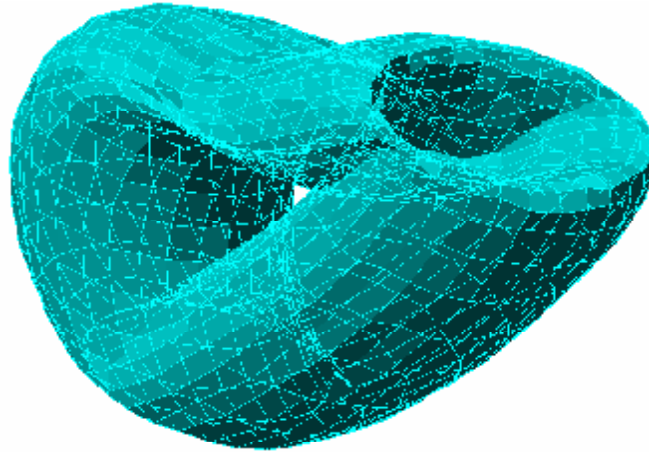
SI.6. 4D površ zadata funkcijom $f(x,y,z,w)=(\sqrt{x^2}, x \cos(x), \sqrt{y^2}, y \sin(y))$
za $-\pi < x < \pi$ i $-\pi < y < \pi$



SI.7. 4D površ zadata funkcijom $f(x,y,z,w)=(\sin(x),\cos(x),\sin(y),\cos(y))$
za $-\pi < x < \pi$ i $-\pi < y < \pi$



SI.8. 4D površ zadata funkcijom
 $f(x,y,z,w)=(x\cos(x),y\sin(x),\sin(y)+\cos(y),\sin(y)+\cos(y))$
za $-\pi < x < \pi$ i $-\pi < y < \pi$



SI. 9. 4D površ zadata funkcijom $f(x,y,z,w)=(\cos(x), \sin(x), \cos(y)\sqrt{y^2}, \sin(y))$
za $-\pi < x < \pi$ i $-\pi < y < \pi$

5. ZAKLJUČAK

Rad doprinosi shvaćanju 4D prostora, tačnije geometrijski su obrađene projekcije 4D površi zadate funkcijama sa dve promenljive. Kreiran je kompjuterski program kojim se jednostavnije i brže mogu analizirati projekcije 4D površi. Provera pomoću analogije je pokazala da kompjuterski program daje tačne rezultate i može se koristiti za pretstavljanje 4D površi.

6. LITERATURA

1. Banchoff T.: *Computer Animation and the Geometry of Surfaces in 3D and 4D Space*, International Congress, Helsinki, 1978, str.1005-1013
2. Hinton C.: *Fourth Dimension*, Kessinger Publishing; Washington, 1997.
3. Manning H.: *The Fourth Dimension Simply Explained*, Dover Publications, New York, 2005.
4. Филиппов В.: *Начертательная геометрия многомерного пространства и ее приложения*, Ленинград, 1979

PROJECTIONS OF 4D SURFACES

Risto Tashevski¹

Abstract

In this paper, a geometric, a mathematical and computer algorithm of projections of 4D surfaces defining with functions with two variables are presented. Presentation of 4D surfaces are reduced of presentation of 4D points in 4D geometric space, points are transformed in 3D and 2D space and are previewed on the display. Determined points are connected in mesh of horizontal and vertical isolines. 4D surfaces are analyzed and confirmed analogy between 3D surfaces and 4D surfaces.

Key words: 4D geometry, 4D space, 4D surfaces

¹ Risto Tashevski, Ph.D, Prof., The "Sts. Cyril and Methodius" University, Faculty of Mechanical Engineering, Skopje, Macedonia